

MICHEL TERRAZA

Les filtres des différences d'ordre P et des différences de moyennes mobiles simples dans l'analyse spectrale

Journal de la société statistique de Paris, tome 120, n° 2 (1979), p. 86-107

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1979__120_2_86_0

© Société de statistique de Paris, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

III

ARTICLES

LES FILTRES DES DIFFÉRENCES D'ORDRE P ET DES DIFFÉRENCES DE MOYENNES MOBILES SIMPLES DANS L'ANALYSE SPECTRALE

Michel TERRAZA

Assistant de sciences économiques. Université de Montpellier I

L'étude mathématique des fonctions de transfert et de gain des deux classes de filtres linéaires invariants : les différences d'ordre p et les différences de moyennes mobiles non pondérées, permet de connaître, plus précisément, les effets respectifs de ces filtres lors de la réduction ou de l'élimination des composants de basses fréquences d'un processus aléatoire dont on veut réaliser l'analyse spectrale.

The mathematical study of the transfer and gain functions of the two classes of invariant linear filters : the order « p » differences and the difference of the non weighted mobile averages, allows to know, more precisely, the respective effects of those filters when reducing or eliminating low frequency components of a random process whose spectral analysis is wanted.

Die mathematische Studie der Funktion des Transfert von zwei Klassen von geraden und unbeweglichen Filtern : Die Unterschiede vom Grade p und die Differenzen der beweglichen und nicht gewogenen Unterschiede gestattet genauer die Wirkungen dieser Filter zu erkennen während der Reduktion oder der Ausscheidung von Komponenten von niedriger Spannung eines Experimentes von dem man eine Spektralanalyse machen will.

L'ouvrage de Granger ⁽¹⁾ constitue une étape décisive dans l'application économique de ce qu'il est convenu d'appeler l'analyse spectrale des séries temporelles. Celle-ci a l'ambition de rechercher les cycles réguliers ou irréguliers des séries, permettant ainsi de préciser par la forme du spectre la structure et le type du processus aléatoire étudié.

L'analyse spectrale trouve son fondement dans la stationnarité du second ordre des processus stochastiques ergodiques. Les séries temporelles économiques vérifient rarement cette hypothèse. Il est fréquent, notamment, de constater qu'elles se caractérisent par une tendance, pour laquelle une droite à pente positive fournit, dans la plupart des cas, et tout au moins en première approximation, un bon ajustement. L'observation du profil temporel suffit très souvent pour déceler au sein d'une série chronologique cette tendance en moyenne. On peut aussi, dans certain cas douteux, avoir recours à des tests non paramétriques du type corrélation de rang de Spearman par exemple ⁽²⁾.

1. GRANGER [10].

2. Les deux autres conditions de l'hypothèse de stationnarité d'ordre deux (cf. annexe) sont plus difficiles à déceler, aussi sont-elles, en général, supposées vérifiées dans les analyses spectrales. Cependant la transformation de la variable par les logarithmes ou la normalisation est employée couramment dans des cas douteux. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 120, n° 2, 1979.

L'existence dans une série temporelle d'une tendance peut donner au spectre une forme particulière ne permettant pas de déceler les éventuels cycles longs de la série par la fuite de sa puissance à des fréquences voisines occasionnée par la procédure d'estimation.

S'appuyant sur ses propres travaux en matière d'analyse spectrale et sur ceux d'auteurs tels Nerlove, Cunyningham, Hatanaka..., Granger ⁽¹⁾ a conclu que les spectres des variables économiques étaient tous décroissant des basses aux hautes fréquences. Cette « forme typique » se conserve après épuration de la série du trend et d'éventuelles variations saisonnières. L'auteur démontre qu'une série temporelle, somme d'un « bruit blanc » (c'est-à-dire une série indépendante purement aléatoire caractérisée par un spectre plat) et d'un trend linéaire, a un spectre de puissance de « forme typique ». En effet, le graphe d'une tendance linéaire ne se distingue pas de celui d'une fonction harmonique lorsque les périodes de ses composantes sont très supérieures à celle de la série temporelle. Un trend peut donc être assimilé à un cycle de très longue période et sa puissance sur le spectre se concentre dans la bande centrée autour de la fréquence zéro. Si cette puissance est forte, la fuite au travers de la fenêtre spectrale perturbera les bandes de fréquences adjacentes (leakage) et conduira à la « forme typique » lors de l'estimation du spectre.

Il en résulte que la présence d'un trend dans une série temporelle renforcera la « forme typique » de Granger. Cependant la réciproque de cette affirmation n'est pas toujours vérifiée : la « forme typique » n'est pas révélatrice de l'existence d'un trend au sein d'une série temporelle.

C'est ce que Granger a voulu montrer lorsqu'il affirme que la forme typique se conserve après l'élimination du trend par une technique quelconque ⁽²⁾. En effet, une série temporelle peut en outre être la source de cycles à périodes longues (type Kondratieff de 40 à 60 ans) à périodes moyennes (types Kuznets de 20 à 30 ans ou Building de 15 à 20 ans) ou à périodes courtes (type Kitchin de 2 à 4 ans). Si on affirme, comme le fait cet auteur, que les fluctuations, lorsqu'elles sont décomposées dans le domaine des fréquences, ont des amplitudes qui décroissent lentement lorsque la période de ces fluctuations diminue, alors la « forme typique » trouve sa justification.

Cette explication repose donc sur l'existence de cycles longs quasi-périodiques aux effets prédominants sur ceux de périodes plus courtes; leurs puissances seraient révélatrices de la forme émoussée des basses fréquences après l'opération d'élimination du trend.

Cependant Granger constate que la « forme typique » se conserve quelle que soit la période observée par la chronique. Mais en fait, même si la série chronologique est la source de cycles longs, le spectre de cette série estimé sur un échantillon plus court (épuré éventuellement du trend) devrait, selon le choix des données, faire apparaître soit une « forme typique » peu prononcée soit une forme quelconque selon la puissance des cycles plus courts. C'est parce qu'il n'en est rien que des auteurs comme Mandelbrot et Zajdenweber ⁽³⁾ fournissent une explication différente sur la structure des séries chronologiques stationnaires. Ils

1. GRANGER [11].

2. Il s'agit plus précisément de techniques qui éliminent le trend mais qui conservent au maximum les fluctuations de fréquences plus hautes. Nous verrons, ultérieurement, que dans le cas des filtres, cette opération se traduit par une fonction de transfert la plus plate possible au-delà d'une fréquence choisie aussi basse que la procédure d'estimation le permet. Si tel n'est pas le cas il est bien évident que l'on peut toujours trouver un filtre réduisant une grande partie de la puissance des basses et moyennes fréquences, privilégiant ainsi les hautes fréquences, et générant un spectre où la « forme typique » n'apparaît pas.

3. ZAJDENWEBER [23] pp. 75 à 109. Cet auteur fournit dans son ouvrage un exposé très clair sur le problème. Nous nous sommes également inspirés des articles de MANDELBROT Benoit B., parus dans *Économie Appliquée*, n° 26, 1973 (le syndrome de la variance infinie pp. 321-348; le problème de la réalité des cycles lents et le « syndrome de Joseph » pp. 349-365).

soutiennent l'idée de Granger ⁽¹⁾ de la prééminence des phénomènes du long terme sur ceux du court terme révélée par la forme des puissances spectrales aux basses fréquences; cependant ces ondes longues, en nombre très élevé, seraient non périodiques. Cette absence de périodicité explique la conservation observée de la « forme typique » lorsque la chronique s'allonge; en effet, de ce fait, la longueur des cycles se modifie avec la taille de l'échantillon.

L'élimination de la tendance, avec conservation d'éventuels cycles longs, d'une série temporelle est donc une étape décisive de l'analyse spectrale. Deux méthodes sont, généralement, utilisées pour « redresser » les séries économiques : la régression et le filtrage.

La première consiste à estimer la tendance de la série par une régression polynomiale ou harmonique et à conserver pour l'analyse spectrale la série des résidus, différences entre les valeurs de la série origine et celles de la tendance estimée. L'ignorance, à priori, au niveau des composantes de la série et des puissances spectrales, de la transformation des données originelles constitue l'inconvénient majeur de cette procédure.

Ce n'est pas le cas pour la deuxième méthode qui transforme la série temporelle au moyen d'une expression mathématique connue. L'opération effectuée est linéaire, elle permet la restitution de la série originelle et la connaissance précise des conséquences du filtrage sur les puissances spectrales.

L'utilisation des filtres de différences d'ordre p et des différences de moyennes mobiles simples est courante lors des analyses spectrales. Les choix de l'ordre des différences et de la longueur de la moyenne mobile pour éliminer ou réduire la composante tendancielle de la série peut s'effectuer à partir de la théorie des filtres linéaires invariants. C'est l'objet de la présente étude.

I — LES FILTRES LINÉAIRES INVARIANTS

a) Définitions

1. Filtre linéaire invariant dans le temps

Soit $X(t)$ un processus aléatoire ⁽²⁾ à valeurs complexes.

Un filtre est une transformation T' qui associe au processus, $X(t)$ entrant dans le filtre le processus sortant $Y(t)$.

