JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JEAN-JACQUES ROSA

Articles. Horizon décisionnel et portée pratique des modèles de gestion de portefeuille

Journal de la société statistique de Paris, tome 114 (1973), p. 301-315
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1973__114__301_0>

II

ARTICLES

HORIZON DÉCISIONNEL ET PORTÉE PRATIQUE DES MODÈLES DE GESTION DE PORTEFEUILLE

The application of the theory of portfolio risks diversification and of the market model to the effective portfolio management will be generalised only when empirical proof of their value will be found. In this paper, we try to evaluate the optimal validity period for model parameters and the optimal period over which these parameters have to be calculated.

Die Anwendung der Theorie der Diversification der mit Risiko verbundenen Aktiva und des daraus folgenden Marktes wird sich nur verallgemeinern, wenn erfahrungsgemäss der Beweis deren Wohlbegründetheit gemacht wurde. Der Autor versucht in seinem Beitrag den optimal gültigen Zeitabschnitt eines Modelles zu ermitteln, sowie den optimalen Zeitabschnitt, welcher dienen soll die Koeffizienten anzuwenden.

La aplicacion de la teoria de la diversificaciòn de los activos arriesgados y del modelo de mercado que nacio de esta aplicacion, a la gestiòn efectiva de las carteras no se generalizara, hasta que las pruebas empiricas de su exactitud no sean citadas. El autor intenta determinar en este articulo, el periodo optima de validaz para los coeficientes del modelo, y tambien de la misma manera, el periodo optimista sobre cual tienen que ser calculados los coeficientes.

I — Introduction

L'application de la théorie de la diversification des actifs risqués (1) et du modèle de marché qui en est issu (2) à la gestion effective des portefeuilles ne se généralisera que lorsqu'auront été apportées les preuves empiriques de leur bien-fondé.

Il faut montrer que, dans les conditions d'une gestion réelle, les performances obtenues par ces moyens sont supérieures aux performances habituelles des intermédiaires financiers. Pour ce faire il est évidemment nécessaire de mesurer et de comparer objectivement entre elles les performances effectives, et c'est bien ce qui a été en priorité l'objectif des recherches au cours de la période qui a suivi l'apparition de la théorie, à la fin des années cinquante.

1. Harry Markowitz, « Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments », Wiley, 1959.
2. W. F. Sharpe, « Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, septembre 1964, pp. 425-442.

Cette première orientation s'imposait pour deux raisons complémentaires. D'une part en effet la théorie fournissait un instrument nouveau d'évaluation des performances en tenant compte des deux dimensions de rendement et de risque, d'autre part il s'agissait d'un problème d'actualité au moment où se développaient aux États-Unis de nombreux fonds mutuels dont chacun affichait la prétention de « battre le marché » c'est-à-dire de réaliser une performance supérieure à la moyenne. La comparaison systématique des résulats obtenus par les fonds et de ceux de portefeuilles choisis au hasard, ou encore de ceux des indices de marché comme le Dow Jones ou le Standard et Poor, a permis de mieux cerner le problème et de rabattre quelque peu les affirmations du début.

Aujourd'hui, la méthodologie de mesure des faits ayant bien avancé, on dispose de critères de jugement bien établis et on peut tenter en connaissance de cause l'utilisation de la théorie à des fins normatives, à savoir l'amélioration de la performance de placement à l'aide des règles de choix de portefeuille initialement formulées par Markowitz. La pression accrue de la concurrence sur les marchés financiers renforce désormais cette tendance.

Nous avons examiné ailleurs ([1]) la performance théoriquement optimale *a posteriori*, celle du portefeuille qui, pour un niveau de risque choisi par le placeur, permet d'atteindre le rendement le plus élevé au cours d'une période écoulée. Le choix des actions s'effectue à l'aide d'une information limitée aux seuls paramètres de moyenne et de dispersion des rendements au cours de la période et l'on montre que, même dans la version la plus simple du modèle de marché, on obtient un gain de performance considérable par rapport à la moyenne, celle du marché tout entier.

Mais la performance obtenue dans ce cas n'est que virtuelle puisque, se situant après coup (ex post), elle repose sur une connaissance certaine des paramètres utilisés. Elle ne constitue qu'un maximum inaccessible dans la gestion réelle. Il convient donc de se rapprocher davantage des problèmes concrets qui se posent au placeur et de simuler une gestion effective dans les conditions d'incertitude qui la caractérisent. Ceci soulève la question de la prévision. Il faut prévoir l'évolution future du portefeuille que l'on compose aujourd'hui en fonction des données du passé. De façon plus précise, il faut prévoir l'évolution des paramètres qui guident notre choix actuel, les coefficients « bêtas » dans le cas du modèle de marché notamment.

Ainsi s'explique la prolifération récente des études portant sur la stabilité des bêtas dans le temps. Il est en effet facile de comprendre que ce seront les bêtas de la période à venir de détention du portefeuille qui détermineront la performance, mais aussi que le seul moyen de les estimer à l'avance est de se servir des bêtas passés. Mais pour l'instant aucune conclusion définitive ne s'impose sur ce point ainsi que le constatent Altman, Jacquillat et leurs collaborateurs ([2]) dans leurs études de stabilité des bêtas parues à ce jour ([3]).

Quels que puissent être les résultats ultérieurs des travaux de ce genre, il apparaît dès maintenant que l'orientation de cette recherche tombe sous le coup d'une double critique : elle est superficielle et partielle.

