

# JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J.-J. BOULANGER

## Utilité marginale de la monnaie et utilité totale

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 114 (1973), p. 334-353

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1973\\_\\_114\\_\\_334\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1973__114__334_0)

© Société de statistique de Paris, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UTILITÉ MARGINALE DE LA MONNAIE ET UTILITÉ TOTALE

*The hypothesis of the constancy of marginal money utility is no more justified now. The influence of income cannot be omitted any longer for it is as much important as the prices one. The marginal money utility, as well as the global utility, changes both with income and prices. In this paper is given a mathematical definition of these two notions.*

*Die Annahme der Beständigkeit eines sich am Rande befindlichen Nutzen des Geldes rechtfertigt sich in der gegenwärtigen Zeit nicht mehr. Das Einkommen kann nicht mehr ausser Betracht gelassen werden, denn seine Rolle ist ebenso gross wie die der Preise und man muss sich vergewissern, dass der marginale Wert des Geldes und Gesamtnutzen sich nach dem Belang des Einkommens und der Preise verändert. Der Autor gibt in seinem Beitrag eine mathematische Definition dieser beiden Begriffe.*

*El hipótesis de las constancia de la utilidad marginal de la moneda no se justifica aun en la epoca actual. La incidencia de la renta no puede ser mas desperdiciada porque es tan importante que la de los precios y hay que hay que considerar que la utilidad marginal de la moneda, del mismo modo que la utilidad total, cumbia a la vez con la senta y los precios. El autor nos da en este articulo una definición mathematica de estas dos nociones.*

La monnaie est un bien particulier. Elle est désirée comme les autres biens, comme les biens durables elle n'est pas consommable, par contre sa liquidité en fait le bien idéal pour toute opération d'échange (« instrument d'échange ») et c'est une excellente « réserve de valeur ». Elle constitue, en outre, un « étalon de valeur » à deux points de vue : d'abord elle sert d'étalon pour mesurer la valeur d'un bien à l'achat, le prix étant le nombre d'unités de cet étalon nécessaires à l'achat du bien considéré; ensuite, lorsque l'optimum de satisfaction est obtenu pour le consommateur, l'utilité marginale d'un bien, laquelle représente la valeur de la dernière unité achetée de ce bien, est égale au produit de l'utilité marginale de la monnaie par le prix de ce bien. Autrement dit, à un moment donné et pour un consommateur donné, les prix représentent un étalonnage des différents biens classés d'après leur utilité marginale, l'étalon étant l'utilité marginale de la monnaie.

Marshall tenait pour constante l'utilité marginale de la monnaie <sup>(1)</sup>. Cela lui permettait de ramener la décroissance de l'utilité marginale d'un bien à la décroissance du taux marginal de substitution entre la monnaie et ce bien, et inversement. Ce point de vue se justifie si l'on considère la période ayant précédé la première guerre mondiale. A cette époque, en effet, les salaires étaient stables et les prix également (du moins dans leur ensemble). Ainsi de 1900 à 1910 les salaires horaires ont augmenté en France de 10 % <sup>(2)</sup>, soit de 1 % par an, et les salaires journaliers moyens réels de 6 % selon l'évaluation de la S. G. F. <sup>(3)</sup>, ce qui, en tenant compte de ce que la durée journalière de travail n'a pas varié, entraîne un accroissement annuel moyen des prix de l'ordre de 4 ‰. D'autre part les prix ont individuellement relativement varié durant la même période <sup>(2)</sup>, ce qui justifiait

1. J. R. HICKS, *Valeur et capital*, Dunod, pp. 23-25.

2. J. FOURASTIÉ, *Le grand espoir du XX<sup>e</sup> siècle*, P. U. F., p. 105.

3. J. FOURASTIÉ, *Machinisme et bien-être*, Éd. de Minuit, p. 89.

à la fois l'hypothèse de la constance de l'utilité marginale de la monnaie, l'importance attribuée aux variations de prix et la négligence du revenu, en l'absence de comparaisons inter-individuelles. Par contre à l'époque actuelle l'incidence du revenu ne peut plus être négligée car elle est au moins aussi importante que celle des prix et l'on doit considérer que l'utilité marginale de la monnaie, comme l'utilité totale, varie à la fois avec le revenu et les prix.

Au premier abord cette utilité marginale de la monnaie est un peu mystérieuse. On peut en effet rencontrer des ménages ayant même revenu par unité de consommation et des accroissements de satisfaction différents pour un même accroissement de revenu donc des utilités marginales de la monnaie différentes, ce qui s'explique par des appartenances à des catégories socio-professionnelles différentes, mais également par des aptitudes à la satisfaction différentes. On peut même rencontrer des ménages, appartenant à la même catégorie socio-professionnelle, pour lesquels un revenu supérieur par unité de consommation s'accompagne d'un accroissement de satisfaction supérieur pour un même accroissement de revenu, donc d'une utilité marginale de la monnaie supérieure; mais ces distorsions devraient disparaître si l'on cherche à déterminer l'utilité marginale moyenne de la monnaie par classes de revenus à l'intérieur de grands groupes socio-professionnels tels que les salariés, les inactifs, les commerçants et artisans, les agriculteurs, les entrepreneurs et les professions libérales.

Une augmentation de 50 F par unité de consommation (U. C.) pour un revenu par U. C. de 500 F par mois procurera sans doute, en moyenne, une satisfaction plus grande qu'une même augmentation pour un revenu par U. C. de 1 000 F ou de 1 500 F. Pour un même consommateur l'utilité marginale de la monnaie sera, en moyenne, vraisemblablement décroissante en fonction du revenu (les prix étant supposés fixes) et c'est l'hypothèse qui sera retenue au cours de cette étude.

#### ÉQUATIONS DE L'OPTIMUM POUR UN CONSOMMATEUR

Considérons un consommateur disposant d'un revenu  $R$  dont il épargne une partie  $E$  et dépense le complément  $M$  à l'achat de  $n$  différents biens. Supposons que ses besoins et satisfactions sont exprimés par une fonction « Utilité totale »  $u(x_1, \dots, x_n, E)$ . Les quantités achetées et l'épargne sont déterminées par la condition «  $u = \text{maximum}$  », sous réserve de la condition :

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n + E = M + E = R, \quad (1)$$

$p_1, \dots, p_n$  étant les prix des différents biens.

On peut calculer les quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $E$  en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et maximisant la fonction :  $u + \lambda (R - \sum_{i=1}^n p_i x_i - E)$ . Si l'on pose  $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , les conditions d'optimum s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1 - \lambda p_1 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ u_n - \lambda p_n = 0 \\ u_E - \lambda = 0 \end{cases} \quad (2)$$

soit, en éliminant  $\lambda$ ,  $n$  équations, qui ajoutées à l'équation (1) font  $(n + 1)$  équations pour déterminer les  $(n + 1)$  quantités  $x_1, \dots, x_n, E$  en fonction des prix  $p_1, \dots, p_n$  et de  $R$ .

Si l'on pose  $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ , les conditions du deuxième ordre pour qu'il s'agisse bien d'un maximum ( $d^2u < 0$ ) entraînent que les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n & u_E \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1n} & u_{1E} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n1} & \dots & u_{nn} & u_{nE} \\ u_E & u_{E1} & \dots & u_{En} & u_{EE} \end{vmatrix} \tag{3}$$

soient alternativement positifs et négatifs, ainsi que tous les déterminants obtenus à partir de ceux-ci par permutation des  $(n + 1)$  biens  $(1, 2, \dots, n, E)$ .

Différencions totalement les équations (1) et (2), on a :

$$\begin{cases} p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n + dE = -x_1 dp_1 - \dots - x_n dp_n + dR \\ -p_1 d\lambda + u_{11} dx_1 + \dots + u_{1n} dx_n + u_{1E} dE = \lambda dp_1 \\ \dots \\ -p_n d\lambda + u_{n1} dx_1 + \dots + u_{nn} dx_n + u_{nE} dE = \lambda dp_n \\ -d\lambda + u_{E1} dx_1 + \dots + u_{En} dx_n + u_{EE} dE = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{Posons } U = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n & u_E \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1n} & u_{1E} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n1} & \dots & u_{nn} & u_{nE} \\ u_E & u_{E1} & \dots & u_{En} & u_{EE} \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & p_1 & \dots & p_n & 1 \\ -p_1 & u_{11} & \dots & u_{1n} & u_{1E} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_n & u_{n1} & \dots & u_{nn} & u_{nE} \\ -1 & u_{E1} & \dots & u_{En} & u_{EE} \end{vmatrix}$$

et appelons  $U_j$  le mineur de  $U$  relatif à  $u_j$ ,  $U_{ji}$  le mineur de  $U$  relatif à  $u_{ji}$  et  $U_0$  le mineur relatif au point de rencontre de la première ligne et de la première colonne.

Faisons d'abord  $dp_1 = dp_2 = \dots = dp_n = 0$ , la résolution du système (4) par la méthode de Cramer donne :

$$\frac{\partial x_j}{\partial R} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = \frac{-U_j}{\lambda}, \quad \frac{\partial E}{\partial R} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = \frac{-U_E}{\lambda}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = U_0,$$

d'où :

$$\frac{\partial x_j}{\partial R} = \lambda \frac{U_j}{U}, \quad \frac{\partial E}{\partial R} = \lambda \frac{U_E}{U}, \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial \lambda}{\partial R} = -\lambda^2 \frac{U_0}{U}} \tag{5}$$

Faisons maintenant  $dp_1 = \dots = dp_{i-1} = dp_{i+1} = \dots = dp_n = 0$  et  $dR = 0$ , la résolution du système (4) par la méthode de Cramer donne :

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = x_i \frac{U_j}{\lambda} + \frac{-U_{ji}}{\lambda}, \quad \frac{\partial E}{\partial p_i} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = x_i \frac{U_E}{\lambda} + \frac{-U_{Ei}}{\lambda}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \cdot \left(\frac{-U}{\lambda^2}\right) = -x_i U_0 + U_i,$$

d'où :

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{U_j}{U} + \lambda \frac{U_{ji}}{U}, \quad \frac{\partial E}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{U_E}{U} + \lambda \frac{U_{Ei}}{U}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \lambda^2 x_i \frac{U_0}{U} - \lambda^2 \frac{U_i}{U} \tag{6}$$

L'équation  $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{U_j}{U} + \lambda \frac{U_{ji}}{U} = -x_i \frac{\partial x_j}{\partial R} + \lambda \frac{U_{ji}}{U}$  est, à très peu près, l'équation de Slutsky. Elle n'en diffère que par l'introduction de la monnaie épargnée dans les équations. L'équation de Slutsky a été commentée par J. R. Hicks dans *Valeur et capital* (1).

