

JEAN-CLAUDE HENTSCH

La circulation des coupures qui constituent une monnaie

Journal de la société statistique de Paris, tome 114 (1973), p. 279-293

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1973__114_279_0

© Société de statistique de Paris, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CIRCULATION DES COUPURES QUI CONSTITUENT UNE MONNAIE

(Communication faite le 13 juin 1973 devant la Société de statistique de Paris)

The elements making up the legal tender of a country are coins and banknotes, that is to say currency in denominations whose values rise in steps so spaced that it is easy to make up any desired sum. The values of the denominations can be based on various series of numbers, each series having its advantages and drawbacks.

On the one hand the author suggests the use of several criteria to measure the qualities of the various series of denominations that can be used to this end, while on the other he shows how the actual circulation of each of the denominations used in a country can be represented in a properly designed diagram. This graphic presentation throws into relief the comparatively high or low level of circulation of a particular denomination in relation to the whole.

Als Zahlungsmittel sind sowohl Münzen als auch Papiergeld, in einer Aufteilung, die es ohne Schwierigkeiten erlaubt, jedwelchen Betrag zusammenzustellen. Die Aufteilung kann auf verschiedenen Nummernserien basieren, die jede sowohl Vorzüge als auch Nachteile aufweist.

Einerseits empfiehlt der Verfasser die Verwendung verschiedener Kriterien, um die Güte der diversen Wertserien, die man benützen kann, miteinander zu vergleichen. Andererseits zeigt er, wie der tatsächliche Geldumlauf jedes einzelnen Abschnittes eines Landes in einem geeigneten Diagramm ausgewiesen werden kann. Diese graphische Aufstellung unterstreicht den verhältnismässig hohen oder niedrigen Umlauf eines gegebenen Abschnittes im Vergleich zum Gesamtumlauf.

Los elementos que constituyen el dinero corriente son monedas y billetes de banco cuyos valores se escalonan de forma que facilmente pueda alcanzarse cualquier suma. El escalonamiento se puede basar en diversas series de numeros, cada una de las cuales tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

Por una parte, el autor propone la utilizacion de diversos criterios para medir las cualidades de las diversas series de valores que se pueden utilizar con este fin. Por otra parte, muestra como la circulacion efectiva de cada una de las piezas de moneda utilizadas en un pais puede representarse en un diagrama de formato adecuado. Esta representacion grafica pone de relieve la circulacion relativamente elevada o relativamente escasa de una determinada pieza por relacion al conjunto de las demas.

I — LES SÉRIES DE SIGNES MONÉTAIRES

L'ensemble de la circulation fiduciaire d'un pays donné prend toujours actuellement la forme de billets et de pièces de dénominations diverses. Parmi les systèmes utilisés, ceux qui ne sont pas basés sur le système décimal sont en voie de disparition. Les systèmes basés sur la dizaine se sont développés en conservant dans chaque pays certaines particularités dont les raisons ne peuvent pas toujours être précisées. Il ne semble pas que les différents

ensembles possibles de pièces et de billets (appelons-les « signes monétaires » ou « coupures ») utilisés pour les paiements manuels aient fait l'objet d'une étude technique systématique destinée à guider dans leurs décisions les praticiens de la question. Étant donné que les mêmes problèmes ont été dans divers pays résolus de façons différentes, il est utile de définir des moyens de comparaison qui soient clairs et objectifs. Nous allons nous efforcer de le faire dans la suite. Il faut relever, toutefois, que nous n'abordons ici qu'un des aspects d'un problème qui en comporte beaucoup d'autres (choix optimal de la valeur de l'unité, réalisation pratique des coupures, etc.).