Superficielle, car l'étude de la stabilité des bêtas dans le temps ne fait que recouvrir et confondre deux problèmes différents. Tout d'abord le problème statistique d'estimation des valeurs vraies des bêtas pour une période à partir d'un échantillon historique des rende-

1. J. J. Rosa, « Le portefeuille sur mesure », *Banque*, mai 1972, pp. 459-464.
2. E. Altman, B. Jacquillat, M. Levasseur, M. Raud, « Le modèle de marché aide-t-il à la prévision des cours? Quelques études empiriques », *Analyse financière*, 2e trimestre 1972, pp. 1-11.
3. E. Altman, B. Jacquillat, M. Levasseur, « La rentabilité et le risque des secteurs industriels à la Bourse de Paris », *Analyse financière*, 2e trimestre 1973, pp. 36-55.

ments. On sait qu'il y a là de nombreux risques de biais qui peuvent fausser notre connaissance de la réalité sous-jacente. Ensuite seulement vient s'ajouter la difficulté qui peut provenir de l'instabilité des bêtas vrais dans le temps, manifestation d'une évolution de la structure économique sous-jacente. Ces deux difficultés à la fois font obstacle à la connaissance des bêtas vrais. Dans ces conditions la stabilité ou l'instabilité constatée des bêtas empiriques peut être trompeuse à un double titre : parce que l'estimation est biaisée, ou parce que la distribution vraie est instable dans le temps.

Partielle aussi, car on n'aborde pas — ou très indirectement — la difficulté au moins aussi grande du choix de la période. Le modèle de marché, comme le modèle de diversification, est unipériodique. Mais la dimension temporelle de la période n'est pas définie. Laquelle faut-il utiliser dans les études empiriques? On a constaté que le choix de la période avait des conséquences importantes sur la stabilité des bêtas sans que l'on sache déterminer une période optimale de calcul ([1]).

Notons enfin que le choix de la période se décompose en fait en deux sous-problèmes : il faut choisir une période de validité pour l'avenir des bêtas calculés, c'est ce que nous désignerons par *période de prévision*, mais aussi choisir dans le passé la longueur de la période sur laquelle nous calculerons les bêtas, c'est ce que nous désignerons par *période de mémoire.*

L'ensemble du problème de la longueur optimale de la période de prévision et de la période de mémoire (qui ne sont pas forcément identiques) est ce que nous entendons par problème de l'horizon décisionnel.

Après avoir rappelé brièvement les éléments de la technique de choix que nous utilisons ainsi que les hypothèses sur lesquelles elle repose, nous essaierons de cerner la dimension de l'horizon décisionnel optimal, d'abord dans le cas le plus simple de la connaissance parfaite des paramètres de choix, puis dans des conditions semblables à celles de la gestion réelle.

II — La méthode

La technique de composition de portefeuille selon les critères de moyenne et de variance des rendements des actifs est désormais bien connue ([2]). En partant de l'idée que le rendement d'une action par exemple est une variable aléatoire qui suit approximativement une loi normale, on définit l'action individuelle par les deux moments caractéristiques de la loi du rendement : l'espérance mathématique et la variance. Le placeur tient compte des grandeurs prévues ou « anticipées » de ces moments au début de la période de choix. Le premier, l'espérance mathématique, est une mesure du gain probable, tandis que le second, la variance, est une mesure du risque couru ([3]).

Parmi toutes les actions qu'il peut choisir, il doit normalement retenir celles qui, ensemble, constitueront un portefeuille *efficient*, c'est-à-dire un portefeuille dont le rendement espéré soit supérieur à celui de tous les autres portefeuilles possibles ayant le même niveau

1. M. E. Blume, « On the Assesment of Risk », *Journal of Finance*, mars 1971. R. A. Levy, « On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients », *The Financial Analysts Journal*, novembre-décembre 1971.

2. Ne citons que les principales études qui ont jalonné le progrès de l'analyse récente.

W. F. Sharpe, « A Simplified Model for Portfolio Analysis », *Management Science*, janvier 1963, pp. 277-293.

K. J. Cohen et J. A. Pogue, « An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models », *Journal of Business*, avril 1967, pp. 166-193.

M. E. Blume, « Portfolio Theory : A Step Towards its Application », *Journal of Business*, avril 1970, pp. 152-173.

3. W. F. Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, Ch. IV.

de variance. Il y a autant de portefeuilles efficients que de niveaux de risque c'est-à-dire une infinité.

Pour retenir *un seul* de ces portefeuilles il faut introduire un paramètre supplémentaire, le niveau d'acceptation ou de refus du risque du placeur [1]. On l'exprime par un poids compris entre zéro et un qui rend compte de l'importance relative que le placeur attribue au gain (espérance de rendement) et au risque (variance du rendement). Soit λ ce poids. Il s'ensuit que pour déterminer le portefeuille optimal parmi l'ensemble des portefeuilles efficients il suffit de trouver la composition du portefeuille ayant la valeur la plus élevée pour l'expression :

$$Z = (1 - \lambda) E_r - \lambda V_r$$

avec : E_r : espérance mathématique du rendement.

V_r : variance du rendement.

On montre que le programme de recherche ainsi formulé se ramène à un problème que l'on sait résoudre depuis quelques années en mathématique. La solution requiert la programmation quadratique et donc le recours à l'ordinateur. Elle indique quelles actions choisir et en quelles proportions les inclure dans le portefeuille.

On montre aussi qu'il existe une version extrêmement maniable et commode de la solution moyennant quelques simplifications supplémentaires [2].

C'est dans la version simplifiée que les bêtas interviennent comme mesure approximative du risque afférent à une action. Mais au lieu de mesurer le risque total en quelque sorte (les fluctuations totales du rendement autour de sa moyenne) comme c'est le cas de la variance, le bêta mesure un risque *conditionnel*, le risque en fonction des variations de rendement du marché tout entier. C'est un coefficient mesurant le degré d'amplification ou de réduction des fluctuations de rendement de l'action considérée par rapport à celles du rendement de l'indice [3]. Dans ces conditions la composition du portefeuille permet d'éliminer tout risque conditionnel supérieur à celui de l'indice de marché, qualifié aussi de risque *systématique*, en obtenant simultanément un rendement supérieur à celui du marché.

