Journal de la société statistique de Paris

Jean Dif

Les modèles actuariels d'évaluation des actions

Journal de la société statistique de Paris, tome 116 (1975), p. 291-308
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1975__116__291_0>

LES MODÈLES ACTUARIELS D'ÉVALUATION DES ACTIONS

In a first part the author tries to conciliate different actuarial models of assessment of shares, proposed in the financial literature. In a second part, he gives a few extensions to the most usual model, that is to say Gordon-Shapiro's.

Im ersten Teil seiner Arbeit versucht der Autor die verschiedenen versicherungsmathematischen Modelle zur Bewertung der Aktien, die in der Finanzliteratur veröffentlicht wurden, in Einklang zu bringen. Im zweiten Teil gibt er eine Erweiterung des am meisten verwendeten Modells von Gordon-Shapiro.

INTRODUCTION

De nombreux modèles d'évaluation des actions ont été proposés par la littérature financière. Certains d'entre eux font appel aux techniques de corrélation-régression, d'autres découlent de la théorie du marché financier. Les plus nombreux sont de type actuariel (1). C'est cette dernière approche que nous retiendrons.

Les modèles de type actuariel se subdivisent eux-mêmes en plusieurs catégories :

— sur le plan de l'horizon selon que celui-ci est fini ou infini;

— sur le plan du type de croissance celle-ci pouvant être ponctuelle ou continue;

— sur le plan du financement de la croissance selon que l'on s'en tient ou non aux bénéfices non distribués;

— sur le plan de la variable explicative : dividende, bénéfice ou revenu net;

— sur le plan, enfin, de la méthode d'actualisation, le taux étant constant ou variable en fonction du temps.

Il en résulte une grande diversité de modèles, fondés sur des hypothèses différentes et correspondant donc à des situations précises, qui peuvent paraître contradictoires.

Dans une première partie, nous allons donc nous efforcer de concilier ceux qui nous sont apparus les plus significatifs.

Dans une seconde partie, nous proposerons quelques extensions au plus courant d'entre eux, celui de Gordon-Shapiro.

I — EXAMEN COMPARATIF DE QUELQUES MODÈLES D'ÉVALUATION DES ACTIONS

Nous allons tout d'abord nous efforcer de concevoir un modèle complet, c'est-à-dire un modèle dont les hypothèses seront aussi peu restrictives que possible. Nous montrerons ensuite comment les principaux modèles de la littérature financière peuvent être déduits de ce modèle de base.

1. Voir l'article de Didier Pène cité en bibliographie.

A — *Le modèle complet*

On peut admettre avec Williams [1], que le cours d'une action est égal à la valeur présente des dividendes futurs. On a donc :

— dans le cas d'un horizon infini :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

— dans le cas d'un horizon fini :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

P_0 = cours initial de l'action
D_t = dividende de l'année t
P_n = cours de l'action sous l'horizon
k = taux d'actualisation approprié
n = horizon

Posons :

$$D_t = D_{t-1}\,(1 + g_t)$$

g_t = taux de croissance du dividende de l'année $t - 1$ à l'année t.

Il vient :

$$P_0 = \frac{D_0\,(1+g_1)}{(1+k)} + \frac{D_0\,(1+g_1)\,(1+g_2)}{(1+k)^2} \quad \ldots + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

Ou encore, dans l'hypothèse d'une croissance continue et constante :

Tous les modèles de croissance, et notamment celui de Malkiel [1], découlent de cette formule de base. Ces modèles posent le problème de l'évaluation de la croissance des dividendes. Si l'on néglige, dans un premier temps, les conséquences de l'inflation, la croissance des dividendes suppose, sur le long terme, une progression des bénéfices et, par conséquent, une augmentation des investissements productifs de l'entreprise. Cette augmentation peut être financée au moyen de ressources internes ou externes :

a) *Ressources internes*

— Bénéfices non distribués.

— Amortissements en excédent du renouvellement pur et simple du potentiel productif de l'entreprise.

b) *Ressources externes*

— Émissions d'actions nouvelles par apport en numéraire.

— Dette classique ou convertible.

— Dette à court terme...

1. Voir en bibliographie.

Nous allons donc examiner comment l'utilisation de ces ressources peut s'intégrer dans la formule précédente.

1. *Financement des investissements au moyen des bénéfices non distribués*

Soit $R^I t$ les bénéfices non distribués réinvestis a cours de l'année t. On a :

$$D_t = E_t - R^I_t$$

Donc :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{E_t - R^{I_t}}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

Appelons x_t le taux de rentabilité des capitaux permanents au cours de la période t.