Les conditions de base auxquelles doit satisfaire un système de numéraire sont :

a) comporter un échelonnement de valeurs rondes, formant une série harmonique (évidemment à base décimale) pour permettre à chaque utilisateur la *conservation* des moyens nécessaires à sa « caisse » sous un volume acceptable;

b) permettre la *composition de n'importe quelle somme* constituant un paiement par l'assemblage d'un nombre minimum de coupures (dans l'opération qu'on désigne par « rendre la monnaie », les coupures sont utilisées négativement) et permettre l'échange de chaque coupure par une combinaison simple de coupures plus petites.

A. Échelonnement harmonique (ou géométrique)

L'utilisation de la monnaie pour la conservation des montants les plus divers, adaptés aux besoins de chaque utilisateur, exige l'emploi de coupures formant une série harmonique.

Une série est harmonique quand le rapport de deux termes successifs est constant. La différence ou l'écart algébrique de deux nombres successifs est donc d'autant plus grand que ces nombres sont grands. Un exemple simple d'une telle série harmonique est la suite des puissances de dix, soit :

... 0,01 0,1 1 10 100 1000 ...

Dans cette série, chaque nombre est obtenu en multipliant celui qui le précède par un facteur constant, 10. Représentés sur une échelle logarithmique, les termes d'une telle série sont équidistants. Les différences arithmétiques (0,1 — 0,01), (1 — 0,1), (10 — 1), etc., entre deux nombres consécutifs ne sont évidemment pas constantes.

Il est évident qu'une série arithmétique, telle que :

... 5 10 15 20 25 30 35 40 ...

qui comporte une différence constante entre deux nombres successifs n'a aucun sens pour l'échelonnement de signes monétaires.

Il n'existe pas un très grand nombre de séries harmoniques basées sur la dizaine et dont les éléments soient à peu près des nombres ronds; nous les appellerons *séries régulières* et nous les aborderons en premier lieu. La plus simple comporte une valeur par décade ⁽¹⁾. Nous la désignerons ⁽²⁾ par R_1 :

R_1 ... 1 10 100 1 000 ...

Ses nombres sont ronds et peuvent être utilisés tels quels comme signes monétaires.

1. Le mot « décade » est utilisé ici pour désigner l'intervalle compris entre deux puissances de 10 consécutives.

2. Par analogie avec les séries de « nombres normaux » R_5 R_{10} R_{20} R_{40} qui sont définis par l'I. S. O., Organisation internationale de normalisation, et qui sont couramment employés dans l'industrie.

Une série un peu plus dense, que nous désignerons par $R_{3/2}$ comporte trois valeurs pour deux décades :

$$(R_{3/2}) \dots 1 \quad 4,64 \quad 21,5 \quad 100 \quad 464 \quad 2\,150 \dots$$

Le facteur constant de cette série est 4,64, plus précisément $10^{2/3}$, soit $\sqrt[3]{10^2}$. La série peut être approchée par des chiffres ronds :

$$R_{3/2} \dots 1 \quad 5 \quad 20 \quad 100 \quad 500 \quad 2\,000 \dots$$

si on accepte que le quotient de deux termes consécutifs varie entre 4 et 5, soit de -14% à $+8\%$ de part et d'autre de sa valeur théorique. Nous mesurons cet écart en calculant de combien le rapport du plus grand au plus petit quotient s'écarte de l'unité $5 : 4 = 1,25$ écart 0,25.

Nous appellerons R_2 la série suivante :

$$(R_2) \dots 1 \quad 3,16 \quad 10 \quad 31,6 \quad 100 \dots$$

qui comporte deux valeurs par décade et un facteur constant de 3,16 ou plus précisément $10^{1/2}$ (soit $\sqrt{10}$). Cette série peut être approchée par des chiffres ronds :

$$R_2 \dots 1 \quad 3 \quad 10 \quad 30 \quad 100 \dots$$

en acceptant que le quotient de deux termes successifs s'écarte de -5% à $+6\%$ de sa valeur théorique. Écart 0,11.