La grande difficulté dans l'application de ces méthodes vient de ce que, dans la théorie, les paramètres utilisés qui viennent d'être évoqués sont subjectifs et anticipés. Comment les estimer en pratique?

On a recours aux seules données disponibles, les séries de rendements enregistrées dans le passé. On calcule à partir de là des moments empiriques et non plus prévus (ex ante) ou théoriques, en espérant une bonne approximation de ceux-ci par ceux-là. C'est à ce point que se situe la difficulté évoquée en introduction concernant notamment les paramètres bêtas. Ce n'est qu'après l'avoir vaincue que l'on peut passer à l'étape suivante de composition du portefeuille.

Une première méthode consiste à supposer le problème résolu. Connaissant après coup les valeurs prises par les bêtas des actions au cours d'une période écoulée, on peut définir *ce qu'auraient dû être* les portefeuilles optimaux au cours de la période. Ceci peut avoir un grand intérêt pour l'évaluation des performances mais aussi pour déterminer la

1. W. F. Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, Ch. IV.
2. W. F. Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, Supplement, The Mathematical Foundation.
3. L'indice le plus utilisé est l'indice d'ensemble des valeurs mobilières à revenu variable, mais on peut concevoir des betas s'appuyant sur tout autre indice significatif.

période de calcul des bêtas pour laquelle on obtient les meilleures performances. C'est donc un premier pas indispensable dans l'étude de l'horizon décisionnel.

La seconde méthode découle logiquement de la première. Connaissant la période optimale de calcul des bêtas essayer d'utiliser la connaissance du passé pour gérer l'avenir. Il s'agit de calculer les bêtas sur une période, puis de composer le portefeuille optimal en conséquence et d'étudier enfin le comportement de ce portefeuille dans les périodes suivantes. Ceci doit nous fournir de précieuses indications sur la période de prévision optimale qui est, dans cette optique, distincte de la période de mémoire.

Mais dans les deux cas la phase de composition du portefeuille proprement dite est identique dans sa technique. Elle s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses théoriques. On admet en général :

1° Une distribution aléatoire gaussienne des rendements dans le temps.

2° La stabilité dans le temps de chacune de ces lois de distribution, ou la stabilité de la loi multinormale de distribution de l'ensemble des actions qui constituent l'univers de placement.

3° Le modèle de choix retenu est le modèle diagonal linéaire dans lequel chaque action comprise dans le portefeuille y figure selon les mêmes proportions que les autres (voir annexe I).

4° Le portefeuille reste inchangé pendant toute la période de détention. On n'utilise donc pas le procédé qui consiste à maintenir fixes les proportions initiales en vendant en partie les actions dont le cours a monté au cours de la période pour acheter des actions dont le cours a baissé. La politique suivie est donc celle du « Buy and Hold ».

5° On n'utilise pas le calcul des intérêts composés pour déterminer le rendement du portefeuille sur un ensemble de périodes.

6° On ne tient pas compte, dans un premier temps, des coûts de transaction.

Dans l'état actuel des connaissances toutes ces hypothèses restrictives, sauf les deux premières, peuvent être supprimées. Notons que le recours au modèle complet au lieu du modèle diagonal, à la règle des proportions fixes constantes par une révision fréquente du portefeuille, au calcul des intérêts composés, permettent d'améliorer la performance, tandis que la prise en compte des coûts de transaction jouera en sens contraire.

Enfin, en ce qui concerne l'échantillon, il s'agit de 135 valeurs du terme de la Bourse de Paris que nous avons choisies pour des raisons de continuité statistique sur la période 1967-1970, 1967 étant la première année de publication de ces données par la C. A. C. Il s'agit de données mensuelles.

III — Horizon décisionnel en connaissance parfaite

Cette question peut paraître dépourvue d'intérêt pratique. Elle n'est pourtant pas si irréaliste qu'il paraît au premier abord. En effet, nous supposons une connaissance parfaite mais limitée aux seuls paramètres de rendement espéré et de dispersion des rendements de chaque actif, variance dans la méthode complète de Markowitz ou bêta dans la méthode diagonale. Or, contrairement à ce qui est généralement admis, les praticiens sont conduits chaque jour à formuler des hypothèses beaucoup plus audacieuses sur leurs propres connaissances. Tout placeur qui choisit une valeur à un instant donné forme implicitement des anticipations quant aux rendements futurs de cette valeur. C'est ce qui lui permet de juger le prix d'achat avantageux ou pas. Au moment de la vente c'est le même esprit prospectif qui le guide dans sa décision. Ce calcul est habituellement résumé par la formule d'évaluation des actifs :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(D_i/(1+r)^i\right)$$

avec

P : valeur présente de l'action.

D_i : dividende anticipé pour la période i.

r : taux d'intérêt requis par le placeur en fonction des taux prévalant sur le marché.

Nous dirons en termes statistiques que cette formule équivaut à prévoir une certaine distribution des rendements dans le futur. Par conséquent une hypothèse qui ne porte que sur les moments principaux d'une telle distribution, l'espérance mathématique et la variance qui sont nos paramètres de choix, n'est pas en soi extravagante par rapport à la démarche du praticien. Mais elle est explicite et précise, donc plus facilement criticable et se prêtant plus aisément à la vérification. Il n'en reste pas moins que l'idée que l'on puisse connaître en certitude les moments d'une distribution est sans conteste plus réaliste que l'illusion inavouée de connaître avec certitude les valeurs elles-mêmes de la distribution.