Il vient :

$$E_t = x_t V_{t-1}$$

V_{t-1} = actif net par action à la période du calcul.

D'où :

$$P_0 = \frac{x_1 V_0 - R^{I_1}}{(1+k)} + \frac{x_2 (V_0 + R^{I_1}) - R^{I_2}}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{x_n (V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} R^{I_j}) - R^{I_n}}{(1+k)^n} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

$$R^{P_0} = \sum_{t=1}^{n} \frac{x_t (V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} R^{I_j}) - R^{I_t}}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

$R^P{}_0$ = cours de l'action à la période initiale avec financement de l'expansion exclusivement au moyen des bénéfices non dıstribués.

2. *Financement au moyen d'emprunts*

Soit $B^I{}_t$ le montant emprunté et investi par action à la période t. L'actionnaire ancien tirera de l'opération un bénéfice égal à :

$$B^I{}_t (x_t - i_t)$$

i_t = coût de l'emprunt à la période t.

Supposons que nous ayons :

$$n < m$$

m = maturité de la dette émise à la période initiale.

Nous pouvons écrire :

$$B, R^{P_0} = R^{P_0} + \frac{(x_1 - i_1) B^{I_1}}{(1+k)} + \frac{(x_2 - i_1) B^{I_1}}{(1+k)^2} \ldots + \frac{(x_2 - i_2) B^{I_2}}{(1+k)^2} \ldots$$

$B, R^P{}_0$ = cours de l'action avec financement au moyen des bénéfices non distribués et de l'emprunt.

D'où :

$$B, R^{P_0} = R^{P_0} + \sum_{t=1}^{n} B^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - i_t)}{(1+k)^j} \right]$$

3. *Financement au moyen de l'émission d'actions nouvelles par apport en numéraire*

Un raisonnement identique à celui qui vient d'être développé permet de prendre en compte le financement au moyen de l'émission d'actions nouvelles. On obtient ainsi :

$$B, R, S^{P_0} = B, R^{P_0} + \sum_{t=1}^{n} S^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - k'_t)}{(1+k)^j} \right]$$

$S^I{}_0$ = montant émis et investi par action ancienne.
$B, R, S^P{}_0$ = cours de l'action avec financement au moyen des bénéfices non distribués, de la dette et de l'émission d'actions nouvelles par apport en numéraire.
k'_t = rendement exigé par les actionnaires nouveaux sur leur apport.

4. *Le modèle complet*

Des trois formules précédentes, on déduit le modèle complet qui prend en considération les diverses sources de financement.

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{x_t \left(V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} R^{I_j}\right) - R^{I_t}}{(1+k)^t} + \sum_{t=1}^{n} B^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - i_t)}{(1+k)^j} \right] + \sum_{t=1}^{n} S^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - k'_t)}{(1+k)^j} \right] + \frac{P_n}{(1+k)^n},$$

Certes, les différentes ressources énumérées plus haut ne sont pas explicitement prises en compte dans la formule. Il est cependant facile de les y introduire.

En effet, les amortissements, excédentaires par rapport à ceux qui permettraient de reconstituer à l'identique le potentiel productif de l'entreprise, sont tout simplement des bénéfices non distribués dissimulés par la comptabilité. Pour en tenir compte, il suffit donc de corriger convenablement les bénéfices déclarés.

Quant aux emprunts convertibles, il s'agit d'une dette jusqu'à l'échange et de capitaux propres au-delà. Si leur introduction dans le modèle paraît assez délicate en raison des hypothèses qu'il faudrait au préalable formuler, on ne peut pas dire que ce dernier interdit leur prise en considération. Il en va de même des autres formes d'endettement (court et moyen terme, fournisseurs...) susceptibles de financer parfois une partie des investissements. On peut supposer qu'ils sont inclus dans la variable $B^I{}_t$.

Enfin, le remboursement des emprunts sous l'horizon ne pose aucun problème particulier. Il s'agit tout simplement d'un endettement négatif à la date de l'amortissement.