L'équation  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = x_i \lambda^2 \frac{U_0}{U} - \lambda^2 \frac{U_i}{U}$  peut s'écrire en raison des équations (5) :

$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = -x_i \frac{\partial \lambda}{\partial R} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial R}$  ou  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \frac{-\partial(\lambda x_i)}{\partial R}$  qui traduit uniquement un effet de revenu, ou encore  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \frac{-x_i \lambda}{R} \left( \frac{R \partial \lambda}{\lambda \partial R} + \frac{R \partial x_i}{x_i \partial R} \right)$ , d'où, en posant  $\frac{R \partial \lambda}{\lambda \partial R} = -e_{\lambda, R}$  (normalement  $< 0$ ) et  $\frac{R \partial x_i}{x_i \partial R} = e_{x_i, R}$  (normalement  $> 0$ ) :  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \frac{x_i \lambda}{R} (e_{\lambda, R} - e_{x_i, R})$ ; on aura donc  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} > 0$  si  $e_{\lambda, R} > e_{x_i, R}$ , et  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} < 0$  dans le cas contraire.

On peut encore écrire :  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \frac{-x_i \lambda}{dR} \left( \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{dx_i}{x_i} \right)$ , d'où :  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}$  sera positif si les accroissements relatifs de  $x_i$  sont plus petits que les diminutions relatives de  $\lambda$  et négatif dans le cas contraire. Remarquons que  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}$  sera toujours  $> 0$  pour un bien inférieur  $\left( \frac{\partial x_i}{\partial R} < 0 \right)$  puisque l'on a  $\frac{\partial \lambda}{\partial R} < 0$ .

$$\text{Calculons } \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} dp_i = \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} dp_n.$$

$$\text{On a : } \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} dp_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial R} dp_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda x_i dp_i)}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left[ -\lambda M \frac{\sum x_i dp_i}{M} \right]$$

d'où, en posant  $dI = \frac{\sum x_i dp_i}{M}$  ( $I$  étant représentatif d'un indice de prix continu relatif au

consommateur considéré),  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} dp_i = - \frac{\partial(\lambda M)}{\partial R} dI$  d'où :  $\frac{\partial \lambda}{\partial I} = - \frac{\partial(\lambda M)}{\partial R}$  (7)

On peut démontrer que l'indice continu des prix est égal à  $e^I$ . Supposons une détermination de la base tous les mois. Si  $(\Delta I)_k$  est le taux d'accroissement mensuel des prix

durant le mois  $k$ , on a :  $1 + (\Delta I)_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i, k-1} p_{i, k}}{\sum_{i=1}^n x_{i, k-1} p_{i, k-1}}$  et comme  $(\Delta I)_k$  est de l'ordre de

0,005 on a :  $1 + (\Delta I)_k = e^{(\Delta I)_k}$ . L'indice continu des prix est donc égal à :

$$\prod_k (1 + (\Delta I)_k) = e^{\sum_k (\Delta I)_k} = e^I \text{ puisque } I = \sum_k (\Delta I)_k.$$

Le résultat (7) peut être obtenu directement; on a en effet :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{\partial^2 u}{\partial I \partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial u}{\partial I} \right).^{(1)}$$

Or on a :

$$du_{(R=C')} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial p_i} dp_i$$

et 
$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + u_E \frac{\partial E}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n u_j \left( -\lambda x_i \frac{U_j}{U} + \lambda \frac{U_{ji}}{U} \right) + u_E \left( -\lambda x_i \frac{U_E}{U} + \lambda \frac{U_{Ei}}{U} \right).$$

On a : 
$$\sum_{j=1}^n u_j U_j + u_E U_E = U \text{ et } \sum_{j=1}^n u_j U_{ji} + u_E U_j = 0 \text{ (Comme développement}$$

d'un déterminant dont deux lignes sont identiques) d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = -\lambda x_i$$

On a donc : 
$$du_{(R=C')} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial p_i} dp_i = \sum_{i=1}^n (-\lambda x_i dp_i) = -\lambda M \sum_{i=1}^n \frac{x_i dp_i}{M} = -\lambda M dI$$

d'où : 
$$\frac{\partial u}{\partial I} = -\lambda M \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{\partial^2 u}{\partial I \partial R} = -\frac{\partial (\lambda M)}{\partial R}. \quad (8)$$

Comme précédemment on peut écrire : 
$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = -\frac{M\lambda}{R} \left[ \frac{R}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial R} + \frac{R}{M} \frac{\partial M}{\partial R} \right]$$

d'où, en posant  $\frac{R}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial R} = -e_{\lambda,R}$  et  $\frac{R}{M} \frac{\partial M}{\partial R} = e_{M,R}$ , 
$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{M\lambda}{R} [e_{\lambda,R} - e_{M,R}].$$

$\frac{\partial \lambda}{\partial I}$  sera positif si  $e_{\lambda,R} > e_{M,R}$ , négatif dans le cas contraire.

#### LES DIVERSES UTILITÉS MARGINALES DE LA MONNAIE

Les équations (2) peuvent encore s'écrire :

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \dots = \frac{u_n}{p_n} = \frac{u_E}{1} = \lambda = u_R = u_M,$$

$u_E$  étant l'utilité marginale de la monnaie épargnée

$u_M$  étant l'utilité marginale de la monnaie dépensée

$u_R$  étant l'utilité marginale du revenu.

1.  $du = u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n + u_E dE = \lambda dR$  d'où :  $\lambda = du/dR$ . (Les prix étant supposés constants.)

$$\text{On a en effet } u_R = \frac{u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n + U_E dE}{p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n + dE} = \frac{du}{dR}$$

$$\text{et } u_M (E = C^e) = \frac{u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n}{p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n} = \frac{du}{dM} (dE = 0)$$

Ainsi, à l'optimum, l'utilité marginale de la monnaie épargnée est égale à l'utilité marginale de la monnaie dépensée et égale à l'utilité marginale du revenu.

On peut vérifier que pour un trajet sur lequel tous les points correspondent à un optimum,  $u_R$  et  $\lambda$  sont égaux ainsi que leurs dérivées par rapport à  $R$  et par rapport aux prix.

$$\text{On a en effet : } u_R = u_1 \frac{dx_1}{dR} + \dots + u_n \frac{dx_n}{dR} + u_E \frac{dE}{dR}$$

$$\text{d'où : } u_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} = \frac{\partial u_1}{\partial R} \frac{dx_1}{dR} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial R} \frac{dx_n}{dR} + \frac{\partial u_E}{\partial R} \frac{dE}{dR}$$

$$\text{Or on a : } \frac{\partial u_i}{\partial R} = \sum_{j=1}^n u_{ji} \frac{\partial x_j}{\partial R} + u_{Ei} \frac{\partial E}{\partial R} = \lambda \left[ \sum_{j=1}^n u_{ji} \frac{U_j}{U} + u_{Ei} \frac{U_E}{U} \right],$$

$$\text{et } u_i U_0 + \sum_{j=1}^n u_{ji} U_j + u_{Ei} U_E = 0 \quad (\text{Comme développement d'un déterminant dont deux}$$

$$\text{lignes sont identiques), d'où : } \frac{\partial u_i}{\partial R} = -u_i \lambda \frac{U_0}{U}$$

$$\text{d'où : } u_{RR} = -\lambda \frac{U_0}{U} \left[ u_1 \frac{dx_1}{dR} + \dots + u_n \frac{dx_n}{dR} + u_E \frac{dE}{dR} \right] = -\lambda^2 \frac{U_0}{U}$$

$$\text{De même on a : } \frac{\partial u}{\partial p_i} = -\lambda x_i,$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial u_R}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial R \partial p_i} = -\left( \lambda \frac{\partial x_i}{\partial R} + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial R} \right) = -\lambda^2 \frac{U_i}{U} + x_i \lambda^2 \frac{U_0}{U}$$

$$\text{Le long d'un trajet optimum on a donc } \lambda = u_R, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial R} = \frac{\partial u_R}{\partial R} = u_{RR} \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \frac{\partial u_R}{\partial p_i}$$

$$\begin{aligned} \text{De même } \frac{\partial u_E}{\partial R} &= u_{E1} \frac{\partial x_1}{\partial R} + \dots + u_{En} \frac{\partial x_n}{\partial R} + u_{EE} \frac{\partial E}{\partial R} \\ &= u_{E1} \lambda \frac{U_1}{U} + \dots + u_{En} \lambda \frac{U_n}{U} + u_{EE} \lambda \frac{U_E}{U} = -u_E \lambda \frac{U_0}{U} = -\lambda^2 \frac{U_0}{U}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{\partial u_E}{\partial p_i} &= u_{E1} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \dots + u_{En} \frac{\partial x_n}{\partial p_i} + u_{EE} \frac{\partial E}{\partial p_i} = -x_i \lambda \left[ \sum_{j=1}^n u_{Ej} \frac{U_j}{U} + u_{EE} \frac{U_E}{U} \right] \\ &+ \lambda \left[ \sum_{j=1}^n u_{Ej} \frac{U_{ij}}{U} + u_{EE} \frac{U_{iE}}{U} \right] = x_i \lambda u_E \frac{U_0}{U} - \lambda u_E \frac{U_i}{U} = x_i \lambda^2 \frac{U_0}{U} - \lambda^2 \frac{U_i}{U}. \end{aligned}$$

$$\text{De même } \frac{\partial u_M}{\partial R} = -\lambda^2 \frac{U_0}{U} \text{ et } \frac{\partial u_M}{\partial p_i} = x_i \lambda^2 \frac{U_0}{U} - \lambda^2 \frac{U_i}{U}$$