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \xrightarrow{\quad} & \boxed{T'} \longrightarrow Y(t) \\ & & \text{filtre} \end{array}$$

Un filtre est linéaire invariant dans le temps si la transformation est telle que :

$$+ \forall i, i \in \mathbb{N}; \forall \lambda_i, \lambda_i \in \mathbb{R}^n,$$

constants au cours de la transformation; la correspondance :

$$X_i(t) \xrightarrow{T'} Y_i(t)$$

est linéaire pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} T' [\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] &= \lambda_1 T' [X_1(t)] + \lambda_2 T' [X_2(t)] \\ &= \lambda_1 Y_1(t) + \lambda_2 Y_2(t) \end{aligned}$$

1. GRANGER [11] p. 155 (note 7).

2. Un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé, et repérée par un ensemble, en général \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .

+ $\forall t_0, t_0 \in \mathbb{R}$, t_0 constante quelconque, la correspondance $X(t) \xrightarrow{T'} Y(t)$ est invariante par translation sur l'axe des temps (correspondance homogène) :

$$T' [X(t + t_0)] = Y [t + t_0]$$

Si la série temporelle $X(t)$ réalisation d'un processus aléatoire $X(t)$ est observée au pas constant, Δt , d'échantillonnage et si, $\dots, \Phi_{-\delta'}, \dots, \Phi_0, \dots, \Phi_\delta, \dots$, sont des coefficients de pondération tels que : $\delta' \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire :

$$T' [X(t)] = Y(t) = \dots + \Phi_{-\delta'} X(t - \delta' \Delta t) + \Phi_{-(\delta'-1)} X[t - (\delta' - 1) \Delta t] + \dots + \Phi_0 X(t) + \dots + \Phi_{\delta-1} X[t + (\delta - 1) \Delta t] + \Phi_\delta X[t + \delta \Delta t] + \dots$$

ou

$$T' [X(t)] = Y(t) = \sum_{\delta'=-\infty}^0 \phi_{\delta'} X[t + \delta' \Delta t] + \sum_{\delta=1}^{+\infty} \phi_\delta X[t + \delta \Delta t]$$

On démontre que la correspondance T' , ainsi définie, est la forme générale T d'un filtre linéaire invariant dans le temps. Comme $\delta' \in \mathbb{N}$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$ le domaine d'action du filtre est infini. On définit un filtre à horizon fini (ou à mémoire finie) dans le cas où $\delta' \in \mathbb{N} >$ et $\delta \in \mathbb{N}^* >$:

$$T[X(t)] = Y(t) = \sum_{\delta'=-q'}^0 \phi_{\delta'} X[t + \delta' \Delta t] + \sum_{\delta=1}^q \phi_\delta X[t + \delta \Delta t]$$

Lorsque $\delta' = \delta$ le filtre linéaire invariant dans le temps est dit symétrique :

$$T[X(t)] = Y(t) = \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} \phi_\delta X[t + \delta \Delta t] = \sum_{\delta=-\infty}^{+\infty} \phi_\delta X[t + \delta \Delta t] \quad (\text{horizon infini})$$

$$T[X(t)] = Y(t) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_\delta X[t + \delta \Delta t] = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_\delta X[t - \delta \Delta t] \quad (\text{horizon fini})$$

2. La fonction de réponse en fréquence du filtre

L'ensemble des valeurs prises par Φ_δ (et $\Phi_{\delta'}$), lorsque δ (et δ') parcourt son domaine de définition, constitue le graphe de la fonction de réponse impulsionnelle du filtre.

Si le pas d'échantillonnage Δt tend vers zéro le processus $X(t)$ devient continu. La fonction de réponse impulsionnelle, notée $\Phi(\delta)$, est telle que $\delta \in \mathbb{R}$ et elle est à valeurs réelles ou complexes. Si elle vérifie les hypothèses du théorème de Plancherel ⁽¹⁾ elle admet une transformée de Fourier, $A(\omega)$, appelée fonction de réponse en fréquence du filtre :

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\delta) e^{-i\omega\delta} d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\delta) e^{-i2\pi\lambda\delta} d\delta$$

$$\phi(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega\delta} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i2\pi\lambda\delta} d\lambda$$

Dans ce cas le filtre symétrique (à horizon fini par exemple) linéairement invariant prend la forme :

$$Y(t) = \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) X(t - \delta) d\delta$$

1. Le théorème de PLANCHEREL garantit la convergence en moyenne quadratique de l'intégrale : $\int_{-a}^{+a} f(t) e^{-i2\pi\lambda t} dt$ lorsque $a \rightarrow +\infty$, vers la limite $F(\lambda)$ appelée transformée de Fourier de $f(t)$, et de l'intégrale $\int_{-a}^{+a} F(\lambda) e^{i2\pi\lambda t} d\lambda$ lorsque $a \rightarrow +\infty$, vers $f(t)$, appelée transformée inverse de FOURIER, si $f(t)$ appartient à l'espace des classes de fonction de carré intégrable sur \mathbb{R} (elle vérifie ainsi : $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$).

ou
$$Y(t) = \int_{-q}^{+q} \phi(t - \delta) X(\delta) d\delta$$

La convergence de cette intégrale est assurée si le filtre utilisé est stable ⁽¹⁾ et si le processus $X(t)$ à un moment du second ordre fini.

b) *Les différences successives d'ordre p*

Si B est un opérateur de retard tel que :

$$BX(t) = X(t - p)$$

Les différences successives transforment le processus $X(t)$ selon les relations :

Ordre 1 :

$$X_1(t) = X(t) - BX(t) = (1 - B) X(t)$$

Ordre 2 :

$$X_2(t) = (1 - B) X_1(t) = (1 - B)^2 X(t)$$

Ordre 3 :

$$X_3(t) = (1 - B) X_2(t) = (1 - B)^3 X(t)$$

⋮

à l'ordre p le processus $X(t)$ devient ⁽²⁾ le processus $Y(t)$:

$$Y(t) = (1 - B)^p X(t)$$

Le développement de $(1 - B)^p$ par la formule du binôme de Newton conduit à l'expression :

$$Y(t) = (-1)^{2p} C_p^0 X(t) + (-1)^{2p-1} C_p^1 X(t-1) + \dots + (-1)^p C_p^p X(t-p)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$Y(t) = \sum_{\delta=0}^p \phi_\delta X(t - \delta)$$

avec

$$\phi_\delta = (-1)^{2p-\delta} C_p^\delta, \delta \in [0, 1, \dots, p]$$

et

$$\sum_{\delta=0}^p \phi_\delta = \sum_{\delta=0}^p (-1)^{-\delta} C_p^\delta = 0 \text{ (p pair ou impair)}$$

Les différences successives d'ordre p constituent donc un filtre linéaire invariant.

Il est, cependant, un cas particulier puisque les valeurs de δ sont toutes positives.

On lui donne ainsi le nom de « filtre linéaire à un seul côté ».

Lorsque $p = 1$ on réalise le filtre linéaire des différences premières :

$$Y(t) = (1 - B) X(t) = X(t) - X(t-1)$$

ou encore :

$$Y(t) = \sum_{\delta=0}^p \phi_\delta X(t - \delta)$$

avec

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1 = -1$$

1. Un filtre est stable si à tout processus borné entrant dans le filtre lui correspond un processus sortant borné. Une condition suffisante de cette stabilité est que $\Phi(J)$ soit intégrable en moyenne quadratique : Cf. STERN-BARBEYRAC-POGGI [22], chap. 6.

2. Cette expression est vraie. Elle vérifie les trois premiers ordres et si on suppose vérifiée la relation :

alors
$$X_p(t) = (1 - B) (1 - B)^{p-1} X(t) = Y(t)$$

(démonstration par récurrence).

Il élimine totalement la tendance si celle-ci est linéaire et constitue la composante principale d'une série ⁽¹⁾. Ainsi supposons que la série temporelle $X(t)$, réalisation d'un processus stochastique, est la somme d'un terme de tendance linéaire T_t et d'un processus stationnaire $\varepsilon(t)$ alors :

$$\begin{aligned} X(t) &= a + bt + \varepsilon(t) \\ \text{et} \quad \Delta X(t) &= X(t) - X(t-1) = b + \Delta\varepsilon(t) \end{aligned}$$

Toutefois une chronique est, le plus souvent, la source de composantes multiples, parfois très complexes, il faudra alors étudier de façon plus précise l'influence de ce filtre sur la série.

c) *Les différences de moyennes mobiles simples*

Le filtre des différences de moyennes mobiles simples d'un processus stochastique $X(t)$ s'écrit :

$$(K) \quad Y(t) = X(t) - \frac{1}{2q+1} \sum_{\delta=-q}^{+q} X(t+\delta)$$

pour une moyenne mobile simple de longueur $(2q+1)$, soit :

$$Y(t) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} X(t-\delta)$$

avec
$$\phi_{\delta} = -\frac{1}{2q+1} \quad \text{pour} \quad \delta \in [-q, 0[\cup]0, +q]$$

$$\phi_{\delta} = \frac{2q}{2q+1} \quad \text{pour} \quad \delta = 0$$

et
$$\sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} = 2q \left(-\frac{1}{2q+1} \right) + \frac{2q}{2q+1} = 0$$

ou encore :

$$(L) \quad Y(t) = X(t) - \frac{1}{2q} \left[\sum_{\delta=-q+1}^{q-1} X(t+\delta) + \frac{1}{2} X(t-q) + \frac{1}{2} X(t+q) \right]$$

pour une moyenne mobile simple de longueur $(2q)$, soit :

$$Y(t) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} X(t-\delta)$$

avec
$$\phi_{\delta} = -\frac{1}{4q} \quad \text{pour} \quad \delta \in \{-q, +q\}$$

$$\phi_{\delta} = \frac{2q-1}{2q} \quad \text{pour} \quad \delta = 0$$

$$\phi_{\delta} = -\frac{1}{2q} \quad \text{pour} \quad \delta \in [-q+1, q-1]$$

et
$$\sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} = -\frac{2}{4q} + \frac{2q-1}{2q} - \frac{2q-2}{2q} = 0$$

1. BLOMME et PHILIPS [3] p. 115, MALINVAUD [17] p. 502-503. Si la tendance est régulière le filtre ne l'éliminera qu'en partie; on a alors recours à des différences successives d'ordre supérieur.