Si l'on estime, avec Clendenin et Van Cleave [1], que le taux d'actualisation doit varier en fonction du temps et si l'on affecte des poids aux différents modes de financement pour prendre en compte la politique de l'entreprise et/ou les méthodes d'évaluation du marché, il vient :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{x_t\,(V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} \alpha R^{I_j}) - \alpha R^{I_t}}{(1 + k_t)^t} + \sum_{t=1}^{n} \gamma S^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - k'_t)}{(1 + k_j)^j} \right] + \frac{\theta P_n}{(1 + k_n)^n}$$
$$+ \sum_{t=1}^{n} \beta B^{I_t} \left[\sum_{j=t}^{n} \frac{(x_j - \iota_t)}{(1 + k_j)^j} \right]$$

α = poids des bénéfices retenus,
β = poids de la dette,
γ = poids de l'émission d'actions nouvelles,
θ = poids de la valeur de l'action sous l'horizon.

Ce modèle, très proche du DECPLION de Sloane et Reisman ainsi que de l'équation de ce dernier [1], est très comp et mais aussi, en contrepartie, très difficile à mettre en œuvre. Aussi allons-nous maintenant montrer comment, en introduisant certaines hypothèses restrictives, il est possible de le simplifier et d'en tirer les principaux modèles proposés par d'autres auteurs.

B — *Les principaux modèles simplifiés*

Pour obtenir ces modèles, nous allons tout d'abord poser :

$$k_t = k_{t-1} = k_{t-2} \ldots = k$$

Ensuite, nous allons tour à tour attribuer aux poids α, β, γ, θ les valeurs 0 ou 1.

1. *Le modèle à croissance nulle*

Posons : $\alpha = \beta = \gamma = 0$
$\theta = 1$

Du modèle complet, on déduit :

Admettons que :

$$x_0 = x_1 = x_2 \ldots = x_n = r$$

r = taux de rentabilité des capitaux propres.

1. Voir en bibliographie.

Il vient

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{rV_0}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

Si n tend vers l'infini :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{rV_0}{(1+k)^t} = \frac{rV_0}{k}$$

Mais :

$$rV_0 = E_1$$

E_1 = bénéfices nets par action

Donc :

$$P_0 = \frac{E_1}{k}$$

et

$$k = \frac{E_1}{P_0}$$

Le taux d'actualisation n'est autre que l'inverse du ratio classique Prix/Bénéfices.

2. *Les modèles à croissance continue financée au moyen des bénéfices non distribués*

Posons :

$$\beta = \gamma \text{ ce qui implique } \theta = 0$$
$$\alpha = 1$$
$$n = \infty$$

Il vient :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t\,(V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} R^I{}_j) - R^I{}_t}{(1+k)^t}$$

Soit :

$$R^I{}_t = b_t\, x_t\, V_{t-1}$$

On a :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t V_{t-1} - b_t x_t V_{t-1}}{(1+k)^t}$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t V_{t-1}\,(1-b_t)}{(1+k)^t}$$

Supposons que :

$$x_1 = x_2 \ldots x_\infty = r$$
$$b_1 = b_2 \ldots b_\infty = b$$

b = taux de rétention des bénéfices.

Il vient :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{rV_{t-1}\,(1-b)}{(1+k)^t}$$

Mais :

$$\begin{aligned} V_t &= V_{t-1} + R^I_{t-1} \\ &= (1 + b\,r)\,V_{t-1} \\ &= V_0\,(1 + b\,r)^t \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{rV_0\,(1-b)\,(1+br)^{t-1}}{(1+k)^t} \\ &= \frac{rV_0\,(1-b)}{k-br} \end{aligned}$$

Donc :

$$P_0 = \frac{E_1\,(1-b)}{k-br}$$

C'est le modèle dynamique de Solomon [1].

On a :

$$D_t = E_t\,(1-b)$$

Admettons que :

$$g = br$$

g = taux de croissance des bénéfices et des dividendes.

On peut écrire :

$$P_0 = \frac{D_1}{k-g}\ [2]$$

C'est le modèle de Gordon-Shapiro.

3. *Les modèles à croissance ponctuelle*

Supposons que le bénéfice réinvesti correspond à un super-bénéfice ou encore à un bénéfice occasionnel qui ne se reproduira pas les années suivantes. En aménageant les formules précédentes pour prendre en compte cette hypothèse nouvelle, on obtient :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{D_1}{k} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{r\,(E_1 - D_1)}{(1+k)^t} \\ &= \frac{D_1}{k} + \frac{br\,E_1}{k\,(1+k)} \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{D_1 + \dfrac{br\,E_1}{(1+k)}}{k}$$