La principale utilité de l'hypothèse de connaissance limitée mais parfaite se manifeste d'ailleurs dans la première étape de notre recherche, pour l'estimation de la longueur de l'horizon optimal.

On a montré récemment (1) qu'il y a autant de frontières de placement que d'horizons de choix. Il s'agit donc à la fois de vérifier empiriquement cette assertion et, dans

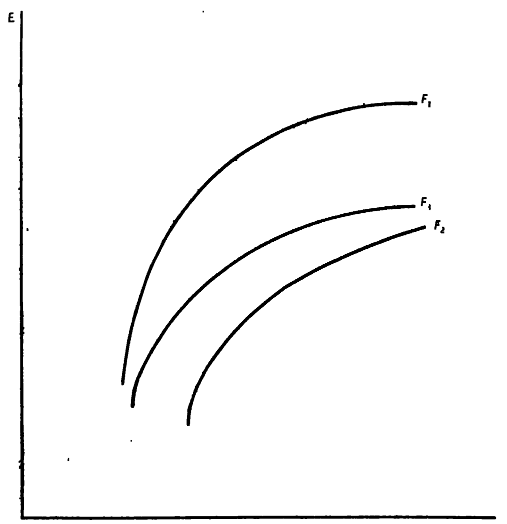

Fig. I

1. Pao L. Cheng, « Efficient Portfolio Selection Beyond the Markowitz Frontier », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre 1971, pp. 1207-1234.

l'affirmative, de préciser l'horizon optimal, celui qui permet d'obtenir la frontière de placement la plus avantageuse. Il est clair qu'il vaut mieux effectuer cette recherche ex post sur des séries historiques, c'est-à-dire en connaissance certaine, des paramètres, de façon à écarter l'influence des biais d'estimation et de prévision. La découverte de l'horizon optimal « vrai » est ainsi facilitée.

Tableau I

Performance des portefeuilles en connaissance parfaite par niveau de risque sur la période 1967-1970

Portefeuilles de 30 actions

Niveau de risque λ	Horizon décisionnel							
	4 ans		1 an		6 mois		3 mois	
	R_p	B_p	R_p	B_p	R_p	B_p	R_p	B_p
0,10	6,70	1,61	4,93	1,16	5,50	1,14	6,76	1,12
0,20	6,65	1,33	4,93	1,16	5,50	1,14	6,76	1,12
0,30	6,62	1,24	4,94	1,17	5,50	1,14	6,76	1,12
0,40	6,51	1,05	4,95	1,17	5,50	1,14	6,76	1,12
0,50	6,17	0,63	4,94	1,17	5,50	1,14	6,76	1,12
0,60	5,62	0,17	4,99	1,17	5,50	1,14	6,76	1,12
0,70	5,28	0,01	5,02	1,16	5,50	1,14	6,76	1,12
0,80	4,82	—0,14	5,10	1,17	5,44	1,12	6,80	1,13
0,90	4,42	—0,20	4,97	1,15	5,48	1,13	6,80	1,13
1,00	3,60	—0,25	4,93	1,12	5,48	1,13	6,80	1,12
Moyenne des rendements	5,63	0,54	4,97	1,16	5,49	1,13	6,77	1,12
Variance des rendements selon le niveau de risque	10,57		0,01		0,00		0,00	

On constate que les meilleurs résultats, en moyenne, sont obtenus pour un horizon court de trois mois. C'est dire qu'une fréquente révision de portefeuille améliore la performance.

Toutefois cette première impression basée sur les niveaux de rendement doit être nuancée quand on considère les coefficients bêtas moyens des portefeuilles. On constate alors que le bêta moyen pour l'horizon de quatre ans est nettement inférieur aux bêtas moyens pour tous les autres horizons. Les portefeuilles optimaux calculés sur une période longue seraient donc beaucoup moins volatiles et risqués que les portefeuilles composés sur des périodes plus courtes en fonction de données moins nombreuses.

Quand on tient compte à la fois des deux critères de rendement et de risque, on constate que deux horizons sont clairement *dominés*, les horizons intermédiaires de 12 et de 6 mois, tandis que les horizons extrêmes correspondent *en moyenne* à des choix risqués (horizon court) et à des choix peu risqués (horizon long). Aucun des deux horizons extrêmes ne domine l'autre dans la mesure où le passage de l'un à l'autre permet d'obtenir un rendement supérieur mais au prix d'un risque plus élevé (fig. II).

En passant de l'examen des moyennes, toutes catégories de risques confondues, à celui des diverses catégories de risque, on note une différence remarquable entre les horizons extrêmes. Le choix du paramètre correspond à des portefeuilles effectivement différents pour l'horizon de quatre ans ainsi que le veut la théorie. Au contraire, pour l'horizon de trois mois, on constate que tous les portefeuilles ont les mêmes caractéristiques de rendement et de risque conditionnel, quel que soit le niveau retenu de risque. Cette constatation peut s'interpréter comme une conséquence logique de la définition du risque, c'est-à-dire la variation des rendements autour de leur moyenne. Il paraît naturel de constater que l'augmentation de la fréquence de révision du portefeuille augmente le rendement puisque le procédé a pour but de mettre à profit les fluctuations avantageuses d'actions particulières par rapport à la moyenne du marché, mais en même temps, et par définition, ceci revient à augmenter les fluctuations du portefeuille.