La série R_3 est plus dense encore :

$$(R_3) \dots 1 \quad 2,15 \quad 4,64 \quad 10 \quad 21,5 \quad 46,4 \dots$$

Le quotient de deux termes consécutifs est 2,15, soit $10^{1/3}$ ($\sqrt[3]{10}$). La série de chiffres ronds :

$$R_3 \dots 1 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 20 \quad 50 \dots$$

en donne une bonne approximation avec une variation du quotient de -7% à $+16\%$. Écart 0,25.

Les autres séries, telles que :

$$(R_{5/2}) \dots 1 \quad 2,51 \quad 6,32 \quad 15,8 \quad 39,8 \quad 100 \dots$$

$$(R_4) \dots 1 \quad 1,78 \quad 3,16 \quad 5,62 \quad 10 \quad 17,8 \dots$$

$$(R_5) \dots 1 \quad 1,58 \quad 2,51 \quad 3,98 \quad 6,32 \quad 10 \dots$$

ne gardent pas suffisamment la forme harmonique si on en fait des approximations en nombre ronds et ont d'autres inconvénients. On peut retenir néanmoins la série

$$R_4 \dots 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \dots$$

qui n'est pas entièrement dépourvue de possibilités pratiques pour certains usages.

En ce qui concerne les caractéristiques de toutes ces séries, nous avons déjà mentionné :

- le nombre n de coupures par décade;
- la déviation par rapport à une série harmonique exacte.

Il faut y ajouter un critère d'utilisation.

B. Nombre de coupures nécessaires pour composer une somme donnée

Pour définir un critère simple de la commodité d'utilisation il faut évidemment faire quelques hypothèses simplificatrices, hypothèses qui doivent être formulées avec précaution pour que la généralité des conclusions ne s'en trouve pas restreinte d'une manière significative. En particulier, nous nous limiterons au cas où la même série R_n est utilisée sur tout le spectre monétaire. Nous étudierons dans ce cas la composition des nombres d'une seule décade, étant donné qu'une somme complexe peut être décomposée en centaines, dizaines, unités... traitées chacune indépendamment dans sa décade. Quand on dispose des éléments de la série R_3 , c'est-à-dire des coupures 1, 2 et 5, il suffit d'une seule coupure pour composer 1, 2 ou 5. Il faut deux coupures pour composer 3, 4, 6 et 7 et il faut trois coupures pour composer 8 et 9. Nous prendrons comme critère le total (ou la moyenne) du nombre de coupures nécessaires pour composer tous les nombres de la décade. Ce système est en réalité beaucoup trop simple pour tenir compte de tous les modes d'utilisation de la monnaie; nous donnerons plus loin, quelques précisions sur les complexités dont il faudrait tenir compte sur les méthodes à appliquer et sur les raisons pour lesquelles, dans une première étape, il est nécessaire de se contenter du critère simple employé ici.

Avec la série R_1 , il faut une coupure pour faire 1, deux coupures pour faire 2, etc., au total 45 coupures et en moyenne 4,5 coupures (on ne doit pas exclure le zéro). L'analyse de la série $R_{3/2}$ doit recouvrir deux décades; elle donne un nombre moyen de coupures de 2,75. La série R_2 permet de composer les nombres avec une moyenne de 2,1 coupures et R_3 avec 1,7.

Nous pouvons donc résumer comme suit les caractéristiques des séries régulières examinées jusqu'ici :

Série	Nombre de coupures par décade	Déviaton de la série harmonique	Nombre moyen de coupures utilisées
R_1	1	0	4,5
$R_{1,5}$	1,5	0,25	2,75
R_2	2	0,11	2,1
R_3	3	0,25	1,7
R_4	4	0,33	1,4

On voit donc décroître le nombre des coupures nécessaires pour composer des montants, au fur et à mesure qu'on fait augmenter le nombre de coupures par décade (ce qui augmente évidemment le coût du système, rend plus difficile la création matérielle de coupures bien différenciées et complique la conservation d'un assortiment complet). Le choix d'une série donnée impose forcément un compromis entre les avantages et les inconvénients qu'elle comporte.