1. Voir en bibliographie.
2. Si on actualise en continu, la formule devient : $P_0 = \dfrac{D_0}{k-g}$

Nous supposerons maintenant que l'on investit chaque année une somme fixe exprimée en pourcentage des bénéfices initiaux, ou encore que la croissance des bénéfices réinvestis cesse après la première année ou que, si elle se poursuit, elle est négligée par le marché. En partant de la formule ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$P_0 = \frac{D_1}{k} + \frac{br\,E_1}{(1+k)\,k} + \frac{br\,E_1}{(1+k)^2\,k} + \frac{br\,E_1}{(1+k)^3\,k} \cdots$$

$$= \frac{D_1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{br\,E_1}{(1+k)^t}}{k}$$

$$= \frac{D_1 + \frac{br\,E_1}{k}}{k}$$

$$P_0 = \frac{D_1 + \frac{r\,(E_1 - D_1)}{k}}{k}$$

C'est le modèle de Walter (1).

Dans les deux derniers modèles les composantes de la valeur du titre sont assez nettement différenciées. On remarquera, en effet, que la première partie des deux formules, à savoir $\frac{D_1}{k}$, n'est autre que la valeur de l'action en l'absence de toute croissance, c'est-à-dire hors investissement. Quant à la seconde partie des deux formules, respectivement $\frac{br\,E_1}{k\,(1+k)}$ et $\frac{r\,(E_1 - D_1)}{k^2}$, il s'agit tout simplement de la valeur présente du ou des investissements attendus, du point de vue des actionnaires.

Il est possible de retrouver le modèle de Walter en partant du modèle dynamique de Solomon ou de celui de Gordon. En effet, ces modèles peuvent s'écrire sous la forme :

$$P_0 = \frac{1}{k}\left(D_1 + E_1 b\,\frac{r - br}{k - br}\right)$$

Il suffit donc, pour parvenir au modèle de Walter, d'annuler *br*, c'est-à-dire la croissance des sommes investies, ce qui correspond aux hypothèses de cet auteur. On a alors :

$$P_0 = \frac{1}{k}\left(D_1 + E_1 b\,\frac{r}{k}\right)$$

formule identique à celle que nous avions trouvée plus haut.

1. Voir en bibliographie.

En partant du modèle de Walter et en réarrangeant les termes sans introduire d'hypothèse nouvelle, il vient :

$$P_0 = \frac{E_1 - E_1 b + E_1 b \frac{r}{k}}{k}$$

$$P_0 = \frac{E_1}{k} + \frac{b E_1 \left(\frac{r}{k} - 1\right)}{k}$$

C'est le modèle de croissance de Solomon [1].

Il n'est pas sans intérêt de noter que, dans les modèles présentés jusqu'à présent, et dont certains sont rigoureusement identiques sur le plan des hypothèses, on actualise tantôt les dividendes, tantôt les bénéfices ou encore les uns et les autres. Cette remarque montre que la question de savoir si les cours dependent des dividendes ou des bénéfices est largement dépourvue d'objet dans la mesure où l'on tient compte de la croissance.

Reprenons l'expression :

$$P_0 = \frac{1}{k}\left(D_1 + E_1 b \frac{r}{k}\right)$$

de laquelle nous avons déduit le modèle de Walter.

Posons :

$$\frac{br}{k} = \frac{1}{3}$$

ce qui se produit lorsque :

$$k = 3\,br = 3\,g$$

Nous avons :

$$P_0 = \frac{1}{k}\,(D_1 + \frac{1}{3}\,E_1)$$

Soit

$$M = \frac{1}{k}$$

Il vient :

$$P_0 = M\,(D_1 + \frac{1}{3}\,E_1)$$

C'est le modèle de Graham et Dodd [1].

On remarquera que si :

$$D_1 = \frac{2}{3}\,E_1$$

1. Voir en bibliographie.

C'est-à-dire si le taux de distribution est égal à 67 % des bénéfices nets, on obtient :

$$P_0 = M\left(\frac{2}{3}E_1 + \frac{1}{3}E_1\right) = ME_1$$

Dans la mesure où le taux d'actualisation est égal au triple du taux de croissance et où le taux de distribution s'élève à 67 % des bénéfices nets, le multiple du modèle de Graham-Dodd n'est autre que le ratio Prix/Bénéfice. Pour que le taux d'actualisation demeure vraisemblable, mettons inférieur à 20 %, il faut alors que le taux de croissance reste limité (moins de 7 %). Ce modèle empirique, tiré d'observations effectuées sur le marché, s'applique donc aux entreprises de faible croissance.