Il convient parfaitement aux séries ne présentant pas d'évolutions en dents de scie très marquées et d'éventuelles variations saisonnières.

Le filtre des différences de moyennes mobiles simples est un filtre linéaire. Les collections de poids sont symétriques par rapport à la pondération Φ_0 d'où le nom de filtre linéaire symétrique utilisé lors de son emploi. Son inconvénient majeur réside dans la perte d'informations ($2q$ au total) aux extrémités de la série; on a recours à lui, essentiellement, lorsqu'on dispose de nombreuses données.

II — LA SÉRIE TEMPORELLE FILTRÉE

Nous savons qu'une série temporelle, réalisation d'un processus stationnaire ergodique d'ordre deux peut s'écrire ⁽¹⁾ :

$$X(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} dZ_x(\omega)$$

Si on applique au processus $X(t)$ un filtre linéaire invariant le processus filtrée $Y(t)$ aura la forme :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(t-\delta)\omega} dZ_x(\omega) \right\} d\delta \\ Y(t) &= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} \left\{ \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) e^{-i\omega\delta} d\delta \right\} dZ_x(\omega) \\ Y(t) &= \int_{-\pi}^{+\pi} A(\omega) e^{i\omega t} dZ_x(\omega) \end{aligned}$$

La fonction $A(\omega)$ est une fonction complexe que l'on peut écrire (relations d'Euler) :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) (\cos \omega\delta - i \sin \omega\delta) d\delta \\ A(\omega) &= \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) \cos \omega\delta d\delta - i \int_{-q}^{+q} \phi(\delta) \sin \omega\delta d\delta \\ A(\omega) &= A_1(\omega) + i A_2(\omega) \end{aligned}$$

C'est une fonction périodique de période 2π (ou $\frac{2\pi}{\Delta t}$ dans le cas discret). Sa partie réelle $A_1(\omega)$ est une fonction paire et sa partie imaginaire $A_2(\omega)$ une fonction impaire. $A(\omega)$ peut donc se mettre sous la forme polaire :

$$A(\omega) = G(\omega) e^{i\theta(\omega)}$$

où $G(\omega) = \sqrt{A_1^2(\omega) + A_2^2(\omega)} = \sqrt{|A(\omega)|^2}$

est appelée la fonction du transfert du filtre et $\theta(\omega)$ définie par :

$$\cos \theta(\omega) = \frac{A_1(\omega)}{G(\omega)} \quad \text{et} \quad \sin \theta(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{G(\omega)}$$

soit $\theta(\omega) = \text{Arc tg } \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}$

est la fonction de phase du filtre.

1. GRANGER [10] pp. 27-28; le processus $X(t)$ est centré.

En tenant compte de l'écriture polaire de $A(\omega)$ dans $Y(t)$ on a :

$$Y(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} dZ_x(\omega)$$

$$Y(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\omega} \{G(\omega) e^{i\theta(\omega)} dZ_x(\omega)\}$$

$$Y(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\omega} dZ_y(\omega)$$

avec

$$dZ_y(\omega) = G(\omega) e^{i\theta(\omega)} dZ_x(\omega)$$

Or nous savons que $dZ_x(\omega)$ est une variable aléatoire complexe à accroissements non corrélés définie à partir de $u(\omega)$ et $v(\omega)$ les amplitudes aléatoires des différentes composantes périodiques du processus (1). $dZ_x(\omega)$ représente donc les différentes oscillations de la série temporelle $X(t)$ (ω prend ses valeurs de 0 à π).

Il en résulte que chacune d'entre elles est multipliée par le réel $G(\omega)$ et subit un déphasage $\theta(\omega)$ radians qui correspond à une translation le long de l'axe du temps.

a) *Fonction de transfert et de phase du filtre des différences d'ordre p*

La fonction de réponse en fréquence associée à ce filtre sera :

$$A_p(\omega) = \sum_{\delta=0}^p \phi_\delta e^{-i\omega\delta}$$

$$A_p(\omega) = 1 + \sum_{\delta=1}^p (-1)^{2p-\delta} C_p^\delta \cos \omega\delta - i \sum_{\delta=1}^p (-1)^{2p-\delta} C_p^\delta \sin \omega\delta$$

On peut démontrer que pour la fréquence angulaire ω_j les fonctions de transfert et de phase sont de la forme (2) :

$$G_p(\omega_j) = [2(1 - \cos \omega_j)]^{p/2} = 2^p \sin^p \frac{\omega_j}{2}$$

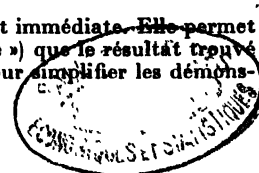
$$\theta_p(\omega_j) = p \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_j}{2} \right)$$

Lorsque ω_j varie entre 0 et π la fonction $G_p(\omega)$ (graphique 1) est une fonction croissante de 0 à 2^p . Les points d'abscisse $\omega = 0$ (pour $p \geq 2$) et $\omega = \pi$ sont respectivement un minimum et un maximum de la fonction; le point de coordonnées ($\omega = \pi/3$, $G_p(\omega) = 1$) marque le renversement de l'influence du filtre sur une série temporelle : en deçà de ce point les fréquences sont réduites au-delà elles sont accrues.

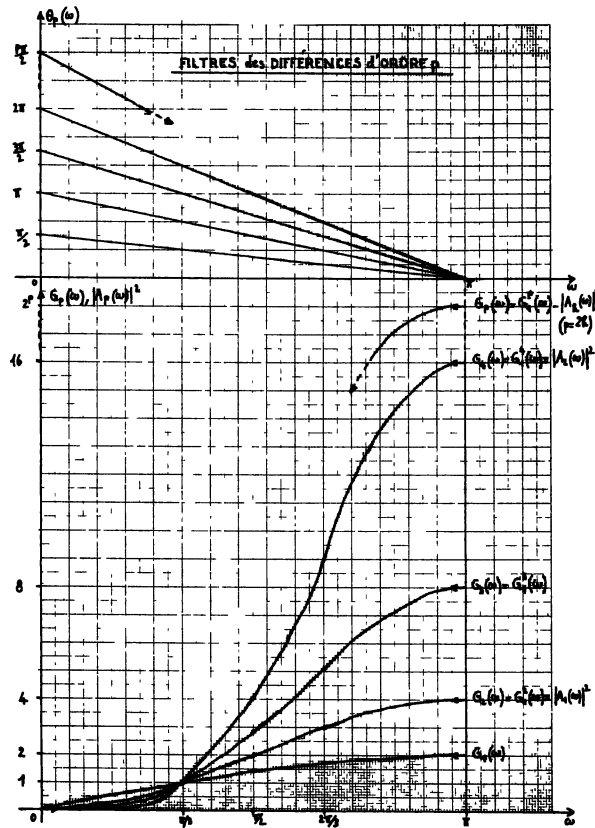
Les graphes des fonctions $\theta_p(\omega)$ (graphique 1) nous montrent :

- que le déphasage aux basses fréquences est d'autant plus important que l'ordre p des différences est grand;
- que ce déphasage décroît linéairement lorsque ω parcourt son domaine de variation $[0, \pi]$.

1. **BLOMME** et **PHILIPS** [3] pp. 250-252.
 2. Pour $P = 1, 2, 3$, la détermination des fonctions de transfert et de phase est immédiate. Elle permet de trouver la forme de ces fonctions pour l'ordre p et l'on démontre (par « récurrence ») que le résultat trouvé est vrai. On utilise des fonctions de transfert et de phase (puis de gain) continues pour simplifier les démonstrations.



Graphique 1



Le filtre des différences premières a donc pour fonction de réponse en fréquence :

$$A_1(\omega) = \sum_{\delta=0}^1 \phi_{\delta} e^{-i\omega\delta}$$

$$A_1(\omega) = 1 - \cos \omega + i \sin \omega$$

$$A_1(\omega) = 1 - e^{-i\omega}$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$G_1(\omega) = \sqrt{2(1 - \cos \omega)} = 2 \sin \frac{\omega}{2}$$

et la fonction de phase :

$$\theta_1(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

Par rapport aux fonctions $G_p(\omega)$ ($p \geq 2$), $G_1(\omega)$ présente les particularités d'avoir une dérivée seconde négative dans le domaine de variation de ω donc de posséder une concavité tournée vers les ordonnées négatives (alors que les fonctions $G_p(\omega)$ changent de concavité) et un point anguleux (de pente $G_1'(\omega) = 1$) de coordonnées $(0, 0)$ (graphique 2).