C. Séries irrégulières

Il faut faire aussi un examen des séries que nous appellerons irrégulières. Elles sont harmoniques en ce sens qu'elles sont basées sur les puissances de 10, 1-10-100-1 000; elles s'écartent par contre d'une série harmonique par le fait que les subdivisions adoptées ne sont pas des valeurs dont les quotients successifs soient à peu près constants. Il s'agit notamment de la série

$$\dots 1 - 5 - 10 - 50 - 100 \dots$$

C'est une série R_3 dont on omet un terme sur trois; pour comparaison, nous pourrions étudier aussi les deux autres séries obtenues de façon analogue :

$$\dots 1 - 2 - 10 - 20 - 100 \dots$$

$$\dots 2 - 5 - 20 - 50 - 200 \dots$$

Nous examinerons également la série

$$\dots 1 - 2,5 - 5 - 10 \dots$$

qui est une série harmonique régulière, mais qui comporte une valeur non entière, et une série dérivée de celle-ci par omission d'un des termes

$$\dots 1 - 2,5 - 10 - 25 - 100 \dots$$

Si nous examinons les trois premières séries nommées par le procédé utilisé jusqu'ici, nous obtenons :

<i>Série</i>	<i>Nombre de coupures par décade</i>	<i>Déviaton de la série harmonique</i>	<i>Nombre moyen de coupures utilisées</i>
1 - 5 - 10	2	1,5	2,5
1 - 2 - 10	2	1,5	2,5
2 - 5 - 20	2	0,6	2,1

On voit donc que de ces trois séries « amputées », c'est clairement la troisième qui comporte la moins forte déviation et exige l'emploi du moins grand nombre de coupures.

L'examen de la série 1 - 2,5 - 5 - 10 est difficile à cause de la valeur fractionnaire qu'elle comporte. Un examen de la question nous amène à conclure qu'il faut considérer qu'ici l'unité est 0,5, ses multiples étant alors (deux fois) et (cinq fois). On en conclut que cette série est pratiquement identique à 1 - 2 - 5 - 10. On peut aussi considérer que l'unité est 2,5 et que ses multiples sont (deux fois) et (quatre fois). On est alors en présence de la série 1 - 2 - 4 - 10, dont les critères d'utilisation sont d'ailleurs les mêmes que ceux de la précédente.

En ce qui concerne 1 - 2,5 - 10, on procédera de même pour se trouver ramené aux séries 2 - 5 - 20 ou 1 - 4 - 10 qui ont les mêmes critères d'utilisation. Voici les résultats :

<i>Série</i>	<i>Nombre de coupures par décade</i>	<i>Déviaton de la série harmonique</i>	<i>Nombre moyen de coupures utilisées</i>
1 - 2,5 - 5 - 10	3	0,25	1,7
1 - 2,5 - 10	2	0,6	2,1

D. Conclusion

Ayant fait le point sur les séries utilisables ou utilisées, nous pouvons établir des comparaisons. Il faut considérer que la monnaie d'un pays industriel couvre 4 à 5 décades et même plus, l'inflation ne permettant pas au système de rester statique. La série R_1 peut couvrir 5 décades avec seulement 6 types de coupures, mais le nombre de coupures nécessaires pour composer un montant est élevé. Pour des raisons inverses, la série R_4 est pratiquement exclue, exigeant 21 types de coupures différentes pour couvrir 5 décades, ce qui est prohibitif.

La série $R_{3/2}$ mérite de retenir l'attention : elle peut couvrir près de 5 décades avec 8 coupures et comme il s'agit d'une série R_3 dont on omet un terme sur deux, elle peut être complétée ultérieurement. Le nombre critère est 2,75 et des expériences pratiques montrent que c'est déjà trop élevé pour un emploi commode. On peut suggérer l'emploi de cette série pour les grosses coupures dans un pays où la série R_3 est en usage.