4. *Les modèles d'actualisation des revenus nets*

Admettons que l'action est évaluée par le marché en fonction des revenus nets qu'elle procure. Les investisseurs encaissent les dividendes et le produit de la vente de leurs titres. En revanche, ils déboursent les sommes correspondant aux emprunts et aux émissions d'actions nouvelles. Leur revenu net est égal à la différence entre leurs encaissements d'une part et leurs décaissements d'autre part.

Posons :

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$
$$n = \infty$$

Distinguons :

a) Les encaissements provenant :
— des dividendes (D_t);
— des ventes d'actions ou de droits ($V^I{}_t$).

b) Les décaissements causés par :
— les achats d'actions ou les souscriptions ($S^I{}_t$);
— les souscriptions aux emprunts ($B^I{}_t$).

Il vient :

$$P_0 = \left[\sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_t}{(1+k)^{t+1}} + \sum_{t=0}^{\infty}\frac{V^I{}_t}{(1+k)^{t+1}}\right] - \left[\sum_{t=0}^{\infty}\frac{S^I{}_t}{(1+k)^{t}} + \sum_{t=0}^{\infty}\frac{B^I{}_t}{(1+k)^{t+1}}\right]$$

C'est le modèle de Sloane [1].

Note : Sloane actualise les achats d'actions en début de période et tous les autres postes en fin de période.

On remarquera que, en achetant ou vendant des actions ou des droits comme en souscrivant ou non aux emprunts émis par la société, l'investisseur peut corriger les conséquences de la politique de l'entreprise, notamment en matière de dividendes, et la faire coïncider ainsi avec ses propres besoins.

1. Voir en bibliographie.

Si nous négligeons les ventes d'actions, le revenu net d'une période est égal à :

$$E_t - R^I{}_t - B^I{}_t - S^I{}_t$$

Dans la mesure où le marché est indifférent aux divers modes de financement, nous pouvons écrire :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_t V_{t-1} - I_t}{(1+k)^t}$$

I_t = investissement total de l'année t.

Ou encore :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x_1 V_0 + \left(x_t \sum_{j=1}^{t-1} I_j\right) - I_t}{(1+k)^t}$$

$$= \frac{E_1}{k} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\left(x_t \sum_{j=1}^{t-1} I_j\right) - I_t}{(1+k)^t}$$

D'où avec :

$$x_1 = x_2 = .. = x_n = x$$

$$P_0 = \frac{E_1}{k} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x I_{t-1}}{k(1+k)^t} - \frac{I_t}{(1+k)^t}$$

x = taux de rentabilité des investissements quelle que soit leur provenance.

$$P_0 = \frac{E_0}{k} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x I_t}{k(1+k)^{t+1}} - \frac{I_t}{(1+k)^{t+1}}$$

$$= \frac{E_0}{k} + \sum_{t=0}^{\infty} I_t \frac{x-k}{k} (1+k)^{-(t+1)}$$

C'est le modèle de Modigliani et Miller [1] dans lequel, il convient de le préciser, le taux d'actualisation k n'est pas le coût du capital action de l'entreprise, comme dans les autres modèles, mais le coût du capital moyen, c'est-à-dire, conformément à la thèse soutenue par ces auteurs, le taux d'actualisation des actions d'une entreprise de la même classe de risque qui ne serait pas endettée. Pour éviter toute confusion, il est donc préférable d'écrire ce modèle sous la forme :

$$P_0 = \frac{E_0}{h} + \sum_{t=0}^{\infty} I_t \frac{x-h}{h} (1+h)^{-(t+1)}$$

h : taux d'actualisation des capitaux propres d'une entreprise de la même classe de risque dépourvue d'endettement.

1. Voir en bibliographie.

Ce modèle peut être aisément ramené au modèle dynamique de Solomon. En effet, si les investissements sont uniquement financés au moyen des bénéfices non distribués, on peut écrire :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t - bE_t}{(1+k)^t}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t(1-b)}{(1+k)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_0(1+br)^t(1-b)}{(1+k)^t}$$

$$= \frac{E_1(1-b)}{k-br}$$

Nous avons donc vu que :

— Le modèle dynamique de Solomon, le modèle de Gordon-Shapiro et celui de Modigliano et Miller sont identiques dans la mesure où la croissance est uniquement financée au moyen des bénéfices non distribués.

— Le modèle de croissance de Solomon, le modèle de Walter et celui de Graham et Dodd découlent des modèles précédents moyennant quelques hypothèses complémentaires.

C'est pourquoi nous allons maintenant étudier les extensions possibles du modèle de Gordon-Shapiro. Certaines de ces extensions ont déjà été proposées par M. Gordon lui-même [1]. Les autres nous sont personnelles.