Donc le long d'un trajet composé d'optima les quatre fonctions  $u_R$ ,  $u_M$ ,  $u_E$  et  $\lambda$  sont égales ainsi que leurs dérivées par rapport à  $R$  et par rapport aux prix, mais elles ne sont

pas identiques car les dérivées  $u_{MM}$ ,  $u_{ME}$ ,  $u_{EE}$  ne sont généralement pas égales. Par la suite  $\lambda$  sera appelé « utilité marginale de la monnaie » sans préciser davantage.

$$\text{On tire des résultats précédents : } du = \frac{\partial u}{\partial R} dR + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial p_i} dp_i = \lambda dR - \lambda M dI, \text{ ce}$$

qui signifie qu'un léger déplacement sur l'extremum (dans l'hyperespace à  $(n+2)$  dimensions  $u$ ,  $R$ ,  $p_1$ , ...,  $p_n$ ) se traduit par une variation  $du$  qui ne dépend que de  $dR$  et de  $dI$ , variation relative de l'indice continu des prix spécifique du consommateur, les variations de  $p_1$ , ...,  $p_n$  n'ayant d'incidence sur les variations de  $u$  que par l'intermédiaire de l'indice continu des prix.

Sous une autre forme, supposant  $dR = 0$  et  $dp_1 = \dots = dp_{i-1} = dp_{i+1} = \dots = dp_n = 0$ , la différentielle totale  $du$  est égale à  $\frac{\partial u}{\partial p_i} dp_i = -\lambda x_i dp_i$ .

$$\text{D'autre part on a : } \frac{\partial u}{\partial I} = -\lambda M \text{ et } \frac{\partial I}{\partial p_i} = \frac{x_i}{M} \text{ d'où : } \frac{du}{dp_i} = -\lambda M \cdot \frac{x_i}{M} = \frac{\partial u}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial p_i}$$

Or si  $u$  ne s'exprimait pas uniquement en fonction de  $R$  et de  $I$ , on aurait :  $\frac{du}{dp_i} = \frac{\partial u}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p_i}$

Donc à l'optimum on a :  $u = F(R, I) + C$  et puisque l'indice continu des prix est égal à  $e^I$ , l'utilité totale peut s'exprimer uniquement en fonction du revenu et de l'indice continu des prix spécifique du consommateur.

Mais la fonction  $u$  ainsi définie n'existe qu'à la condition :

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)}{\partial I} = \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial I} \right)}{\partial R} \text{ ou } \frac{\partial \lambda}{\partial I} = - \frac{\partial (\lambda M)}{\partial R} = - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial R} M + \frac{\partial M}{\partial R} \lambda \right) \text{ d'où : } \frac{\partial \lambda}{\partial I} + \frac{\partial \lambda}{\partial R} M + \lambda \frac{\partial M}{\partial R} = 0. (9)$$

Cette relation est la condition pour qu'une fonction  $\lambda$  représente l'utilité marginale de la monnaie pour un consommateur particulier.

Appelons  $\Delta R$  l'accroissement du revenu nominal d'un consommateur particulier,  $\Delta R'$  l'accroissement du revenu réel de celui-ci,  $\Delta I$  l'accroissement relatif des prix, on a :  $R + \Delta R = (R + \Delta R') (1 + \Delta I)$  d'où :  $\Delta R \neq \Delta R' + R \cdot \Delta I$  d'où  $\Delta u = \lambda \Delta R - \lambda M \Delta I = \lambda \Delta R + \lambda R \cdot \Delta I - \lambda M \cdot \Delta I$

$$\text{d'où : } \Delta u = \lambda \Delta R' + \lambda E \cdot \Delta I = \lambda R \left[ \frac{\Delta R'}{R} + \frac{E}{R} \cdot \Delta I \right]. \quad (10)$$

Sous la condition que  $\frac{\Delta R'}{R}$  et  $\Delta I$  soient indépendants, c'est-à-dire que l'accroissement relatif du revenu réel soit le même qu'en l'absence d'inflation, on peut penser que l'inflation accroît la satisfaction du consommateur.

TABLEAU 1

En %	$\Delta S$	$\Delta S'$	$\Delta I$
1960 . . . . .	10,1	6,7	3,2
1961 . . . . .	9,4	5,9	3,3
1962 . . . . .	13,1	8,0	4,7
1963 . . . . .	11,8	5,4	6,1
1964 . . . . .	9,6	5,4	4,0
1965 . . . . .	7,1	4,6	2,4
1966 . . . . .	7,9	4,9	2,9
1967 . . . . .	8,8	5,3	2,8
1968 . . . . .	10,2	5,6	4,4
1969 . . . . .	13,6	5,1	8,1
1970 . . . . .	12,5	6,5	5,6
1971 . . . . .	10,5	5,2	5,0



Appelons  $\Delta S$  le taux d'accroissement annuel du revenu nominal de l'ensemble des ménages français (rémunération des salariés + revenus de la propriété et de l'entreprise allant aux particuliers) <sup>(1)</sup>,  $\Delta S'$  le taux d'accroissement annuel du revenu réel de ces ménages,  $\Delta I$  le taux d'accroissement annuel de l'indice des prix <sup>(1)</sup> (lequel est très voisin du taux d'accroissement de l'indice des prix de détail),  $\Delta \delta$  le taux d'accroissement annuel du nombre total d'unités de consommation, on a :  $1 + \Delta S = (1 + \Delta S') (1 + \Delta I)$  d'où :  $1 + \Delta S' = \frac{1 + \Delta S}{1 + \Delta I}$  et le taux d'accroissement du revenu réel moyen des ménages par unité de consommation est égal à  $\Delta S' - \Delta \delta$ . Si  $\Delta \delta$  est constant, le coefficient de corrélation entre  $\Delta S' - \Delta \delta$  et  $\Delta I$  est le même que celui entre  $\Delta S'$  et  $\Delta I$ . Le tableau 1 indique les valeurs de  $\Delta S'$  et  $\Delta I$  pour la période 1960-1971.

$$\begin{aligned} \text{Le calcul donne : } \Sigma (\overline{\Delta S'} - \Delta S')^2 &= 9,59, \quad \Sigma (\Delta I - \overline{\Delta I})^2 = 30,08 \\ \Sigma (\Delta S' - \overline{\Delta S'}) (\Delta I - \overline{\Delta I}) &= 0,58 \quad \text{d'où : } r_{\Delta S', \Delta I} = \frac{0,58}{\sqrt{9,59 \times 30,08}} = 0,034. \end{aligned}$$

$\Delta S'$  et  $\Delta I$  sont donc indépendants, ce qui signifie que l'accroissement moyen de revenu par unité de consommation est le même qu'en l'absence d'inflation. Pour une certaine catégorie socio-professionnelle,  $\Delta S'$  sera peut-être supérieur à ce qu'il aurait été en l'absence d'inflation, pour une certaine autre peut-être sera-t-il inférieur, mais en moyenne il sera égal à ce qu'il aurait été en l'absence d'inflation.

Mais l'équation (10)  $\Delta u = \lambda [\Delta R' + E \Delta I]$  conduirait à conclure que, dès qu'un consommateur épargne une partie de son revenu, l'inflation accroît sa satisfaction. En réalité on n'en sait rien.

Soit  $F(R, I)$  une intégrale de l'équation  $du = \lambda dR - \lambda M dI$ , on peut écrire :  $u = F(R, I) + C$  avec  $C = -F(R_m, I)$ ,  $R_m$  étant le revenu pour lequel la satisfaction est nulle d'où :  $u = F(R, I) - F(R_m, I)$ . Or  $R_m$  augmente en fonction du temps dans les économies occidentales pour deux raisons : d'abord parce que  $R_m$ , pour un revenu réel constant, augmente avec  $I$ , ensuite parce que  $R_m$ , pour un indice des prix inchangé, augmente avec le revenu réel lequel croît avec l'expansion économique. L'accroissement du standard de vie rend en effet le consommateur plus exigeant et le revenu pour lequel sa satisfaction sera nulle augmente avec le standard de vie. On est donc amené à écrire :

$$\begin{aligned} \Delta u &= [F(R + \Delta R, I + \Delta I) - F(R, I)] - [F(R_m + \Delta R_m, I + \Delta I) - F(R_m, I)] \\ \text{ou} \quad \Delta u &= \lambda [\Delta R' + E \Delta I] - \lambda_m [\Delta R'_m + E_m \Delta I] \\ \text{ou} \quad \Delta u &= (\lambda \Delta R' - \lambda_m \Delta R'_m) + (\lambda E - \lambda_m E_m) \cdot \Delta I. \end{aligned} \quad (10')$$

Donc l'inflation augmentera la satisfaction si  $\lambda E > \lambda_m E_m$  et la diminuera dans le cas contraire, mais dans tous les cas l'accroissement de satisfaction sera moindre que ne le laissait supposer l'équation (10). Nous étudierons dans la seconde partie un cas assez général, où la satisfaction augmente avec l'inflation.