La série R_3 est trop largement utilisée pour mériter de longs commentaires. Nous sommes familiers avec sa grande commodité d'emploi et il est intéressant de savoir que cela correspond à un nombre critère de 1,7. Les Banques d'émission ont néanmoins le sentiment que le nombre de 16 coupures nécessaires pour couvrir 5 décades est trop élevé et doit être réduit si possible. C'est ce qui nous conduit à un examen détaillé des séries qui comportent deux valeurs par décade et permettent donc de couvrir 5 décades avec 11 types de coupures. Il est bon de les répertorier à nouveau :

<i>Série</i>	<i>Nombre de coupures par décade</i>	<i>Déviatiou de la série harmonique</i>	<i>Nombre moyen de coupures utilisées</i>
1 - 3 - 10	2	0,11	2,1
1 - 2,5 - 10	2	0,6	2,1
1 - 4 - 10	2	0,6	2,1
2 - 5 - 20	2	0,6	2,1
1 - 5 - 10	2	1,5	2,5
1 - 2 - 10	2	1,5	2,5

Ces chiffres sont suffisants pour montrer que parmi les séries ci-dessus et sur la base des critères adoptés, la série 1 - 5 - 10 a une médiocre commodité d'emploi et qu'elle a la plus forte déviation par rapport à une série harmonique.

La série 1 - 3 - 10 paraît clairement la plus avantageuse. Elle s'écarte d'une façon radicale de ce qui est utilisé actuellement et susciterait de ce fait une très grande résistance du public. Il est néanmoins facile de se convaincre par des essais pratiques qu'elle est d'un emploi très commode.

Les séries 1 - 2,5 - 10, 1 - 4 - 10 et 2 - 5 - 20 constituent des compromis utilisables. La première de ces séries est la seule effectivement utilisée (Pays-Bas) et elle donne satisfaction.

E. Compléments

a) Note sur la plus petite coupure utilisée

Il est utile de noter qu'on ne peut pas fixer n'importe où la limite inférieure d'une série monétaire. Il faut que les plus petites coupures utilisées permettent de subdiviser les autres. C'est pourquoi :

- la série 1 - 10 - 100 peut être arrêtée n'importe où,
- la série 1 - 3 - 10 sur un 1 et non sur un 3,
- la série 1 - 2 - 5 - 10 sur un 1 ou sur un 5, non sur un 2,
- la série 1 - 2,5 - 10 sur un 2,5 non sur un 1,
- etc.

Ces considérations sont importantes à cause de l'inflation fréquente actuellement qui implique le retrait occasionnel des plus petites coupures.

Il ne se pose pas de problème de ce genre quant à la plus grande coupure en circulation.

b) *Note sur l'échange des coupures*

Il existe des divergences d'opinion sur l'importance de cette question, étroitement apparentée à la précédente : Est-il important qu'une coupure puisse être échangée contre un nombre défini de coupures immédiatement inférieures dans la série? La série 1 - 2 - 5 - 10 ne satisfait pas à cette condition car une coupure de 5 ne peut pas être échangée en coupures de 2 uniquement. La série 1 - 3 - 10 n'y satisfait pas non plus, pas plus que la série 1 - 2,5 - 10, et la série 1 - 5 - 10 partage avec 1 - 10 - 100 le mérite de permettre l'échange de chaque coupure dans ces conditions. L'usage très répandu et incontesté de la série 1 - 2 - 5 - 10 permet de penser que la question discutée ici est sans importance.

c) *Note sur l'échange de la coupure de 10*

Toujours dans la même ligne que ci-dessus, il faut mentionner l'opinion très répandue qu'il y a un avantage à ce que chaque coupure soit un sous-multiple de 10. On estime que le comptage des espèces est facilité parce que 50 coupures de 20 valent mille francs et que 200 coupures de 50 en valent dix mille. Nous pensons que ce point de vue est très contestable; les caissiers ont pour habitude de ranger les billets de 50 par liasses de dix et de cent, rarement par vingt et deux cents. Quand on compte un certain volume d'espèces, on dénombre les coupures de chaque type en effectuant simultanément ou ensuite l'évaluation, puis l'addition des valeurs totales obtenues pour chaque coupure; l'essentiel est donc que la valeur d'une coupure soit un nombre aussi rond que possible. Il n'y a donc aucun inconvénient de principe aux coupures de trois fois ou quatre fois l'unité. Cela n'enlève rien à l'importance des obstacles psychologiques que peut rencontrer l'introduction de telles coupures.