II — Les extensions du modèle de Gordon-Shapiro

Nous allons tout d'abord développer une formulation plus complète du modèle classique de Gordon en partant d'hypothèses simplificatrices pour faciliter la démonstration. Nous examinerons ensuite dans quelle mesure les conclusions obtenues peuvent être généralisées.

A — *La formulation*

Nous allons successivement prendre en considération les différents moyens de financement de la croissance.

1. *Croissance continue financée au moyen de l'émission en numéraire d'actions nouvelles*

Soient :

N = le nombre d'actions anciennes.
n = le nombre d'actions nouvelles émises.
V_0 = la valeur comptable des actions anciennes.
V_1 = la valeur comptable des actions nouvelles.
P_0 = la valeur boursière des actions anciennes.
P_1 = la valeur boursière des actions nouvelles.
PE = le prix d'émission.

1. Cours cité en bibliographie.

A l'issue de l'opération, le capital social de l'entreprise s'élève à :

$$(N + n)\, V_1 = N V_0 + n\, PE$$

Supposons que l'émission n'est pas réservée aux actionnaires anciens et qu'il n'y a par conséquent pas de droit.

Appelons q le taux d'augmentation du capital social :

$$q = \frac{nPE}{NV_0} = \frac{n}{N}\frac{PE}{V_0}$$

et φ le pourcentage du prix d'émission qui revient aux actionnaires anciens sous forme de capital social :

$$\varphi = \frac{PE - V_1}{PE}$$

De l'expression qui permet de calculer le capital social, il vient :

$$V_1 = V_0 + \frac{n}{N}(PE - V_1) = V_0 + \frac{n}{N}\varphi PE$$

$$V_1 = V_0 + \varphi q V_0 = V_0(1 + \varphi q)$$

En raisonnant en termes de croissance continue, on a donc :

$$V_t = V_0\,(1 + \varphi q)^t$$

Si le rendement des capitaux propres demeure constant, on peut écrire :

$$E_t = E_0\,(1 + \varphi q)^t$$

Dans l'hypothèse d'une distribution intégrale des bénéfices, le prix de l'action devient alors :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_0\,(1 + \varphi q)^t}{(1 + k)^t}$$

$$= \frac{E_1}{k - \varphi q}$$

2. *Croissance continue financée au moyen de l'émission en numéraire d'actions nouvelles et des bénéfices non distribués*

En réintroduisant, dans les formules précédentes, les bénéfices non distribués, si l'on admet que l'emploi de ces bénéfices et l'utilisation des fonds provenant de l'émission sont simultanés, on obtient :

$$V_t = V_0\,(1 + rb + \varphi q)^t$$
$$E_t = E_0\,(1 + rb + \varphi q)^t$$

D'où l'on déduit :

$$P_0 = \frac{D_1}{k - rb - \varphi q}$$

C'est le modèle de Gordon avec financement d'une partie des investissements par émissions d'actions nouvelles en numéraire.

3. *Évaluation de* v

On a défini v de la manière suivante :

$$v = \frac{PE - V_1}{PE}$$

Il s'agit donc d'une sorte de « prime d'émission » calculée ex-post et exprimée en pourcentage du prix d'émission.

Les actionnaires nouveaux ont nécessairement acquis leur part au prix du marché. En effet, si cette part était proposée à un prix plus élevé, ils auraient avantage à acheter des actions anciennes plutôt que de souscrire. En revanche, si elle était proposée à un prix plus faible, ce sont les actionnaires anciens qui auraient intérêt à vendre leurs titres pour procéder à la souscription. Dans l'un et l'autre cas, le marché corrigerait donc le cours de l'action à la hausse ou à la baisse et l'on a donc :

$$PE = P_1\text{(}^1\text{)}$$

Appelons γ le coefficient multiplicateur de la valeur comptable :

$$\gamma = \frac{P}{V}$$

Il vient :

$$P_1 = PE = \gamma V_1$$

Par conséquent :

$$v = \frac{\gamma V_1 - V_1}{\gamma V_1} \qquad = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