Pour une analyse harmonique des séries chronologiques, le filtre des différences premières réduit notablement les cycles de fréquences basses et très basses au profit de cycles de moyennes et hautes fréquences. Par exemple, pour une série temporelle mensuelle, le cycle de période 8 ans, a son amplitude divisée par 15,4 celui de période 7 ans par

7,7 alors que les cycles de périodes supérieures ou égales à 6 mois ont leur amplitude multipliée par un réel compris entre 1 et 2 (graphique 2).

Si la série chronologique possède une tendance marquée elle sera réduite voire supprimée, d'après la définition que nous avons donnée précédemment de cette tendance.

b) *Fonction de transfert et de phase du filtre des différences de moyennes mobiles simples*

La fonction de transfert associée au filtre des différences de moyennes mobiles simples, compte tenu des propriétés d'additivité et de multiplication par un scalaire de ces fonctions (1) est égale à la différence entre la fonction de transfert de $X(t)$ (la série temporelle à filtrer) et la fonction de transfert de la moyenne mobile simple.

Or la fonction de réponse en fréquence (2) du filtre d'une série temporelle qui aurait pour résultat de redonner cette même série est égale à 1. Nous aurons donc (3) :

$$A(\omega) = 1 - \tilde{A}(\omega)$$

avec $\tilde{A}(\omega)$: la fonction de réponse en fréquence du filtre : moyenne mobile simple.

Il nous faut donc rechercher $\tilde{A}_1(\omega)$ la fonction de réponse en fréquence du filtre des moyennes mobiles simples de longueur $(2q + 1)$ et $\tilde{A}_2(\omega)$ celle des moyennes mobiles de longueur $(2q)$.

— moyennes mobiles de longueur $(2q + 1)$

Les moyennes mobiles simples de longueur $(2q + 1)$ sont des filtres linéaires symétriques tels que :

$$Y(t) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} X(t - \delta)$$

avec
$$\phi_{\delta} = \frac{1}{2q + 1} \forall \delta, \delta \in [-q, +q]$$

et
$$\sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} = 1$$

La fonction de réponse en fréquence associée à ce filtre est alors :

$$\tilde{A}_1(\omega) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \frac{1}{2q + 1} e^{-i\omega\delta}$$

$$\tilde{A}_1(\omega) = \frac{1}{2q + 1} \left[1 + 2 \sum_{\delta=1}^q \cos \omega\delta \right]$$

1. BLANC-LAPIERRE et FORTET [2] pp. 347-348.

2. En effet : $Y(t) = X(t)$ peut s'écrire :

$$Y(t) = \sum_{\delta=0}^0 \phi_{\delta} X(t - \delta) \text{ avec } \phi_0 = 1$$

$$A(\omega) = \sum_{\delta=0}^0 \phi_{\delta} e^{-i\omega\delta} = 1$$

d'où

3. On peut démontrer ce résultat directement à partir de la fonction de réponse en fréquence du filtre écrit sous la forme (K) ou (L) :

$$(K) A(\omega) = \frac{2}{2q + 1} \left[q - \sum_{\delta=1}^q \cos \omega\delta \right] = 1 - \frac{1}{2q + 1} \left(1 + 2 \sum_{\delta=1}^q \cos \omega\delta \right)$$

$$(L) A(\omega) = \frac{1}{2q} \left[2q - 1 - \cos \omega q - 2 \sum_{\delta=1}^{q-1} \cos \omega\delta \right] = 1 - \frac{1}{2q} \left[\cos \omega q + 1 + 2 \sum_{\delta=1}^{q-1} \cos \omega\delta \right]$$

Posons
$$\sum_{\delta=1}^q \cos \omega \delta = \sum_{\delta=1}^q U_{\delta}$$

et

$$\sum_{\delta=1}^q \sin \omega \delta = \sum_{\delta=1}^q V_{\delta}$$

Alors

$$U_{\delta} + iV_{\delta} = \cos \omega \delta + i \sin \omega \delta = e^{i\delta\omega}$$

et .

$$\sum_{\delta=1}^q (U_{\delta} + iV_{\delta}) = \sum_{\delta=1}^q e^{i\omega\delta}$$

C'est la somme d'une progression géométrique de raison $e^{i\omega}$.

D'où :

$$\sum_{\delta=1}^q U_{\delta} + i \sum_{\delta=1}^q V_{\delta} = e^{i\omega} \frac{1 - (e^{i\omega})^q}{1 - e^{i\omega}}$$

En transformant cette expression par les relations d'Euler on peut écrire :

$$\sum_{\delta=1}^q U_{\delta} = \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} [(\cos \omega - 1)(1 - \cos \omega q) + \sin \omega \sin \omega q]$$

Il en résulte que :

$$1 + 2 \sum_{\delta=1}^q \cos \omega \delta = 1 + \frac{1}{1 - \cos \omega} [(\cos \omega - 1)(1 - \cos \omega q) + \sin \omega \sin \omega q]$$

$$= \frac{\sin \left(q + \frac{1}{2} \right) \omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad \text{après transformations}$$

D'où :

$$\tilde{A}_1(\omega) = \frac{1}{2q + 1} = \frac{\sin \left(q + \frac{1}{2} \right) \omega}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

— Moyennes mobiles simples en longueur ($2q$)

Ce sont des filtres linéaires symétriques tels que :

$$Y(t) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} X(t - \delta)$$

avec

$$\phi_{\delta} = \frac{1}{4q} \quad \text{quand} \quad \delta \in \{-q, +q\}$$

$$\phi_{\delta} = \frac{1}{2q} \quad \text{quand} \quad \delta \in [-q + 1, q - 1]$$

et

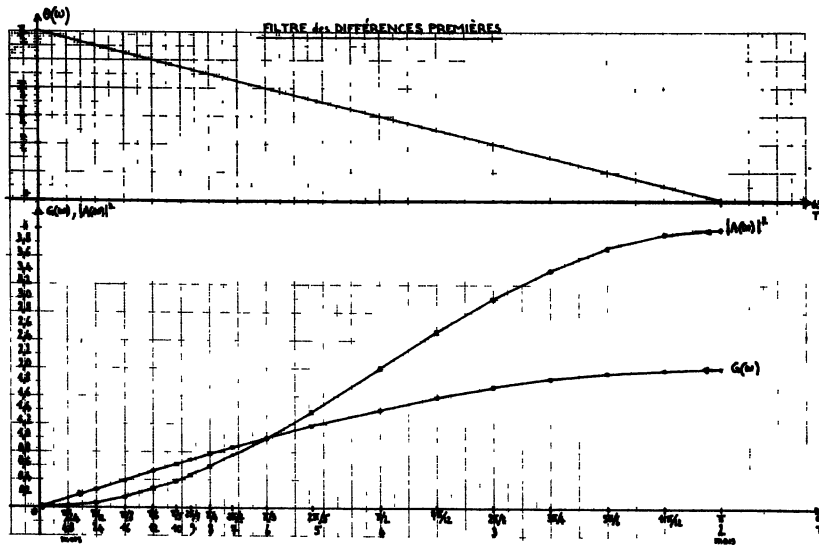
$$\sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} = 1$$

La fonction de réponse en fréquence associée à ce filtre s'écrit :

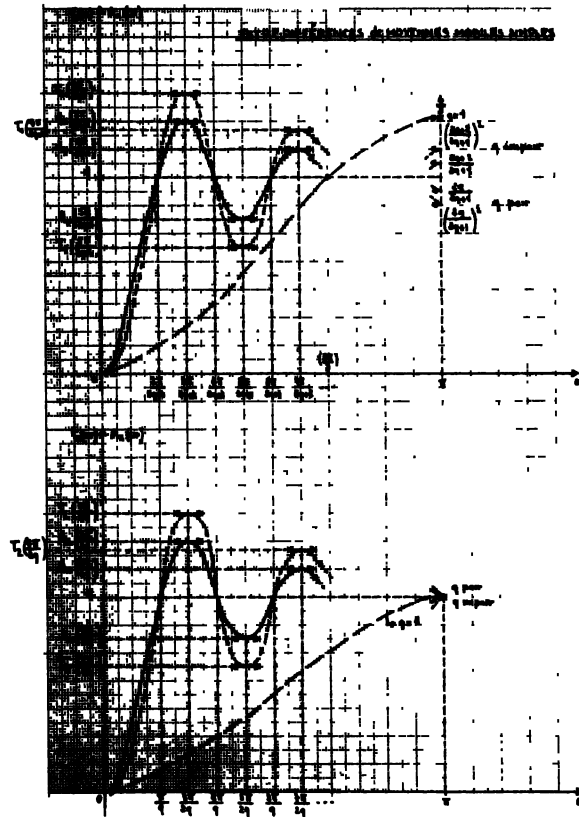
$$\tilde{A}_2(\omega) = \sum_{\delta=-q}^{+q} \phi_{\delta} e^{-i\omega\delta}$$

$$\tilde{A}_2(\omega) = \frac{1}{2q} \left[\cos \omega q + 1 + 2 \sum_{\delta=1}^{q-1} \cos \omega \delta \right]$$

Graphique 2



Graphique 3



On démontre en procédant comme précédemment que :

$$\tilde{A}_2(\omega) = \frac{1}{2q} \frac{\sin \omega q \cos \omega/2}{\sin \omega/2}$$

Les fonctions de réponse en fréquence associées aux filtres des différences de moyennes mobiles simples s'écriront alors

$$A_1(\omega) = 1 - \tilde{A}_1(\omega)$$

$$A_1(\omega) = 1 - \frac{1}{2q+1} \frac{\sin\left(q + \frac{1}{2}\right)\omega}{\sin \omega/2}$$

pour une moyenne mobile de longueur $(2q + 1)$ et

$$A_2(\omega) = 1 - \tilde{A}_2(\omega)$$

$$A_2(\omega) = 1 - \frac{1}{2q} \frac{\sin \omega q \cos \omega/2}{\sin \omega/2}$$

pour une moyenne mobile de longueur $(2q)$.