d) *Note sur le choix d'un critère de commodité*

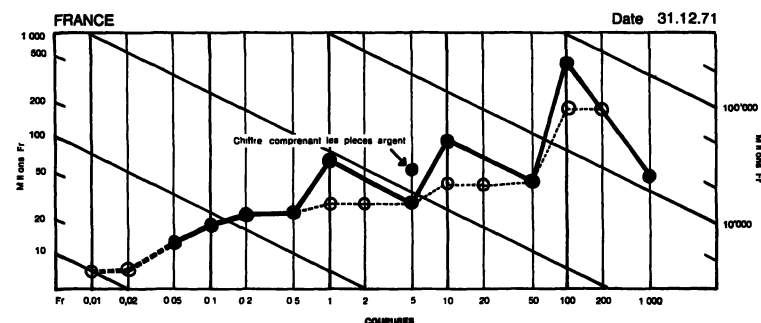
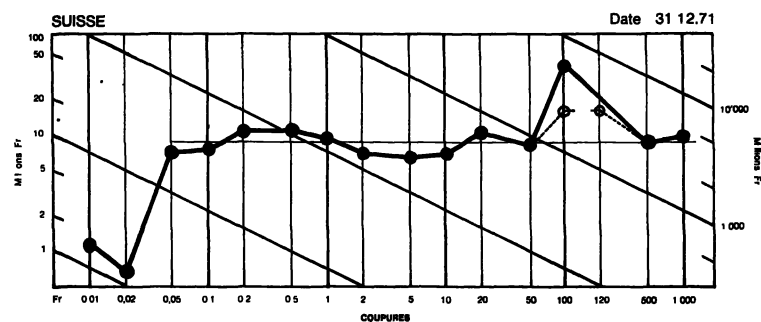
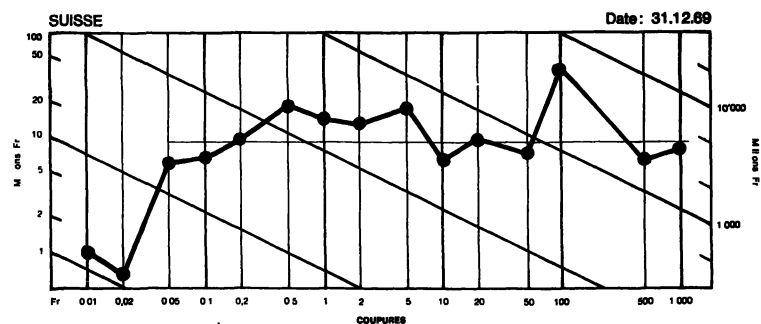
Il serait trop long de donner ici le détail de tous les essais effectués avec plus ou moins de succès. Il faut partir des idées suivantes :

1) un montant quelconque peut être en général composé par des coupures d'un grand nombre de manières, soit en utilisant les coupures dans un seul sens, soit en les utilisant positivement et négativement (monnaie rendue).

2) Le nombre de montants qu'on compose en pratique est presque infiniment grand; il faut faire une hypothèse sur la distribution de ces montants pour en préparer un échantillonnage; de préférence formuler diverses hypothèses et voir si le résultat s'en trouve influencé. Il paraît légitime de partir d'une répartition aléatoire comportant une probabilité uniforme (géométriquement et non arithmétiquement), en limitant le nombre de chiffres significatifs à 3 ou 4.