Cette dernière expression montre simplement que si γ est égal à 1, c'est-à-dire si la rentabilité des nouveaux investissements est équivalente au taux exigé par le marché, il n'est pas possible d'obtenir de ce dernier une « prime d'émission », dans le sens retenu plus haut, en cas d'augmentation de capital par apport en numéraire. La croissance de la valeur comptable de l'action s'annule alors et l'on a :

$$V_1 = V_0$$

Si les différents taux de croissance et d'actualisation demeurent constants au cours du temps, on peut écrire :

$$\gamma = \frac{r(1-b)}{k - rb - vq}$$

1. Toujours dans l'hypothèse d'une émission non réservée aux actionnaires anciens.

D'où :

$$\nu = 1 - \frac{k - rb - \nu q}{r(1-b)}$$

$$\nu = \frac{r - rb - k + rb + \nu q}{r(1-b)}$$

$$\nu - \frac{\nu q}{r(1-b)} = \frac{r-k}{r(1-b)}$$

$$\nu\left[\frac{r - rb - q}{r(1-b)}\right] = \frac{r-k}{r(1-b)}$$

$$\nu = \frac{r-k}{r-rb-q} \quad (1)$$

4. *Simplification du modèle*

En reportant cette valeur de ν dans le modèle :

$$P_0 = \frac{D_1}{k - rb - \nu q}$$

On obtient

$$P_0 = \frac{D_1}{k - rb - q\dfrac{r-k}{r-rb-q}}$$

$$P_0 = \frac{D_1(r-rb-q)}{r(1-b)(k-rb-q)}$$

Ou encore :

$$P_0 = \frac{V_0(r-rb-q)}{k-rb-q}$$

B — *La généralisation du modèle*

Le modèle précédent ayant été construit à partir d'hypothèses restrictives, nous allons maintenant vérifier dans quelle mesure il s'applique aux autres types de financement.

1. *Le cas des émissions réservées aux actionnaires anciens*

Que l'émission soit ou non réservée aux actionnaires anciens, la capitalisation boursière de l'entreprise, à l'issue de l'opération, se décompose en deux éléments :

— la valeur au marché de la firme avant l'émission :

$$NP_0$$

— la valeur au marché des nouveaux investissements :

$$n\gamma PE$$

1. Jusqu'à ce point, les extensions du modèle sont dues à Myron Gordon lui-même. Celles qui suivent nous sont propres.

Elle s'élève donc à :

$$NP_0 + n\gamma PE$$

Or, dans l'hypothèse d'une émission publique, les actionnaires nouveaux ont acquis leur part au prix d'émission. Il en résulte que la richesse globale des actionnaires anciens devient égale à :

$$NP_0 + n\gamma PE - nPE = NP_0 + nPE(\gamma - 1)$$

En revanche, lorsque l'émission est réservée aux actionnaires anciens, la part des actionnaires nouveaux est payée au moyen du prix de souscription et des droits :

$$nP_1 = nPE + NDR$$

DR = valeur d'un droit de souscription.

Il reste alors aux actionnaires anciens :

$$NP_0 + n\gamma PE - nPE - NDR = NP_0 + nPE(\gamma - 1) - NDR$$

Mais ces derniers ont encaissé la valeur des droits. Leur richesse, à l'issue de l'opération, est, par conséquent, égale à :

$$NP_0 + nPE(\gamma - 1) - NDR + NDR = NP_0 + nPE(\gamma - 1)$$

Elle demeure rigoureusement identique à celle qui a été calculée pour l'hypothèse de l'émission publique. On peut donc estimer que le choix d'une émission réservée au lieu d'une émission publique n'exerce aucune influence sur la valeur initiale de l'action.

Par conséquent, le modèle précédent s'applique dans les deux cas.

2. *Croissance financée au moyen de la dette classique*

L'émission d'un emprunt classique est susceptible de modifier la valeur de r, taux de rentabilité des capitaux propres, et celle de k, taux d'actualisation de l'action.

Pourtant, le modèle précédent demeure valable sans modification dans la mesure où le ratio d'endettement de l'entreprise reste constant pour un coût fixe de la dette.

3. *Croissance financée au moyen de la dette convertible*

La dette convertible peut s'assimiler à une augmentation de capital différée. De l'émission à l'échange, le raisonnement tenu pour la dette classique s'applique. A l'issue de l'échange, c'est celui qui a été suivi pour les augmentations de capital qui doit être retenu.

En conclusion, il apparaît que la formule :

$$P_0 = \frac{V_0(r - rb - q)}{k - rb - q}$$

est valable dans la généralité des cas moyennant quelques hypothèses complémentaires concernant la politique d'endettement de l'entreprise.