#### CAS D'UNE ÉCONOMIE DANS LAQUELLE LES PRIX SONT FIXES

Nous allons d'abord étudier le cas où les prix sont constants et fixés autoritairement. Dans ce cas, le système (4) se simplifie puisque l'on a :  $dp_1 = dp_2 = \dots = dp_n = 0$ , les équations (6) disparaissent et il ne reste que les équations (5).  $u$ , qui était à l'optimum une

1. Source : Rapport sur les Comptes de la Nation, tome 3, 1971 (Les comptes et agrégats), pp. 170-171.

fonction de  $R, p_1, \dots, p_n$ , n'est plus fonction que de  $R$ , fonction d'ailleurs croissante de  $R$  puisque  $\lambda > 0$ .

On peut imaginer une fonction  $u^*(M, E)$  identique à  $u(x_1, \dots, x_n, E)$  pour toute valeur des variables correspondant à un optimum. On a dans le cas d'un optimum :

$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \dots = \frac{u_n}{p_n} = u_M = u_E$  et par définition  $u_M^* = u_M$  et  $u_E^* = u_E$ , donc  $u_M^* = u_E^*$ . On est donc en présence d'un optimum pour  $u^*(M, E)$ . Inversement supposons un optimum pour  $u^*(M, E)$  on a  $u_M^* = u_E^*$  et par définition :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\partial u / \partial x_i}{p_i} = \frac{\partial u^* / \partial x_i}{p_i} = \frac{\partial u^* / \partial M \times \partial M / \partial x_i}{p_i} = \frac{\partial u^*}{\partial M} = u_M^*.$$

Or on a par définition  $u_M^* = u_M$  ainsi que  $u_E^* = u_E$ ,

d'où :  $\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \dots = \frac{u_n}{p_n} = u_M = u_E$ . On est donc également en présence d'un optimum pour  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, E)$ . Donc chercher l'optimum pour  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, E)$  revient à chercher l'optimum pour  $u^*(M, E)$  et inversement.

L'optimum est obtenu en cherchant le maximum de  $u^*(M, E) - \mu(M + E - R)$ ,  $\mu$  étant un multiplicateur de Lagrange, sous la condition :  $M + E - R = 0$ .

$$\text{d'où :} \quad \begin{cases} M + E = R \\ u_M^* - \mu = 0 \\ u_E^* - \mu = 0 \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \mu = u_M^* = u_E^* = u_E = u_M = \lambda, \quad (11)$$

la condition du deuxième ordre étant  $U = \begin{vmatrix} 0 & u_M^* & u_E^* \\ u_M^* & u_{MM}^* & u_{ME}^* \\ u_E^* & u_{EM}^* & u_{EE}^* \end{vmatrix} = \mu^2 (2u_{ME}^* - u_{MM}^* - u_{EE}^*) > 0$ ,

$$\text{soit} \quad 2u_{ME}^* - u_{MM}^* - u_{EE}^* > 0. \quad (12)$$

Différencions totalement les équations (12). En supprimant les astérisques et puisque l'on a :  $\mu = \lambda$  et  $d\mu = d\lambda$ , on obtient :

$$\begin{cases} dM + dE = dR \\ -d\lambda + u_{MM} dM + u_{ME} dE = 0 \\ -d\lambda + u_{ME} dM + u_{EE} dE = 0 \end{cases} \quad (13)$$

d'où, en résolvant par la méthode de Cramer :

$$\frac{dM}{dR} = \frac{u_{EE} - u_{ME}}{u_{EE} + u_{MM} - 2u_{ME}} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dR} = \frac{u_{MM} - u_{ME}}{u_{EE} + u_{MM} - 2u_{ME}}, \quad (14)$$

$$\text{d'où, en posant} \quad k = \frac{u_{ME} - u_{MM}}{u_{ME} - u_{EE}}, \quad \frac{dM}{dR} = \frac{1}{1+k} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dR} = \frac{k}{1+k}.$$

$$\text{Pour} \quad \frac{dM}{dR} = 1 \quad \text{on a} \quad u_{ME} = u_{MM}$$

$$\text{Pour} \quad \frac{1}{2} < \frac{dM}{dR} < 1 \quad \text{on a} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{1+k} < 1 \quad \text{d'où :} \quad 0 < k < 1.$$

L'hypothèse  $u_{ME} - u_{EE} < 0$  entraîne  $u_{ME} - u_{MM} < 0$ , puisque  $k > 0$ , ce qui est incompatible avec la condition (12). Donc on a :  $u_{ME} > u_{EE}$  et  $u_{ME} > u_{MM}$  et, puisque  $k < 1$ ,  $u_{ME} - u_{MM} < u_{ME} - u_{EE}$  d'où :  $u_{ME} > u_{MM} > u_{EE}$ .

Pour  $\frac{dM}{dR} = \frac{1}{2}$  on a  $k = 1$  d'où :  $u_{ME} > u_{MM} = u_{EE}$ .

Pour  $0 < \frac{dM}{dR} < \frac{1}{2}$  on a  $k > 1$ . L'hypothèse  $u_{ME} < u_{EE}$  entraîne encore  $u_{ME} < u_{MM}$ , ce qui est incompatible avec la condition (12), d'où :  $u_{ME} > u_{EE}$  et  $u_{ME} > u_{MM}$  et, puisque  $k > 1$ ,  $u_{ME} > u_{EE} > u_{MM}$ .

Pour  $\frac{dM}{dR} = 0$  on a  $u_{ME} = u_{EE}$ .

On a d'autre part  $\frac{d\lambda}{dR} = -\lambda^2 \frac{U_0}{U}$ , avec  $U_0 = u_{MM} u_{EE} - u_{ME}^2$  (5)

et  $U = \lambda^2 (2u_{ME} - u_{MM} - u_{EE}) > 0$ , d'où, si l'on veut avoir  $d\lambda/dR < 0$ ,  $U_0 > 0$ , d'où :  $|u_{ME}| < \sqrt{u_{MM} u_{EE}}$ , ce qui suppose que  $u_{MM}$  et  $u_{EE}$  sont du même signe. En fait, on supposera  $u_{MM}$  et  $u_{EE} < 0$  et la condition sera :  $u_{EE} < u_{MM} < u_{ME} < \sqrt{u_{MM} u_{EE}}$  ou  $u_{MM} < u_{EE} < u_{ME} < \sqrt{u_{MM} u_{EE}}$  selon que  $dM/dR$  est plus grand ou plus petit que  $1/2$ .

Nous allons maintenant faire une hypothèse sur les dérivées secondes  $u_{MM}$ ,  $u_{EE}$ ,  $u_{ME}$  et supposer :  $u_{MM} = -\frac{aR+b}{R^3}$ ,  $u_{EE} = -\frac{cR+d}{R^3}$ ,  $u_{ME} = -\frac{eR+f}{R^3}$ .

Or quand  $R \rightarrow 0$ ,  $dM/dR$  tend vers 1, d'où  $u_{ME} = u_{MM}$  d'où  $b = f$  et quand  $R \rightarrow \infty$ ,  $dM/dR$  tend vers 0, d'où  $u_{ME} = u_{EE}$  d'où  $c = e$ .

Les dérivées secondes se présentent donc sous la forme :

$$u_{MM} = -\frac{aR+b}{R^3} \quad u_{EE} = -\frac{cR+d}{R^3} \quad u_{ME} = -\frac{cR+b}{R^3} \quad (15)$$

$$\text{On tire : } \frac{U_0}{U} = \frac{u_{MM} \times u_{EE} - u_{ME}^2}{\lambda^2 (2u_{ME} - u_{MM} - u_{EE})} = \frac{(aR+b)(cR+d) - (cR+b)^2}{\lambda^2 [aR+b + cR+d - 2(cR+b)] R^3}$$

$$\text{d'où : } \frac{d\lambda}{dR} = -\lambda^2 \frac{U_0}{U} = -\frac{c(a-c)R^2 + (ad-bc)R + b(d-b)}{[(a-c)R + (d-b)]R^3} \quad (16)$$

On peut vérifier que l'on a  $du_E = du_M = du_R = d\lambda$ . Vérifions-le pour  $du_E$  et  $d\lambda$ ; on a :  $du_E = (u_{EE} \cdot dE/dR + u_{ME} \cdot dM/dR) dR$  avec

$$\frac{dE}{dR} = \frac{u_{MM} - u_{ME}}{u_{EE} + u_{MM} - 2u_{ME}} = \frac{(a-c)R}{(a-c)R + (d-b)} \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dR} = \frac{d-b}{(a-c)R + (d-b)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } du_E &= -\frac{(cR+d)(a-c)R + (cR+b)(d-b)}{R^3 [(a-c)R + (d-b)]} dR \\ &= -\frac{c(a-c)R^2 + (ad-bc)R + b(d-b)}{R^3 [(a-c)R + (d-b)]} dR = d\lambda \end{aligned}$$

défini par (16). Soit  $R_d$  la valeur de  $R$  pour laquelle on a  $dM/dR = 1/2$ , d'où :  $u_{MM} = u_{EE}$ , on a alors :  $aR_d + b = cR_d + d$ , d'où :  $R_d = (d-b)/(a-c)$ . (17)

La condition (12) s'écrit  $(aR+b) + (cR+d) - 2(cR+b) > 0$  ou  $(a-c)R + (d-b) > 0$  ou encore  $(a-c)(R+R_d) > 0$ .  $R$  et  $R_d$  étant positifs, on doit avoir  $a > c$ , d'où  $d > b$ .