3) La nécessité d'établir des comparaisons objectives entre des séries ne comportant que des nombres ronds et celles qui comportent des nombres fractionnaires (2,5) rend très difficile la recherche d'une théorie qui permettrait de ramener le problème à des éléments plus simples, c'est-à-dire à se contenter comme nous l'avons fait d'étudier la composition des nombres d'une dizaine.

En conclusion, la mise au point d'un critère précis semble n'être possible que sur la base de recherches comportant l'emploi d'un ordinateur. Les travaux déjà effectués nous font penser néanmoins que les critères utilisés plus haut constituent une approximation suffisante pour permettre de classer les séries par ordre de qualité.

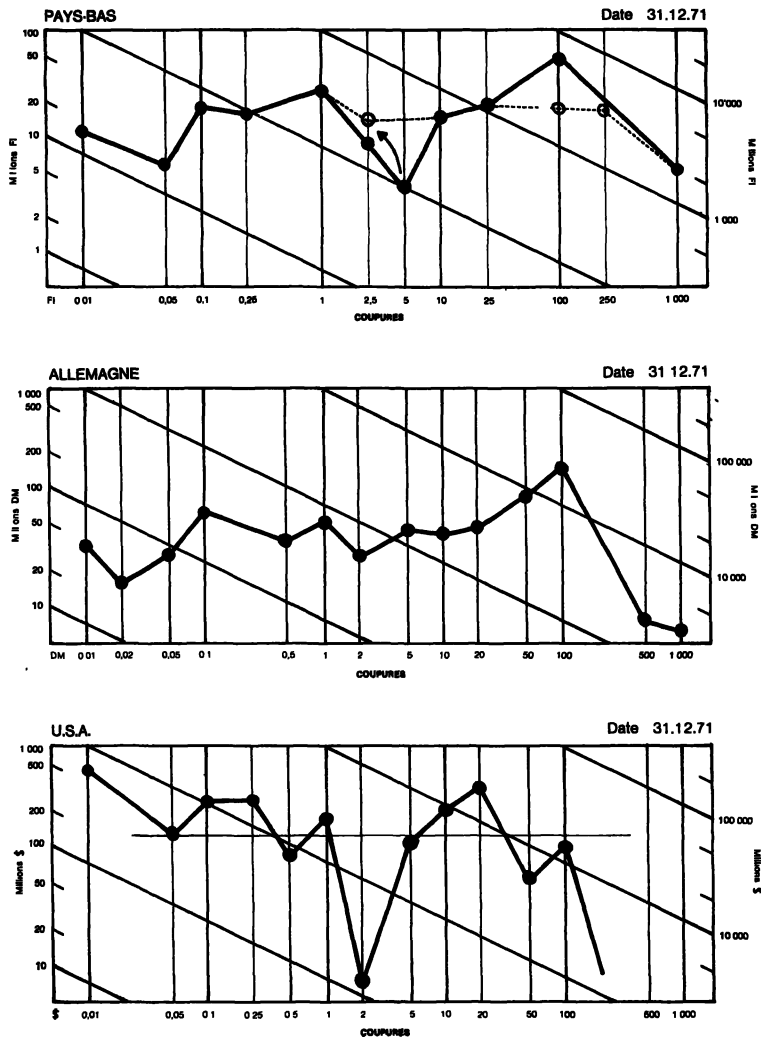


II — LA CIRCULATION DES DIFFÉRENTS SIGNES MONÉTAIRES

L'étude des montants en circulation est intéressante à plus d'un titre. Elle permet de prévoir dans une certaine mesure les montants à émettre. Elle permet aussi de juger objectivement de l'utilité de chacune des coupures en circulation en comparant leurs volumes les uns aux autres. Elle nous donnera aussi de nombreux critères d'évaluation qualitative d'un système par rapport à un autre. L'étude de la circulation permet enfin l'étude des anomalies qui peuvent se produire dans ce domaine pour diverses raisons.