4. *Prise en compte de la fiscalité*

Si l'on néglige les incidences de la fiscalité, les augmentations de capital par apport en numéraire constituent de parfaits substituts de la rétention des bénéfices. Normalement, les actionnaires devraient être indifférents vis-à-vis de l'un ou l'autre type de financement puisque les conséquences de ce choix sur leur richesse s'avèrent similaires. En assimilant les deux modes de financement, on obtient donc :

$$P_0 = \frac{V_0(r - c)}{k - c}$$

$c = rb + q$: taux de croissance des capitaux propres.

La prise en compte de la fiscalité exclut toutefois cette assimilation puisque seules les sommes distribuées bénéficient de l'avoir fiscal et sont, en contrepartie, soumises à l'impôt sur le revenu. Dans ces conditions, le modèle devient :

$$P_0 = \frac{V_0 [r(1+taf)(1-tirpp)(1-b)-q]}{k^* - rb - q}$$

taf : taux d'avoir fiscal.
tirpp : taux marginal d'imposition du revenu de l'actionnaire.
k^* : taux d'actualisation net d'impôt.

Cette expression, ainsi que les démonstrations qui y conduisent, permettent de préciser la signification des termes du modèle. Au numérateur apparaissent les encaisses nettes qui reviennent à l'actionnaire après déduction de l'impôt et des sommes utilisées pour souscrire à des actions nouvelles. Au dénominateur se trouve le taux d'actualisation diminué du taux de croissance des capitaux propres.

On voit donc que ce modèle, basé sur l'actualisation des dividendes, n'est nullement incompatible avec la théorie des revenus nets explicite chez Sloane et implicite chez Modigliani et Miller.

Conclusion

Nous pensons avoir montré comment il était possible de concilier les différents modèles d'évaluation des actions. C'était le premier objet de notre travail.

Nous avons également complété celui qui est le plus couramment cité dans la littérature, le modèle de Gordon-Shapiro. La formule que nous en avons tirée propose une évaluation de l'action fondée sur la valeur des actifs nets, leur rentabilité et leur croissance, tous éléments avec lesquels l'analyse financière classique est familiarisée.

C'est d'ailleurs à partir d'une expression similaire qu'ont été développées certaines méthodes pratiques d'évaluation [1].

Jean Dif

Attaché principal d'administration
chargé d'études financières
à la C. D. C.
Séminaire Louis BACHELIER
(CEREFIA)

BIBLIOGRAPHIE

Pène D. — « Les modèles d'évaluation boursiers ». *Banque*, n° 330, juin 1974, pp. 595 à 607.

Clendenin and van Cleave. — « Growth and Common Stock Values ». *Journal of finance*, vol. IX, 1954, pp. 365 à 376.

Williams J. B. — « The Theory of Investment Values ». Cambridge Mass. Harvard University Press, 1938, pp. 50-60.

1. Voir notamment l'article de G. de Murard cité en bibliographie.

SLOANE W. and REISMAN A. — « Stock Evaluation Theory : Classification, Reconciliation and General Model ». *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, June 1968, pp. 171-202.

SOLOMON E. — « Leverage and the Cost of Capital ». *Journal of finance*, XVIII, May 1963, pp. 273-279.

MALKIEL G. B. — « Equity Yields, Growth and the Structure of Share Prices ». *American Economic Review*, LIII, December 1963, pp. 467-494.

SOLOMON E. — « The Theory of Finance Management ». New York, Columbia University Press, 1963.

GORDON M. — « The Investment, Financing and Valuation of the Corporation ». Homewood, Ill., R. D. Irwin Inc. 1962.

— Cours professé en 1971 à l'Université de Sherbrooke, non publié.

WALTER J. E. — « Dividend Policies and Common Stocks Prices ». *Journal of Finance*, II, March 1956, pp. 29-41.

GRAHAM B., DODD D. L. and COTTLE S. — « Security Analysis ». N. Y. Mac Graw Hill, 1961.

MILLER M. H. and MODIGLIANI F. — « Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares ». *Journal of business*, XXXIV, October 1961.

WESTON J. F. and BRIGHAM E. F. — « Managerial Finance ». Holt, Rinchart and Winston, 3e édit., 1969.

VAN HORNE J. C. — « Financial Management and Policy ». Prentice Hall, 1968.

COHEN J. B. and ZINBARG E. D. — « Investment Analysis and Portfolio Management ». Irwin, 8e édit., 1970.

De MURARD G. — « Modèle d'analyse et d'évaluation des capitaux, selon leur montant, leur croissance et leur rentabilité ». *Analyse financière*, 1er trimestre 1975, pp. 28 à 47.