L'équation (16) peut s'écrire

$$\frac{d\lambda}{dR} = \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\gamma}{R^3} + \frac{\delta}{(a-c)R + (d-b)} = \frac{[(a-c)R + (d-b)](\alpha R^2 + \beta R + \gamma) + \delta R^3}{[(a-c)R + (d-b)]R^3}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad & (a-c)\alpha + \delta = 0 \quad \alpha(d-b) + \beta(a-c) = -c(a-c) \\ & \beta(d-b) + \gamma(a-c) = -(ad-bc) \quad \gamma(d-b) = -b(d-b) \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad \gamma = -b, \quad \beta = -a, \quad \alpha = \frac{(a-c)^2}{d-b}, \quad \delta = -\alpha(a-c) = -\frac{(a-c)^3}{d-b}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d\lambda}{dR} = \frac{(a-c)^2}{(d-b)} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R + \frac{d-b}{a-c}} \right] - \frac{a}{R^2} - \frac{b}{R^3}$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{d\lambda}{dR} = \frac{(a-c)}{R_d} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R + R_d} \right] - \frac{a}{R^2} - \frac{b}{R^3}, \quad \text{avec} \quad R_d = \frac{d-b}{a-c}, \quad (18)$$

$$\text{d'où :} \quad \lambda = \frac{(a-c)}{R_d} [\mathcal{L}R - \mathcal{L}(R + R_d)] + \frac{a}{R} + \frac{b}{2R^2}, \quad (19)$$

(la constante d'intégration est nulle si l'on suppose que  $\lambda \rightarrow 0$  quand  $R \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \text{d'où : } u = f(R) = \int \lambda dR = \frac{(a-c)}{R_d} [R(\mathcal{L}R - 1) - (R + R_d) \\ (\mathcal{L}(R + R_d) - 1)] + a\mathcal{L}R - \frac{b}{2R} + C. \quad (20) \end{aligned}$$

Soit  $R_m$  la valeur de  $R$  pour laquelle on a  $u = 0$ , on en déduit :

$$f(R_m) = \frac{(a-c)}{R_d} [R_m(\mathcal{L}R_m - 1) - (R_m + R_d)(\mathcal{L}(R_m + R_d) - 1)] + a\mathcal{L}R_m - \frac{b}{2R_m} + C = 0$$

$$\text{d'où :} \quad u = f(R) - f(R_m).$$

Ici il nous faut distinguer le cas des économies traditionnelles où l'on se contente de satisfaire des besoins fondamentaux et où  $u$  oscille autour d'une valeur centrale constante dans le temps et le cas des économies en expansion où l'on cherche à satisfaire non seulement des besoins fondamentaux mais aussi un ensemble grandissant de besoins supplémentaires. Cependant, les nouveaux biens acquis, qui ne sont pas des biens fondamentaux, procurent une satisfaction qui diminue avec le temps par suite de l'accoutumance, ce qui entraîne que l'utilité totale correspondant à une certaine valeur de  $R$  diminue en fonction du temps. On peut expliquer ce phénomène par l'hypothèse que  $R_m$  augmente en fonction du temps et l'accroissement de satisfaction  $\Delta u$  procuré par un accroissement de revenu  $\Delta R$  ne sera pas  $\Delta u = \lambda \Delta R = f(R + \Delta R) - f(R)$  mais  $\Delta u = [f(R + \Delta R) - f(R)] - [f(R_m + \Delta R_m) - f(R_m)]$ .

*Remarque :* Théoriquement, toute fonction de  $u$ ,  $v(u)$  positive, monotone, croissante peut être acceptée comme fonction Utilité totale. On peut cependant se demander quel est l'intérêt d'une telle transformation, le fait de remplacer  $u$  par  $v = v(u)$  consistant essentiellement dans le cas présent à remplacer une hypothèse précise par une hypothèse plus vague. A moins de supposer que  $u(R)$  conserve sa forme dans la transformation  $v = v(u)$ , donc que  $v(u)$  est une fonction linéaire de  $u$  et si l'on ajoute la condition  $v(0) = 0$ , c'est-à-dire que  $v$  s'annule en même temps que  $u$ ,  $u(R)$  sera défini à un facteur près.

## CAS D'UNE ÉCONOMIE AVEC DES PRIX VARIABLES

Nous allons maintenant supposer que les prix varient selon les lois du marché et qu'ils croissent en moyenne avec le temps, comme c'est le cas pour les économies occidentales.

On peut supposer que les formules (15) restent valables si l'on considère le revenu réel  $R' = R/e^I$ , donc que l'on a :

$$u_{MM} = -\frac{aR' + b}{R'^3} = -\frac{ae^{2I}R + be^{3I}}{R^3}, \quad u_{EE} = -\frac{cR' + d}{R'^3} = -\frac{ce^{2I}R + de^{3I}}{R^3}$$

et 
$$u_{ME} = -\frac{cR' + b}{R'^3} = -\frac{ce^{2I}R + be^{3I}}{R^3} \quad \text{avec} \quad R = R'e^I,$$

$\frac{dI}{dt}$  étant le taux instantané d'accroissement des prix.

La nouvelle expression de  $\partial\lambda/\partial R$  s'obtient en remplaçant dans (15)  $a$  et  $c$  par  $ae^{2I}$  et  $ce^{2I}$ ,  $b$  et  $d$  par  $be^{3I}$  et  $de^{3I}$ , et si l'on pose :  $R'_d = \frac{d-b}{a-c}$ ,

on a :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial R} = \frac{(a-c)e^I}{R'_d} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R + R'_d e^I} \right] - \frac{ae^{2I}}{R^2} - \frac{be^{3I}}{R^3} \quad (21)$$

Reprenons l'équation (7) et dérivons la par rapport à  $R$ , on a :

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial R \partial I} = -\frac{\partial^2(\lambda M)}{\partial R^2} = -\left[ \lambda \frac{\partial^2 M}{\partial R^2} + 2 \frac{\partial\lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2\lambda}{\partial R^2} \right], \quad (22)$$

équation qui permet de déterminer  $\lambda$  si l'on connaît  $\frac{\partial\lambda}{\partial R}$  et  $M$ .

Or on a :

$$\frac{\partial M}{\partial R} = \frac{u_{EE} - u_{ME}}{u_{EE} + u_{MM} - 2u_{ME}} = \frac{(d-b)e^{3I}}{(a-c)e^{2I}R + (d-b)e^{3I}}$$

d'où :

$$\frac{\partial M}{\partial R} = \frac{R'_d e^I}{R + R'_d e^I} \quad (23)$$

d'où :

$$M = \int_0^R \frac{R'_d e^I dR}{R + R'_d e^I} = R'_d e^I \varepsilon \left( 1 + \frac{R}{R'_d e^I} \right) \quad (24)$$

et

$$\frac{\partial^2 M}{\partial R^2} = -\frac{R'_d e^I}{(R + R'_d e^I)^2} \quad (25)$$

On a d'autre part en dérivant (21) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\lambda}{\partial R \partial I} &= \frac{e^I(a-c)}{R'_d} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R + R'_d e^I} \right] + \frac{(a-c)e^{2I}}{(R + R'_d e^I)^2} - \frac{2ae^{2I}}{R^2} - \frac{3be^{3I}}{R^3} \\ &= \frac{(a-c)e^{2I}}{R(R + R'_d e^I)} + \frac{(a-c)e^{2I}}{(R + R'_d e^I)^2} - \frac{2ae^{2I}}{R^2} - \frac{3be^{3I}}{R^3} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial R^2} = \frac{e^I(a-c)}{R'_d} \left[ -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R + R'_d e^I)^2} \right] + \frac{2ae^{2I}}{R^3} + \frac{3be^{3I}}{R^4}$$

Mais l'hypothèse n'est pas satisfaisante car  $\lambda$  ne tend pas vers 0 quand  $R$  augmente indéfiniment.

Pour que  $\lambda$  tende vers 0, un terme correctif  $-\frac{g(I)}{R^2}$  a été ajouté à  $u_{MM}$ ,  $u_{EE}$  et  $u_{ME}$

avec la seule condition  $g(0) = 0$ . Cela consiste à remplacer dans (21)  $ae^{2I}$  par  $ae^{2I} + g(I)$  et  $ce^{2I}$  par  $ce^{2I} + g(I)$  d'où les nouvelles expressions :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial R} &= \frac{(a-c)e^{2I}}{R(R+R'_d e^I)} - \frac{[ae^{2I} + g(I)]}{R^2} - \frac{be^{3I}}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} &= \frac{(a-c)e^{2I}}{R(R+R'_d e^I)} + \frac{(a-c)e^{2I}}{(R+R'_d e^I)^2} - \frac{[2ae^{2I} + g'(I)]}{R^2} - \frac{3be^{3I}}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} &= \frac{e^I(a-c)}{R'_d} \left[ -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R+R'_d e^I)^2} \right] + \frac{2[ae^{2I} + g(I)]}{R^3} + \frac{3be^{3I}}{R^4}.\end{aligned}$$

Or quand  $R \rightarrow \infty$ , on a :  $\frac{\partial \lambda}{\partial R} \sim \frac{(a-c)e^{2I}}{R^2} - \frac{ae^{2I} + g(I)}{R^2} = -\frac{ce^{2I} + g(I)}{R^2}$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} \sim \frac{2(a-c)e^{2I}}{R^2} - \frac{2ae^{2I} + g'(I)}{R^2} = -\frac{2ce^{2I} + g'(I)}{R^2}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \sim -\frac{2(a-c)e^{2I}}{R^3} + \frac{2[ae^{2I} + g(I)]}{R^3} = \frac{2ce^{2I} + 2g(I)}{R^3}$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} \sim \frac{R'_d e^I}{R}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial R^2} \sim -\frac{R'_d e^I}{R^2}, \quad M \sim R'_d e^I \int \frac{R}{R'_d e^I}.$$

L'équation (22) devient :

$$-\frac{2ce^{2I} + g'(I)}{R^2} \sim -\left[ -\frac{R'_d e^I}{R^2} \lambda - 2\frac{R'_d e^I}{R} \cdot \frac{[ce^{2I} + g(I)]}{R^2} + \frac{2M[ce^{2I} + g(I)]}{R^3} \right]$$

$$\text{ou :} \quad -[2ce^{2I} + g'(I)] \sim R'_d e^I \lambda + 2\frac{R'_d e^I}{R} [ce^{2I} + g(I)] - \frac{2M}{R} [ce^{2I} + g(I)].$$