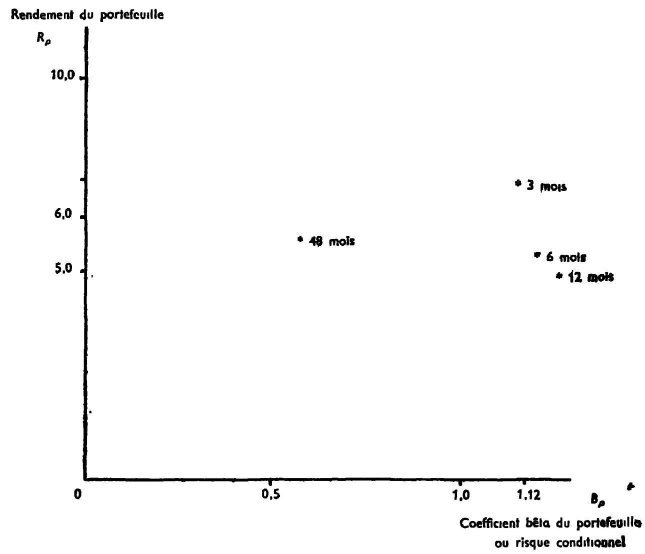

FIG. II. — *Performance et horizon décisionnel en connaissance parfaite*

Ainsi le simple fait d'augmenter la fréquence de réexamen du portefeuille est équivalent à une acceptation plus grande du risque de la part du placeur.

La méthode choisie étant rudimentaire il ne devient plus possible de discriminer entre les niveaux de risque effectivement subis à l'aide du paramètre λ alors que le choix de l'horizon décisionnel pèse beaucoup plus lourd dans le choix des actions qui composent le portefeuille.

Il serait intéressant de vérifier avec des méthodes plus fines *que le choix de l'horizon décisionnel est fondamentalement un choix du niveau de risque.*

Remarquons, à l'appui de cette interprétation, que la différence de risque conditionnel entre les portefeuilles d'horizon de 48 mois et de ceux d'horizon de 12 mois est importante, alors que les différences de risque entre portefeuilles d'horizons voisins (12, 6 et 3 mois) est insignifiante.

Le taux de rotation

Pour le gestionnaire ou l'agent de change, il est particulièrement intéressant de savoir quel taux de rotation approximatif il convient d'appliquer aux portefeuilles dont il a la charge. A partir de la composition précise des portefeuilles optimaux nous calculons les taux de rotations optimaux qui correspondent aux divers horizons étudiés. Il va de soi que le taux est nul par définition pour l'horizon de quatre ans. Pour les autres, nous définissons le taux de rotation annuel comme :

$$TR = \left(\sum_{t=1}^{n} (tr_t)/n \right) \times F$$

avec :

tr_t : pourcentage du portefeuille modifié entre la période t-1 et la période t.

n : nombre de périodes de l'analyse, soit $48/H$.

F : fréquence de réexamen du portefeuille soit, $12/H$.

H : horizon décisionnel exprimé en mois.

Les taux de rotation annuels sont directement comparables, quelle que soit la fréquence de réexamen du portefeuille, puisqu'ils donnent le pourcentage effectif moyen des actions remplacées au cours d'une année. Le tableau 2 présente ces taux pour les divers horizons et les divers niveaux de risque.

On constate que le racourcissement de l'horizon décisionnel entraîne un incontestable accroissement du taux de rotation annuel. Mais en même temps la dispersion du taux de rotation en fonction du niveau de risque s'accroît également. Le pouvoir discriminant du λ est meilleur en ce qui concerne le taux de rotation qu'en ce qui concerne le risque conditionnel.

TABLEAU 2

Taux de rotation annuel des portefeuilles en %

Portefeuille de 30 actions

Niveau de risque λ	Horizon décisionnel		
	1 an	1 semestre	1 trimestre
0,10	8,88	13,33	19,55
0,20	8,88	13,33	20,44
0,30	8,88	14,28	18,66
0,40	7,77	14,28	19,55
0,50	7,77	14,28	19,55
0,60	8,88	13,33	19,55
0,70	10,00	14,28	19,55
0,80	12,22	19,04	26,66
0,90	12,22	8,57	12,44
1,00	5,55	7,61	9,77
Moyenne des taux de rotation	9,10	13,22	18,57
Variance du taux de rotation entre les catégories de risque	36,60	91,51	194,65

Les résultats de l'analyse en connaissance parfaite se résument comme suit : les horizons de 12 et 6 mois étant dominés d'après nos résultats, les politiques optimales consistent soit à conserver un portefeuille inchangé pendant une période longue (quatre ans) avec un taux nul de rotation, soit à adopter un horizon très court (trois mois) avec un taux de rotation élevé. Ce choix est fonction de l'attitude du placeur à l'égard du risque. Un horizon court conduit à accepter plus de risque mais permet d'obtenir plus de rendement. Il permet également de choisir le niveau du taux de rotation souhaité, dans certaines limites.

Ainsi, curieusement, le choix *a priori* du niveau de risque souhaité n'est guère discriminant quant au niveau effectif du bêta du portefeuille mais il permet surtout de choisir convenablement le taux de rotation. Ceci n'est pas sans intérêt lorsqu'on fait intervenir la considération des coûts de transaction dans l'analyse. Si ces derniers sont importants il y a évidemment intérêt à choisir un λ assez élevé de l'ordre de 0,8, 0,9 ou 1,0 de façon à minimiser les coûts de transaction pour un niveau inchangé de rendement et de variabilité de rendement du portefeuille.

Mais le passage aux conditions d'incertitude de la gestion réelle va sans doute modifier les politiques optimales et l'on peut en particulier se demander s'il est possible d'envisager une période de prévision longue, de l'ordre de 48 mois.

IV — Horizon décisionnel en connaissance imparfaite

Dans les conditions de la gestion réelle les valeurs des paramètres de choix sont incertaines. Notre connaissance est limitée aux séries passées et s'arrête à la date actuelle. Pour gérer il faut prévoir les valeurs futures des moyennes des rendements et des bêtas à partir des moments empiriques calculés sur le passé. Ce procédé n'a bien entendu de valeur qu'autant que l'on a surmonté les problèmes d'estimation évoqués plus haut. Il ne faut notamment pas négliger la possibilité de modification de la structure économique qui se traduit par une évolution des valeurs vraies des bêtas au cours du temps. Ainsi une action très volatile aujourd'hui peut se transformer progressivement en une action peu volatile ou vice versa.