Ces fonctions de réponse en fréquence n'ont pas de partie imaginaire, elles sont donc identiques à leurs fonctions de transfert correspondantes :

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= G_1(\omega) & \text{et} & & \theta_1(\omega) &= 0 \\ A_2(\omega) &= G_2(\omega) & \text{et} & & \theta_2(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

La fonction de transfert $A_1(\omega)$ du filtre des différences de moyennes mobiles de longueur $(2q + 1)$ est une fonction oscillante amortie lorsque ω varie de 0 à π (graphiques 3 et 4 a).

Les abscisses des maxima-minima des oscillations sont obtenues par la résolution de

$$A_1'(\omega) = 0$$

soit
$$(2q + 1) \cos(2q + 1) \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{2} - \sin(2q + 1) \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} = 0$$

Le développement de $\cos(2q + 1) \frac{\omega}{2}$ et de $\sin(2q + 1) \frac{\omega}{2}$ par l'intermédiaire de la formule de Moivre et du binôme de Newton conduit à l'équation :

$$\sin^3 \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \left[\sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^i \frac{i}{2i+1} C_{2q+1}^{2i} \left(1 - \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{q-i} \sin^{2i} \frac{\omega}{2} \right] = 0$$

Les points de coordonnées $(0, 0)$ et $[\pi, 2q/2q + 1$ (q pair) ou $2q + 2/2q + 1$ (q impair)] dont les abscisses sont des solutions évidentes, quel que soit q , de cette équation, constituent respectivement le premier minimum et le dernier maximum (q impair) ou minimum (q pair) de la fonction $A_1(\omega)$.

La somme entre crochets est un polynôme de degré $(2q - 2)$ en sinus à puissances paires. Les solutions d'une telle équation ne sont pas évidentes pour $q > 3$. Nous avons essayé par le tracé du graphe de $A_1(\omega)$ pour différentes valeurs de q de trouver une forme générale mais approchée, des solutions ω de l'équation entre crochets quel que soit q donné.

Le graphique 4 a regroupe quelques uns des tracés.

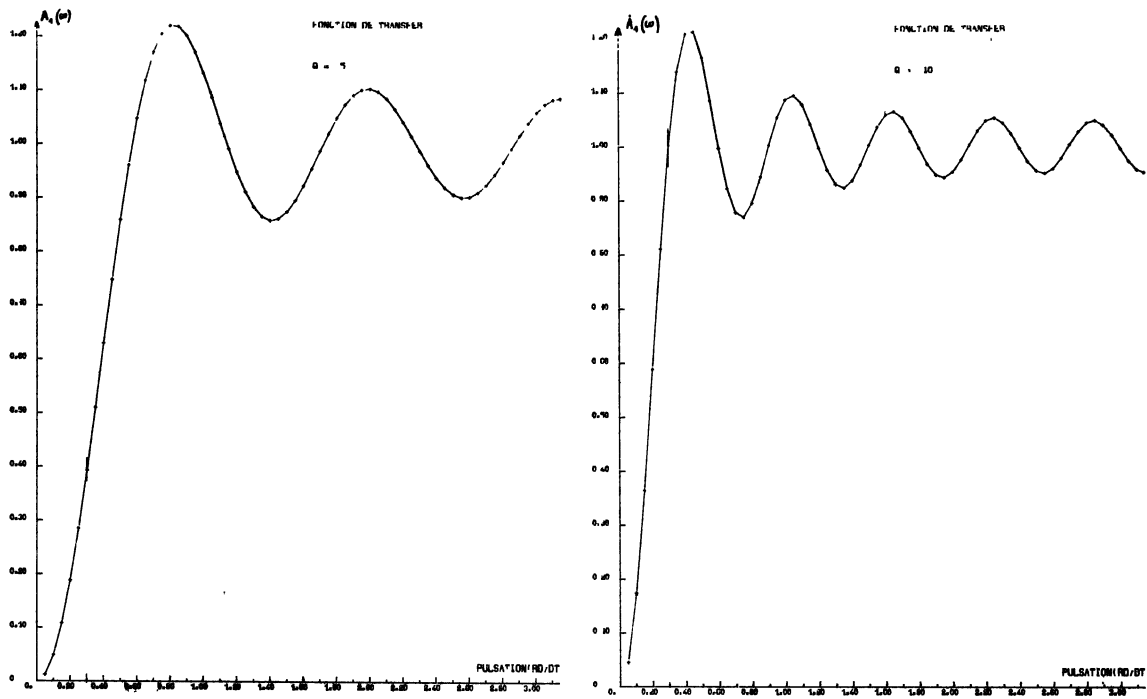
L'ensemble des points trouvés a pour abscisse

$$\omega = \frac{(2k + 1)\pi}{2q + 1} \quad (k = 1, \dots, q)$$

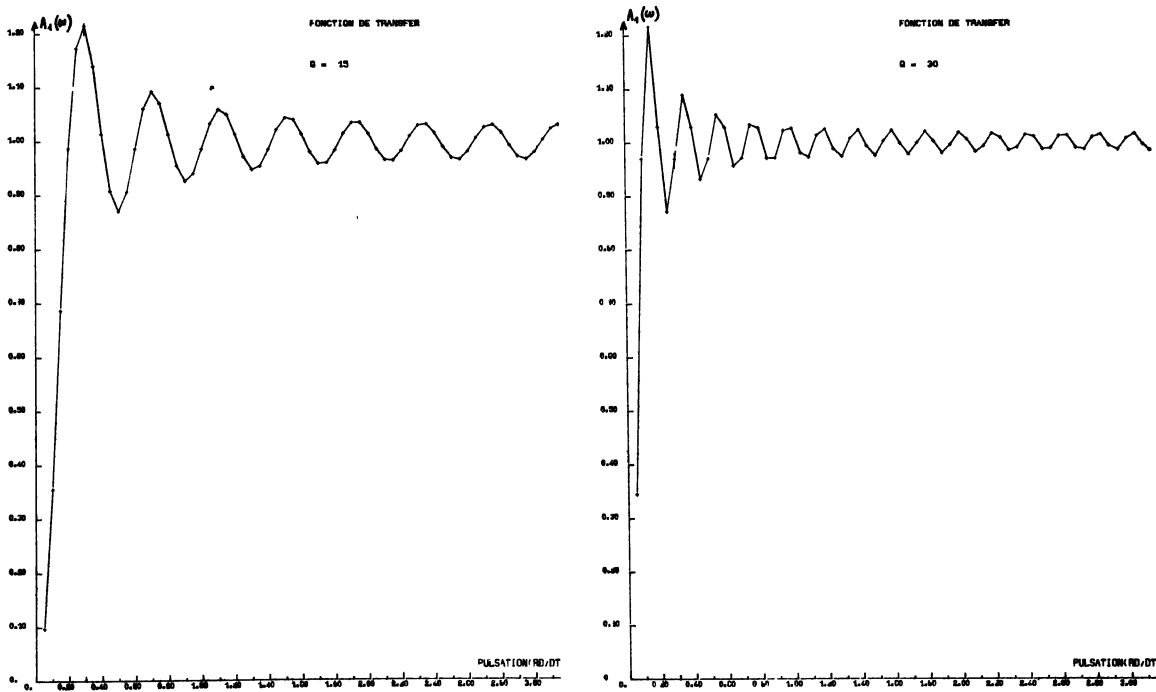
et pour ordonnée :

$$A_1 \left[\frac{(2k + 1)\pi}{2q + 1} \right] = 1 - \frac{\pm 1}{(2q + 1) \sin(2k + 1)\pi/2(2q + 1)}$$