Comme  $M/R \rightarrow 0$  quand  $R$  augmente indéfiniment, pour que  $\lambda$  tende vers 0 il faut et suffit que l'on ait :  $2ce^{2I} + g'(I) = 0$ , d'où :  $g'(I) = -2ce^{2I}$  d'où  $g(I) = c(I - e^{2I})$ , d'où les nouvelles hypothèses :

$$u_{MM} = -\frac{R[c + (a-c)e^{2I}] + be^{3I}}{R^3}, \quad u_{EE} = -\frac{cR + de^{3I}}{R^3}, \quad u_{ME} = -\frac{cR + be^{3I}}{R^3} \quad (26)$$

et les nouvelles équations :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial R} = \frac{(a-c)e^{2I}}{R(R+R'_d e^I)} - \frac{c + (a-c)e^{2I}}{R^2} - \frac{be^{3I}}{R^3} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} = \frac{2(a-c)e^{2I}}{R(R+R'_d e^I)} - \frac{(a-c)R'_d e^{3I}}{R(R+R'_d e^I)^2} - \frac{2(a-c)e^{2I}}{R^2} - \frac{3be^{3I}}{R^3} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} = \frac{(a-c)e^I}{R'_d} \left[ -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R+R'_d e^I)^2} \right] + 2\frac{[c + (a-c)e^{2I}]}{R^3} + \frac{3be^{3I}}{R^4}. \quad (29)$$

$R$  et  $I$  étant fixés, on peut théoriquement déterminer  $\lambda$ , cependant une réserve s'impose : parmi toutes les fonctions  $\lambda$  dont la dérivée  $\partial \lambda / \partial R$  est définie par la relation (27), il n'en existe pas forcément une satisfaisant à la relation (22). Tirons  $\lambda$  de l'équation (22) et dérivons par rapport à  $R$ , on a :

$$\lambda = -\frac{1}{\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}} \left[ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} + 2\frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \right] \quad (22)$$

$$\text{et } \frac{\partial \lambda}{\partial R} = \frac{\frac{\partial^3 M}{\partial R^3}}{\left(\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}\right)^2} \left[ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \right] - \frac{1}{\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}} \left[ \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial R^2} + 3 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^3} \right]. \quad (30)$$

Le  $\partial \lambda / \partial R$  défini par la relation (30) n'est pas forcément égal au  $\partial \lambda / \partial R$  de la relation (27) dont on est parti. Le problème consiste à déterminer une relation entre les constantes  $a, b, c$  telle qu'autour d'une valeur centrale déterminée de  $R$ , ces deux  $\partial \lambda / \partial R$  soient sensiblement égaux.

$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I}$  et  $\frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^3}$  sont définis par les équations :

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I} = \frac{(a-c) e^I}{R'_d} \left[ -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R + R'_d e^I)^2} \right] - \frac{2(a-c) e^{2I}}{(R + R'_d e^I)^3} + \frac{4(a-c) e^{2I}}{R^3} + \frac{9be^{3I}}{R^4} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^3} = 2 \frac{(a-c) e^I}{R'_d} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R + R'_d e^I)^3} \right] - 6 \frac{[c + (a-c) e^{2I}]}{R^4} - \frac{12be^{3I}}{R^5} \quad (32)$$

et  $\frac{\partial^3 M}{\partial R^3}$  par (33)  $\frac{\partial^3 M}{\partial R^3} = \frac{2R'_d e^I}{(R + R'_d e^I)^3} \cdot R'_d = \frac{d-b}{a-c}$  est supposé fixe pour une catégorie socio-professionnelle ( $R'_d$  = revenu réel par mois et par U. C. pour lequel on a :  $\partial M / \partial R = 0,50$ ).

$\frac{\partial \lambda}{\partial R}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2}$  sont des fonctions linéaires et homogènes de degré 1 en  $a, b, c$ . Comme  $M, \frac{\partial M}{\partial R}$  et  $\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}$  ne dépendent que de  $R'_d$ ,  $\lambda$  sera une fonction linéaire et homogène de degré 1 en  $a, b, c$ .

Posons  $a = Ac$  et  $b = Bc$ . Le facteur  $c$  mis à part, les expressions  $\lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial R}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I}$ ,  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2}, \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I}$  et  $\frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^3}$  sont des fonctions linéaires de  $A$  et  $B$ , et l'égalité des deux expressions de  $\frac{\partial \lambda}{\partial R}$ , définies par les relations (27) et (30), permettra de définir  $B$  comme fonction linéaire de  $A$ .

On peut d'autre part supposer qu'un égal accroissement relatif de revenu  $\left(\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R'}{R'}\right)$  après une période d'inflation d'une part, de stabilité des prix d'autre part, provoquera le même accroissement de satisfaction dans les deux cas; et si l'on suppose en plus que durant la période  $\Delta t$  considérée il n'y a pas d'inflation, on a :  $\Delta u = \lambda \Delta R$  et  $\Delta u' = \lambda' \Delta R'$  (avec  $\lambda$  = utilité marginale de la monnaie en période d'inflation et  $\lambda'$  = utilité marginale de la monnaie en période de stabilité des prix). De l'égalité  $\Delta u = \Delta u'$  on déduit :

$$\lambda R \frac{\Delta R}{R} = \lambda' R' \frac{\Delta R'}{R'} \quad (1) \text{ ou } \lambda R = \lambda' R' \text{ et comme } R = R' e^I : (34) \lambda' = \lambda e^I.$$

$R$  et  $I$  étant fixés,  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont des fonctions linéaires de  $A$  et la relation (34) conduit à la solution en  $A$ . Donc à part le facteur  $c$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont complètement connus.

1. En toute rigueur, cette formule n'est valable que pour les économies traditionnelles, mais on peut supposer pour les autres que l'on a :  $\Delta F(R, I) = \Delta F(R', 0)$  et  $\Delta F(R_m, I) = \Delta F(R'_m, 0)$  avec  $\Delta I = 0$ , d'où  $\Delta u = \Delta u'$  et d'autre part  $\lambda \Delta R = \lambda' \Delta R'$ . (Avec  $u = F(R, I) - F(R_m, I)$ , et  $\lambda = \frac{\partial F(R, I)}{\partial R}$ .)

Trois valeurs de  $R$  ont été retenues, ce sont :

$R = 1\ 000$  F par mois et par unité de consommation

$R = 4\ 000$  F par mois et par unité de consommation

$R = 250$  F par mois et par unité de consommation

TABLEAU 2

		$R' = 192,3$		$R' = 769$		$R' = 3077$	
		$e^I = 1,3$ $R = 250$	$e^I = 1$ $R = R'$	$e^I = 1,3$ $R = 1\ 000$	$e^I = 1$ $R = R'$	$e^I = 1,3$ $R = 4\ 000$	$e^I = 1$ $R = R'$
$A = 1$	$B_1$	0,00	— 0,02	0,5	0,9	20,2	33,5
	$B'_1$						
	$\lambda_1$	$4,28 \cdot 10^{-3}$	$5,53 \cdot 10^{-3}$	$1,226 \cdot 10^{-3}$	$1,598 \cdot 10^{-3}$	$0,420 \cdot 10^{-3}$	$0,547 \cdot 10^{-3}$
	$\lambda'_1$						
$A = 1,2$	$B_1$	— 23,4	— 23,7	— 76,4	— 76,0	— 154	— 142
	$B'_1$						
	$\lambda_1$	$-5,13 \cdot 10^{-3}$	$-1,50 \cdot 10^{-3}$	$0,648 \cdot 10^{-3}$	$1,146 \cdot 10^{-3}$	$0,364 \cdot 10^{-3}$	$0,5055 \cdot 10^{-3}$
	$\lambda'_1$						

On suppose  $a, b, c, d$  fixés à une époque  $t_0$  telle que l'indice des prix spécifique du consommateur à l'époque  $t$  soit égal à 130, d'où  $e^I = 1,30$ .  $R'_d$  spécifique de la catégorie socio-professionnelle considérée a été pris égal à 2 000 F par mois et par U. C. (à l'époque  $t_0$ ).

Les 3 valeurs de  $R$  retenues plus haut correspondent à des revenus réels  $R'$  de  $\frac{1\ 000}{1,30}$  F,  $\frac{4\ 000}{1,30}$  F,  $\frac{250}{1,30}$  F. Ces trois valeurs de  $R'$  respectivement égales à 769 F, 3 077 F et 192,3 F ont été également retenues pour étudier le cas où il n'y a pas eu d'accroissement du niveau général des prix ( $e^I = 1$ ). Deux valeurs particulières de  $A$  :  $A = 1,0$  et  $A = 1,2$  ont été retenues pour le calcul de  $B_1, B'_1, \lambda_1$  et  $\lambda'_1$  (valeurs particulières de  $B$  et de  $\lambda$  pour lesquelles on a  $e^I = 1,3$  et  $e^I = 1$ ). Les valeurs de  $B_1, B'_1, \lambda_1$  et  $\lambda'_1$  sont rassemblées dans le tableau 2.

$B_1$  et  $B'_1$  étant des fonctions linéaires de  $A$  pour  $R$  et  $I$  fixés,  $\lambda_1$  et  $\lambda'_1$  sont des fonctions linéaires de  $A$ . On a donc :

$$\frac{\lambda_1(A) - \lambda_1(1,0)}{\lambda_1(1,2) - \lambda_1(1,0)} = \frac{A - 1,0}{1,2 - 1,0} = \frac{\lambda'_1(A) - \lambda'_1(1,0)}{\lambda'_1(1,2) - \lambda'_1(1,0)}$$

et la valeur de  $A$  sera déterminée par la condition : (34)  $\lambda'_1 = \lambda_1 e^I = 1,3 \lambda_1$ . On obtient ainsi :

pour	$R = 250$	$\lambda_1 = 4,22 \cdot 10^{-3}$	$\lambda'_1 = 5,49 \cdot 10^{-3}$	$A = 1,001$
	$R' = 192,3$			
pour	$R = 1\ 000$	$\lambda_1 = 1,224 \cdot 10^{-3}$	$\lambda'_1 = 1,591 \cdot 10^{-3}$	$A = 1,001$
	$R' = 769$			
pour	$R = 4\ 000$	$\lambda_1 = 0,422 \cdot 10^{-3}$	$\lambda'_1 = 0,549 \cdot 10^{-3}$	$A = 0,993$ (1)
	$R' = 3\ 077$			

1. On peut vérifier que pour  $A = 1$  la condition  $\lambda' = e^I \lambda$  entraîne  $B_1 = e^{2I} B'_1$  et qu'inversement, si on a :  $B'_1 = e^{2I} B_1$ , la condition  $\lambda' = e^I \lambda$  est satisfaite pour  $A = 1$ .