Mais même dans le cas de la stabilité des structures, en admettant que la loi multinormale de distribution des rendements des diverses actions reste inchangée, on peut montrer que les moments empiriques calculés pour diverses périodes peuvent différer très sensiblement des moments vrais. Il s'ensuit que les choix qui s'appuient sur les moments empiriques risquent d'être très différents des choix qui auraient été faits en connaissance certaine des paramètres vrais, et aussi risquent de se révéler très sous-optimaux par rapport aux frontières de placement vraies de la période suivante, la période de prévision.

C'est ce qui ressort de l'expérience de Frankfurter, Phillips et Seagle ([1]). Les auteurs se donnent la moyenne et la variance de trois actions et, partant de l'hypothèse que les rendements sont distribués selon des lois normales, mettent au point un programme qui engendre au hasard des valeurs de ces trois lois pour des périodes successives. Dans un deuxième temps ils composent des portefeuilles selon la règle de moyenne-variance en fonction des moments empiriques calculés à partir des valeurs engendrées au hasard. Ceci pour des horizons décisionnels différents, 5, 10, 25 et 50 périodes.

Ils aboutissent à la conclusion que les portefeuilles choisis à partir des moments empiriques sont la plupart du temps inefficients par comparaison avec les portefeuilles choisis en fonction des moments vrais des distributions. C'est-à-dire que sur un grand nombre de périodes les choix effectués à l'aide de la moyenne et de la variance des rendements calculés sur quelques périodes seront inefficients. Les auteurs mettent donc en cause la valeur du critère moyenne-variance. Ils soutiennent que celui-ci est tout à fait inadapté au problème

1. George M. Frankfurter, Hubert E. Phillips, et John P. Seagle, « Portfolio Selection : The Effects of Uncertain Means, Variances, and Covariances », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre 1971, pp. 1251-1262.

de la composition du portefeuille ex ante, c'est-à-dire dans les conditions de la pratique. Faut-il alors abandonner tout recours à la méthode? Il ne le semble pas si on tient compte de deux faiblesses de l'expérience de *F-P-S*.

Tout d'abord la comparaison des portefeuilles basés sur les moments empiriques calculés à partir de séries historiques limitées, avec les portefeuilles optimaux fonction des moments vrais des distributions est faite sur un grand nombre de périodes mais l'argument est à double tranchant. En effet si l'on montre comme *F-P-S* que les échantillons temporels peuvent différer considérablement par leurs moments de la distribution sous-jacente, il en résulte que même des portefeuilles optimaux choisis en fonction des moments vrais ne seront réellement efficients qu'en moyenne au bout d'un grand nombre de périodes. Il n'y a pas de raison qu'un tel portefeuille soit optimal au cours d'une période précise. Il ne le sera qu'en moyenne sur plusieurs périodes. Mais alors il se peut fort bien que la structure économique se modifie pendant ce temps et que le portefeuille ne soit plus efficient.

Le seul problème vraiment intéressant est donc : le portefeuille théoriquement optimal après coup de la période t est-il encore effectivement et approximativement optimal au cours de la période $t + 1$. Il s'agit de comparer les moments empiriques calculés à partir d'échantillons temporels d'une distribution entre eux et non pas moment empirique d'un échantillon temporel et moment vrai de la distribution.

De plus ce qui importe vraiment pour l'application de la méthode c'est le degré de précision ou d'imprécision. *F-P-S* montrent que les portefeuilles basés sur les moments empiriques sont inefficients. Mais la perte de rendement par rapport aux portefeuilles vraiment efficients est-elle de l'ordre de 5 % ou de 0,05 %? Toute la question pratique est là. L'utilisation effective du critère moyenne-variance dépend de ces nuances.

Seule l'expérimentation peut apporter une réponse à ces questions et départager les jugements théoriques. C'est ce qu'il nous faut tenter maintenant.

A. *La performance en prévision*

Il s'agit, avec des séries connues de rendements passés, de simuler une gestion prévisionnelle de portefeuille.

Autrement dit nous arrêtons nos connaissances des séries à une date t. De l'instant zéro à l'instant t nous disposons ainsi d'une période de mémoire pour le calcul des moments empiriques. Nous composons ensuite le ou les portefeuilles optimaux en fonction de ces moments puis nous calculons leur performance au cours des périodes $t + 1$ à $t + N$, N étant l'horizon prévisionnel.

Si n est la longueur de la période mémoire, nous cherchons empiriquement à determiner les dimensions optimales de n et N.

Pour celà nous examinons les performances des portefeuilles ayant respectivement des $n = 3$, 6, 12 mois et des $N = 3$, 6, 12 mois. Nous examinons aussi les combinaisons des diverses périodes de mémoire et de prévision comme par exemple 12 mois de mémoire et 3 mois de prévision, etc.

Notons que la période de mémoire pouvant être au maximum de douze mois il importe de réserver dans notre période totale d'analyse 1967-1970 les douze premiers mois à la mémoire. Ce qui fait que la première période de prévision commencera en janvier 1968, quelle que soit la longueur de la mémoire utilisée, de façon à avoir une même période de comparaison pour tous les portefeuilles composés ex ante, entre janvier 1968 et janvier 1971.