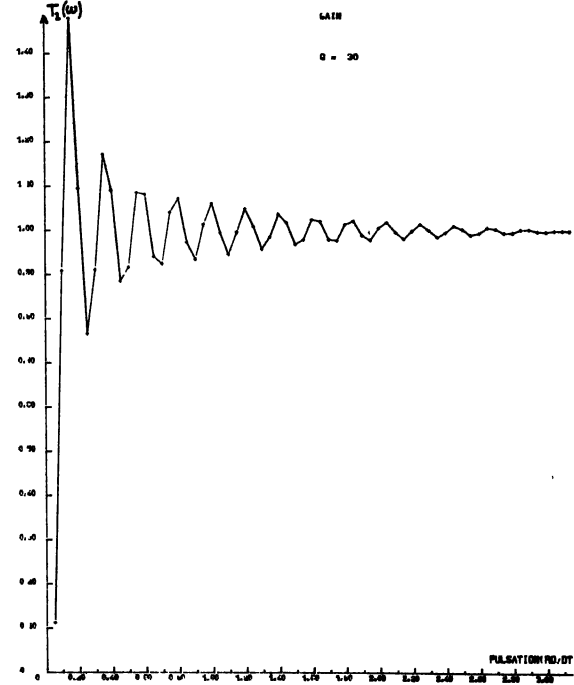
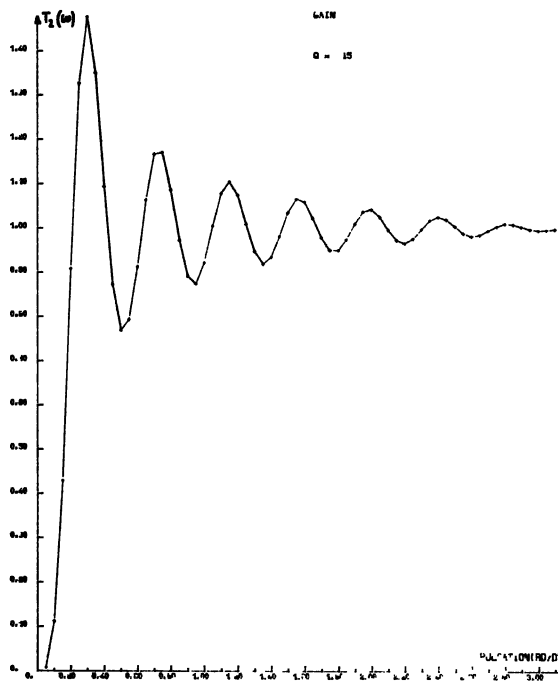
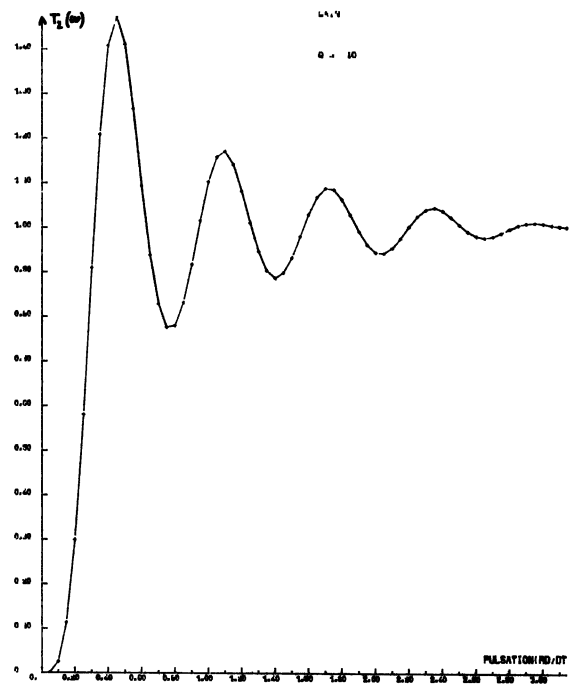
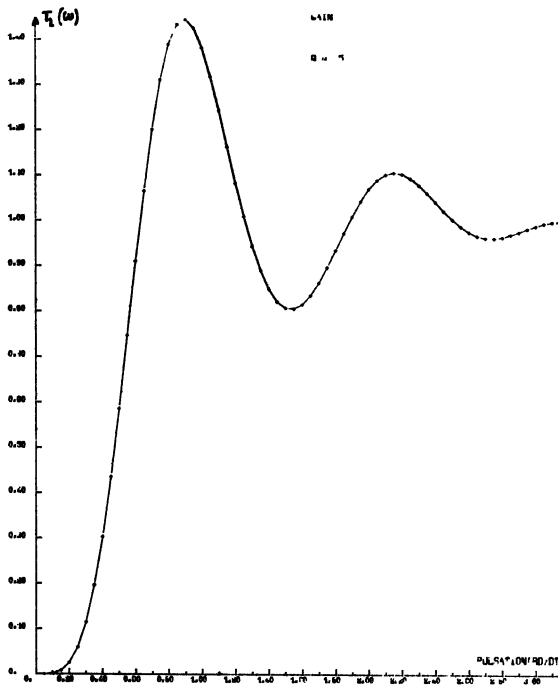
Graphique 4 a



Graphique 4 b



Graphique 4 b



On a donc alternativement un maximum et un minimum lorsque k prend ses valeurs de 1 à q qui décroissent en amplitude en raison de l'augmentation continue de

$$\sin \frac{(2k + 1)\pi}{2q + 1} \quad \left(\text{puisque } 0 < \frac{2k + 1}{2(2q + 1)} \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

On peut vérifier ces résultats pour les valeurs $q = 2$ et $q = 3$ qui donnent à l'expression entre crochets précédente une forme facile permettant la résolution de l'équation.

	Solution de l'équation entre crochets	Solution approchée
$q = 2$	$\omega_1 = 2 \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{5}{8}} \approx 1,82$ $A_1(\omega_1) \approx 1,25$	$\omega_1 = \frac{3\pi}{5} \approx 1,88$ $A_1(\omega_1) \approx 1,25$
$q = 3$	$\omega_1 = 2 \text{ Arc sin } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7 - \sqrt{7}}{3}} \approx 1,29$ $A_1(\omega_1) \approx 1,22$	$\omega_1 = \frac{3\pi}{7} \approx 1,35$ $A_1(\omega_1) \approx 1,23$
	$\omega_2 = 2 \text{ Arc sin } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7 + \sqrt{7}}{3}} \approx 2,22$ $A_1(\omega_2) \approx 0,87$	$\omega_2 = \frac{5\pi}{7} \approx 2,24$ $A_1(\omega_2) \approx 0,84$

L'amortissement des oscillations se réalise autour de la droite parallèle à l'axe des ω et d'ordonnée égale à un.

Les points de coordonnées $\omega = \frac{k 2\pi}{2q + 1} (k = 1, \dots, q)$ et $A_1(\omega) = 1$

constituent l'ensemble des points d'intersection de l'oscillation avec cette droite (1). Leur nombre (ainsi que celui des maxima-minima) varie avec k de 1 à q . La valeur de q impose donc le nombre d'oscillations de la fonction de transfert et par là l'allure de l'amortissement. Lorsque $q = 1$ l'expression entre crochets est un polynôme de degré zéro. Dans ce cas particulier la fonction de transfert est continûment croissante de 0 à 4/3 lorsque ω varie de 0 à π (graphique 3). Le graphe de cette fonction est à rapprocher de ceux des fonctions (de transfert) des différences successives d'ordre p .

La fonction de transfert $A_2(\omega)$ du filtre des différences de moyennes mobiles de longueur $(2q)$ présente les mêmes particularités que la précédente (graphique 3 et 4 a) aux seules valeurs des coordonnées des maxima (ou minima) et des points d'intersection des oscillations avec la droite parallèle à l'axe des ω et d'ordonnée un.

L'ensemble des maxima-minima (valeurs approchées) a pour abscisse

$$\omega = \frac{(2k + 1)\pi}{2q} (k = 1, \dots, q)$$

et pour ordonnées :

$$A_2 \left[\frac{(2k + 1)\pi}{2q} \right] = 1 - \frac{\pm \cotg \frac{2k + 1}{2q} \pi}{2q}$$

1. La pente de la tangente en ces points est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2q + 1}}$ lorsque k est pair et $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2q + 1}}$ lorsque k est impair.

L'ensemble des points de la fonction d'ordonnées égales à un a pour abscisse $\omega = \frac{k\pi}{q}$ ($k = 1, \dots, q$). On remarque que le point $(\pi, 1)$ appartient à cet ensemble contrairement à la fonction précédente. Dans ce cas, nous avons autant de maxima-minima moins un que de points d'ordonnée un pour $k = 1, \dots, q$.

La position du premier point d'ordonnée égale à un, conditionne la valeur de l'angle de la fonction de transfert de ces deux filtres, avec l'axe des fréquences et par là la plus ou moins grande réduction des composantes de très basses fréquences. L'abscisse de ce premier point est d'autant plus proche de l'origine que la longueur de la moyenne mobile est importante.

Mais nous avons montré que l'abscisse du point de coordonnées $(0, 0)$ était une solution de l'équation $A_1'(\omega) = 0$. En ce point la fonction de transfert a donc une tangente confondue avec l'axe des fréquences. La concavité, tournée vers les ordonnées positives, qui en résulte sur le graphe, est d'autant plus prononcée que la longueur de la moyenne mobile est petite (graphique 4 a). Le choix de cette dernière est donc assujéti au type de problème à traiter. Une élimination convenable de la composante de fréquence très basse d'une série temporelle avec conservation des autres fluctuations de fréquences plus hautes est sous-jacente à l'utilisation d'une moyenne mobile suffisamment courte pour réduire l'importance de cette composante mais aussi assez longue pour respecter les oscillations naturelles des autres fluctuations.