Comme  $A$  doit être supérieur à 1 (condition  $a > c$ ) pour que l'on soit en présence d'un maximum de  $u$ , on prendra en théorie  $A$  très légèrement supérieur à 1 et en pratique  $A = 1$ .

Les nouvelles équations sont donc les suivantes :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial R} = -c \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{Be^{3I}}{R^3} \right] \quad (27')$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} = -3c \frac{Be^{3I}}{R^3} \quad (28')$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} = c \left[ \frac{2}{R^3} + \frac{3Be^{3I}}{R^4} \right] \quad (29')$$

d'où, en reportant ces valeurs dans l'équation (22), :

$$\lambda = -\frac{1}{\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}} \left[ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \right];$$

$$\lambda = c \frac{(R + R'_d e^I)^2}{R'_d e^I} \left[ -\frac{3Be^{3I}}{R^3} - \frac{2R'_d e^I}{(R + R'_d e^I)} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{Be^{3I}}{R^3} \right) + \left( \frac{2}{R^3} + \frac{3Be^{3I}}{R^4} \right) R'_d e^I \left( 1 + \frac{R}{R'_d e^I} \right) \right], \quad (22')$$

d'où également  $\lambda'$  en faisant  $R = R'$  et  $e^I = 1$ .

*Remarque :* On pourrait remplacer les hypothèses (26) par les relations (24)

$M = R'_d e^I \left( 1 + \frac{R}{R'_d e^I} \right)$  et (27')  $\frac{\partial \lambda}{\partial R} = -c \left( \frac{1}{R^2} + \frac{Be^{3I}}{R^3} \right)$ , qui en découlent et conduisent au même résultat, mais ces nouvelles hypothèses risquent de paraître plus arbitraires et sans lien.

Les équations donnant  $\lambda$  et  $\lambda'$  en fonction de  $B$  et  $B'$  sont les suivantes :

$R = 4\ 000$	$e^I = 1,3$	$\lambda = c (0,443 \cdot 10^{-3} - 1,13 \cdot B \cdot 10^{-6})$	(35)
$R' = 3\ 077$	$e^I = 1$	$\lambda' = c (0,577 \cdot 10^{-3} - 0,872 \cdot B' \cdot 10^{-6})$	
$R = 1\ 000$	$e^I = 1,3$	$\lambda = c (1,236 \cdot 10^{-3} - 20,9 \cdot B \cdot 10^{-6})$	
$R' = 769$	$e^I = 1$	$\lambda' = c (1,609 \cdot 10^{-3} - 16,0 \cdot B' \cdot 10^{-6})$	
$R = 250$	$e^I = 1,3$	$\lambda = c (4,28 \cdot 10^{-3} - 0,862 \cdot B \cdot 10^{-3})$	
$R' = 192,3$	$e^I = 1$	$\lambda' = c (5,52 \cdot 10^{-3} - 0,663 \cdot B' \cdot 10^{-3})$	

Toujours en prenant  $A = 1$  on peut se demander à quelle condition la fonction  $u$  est réellement déterminée. Cette condition est la relation (9) :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} + M \frac{\partial \lambda}{\partial R} + \lambda \frac{\partial M}{\partial R} = 0.$$

On peut calculer  $\frac{\partial \lambda}{\partial I}$  en dérivant par rapport à  $I$  l'équation (22) :

$$\lambda = -\frac{1}{\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}} \left[ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \right],$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{\frac{\partial^3 M}{\partial R^2 \partial I}}{\left(\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}\right)^2} \left[ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + M \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} \right]$$

$$- \frac{1}{\frac{\partial^2 M}{\partial R^2}} \left[ \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R \partial I^2} + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial I} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial R} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial R \partial I} + \frac{\partial M}{\partial I} \cdot \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2} + M \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I} \right],$$

$$\text{avec } \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R \partial I^2} = -\frac{9be^{3I}}{R^3}, \quad \frac{\partial^3 \lambda}{\partial R^2 \partial I} = \frac{9be^{3I}}{R^4} \quad (b = cB),$$

$$\frac{\partial M}{\partial I} = R'_d e^I \varepsilon \left(1 + \frac{R}{R'_d e^I}\right) - \frac{RR'_d e^I}{R + R'_d e^I},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial R \partial I} = \frac{RR'_d e^I}{(R + R'_d e^I)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 M}{\partial R^2 \partial I} = \frac{R'_d e^I (R'_d e^I - R)}{(R + R'_d e^I)^3}.$$

TABLEAU 3

		R = 250	R' = 192,3	R = 1 000	R' = 769	R = 4 000	R' = 3 077
B <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	-0,04	-0,06	-1,9	-3,1	14,7	25,1
B <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	0,00	-0,02	0,5	0,9	20,2	33,5
$\bar{B}$	$\bar{B}'$	-0,02	-0,04	-0,7	-1,1	17,5	29,3

La condition imposée par la relation (9) conduit aux valeurs de  $B$  et  $B'$ . On obtient comme valeurs particulières  $B_2$  et  $B'_2$  de  $B$  et  $B'$  les chiffres du tableau 3, dont la moyenne avec les valeurs  $B_1$  et  $B'_1$  du tableau 2 est :

$$\bar{B} = \frac{B_1 + B_2}{2} \quad \text{et} \quad \bar{B}' = \frac{B'_1 + B'_2}{2}.$$

Ayant adopté la valeur  $\bar{B} = \bar{B}'$ , on peut calculer les variations de  $\lambda$  déterminées par le remplacement de  $\bar{B}$  par  $B_1$  ( $B = B_1$  étant la condition d'existence de  $\lambda$ ) ou par  $B_2$  ( $B = B_2$  étant la condition d'existence de  $u$ ) et l'on remarque, d'après les équations (35), que les variations de  $\lambda$  ne dépassent pas 2 % en valeur relative; donc en première approximation les fonctions  $\lambda$  et  $u$  sont définies pour  $B = \bar{B}$  au voisinage des valeurs de  $R$  considérées. De même pour  $B'$  et  $\lambda'$ .

*Remarque 1 :* Les paramètres  $a, b, c, d$  sont connus au facteur  $c$  près. Mais ils varient lorsque l'on change la base de l'indice des prix. Soit  $t_1$  une nouvelle base de l'indice des prix et soit  $e^{I_1}$  l'indice des prix à l'époque  $t$ .  $u$  et  $\lambda$  étant indépendants de cette base, il en est de même de  $u_{MM}$ ,  $u_{EE}$  et  $u_{ME}$ . On a donc, si les coefficients relatifs à la base  $t_1$  sont  $a_1, b_1, c_1$  et  $d_1$  :

$$(c + (a - c) e^{2I}) R + b e^{3I} = (c_1 + (a_1 - c_1) e^{2I_1}) R + b_1 e^{3I_1} \quad \text{et} \quad c + d e^{3I} = c_1 + d_1 e^{3I_1}$$

$$\text{d'où : } \quad c_1 = c, \quad a_1 - c_1 = (a - c) e^{2(I - I_1)}, \quad b_1 = b e^{3(I - I_1)}, \quad d_1 = d e^{3(I - I_1)}$$

$$\text{et} \quad R'_{d_1} = \frac{d_1 - b_1}{a_1 - c_1} = R'_d e^{(I - I_1)}.$$

En pratique on aura donc :

$$a_1 = c, \quad b_1 = b e^{3(t-t_1)} \quad \text{et} \quad R'_{d_1} = R'_d e^{(t-t_1)}.$$

*Remarque 2* : On remarquera que les cas  $R = 1\ 000\ \text{F}$  et  $R = 4\ 000\ \text{F}$  peuvent correspondre à des zones de revenus salariaux par U. C. moyens et élevés dans les pays industrialisés, le cas  $R = 250\ \text{F}$  à des revenus par U. C. moyens dans certains pays en voie de développement.

On a cherché à comparer les valeurs de  $\lambda'$  (cas de la stabilité des prix dans un univers économique soumis aux lois du marché) et celles de  $\lambda''$  (cas où les prix sont fixés autoritaire-

ment). On a pour  $A = 1$  : (19')  $\lambda'' = c \left[ \frac{1}{R''} + \frac{B}{2R''^2} \right]$  (1). En prenant  $R'' = R'$  on a :

pour  $R'' = 3\ 077$ ,  $\bar{B} = 29,3$ ,  $\lambda'' = 0,327 \cdot 10^{-3} \cdot c$  contre  $\lambda' = 0,551 \cdot 10^{-3} \cdot c$   
 pour  $R'' = 769$ ,  $\bar{B} = -1,1$ ,  $\lambda'' = 1,299 \cdot 10^{-3} \cdot c$  contre  $\lambda' = 1,627 \cdot 10^{-3} \cdot c$   
 pour  $R'' = 192,3$ ,  $\bar{B} = -0,04$ ,  $\lambda'' = 5,20 \cdot 10^{-3} \cdot c$  contre  $\lambda' = 5,55 \cdot 10^{-3} \cdot c$ .