TABLEAU 3

Performance moyenne en connaissance imparfaite

Période de prévision	Période de mémoire					
	3 mois		6 mois		12 mois	
	R_p	B_p	R_p	B_p	R_p	B_p
3 mois (10 actions). . .	4,81	1,64	4,84	1,38	4,85	1,39
3 mois (30 actions). . .	4,36	1,14	4,41	1,07	4,41	1,09
6 mois (30 actions). . .	4,37	1,23	4,40	1,21	4,41	1,25
12 mois (30 actions). . .	4,30	1,06	4,36	1,19	4,47	1,24

R_p : rendement du portefeuille.
B_p : coefficient bêta du portefeuille ou risque conditionnel.

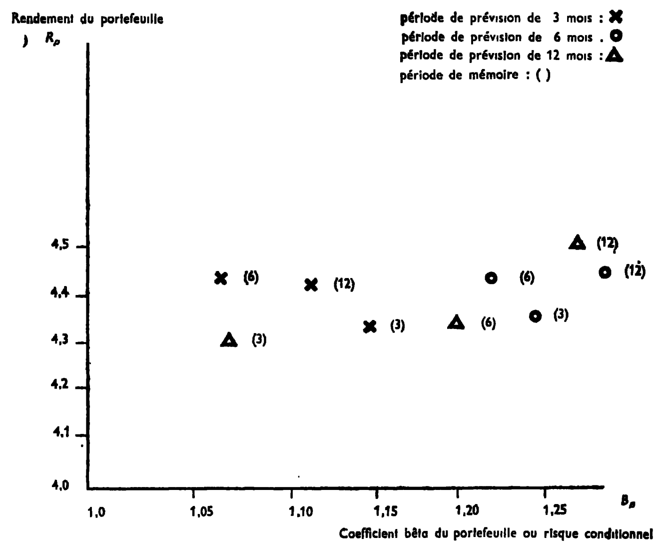

FIG. III. — *Performance et horizon décisionnel en connaissance imparfaite*

Les principaux résultats résumés sont présentés dans le tableau 3 et le graphique III.

Il apparaît que les performances ne sont pas très différentes selon les périodes de mémoire et de prévision employées. Toutefois on note la supériorité de performance des portefeuilles à courte période de prévision (trois mois) et à période mémoire relativement longue (six ou douze mois). Dans l'ensemble les portefeuilles à mémoire courte semblent dominés, cependant que les portefeuilles à longue période de prévision atteignent un rendement assez élevé mais au prix d'une forte variabilité. Ce qui était vrai en connaissance parfaite ne l'est donc plus en connaissance imparfaite pour les portefeuilles à long horizon.

Remarquons enfin, comme il est normal, que les performances diminuent notablement par rapport à celles obtenues en connaissance parfaite. Pour essayer de les améliorer nous avons poussé la recherche dans deux directions :

1° En diminuant le nombre d'actions en portefeuille. En effet on constate que sur le nombre de trente actions en portefeuille un certain nombre ont des rendements très proches de zéro. En réduisant le portefeuille à dix actions on obtient de ce fait une nette amélioration des rendements mais aussi une augmentation de la variabilité. Il est certain que la méthode diagonale linéaire est ici un obstacle à une diversification convenable puisque Evans [1] aux États-Unis et Jouvent et Ségalen [2] en France ont montré que les bêtas des portefeuilles pouvaient être ramenés à l'unité avec des portefeuilles de 10 à 15 actions. Or nous obtenons des bêtas dont les plus faibles sont encore assez supérieurs à 1 bien que notre diversification soit plus importante (30 actions).

2° En effectuant une prévision conjoncturelle, c'est-à-dire en se donnant à l'avance la connaissance de l'orientation du marché à la hausse ou à la baisse. On peut alors choisir les actions à fort bêta à la hausse et les actions à bêta faible à la baisse pour accompagner le mouvement et l'amplifier dans le premier cas, pour l'amortir dans le second.

Ceci devrait améliorer la performance. Or il n'en est rien comme le montre le tableau 4. Il faut sans doute conclure là encore à l'imperfection de notre instrument, trop rudimentaire pour mettre à profit de telles informations portant sur des différences ténues. Cependant il est évident qu'une étude plus approfondie s'impose.

TABLEAU 4

Performance en connaissance imparfaite et prévision conjoncturelle

Période de prévision	Période de mémoire							
	3 mois		6 mois		12 mois		24 mois	
	R_p	B_p	R_p	B_p	R_p	B_p	R_p	B_p
3 mois	4,36	1,12					4,21	1,28
6 mois			4,36	1,22				
12 mois					4,47	1,28		

R_p : rendement du portefeuille.
B_p : coefficient bêta du portefeuille ou risque conditionnel.

Notons enfin que la tentative pour augmenter à 24 mois la période de mémoire n'apporte pas vraiment d'éclairage nouveau sur la question.

B. *Performance nette et coûts de transaction*

Malgré les nombreuses difficultés énumérées précédemment, force est de constater l'efficacité de la méthode quand on compare les performances des portefeuilles composés dans des conditions de simulation fort proches de la réalité et les résultats du marché dans son ensemble (tableau 5). Le gain de rendement par rapport à ce dernier est de l'ordre de 0,4 à 0,5 % pour un niveau de rendement du marché de 4,90 % environ, ce qui n'est pas négligeable. Ceci pour un risque conditionnel qui s'abaisse à 1,08 ou 1,09 dans les meilleurs des cas. Nous avons souligné par ailleurs que le risque pouvait être certainement abaissé en recourant à la méthode complète. On peut donc conserver bon espoir que l'application

1. J. L. EVANS, Diversification and the Reduction of Dispersion : An Empirical Analysis. Thèse de Ph. D. Université de Washington, Seattle, 1968.
2. JOUVENT et SÉGALEN, Mémoire de DES, Université de Paris-IX Dauphine, automne 1972.

des perfectionnements dès maintenant disponibles permette d'obtenir des résultats réellement intéressants.