Nous avons essayé de démontrer dans les tableaux suivants que la longueur de la moyenne mobile ne modifie pas fondamentalement les valeurs (approchées) des maxima-minima lorsque celle-ci augmente. Nous constatons au contraire qu'ils tendent vers une limite que l'on peut supposer déjà atteinte lorsque $q \geq 6$. Nous observons en outre que seuls le premier maximum et le premier minimum (des oscillations) ont une importance non négligeable qui risquent soit d'introduire un cycle factice soit au contraire de minimiser l'importance d'un mouvement réel.

q	$A_1\left(\frac{3\pi}{2q+1}\right)$	$A_2\left(\frac{3\pi}{2q}\right)$	$A_1\left(\frac{5\pi}{2q+1}\right)$	$A_2\left(\frac{5\pi}{2q}\right)$	$A_1\left(\frac{7\pi}{2q+1}\right)$	$A_2\left(\frac{7\pi}{2q}\right)$		
	(Maxi)	$q > 1$	$q > 1$	(Mini)	$q > 2$	$q > 2$	(Maxi)	$q > 3$
1	1,33	—	—	—	—	—	—	—
2	1,25	1,10	0,80	—	—	—	—	—
3	1,23	1,17	0,84	0,96	1,14	—	—	—
4	1,22	1,19	0,86	0,92	1,12	1,02	—	—
5	1,218	1,196	0,861	0,90	1,108	1,05	—	—
6	1,217	1,201	0,865	0,891	1,103	1,064	—	—
.
.
.
∞	1,21	1,21	0,87	0,87	1,09	1,09	.	.

III — LE SPECTRE DE LA SÉRIE TEMPORELLE FILTRÉE

Nous savons que (1) l'hypothèse de stationnarité de la covariance impose :

$$\begin{aligned} E [dZ_x(\omega) dZ_x^*(\omega')] &= dG_x(\omega) = g_x(\omega) d\omega & (\omega = \omega') \\ &= 0 & (\omega \neq \omega') \end{aligned}$$

où $dZ_x^*(\omega)$ est la variable complexe conjuguée de $dZ_x(\omega)$.

Il en résulte d'après l'étude précédente :

$$\begin{aligned} E [dZ_y(\omega) dZ_y^*(\omega')] &= E [A(\omega) dZ_x(\omega) A^*(\omega') dZ_x^*(\omega')] \\ &= E [A(\omega) A^*(\omega') dZ_x(\omega) dZ_x^*(\omega')] \\ &= A(\omega) A^*(\omega) g_x(\omega) d\omega & (\omega = \omega') \\ &= 0 & (\omega \neq \omega') \end{aligned}$$

Le produit de la fonction de réponse en fréquence par son conjugué, noté $T(\omega)$, est appelé fonction de gain du filtre :

$$T(\omega) = |A(\omega)|^2 = G^2(\omega)$$

ce qui permet d'écrire que la liaison entre la fonction spectrale $g_x(\omega)$ d'une série temporelle $X(t)$ et la fonction spectrale $g_y(\omega)$ de la même série, filtrée, $Y(t)$, est fonction de la valeur prise par le gain $T(\omega)$ du filtre employé.

$$g_y(\omega) = T(\omega)g_x(\omega)$$

ou $g_x(\omega) = g_y(\omega)/T(\omega)$ opération dite de recoloration du spectre (2).

a) Gain du filtre des différences d'ordre p

La fonction de gain :

$$T_p(\omega) = |A_p(\omega)|^2 = G_p^2(\omega) = 2^p (1 - \cos \omega)^p = 2^{2p} \sin^2 p \frac{\omega}{2}$$

du filtre des différences successives d'ordre p est une fonction croissante de 0 à 2^{2p} . Ses variations pour les ordres 1, 2 et p sont représentées sur le graphique 1.

L'allure des graphes nous indique comment, par l'application d'un de ces filtres à une série temporelle, les puissances spectrales de cette série seront réduites et accrues respectivement en deçà et au-delà du point d'abscisse $\omega = \frac{\pi}{3}$.

Si la série temporelle étudiée n'est pas stationnaire du premier ordre, la tendance en moyenne, d'après la définition que nous en avons donné, concentrera sa puissance aux très basses fréquences sur le spectre de la série. Il est donc clair que plus l'ordre des différences successives sera important plus la réduction des puissances spectrales relatives aux très basses fréquences se réalisera. Mais les fonctions de gain nous montrent que corrélativement les puissances aux moyennes et surtout aux hautes fréquences seront accrues dans des proportions qui risquent d'engendrer un spectre suffisamment déformé pour qu'il

1. BLANC-LAPIERRE et FORTET [2] pp. 456 457 et p. 381.

2. En réalité, et comme nous l'avons mentionné dans l'annexe la fonction spectrale prend ses valeurs sous la forme de $\log \hat{g}_x(\omega_i)$. Par suite la recoloration du spectre s'effectuera à partir de la relation :

$$\log \hat{g}_x(\omega_i) = \log \hat{g}_y(\omega_i) - \log T(\omega_i) \quad (T(\omega_i) \neq 0)$$

L'antilogarithme de ces résultats conduira aux valeurs de $\hat{g}_y(\omega_i)$.

ne puisse servir à une quelconque étude. De plus lors d'une analyse harmonique d'une série temporelle la fonction de transfert qui présente les mêmes particularités que la fonction de gain, pour un ordre trop élevé de p , peut provoquer l'accentuation ou l'introduction d'une tendance en variance dans la série.

L'emploi de ces filtres, et en particulier celui couramment utilisé des différences premières, présente les avantages de simplicité de mise en œuvre, de connaissance de leurs effets sur la série temporelle et sur son spectre, de révéler aux moyennes et hautes fréquences le détail des fluctuations du spectre. Leur inconvénient majeur réside dans l'analyse spectrale par le fait, comme nous le montre les fonctions de gain, que leur utilisation modifie toutes les puissances spectrales. Selon la forme du spectre des données naturelles l'application d'un tel filtre peut générer sur le spectre de la filtrée un pseudo-pic résultat du produit $T_p(\omega) \times g_x(\omega)$ où $T_p(\omega)$ croît continuellement sur l'intervalle $[0, \pi]$ alors que $g_x(\omega)$ possède des variations erratiques sur ce même intervalle. Il en résulte que l'apparition d'un pic (même significatif) sur une bande de fréquence ne devra être définitivement retenu, à une période déterminée, qu'après l'opération de recoloration du spectre.

b) *Gain du filtre des différences de moyennes mobiles simples*

Les fonctions de gain

$$T_1(\omega) = G_1^2(\omega) = \left(1 - \frac{1}{2q+1} \frac{\sin\left(q + \frac{1}{2}\right)\omega}{\sin \omega/2} \right)^2$$

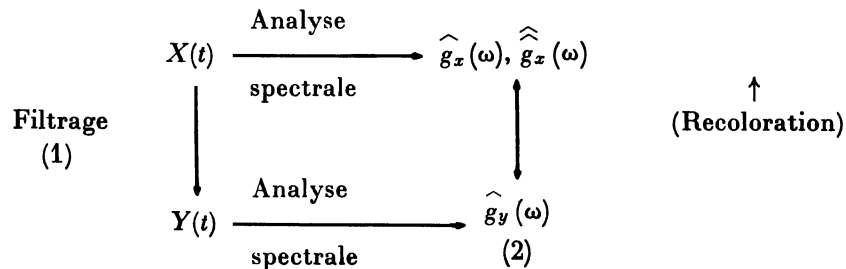
et

$$T_2(\omega) = G_2^2(\omega) = \left(1 - \frac{1}{2q} \frac{\sin \omega q \cos \omega/2}{\sin \omega/2} \right)^2$$

présentent les mêmes particularités que les fonctions de transfert $A_1(\omega)$ et $A_2(\omega)$ (graphique 3) sauf pour les valeurs des maximums et des minimums qui se trouvent amplifiées du fait de l'élevation au carré. Ainsi les trois premiers maxima et minima tendent-ils vers les limites 1,46; 0,76 et 1,19 (pour $Q > 2$ ou 3) valeurs non négligeables dont il faudra tenir compte dans l'interprétation des puissances spectrales correspondant aux fréquences de ces grandeurs (on pourra considérer comme non significatives les valeurs suivantes des maxima et des minima 0,96; 1,06...). La longueur choisie des moyennes mobiles conditionnera la réduction des puissances aux basses fréquences. Mais ici aussi la signification d'un pic sur la fonction spectrale, dans une bande de fréquence trop large, ne pourra être retenue qu'après recoloration du spectre.

CONCLUSION

L'influence de l'opération « filtrage » produit des effets à deux niveaux comme le montre le schéma suivant :



La tendance en moyenne, observée dans de nombreuses séries temporelles, peut-elle être éliminée, ou réduite, par les filtres décrits? Si tel est le cas peut-on mesurer l'importance de cette opération au niveau du spectre de la série temporelle filtrée?

1. Les fonctions de transfert des filtres des différences successives d'ordre p partagent le plan en deux régions où l'action des filtres est contradictoire. En deçà de la fréquence $\frac{\pi}{3}$ (6 mois pour une série mensuelle) les composantes de basses fréquences sont réduites, au delà elles sont accrues. Cette action antinomique montre que le choix d'un ordre p trop élevé des différences successives peut entraîner des transformations non souhaitées au sein de la série (introduction d'une tendance en variance par exemple). En général l'ordre des différences successives n'excède pas deux. Sa détermination peut se réaliser par l'observation de l'évolution temporelle de la série filtrée ou par la forme de son spectre. Elle peut aussi résulter de l'étude de la fonction d'autocorrélation de la série transformée sachant que celle-ci doit converger rapidement vers zéro dès lors que la série est stationnaire.