Ainsi pour une même valeur  $R' = R''$  on a  $\lambda' > \lambda''$  et l'écart est d'autant supérieur en valeur relative que le revenu est élevé. Mais on ne peut rien conclure pour les accroissements de satisfaction consécutifs à un accroissement de revenu, car si l'on a  $\Delta u' = \lambda' \Delta R' - \lambda'_m \Delta R'_m$  et  $\Delta u'' = \lambda'' \Delta R'' - \lambda''_m \Delta R''_m$ ,  $\Delta R'_m$  et  $\Delta R''_m$  étant les accroissements du revenu minimum (revenu pour lequel on a  $u = 0$ ) consécutifs à un accroissement de revenu  $\Delta R' = \Delta R''$ , on ne connaît pas  $\Delta R'_m$  et  $\Delta R''_m$ , ni  $\lambda'_m$  et  $\lambda''_m$ .

Reprenons l'équation (10') :  $\Delta u = (\lambda \Delta R' - \lambda_m \Delta R'_m) + (\lambda E_m - \lambda_m E_m) \Delta I$ . Le produit  $\lambda E$  a été calculé pour les 3 valeurs de  $R$  : 250 F, 1 000 F et 4 000 F. On a :

$R = 250$	$\lambda = 4,28 \cdot 10^{-3}$	$E = 11$	$\lambda E = 47 \cdot 10^{-3}$
$R = 1\ 000$	$\lambda = 1,226 \cdot 10^{-3}$	$E = 154$	$\lambda E = 189 \cdot 10^{-3}$
$R = 4\ 000$	$\lambda = 0,420 \cdot 10^{-3}$	$E = 1\ 578$	$\lambda E = 663 \cdot 10^{-3}$ .

Le produit  $\lambda E$  croît donc avec  $R$ . Comme  $R$  est supérieur à  $R_m$ , on en déduit  $\lambda E > \lambda_m E_m$ , donc à revenu réel égal l'inflation accroît la satisfaction des consommateurs. Aussi, si aucune catégorie socio-professionnelle ne critique violemment l'inflation, cela signifiant que le bénéfice de la croissance (économique et monétaire) a été réparti d'une façon relativement satisfaisante entre les différentes catégories socio-professionnelles, on peut se demander qui défendra la stabilité des prix, puisque chacun trouve plus ou moins un surcroît de satisfaction dans l'inflation, à la condition que celle-ci ne dépasse pas celle des autres pays, concurrents ou clients.

Cependant, l'accroissement de satisfaction lié à l'inflation doit être considéré comme une illusion monétaire. En effet, si l'on suppose que le taux d'épargne ne dépend que du

1. *Remarque* : On peut revenir sur l'équation (20) (cas de la fixité des prix) :  $a$  étant égal à  $c$  et le terme en  $b$  un terme correctif on a :  $\lambda'' \# \frac{c}{R''}$  et  $f(R'') \# c \int R''$ . La fonction  $f(R'')$  se comporte donc comme une fonction logarithmique. On pouvait déduire ce résultat de l'équation (5)  $\frac{\partial \lambda}{\partial R''} = \frac{-\lambda''^2 U_0}{U}$ . Pour une zone de revenus dans laquelle  $\frac{U_0}{U}$  peut être tenu pour constant et en supposant toujours la fixité des prix, on a en intégrant

$\frac{1}{\lambda''} = \frac{U_0}{U} R''$  (avec  $\lambda'' \rightarrow 0$  pour  $R'' \rightarrow \infty$ ) d'où  $\lambda'' = \frac{U}{U_0 R''}$ , d'où :  $u = \int \lambda'' dR'' = \int \frac{U}{U_0} \cdot \frac{dR''}{R''} = \frac{U}{U_0} \int R''$  à une constante près. Ce résultat est valable pour les économies traditionnelles pour lesquelles  $R''$  oscille autour d'une valeur centrale fixe, la constante restant indépendante du temps.

revenu réel  $R' = R/e^I$  (ce qu'on a admis au cours de cette étude), on aura :  $E'/R' = E/R$  avec  $R = e^I R'$  d'où :  $E = e^I E'$ . Si d'autre part  $i$  est le taux d'intérêt à un an,  $i'$  le taux qui serait appliqué s'il n'y avait pas d'inflation et  $\Delta I$  le taux d'accroissement de l'indice des prix durant la même période, on a le plus souvent  $(1 + i') > (1 + i)/(1 + \Delta I)$ , (ceci provient de ce que, en moyenne,  $i$  est de la forme  $i = i_0 + i_1 \Delta I$  avec  $i_1 \neq 0, 0,6 < 1$ ). Ce qui entraîne que le montant des intérêts reçus au bout d'un an en période d'inflation sera inférieur en valeur réelle à ce qu'il aurait été, si les prix étaient restés stables.

### FONCTION UTILITÉ TOTALE

Nous avons vu que, dans le cas d'une fixité des prix, la fonction Utilité totale se présente sous la forme :  $u = f(R) - f(R_m)$ ,  $R_m$  étant le revenu pour lequel la satisfaction du consommateur est nulle, avec (20)  $f(R) = c \ln R - b/2R$ . Dans le cas d'une économie de marché, on peut écrire  $u$  sous la forme :  $u = \varphi(R, I, c, R'_d) - \varphi(R_m, I, c, R'_d)$  (1) avec :

$$\varphi(R, I, c, R'_d) = \int_1^R \lambda dR - \int_0^I \lambda M dI, \quad (36)$$

$\lambda$  et  $M$  étant connus (2) et, comme  $\lambda$  contient  $c$  en facteur, on a :  $\varphi(R, I, c, R'_d) = c \varphi_1(R, I, R'_d)$  d'où : (37)  $u = c [\varphi_1(R, I, R'_d) - \varphi_1(R_m, I, R'_d)]$ .

Les deux paramètres  $c$  et  $R_m$  sont nécessaires pour classer les différents consommateurs selon des combinaisons dans lesquelles s'allient des utilités marginales de la monnaie fortes, moyennes ou faibles et des utilités totales fortes, moyennes ou faibles.

On peut chercher à déterminer une tendance centrale pour la fonction (37)  $u = c [\varphi_1(R, I, R'_d) - \varphi_1(R_m, I, R'_d)]$ .  $I$  et  $R'$  étant fixés, on déterminera, pour les  $N$  consommateurs appartenant à la catégorie socio-professionnelle considérée et bénéficiant du revenu  $R$  par U. C.,  $c$  par la relation :

$$c = \frac{1}{N} \sum c \quad \text{d'où} \quad c \varphi_1(R, I, R'_d) = \frac{1}{N} \sum [c \varphi_1(R, I, R'_d)].$$

Choisissons  $\widehat{R}_m$  tel que  $\bar{c} \varphi_1(\widehat{R}_m, I, R'_d) = \frac{1}{N} \sum [c \varphi_1(R_m, I, R'_d)]$  et supposons que  $c$  est indépendant de  $R$ ,  $u$  aura pour tendance centrale : (38)  $\widehat{u} = \bar{c} [\varphi_1(R, I, R'_d) - \varphi_1(\widehat{R}_m, I, R'_d)]$ .

$R_m$  augmente avec  $R$  en fonction du temps dans les économies en expansion du type occidental, et ceci pour deux raisons : d'abord parce que  $R_m$  augmente avec l'inflation, ensuite parce que  $R_m$  (revenu réel) augmente avec le temps. En effet, lorsque le standard de vie augmente, le consommateur cherche à satisfaire des besoins de moins en moins fondamentaux, que l'accoutumance rend plus impérieux pour une satisfaction moindre. L'utilité totale correspondant à une certaine valeur du revenu réel diminue donc avec le temps, ce qui peut s'expliquer par l'hypothèse que le revenu minimum réel  $R'_m$  (correspondant à  $u = 0$ ) augmente avec  $R'$  en fonction du temps. Cependant, il ne s'agit là que d'une explication approchée, l'utilité totale n'étant pas une fonction de  $R' = R/e^I$  et de  $R'_m = R_m/e^I$ ,

1.  $R_d$  est le revenu réel par U. C. pour lequel on a :  $\frac{\partial M}{\partial R} = 0,50$ . On le suppose constant pour une catégorie socio-professionnelle donnée.

2.  $\lambda$  et  $M$  sont définis par les relations (22') et (24).

mais une fonction de  $R$ ,  $R_m$  et  $I$  (1).  $R_m$  est au contraire relativement constant en fonction du temps dans les économies traditionnelles (1) (pas de croissance économique) mais est d'autant plus élevé que  $R'$  est grand, comme dans les autres cas.

On peut ajouter que le sort d'une économie non traditionnelle est d'être croissante aussi longtemps qu'il est possible, la non-croissance entraînant au bout d'un certain temps une diminution de la satisfaction et une récession psychique, dont l'une des issues peut être le retour à une économie plus traditionnelle.

J.-J. BOULANGER

1. On a en effet :  $(10') \Delta u = (\lambda \Delta R' - \lambda_m \Delta R'_m) + (\lambda E - \lambda_m E_m) \cdot \Delta I$ . Pour les bas et très bas revenus, l'épargne est insignifiante, donc l'incidence de l'inflation négligeable. Comme on peut supposer que  $R'_m$  est une fonction de  $R'$ , l'utilité totale peut être tenue en première approximation comme uniquement fonction du revenu réel. Par contre, si l'on s'éloigne des bas revenus, l'incidence de l'inflation sur  $u$  ne peut plus être négligée et elle est d'autant plus importante que le revenu est élevé. Ceci s'étend aux économies traditionnelles. De plus, dans ce cas et pour les bas et très bas revenus,  $R'$  et  $u$  peuvent être considérés comme oscillant autour de valeurs centrales  $\bar{R}_0$  et  $u_0$ ,  $R'_m$  étant constant. Pour des revenus plus élevés, l'incidence de l'inflation ne peut plus être négligée, mais comme dans de telles sociétés le revenu est généralement bas,  $R'_m$  peut être tenu pour sensiblement constant.