TABLEAU 5

Rendement moyen du marché. Période 1968-1970

Trimestriel :	13 à 15 / 4,03	16 à 18 / 4,00	19 à 21 / 4,23	22 à 24 / 4,24	25 à 27 / 3,64	28 à 30 / 3,41
	31 à 33 / 3,70	34 à 36 / 3,50	37 à 39 / 3,42	40 à 42 / 3,92	43 à 45 / 4,28	46 à 48 / 4,33
Semestriel :	13 à 18 / 4,01	19 à 24 / 4,23	25 à 30 / 3,52	31 à 36 / 3,60	37 à 42 / 3,67	43 à 48 / 4,30
Annuel :	13 à 24 / 4,12	25 à 36 / 3,56	37 à 48 / 3,98			

Moyenne sur l'ensemble de la période : 3,89.

N'oublions pas en effet que la performance du marché n'est pas un objectif facile à atteindre, notamment avec un portefeuille de faible dimension comme ceux que nous employons (30 actions). Il serait très onéreux de détenir le portefeuille de marché tout entier. Par conséquent pour toutes les institutions qui ont pour objectif premier une certaine diversification il est probable que ces méthodes peuvent contribuer à une amélioration non négligeable de leur gestion.

Toutefois il ne faut pas oublier les coûts de transaction. Nous pouvons en première approximation les estimer à 1 % du montant des transactions (courtage, plus impôt de bourse, plus taxe financière) au marché du terme. Comme il faut les compter aussi bien à l'achat qu'à la vente ils s'élèvent à 2 % environ au total. Ils peuvent porter, selon la politique adoptée en matière de taux de rotation, sur 9 à 19 % du portefeuille au cours de l'année (voir tableau 2) c'est-à-dire représenter de 18 à 38 pour 10 000 du montant du capital. Donc au plus 0,38 % de rendement. Dans ce dernier cas, le moins favorable à notre démonstration, la performance du portefeuille est ramenée à celle du marché tout entier. Dans tous les autres cas elle lui sera supérieure.

V — *Conclusion*

Un premier examen du problème de l'horizon décisionnel optimal nous conduit à émettre l'hypothèse d'une supériorité d'un horizon court de l'ordre de trois mois. Dans ces conditions et en cumulant les hypothèses les plus défavorables, nous constatons que dans une simulation très proche des conditions réelles de gestion, nous obtenons sur la période 1968-1970 une performance au moins égale à celle du marché avec un portefeuille restreint de 30 valeurs.

Ce résultat permet d'augurer favorablement de l'application des méthodes de choix plus avancées qui sont actuellement mises au point.

Les principales directions de perfectionnement sont les suivantes :

1) Application de la programmation quadratique pour supprimer les inconvénients de l'attribution de parts égales aux diverses actions retenues en portefeuille. On peut en attendre en particulier une diminution du risque de portefeuille à rendement inchangé.

2) Application de la politique de révision fréquente du portefeuille de façon à maintenir à tout instant la composition optimale de celui-ci en vendant les actions qui ont monté (et ont ainsi vu leur part grossir dans le portefeuille) et en rachetant les actions dont le cours a baissé (et dont la part a donc diminué).

3) Enfin il serait intéressant de vérifier l'affirmation de Blume selon qui une augmentation du nombre d'actions en portefeuille aurait pour effet de diminuer les biais sur le bêta du portefeuille dans la mesure où les erreurs d'estimation sur les bêtas individuels se compensent lorsque le nombre des actions individuelles est suffisamment élevé.

C'est dire que les méthodes de composition scientifique du portefeuille ont devant elles un avenir intéressant.

Jean-Jacques Rosa
Maître de conférences agrégé de sciences économiques

M. J-.J. Rosa remercie la Compagnie syndicale des agents de change qui a mis à sa disposition avec générosité le temps d'ordinateur nécessaire à cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

E. Altman, B. Jacquillat, M. Levasseur et M. Raud, « Le modèle de marché aide-t-il à la prévision des cours? Quelques études empiriques », *Analyse financière*, 2e trimestre 1972, pp. 1-11.

E. Altman, B. Jacquillat et M. Levasseur, « La rentabilité et le risque des secteurs industriels à la Bourse de Paris », *Analyse financière*, 2e trimestre 1973, pp. 36-55.

M. E. Blume, « On the Assesment of Risk », *Journal of Finance*, mars 1971. « Portfolio Theory : A Step towards its Application », *Journal of Business*, avril 1970, pp. 152-173.

Pao L. Cheng, « Efficient Portfolio Selection Beyond The Markowitz Frontier », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre 1971, pp. 1207-1234.

K. J. Cohen et J. A. Pogue, « An Empirical evaluation of Alternative Portfolio Selection Models », *Journal of Business*, avril 1967, pp. 166-193.

J. L. Evans, Diversification and the Reduction of Dispersion : An Empirical Analysis. Thèse de Ph. D. Université de Washington, Seattle, 1968.

George M. Frankfurter, H. E. Phillips et J. P. Seagle, « Portfolio Selection : The Effects of Uncertain Means, Variances and Covariances », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre 1971, pp. 1251-1262.

R. A. Levy, « On the short-term stationarity of Beta coefficients », *The Financial Analysts Journal*, novembre-décembre 1971.

Harry M. Markowitz, Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments, Wiley, 1959.

J. J. Rosa, « Le portefeuille sur mesure », *Revue Banque*, mai 1972, pp. 459-464.

W. F. Sharpe, « Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, septembre 1964, pp. 425-442.
« A simplified Model for Portfolio Analysis », *Management Science*, janvier 1963, pp. 277-293.
Portfolio Theory and Capital Markets, M.Graw Hill, 1972.