Enfin des tests de normalité (histogrammes, test du χ^2) ou des tests non paramétriques peuvent fournir des informations. Si la série temporelle est la source d'une tendance en moyenne linéaire, nous avons vu que le filtre des différences successives premières suffit pour l'éliminer totalement.

De par la forme de sa fonction de transfert l'emploi d'un filtre des différences de moyennes mobiles est plus adapté, dans une analyse harmonique de séries temporelles, que son homologue des différences successives d'ordre p , à réduire ou supprimer d'éventuels cycles à fréquences basses ou très basses tout en conservant des mouvements de fréquences moyennes ou hautes. On a démontré que la position du premier point de la fonction de transfert d'ordonnée égale à un (au-delà duquel la fonction oscille et s'amortit) conditionne la pente de cette fonction entre le point d'ordonnée zéro et un. Or cette position dépend de $2q + 1$ (ou de $2q$) la longueur de la moyenne mobile. Plus celle-ci est grande, plus petite est la fréquence du cycle qui conserve son amplitude par l'emploi du filtre, mais aussi, plus forte est la pente de la fonction de transfert antérieure à cette fréquence. Comme au voisinage de l'origine des axes la concavité de la fonction est d'autant plus prononcée que la longueur de la moyenne mobile est courte le choix de cette dernière dépend donc de l'importance de la réduction que l'on désire opérer sur les composantes de basses fréquences et (ou) de la période à partir de laquelle on veut conserver les fluctuations de la série temporelle.

Nous avons constaté qu'au-delà du premier point d'ordonnée égale à un de la fonction de transfert celle-ci n'était pas « plate » mais présentait des oscillations qui peuvent avoir pour effet d'amplifier ou de réduire d'éventuels cycles de fréquences égales aux maxima ou aux minima des oscillations. Cependant en raison de la forme amortie de la fonction seuls les premiers maxima ou minima peuvent avoir une importance non négligeable.

S'il ne sert à rien d'accroître la longueur de la moyenne mobile pour réduire l'influence des premières oscillations de la fonction de transfert (les valeurs des maxima-minima tendent vers leur limite définitive dès que $q \geq 6$) par contre la mobilité du premier point d'ordonnée égale à un en fonction de cette longueur confine ce filtre parmi les instruments les mieux adaptés pour les analyses des séries temporelles.

Comme pour le filtre précédent, le choix de la longueur de la moyenne mobile peut se réaliser à partir des observations ou des tests ultérieurement mentionnés.

2. Le spectre de la série filtrée $\widehat{g}_y(\omega)$ diffère de celui de la série brute $\widehat{g}_x(\omega)$. Nous avons vu que la connaissance du gain du filtre permettait par recoloration de connaître le spectre vrai $\widehat{g}_x(\omega)$ de la série d'origine; les différences observées entre les valeurs de $\widehat{g}_x(\omega)$ et de $\widehat{g}_y(\omega)$ proviennent, le plus souvent, de l'élimination du phénomène de « fuite » à travers la fenêtre spectrale, phénomène engendré par la tendance en moyenne de la série.

Les fonctions de gain des filtres étudiés ont un graphe similaire de celui des fonctions de transfert. La transformation du spectre de la série origine par l'opération de filtrage est résumée par la formule :

$$\widehat{g}_y(\omega) = T(\omega)\widehat{g}_x(\omega)$$

Les variations différentes de $T_p(\omega)$ et de $T_1(\omega)$ (ou de $T_2(\omega)$) modifient de façon également différente celles de $\widehat{g}_x(\omega)$. La fonction de gain du filtre des différences d'ordre p étant continûment croissante sur $[0, \pi]$ toutes les puissances spectrales sont modifiées, alors qu'il n'en est pas de même pour le filtre des différences de moyennes mobiles où l'on peut considérer que seules les très basses et basses fréquences sont transformées. Selon l'étude poursuivie cet aspect peut être un critère de choix du filtre.

Dans l'hypothèse d'une série temporelle présentant une tendance en moyenne, le spectre de cette série, $\widehat{g}_x(\omega)$, sera une fonction d'allure généralement décroissante. Si aux basses fréquences un cycle existe, l'effet de fuite à travers la fenêtre spectrale, engendré par la tendance en moyenne aux très basses fréquences, masquera sa présence. L'opération de filtrage en réduisant la puissance des composantes proches de la fréquence nulle peut révéler l'existence de ce cycle long.

Pendant les filtres sont générateurs de cycles factices. En effet, supposons par exemple, que $\widehat{g}_x(\omega)$ décroisse de la fréquence zéro à la fréquence $\frac{\pi}{6}$.

L'utilisation d'un filtre « différences de moyennes mobiles » de longueur $2q = 60$, réduira la puissance spectrale aux fréquences comprises entre zéro et $\frac{\pi}{30}$ et laissera pratiquement inchangées les autres. La diminution étant très importante au voisinage de zéro, le spectre $\widehat{g}_y(\omega)$ fera apparaître des valeurs croissantes jusqu'à la fréquence $\frac{\pi}{30}$ (ou avant si le nombre de points d'estimation est important), puis, en raison de l'action neutre du filtre au-delà de cette fréquence, une décroissance imposée par les valeurs de $\widehat{g}_x(\omega)$. A la fréquence $\frac{\pi}{30}$ apparaît un pic, la plupart du temps significatif, qui peut n'être qu'un « artefact » résultant de l'opération de filtrage. De la même façon un pic significatif de fréquence très basse peut être réduit, après l'application de l'un ou l'autre filtre, de telle sorte, qu'il n'apparaît pas sur le spectre $\widehat{g}_y(\omega)$.

Il s'avère donc nécessaire après toute utilisation d'un filtre de recolorer le spectre $\widehat{g}_y(\omega)$ avant de conclure sur la signification d'un pic révélant l'existence d'une composante cyclique au sein d'une série temporelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNIER J. et CHASTAGNOL A. : « Méthodes d'analyse spectrale utilisée par le S. T. P. B. — Direction des études et recherches de l'E.D.F.
- [2] BLANC-LAPIERRE A. et FORTET R. : « Théorie des fonctions aléatoires » — Masson, 1953.

- [3] BLOMME R. et PHILIPS L. : « Analyse chronologique », Vander, Louvain, 1973.
- [4] JENKINS G. et WATTS D. : Spectral Analysis and its applications — Holden-Day 1968.
- [5] CALABRE S. : « Analyse spectrale des fluctuations des prix des métaux. » Laboratoire d'Économétrie, Faculté de Droit, Université de Montpellier I, février 1976.
- [6] CAYET L. : « Analyse spectrale. » Université des Sciences et Techniques du Languedoc. Laboratoire d'Hydrologie mathématique, Montpellier.
- [7] DELLEUR J. : « Réflexions sur l'analyse spectrale. » Département Laboratoire national hydraulique. E. D. F.
- [8] DELLEUR J. : « Application de l'analyse spectrale à l'étude statistique des pluies, des débits et du transfert pluies-débits dans le bassin de la Sioule. » Département Laboratoire hydraulique. E. D. F.
- [9] DHRYMES P.J. : « Econometrics. » Springer. Verlag. New York, 1974.
- [10] GRANGER C.W.J. — HATANAKA H. : « Analyse spectrale des séries temporelles en économie. » Dunod, 1969.
- [11] GRANGER C.W.J. : « The typical spectral shape of an economic variable. » *Econometrica*, vol. 34, juillet 1966.
- [12] GUILLEMIN C. et MARCHETTI L. : « Analyse spectrale des séries monétaires et économiques françaises de 1954 à 1969. » *Annales de l'I. N. S. E. E.*, janvier-avril 1975.
- [13] GUITTON H. : « A la recherche des périodicités cachées. » Publications économétriques, vol. 8, fasc. 1, 1975.
- [14] HAURIE A. : « L'analyse spectrale des séries chronologiques. » *L'Actualité économique*, juillet-septembre 1966.
- [15] JENKINS G.M. : « General considerations in the Analysis of spectra. » *Technometrics*, mai 1961.
- [16] LOBERT A. : « Méthodes statistiques pour l'étude de la pollution. » (3^e partie). Direction des études et recherches. E. D. F.
- [17] MALINVAUD E. : « Méthodes statistiques de l'économétrie. » Dunod, 1969.
- [18] MALINVAUD E. et FOUQUET D. : « Analyse spectrale des données économiques : un essai sur l'activité dans l'industrie française. » *Annales de l'I. N. S. E. E.*, janvier-avril 1971.
- [19] PARZEN E. : « Mathematical Considerations in the Estimation of spectra. » *Technometrics*, mai 1961.
- [20] QUINET E. : « Séries temporelles et décisions économiques. » Dunod, 1969.
- [21] RADIX J.C. : « Introduction au filtrage numérique. » Eyrolles, 1970.
- [22] STERN J., DE BARBEYRAC J., POGGI R. : « Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires. » Dunod, 1967.
- [23] TUKEY J.W. : « Discussion, Euphasizing the connection between Analysis of variance and spectrum Analysis. » *Technometrics*, mai 1961.
- [24] VIGNAU J.P. : « Cours d'économétrie de 4^e année de licence en Sciences économiques. » Faculté de Droit. Université de Montpellier I. 1973-1974.
- [25] ZAJDENWEBER D. : « Hasard et Prévision. » *Economica*, 1976.