En se basant sur la circulation des diverses coupures en Suisse, nous nous sommes efforcé de trouver une présentation graphique des chiffres qui donne à la circulation de chaque coupure une importance à peu près égale. Ce n'est pas sans une certaine surprise qu'on s'est alors aperçu que :

- 1) la chose est possible;



2) la représentation obtenue fait ressortir une relation simple entre la valeur des coupures et les montants en circulation pour chacune;

3) la circulation d'autres pays que la Suisse suit à peu près la même règle.

La règle que nous avons mise en évidence peut être énoncée comme suit : *Les montants en circulation pour chaque coupure sont proportionnels à la racine carrée de la valeur de chaque coupure.* Elle semble être valable sur une gamme très étendue de valeurs, à condition d'admettre qu'il ne s'agit pas d'une relation exacte et que des variations du simple au double par rapport à la règle n'ont rien d'exceptionnel.

Une grille logarithmique a été établie de telle façon que si la règle ci-dessus était respectée exactement tous les points se trouveraient sur une ligne horizontale. Les graphiques établis sur cette grille permettent donc de mettre en relief les déviations par rapport à la règle et d'en étudier les raisons. Ils permettent également des comparaisons entre un pays et un autre et des comparaisons historiques dans un même pays, même si les pouvoirs d'achat

des unités comparées ou si les circulations totales ne sont pas les mêmes, puisque les échelles logarithmiques préservent les rapports.

Nous donnerons deux exemples simples de comparaisons qu'on peut établir au moyen de notre grille. Le premier consiste à comparer les circulations en Suisse, avant et après le retrait des pièces d'argent de 0,5 franc, un franc, deux francs et cinq francs. La comparaison des graphiques montre qu'après le retrait des pièces d'argent les circulations de ces quatre coupures sont revenues près de la normale; cela montre donc qu'antérieurement, le niveau relativement élevé de circulation de ces coupures était bien une anomalie due à la thésaurisation.

Le second exemple est l'examen de la circulation des pièces d'un franc et des billets de dix francs en France, en l'absence de pièces de deux francs et de billets de vingt francs. En commençant par supposer exacte la règle de la racine carrée, on peut calculer quel serait le volume de la circulation des pièces de deux francs si on les créait. On trouve que la circulation actuelle des pièces d'un franc se répartirait à raison de 42 % sur les pièces d'un franc et 58 % sur les pièces de deux francs. Le même rapport s'établirait entre les circulations de billets de dix francs et de vingt francs. Le fait qu'en reportant sur le graphique les valeurs ainsi calculées fasse apparaître une ligne pratiquement droite et horizontale permet de formuler l'hypothèse que la courbe actuelle en dents de scie est bien due à l'absence des coupures manquantes dans la série. Cela revient à dire que la circulation actuelle des pièces de un franc contient virtuellement toutes les pièces de deux francs qu'on pourrait émettre. Il n'en va pas de même du billet de cent francs car si on suppose que sa circulation pourrait être répartie dans la proportion 42 : 58 entre les coupures de 100 et de 200, les valeurs obtenues ne se trouveraient pas en alignement avec le reste de la courbe. On doit donc rechercher une explication supplémentaire pour la circulation exceptionnellement élevée du billet de 100 francs français.

Si on revient à l'exemple suisse, où la circulation du billet de 100 francs apparaît exceptionnellement élevée on constate que la répartition de cette circulation dans le rapport 42 : 58 entre un billet de 100 francs et un billet de 200 francs ramènerait la courbe à la normale à peu de chose près.

Un dernier exemple de ce qui peut être examiné au moyen du graphique peut être démontré sur la base des chiffres de la circulation aux Pays-Bas, pays dans lequel on a renoncé déjà aux coupures de 0,5 et de 50. Si on suppose que la coupure de cinq florins est complètement retirée de la circulation et que les montants qu'elle incorpore sont portés sur la coupure de 2,5 florins, on peut vérifier que la distribution des coupures est alors harmonieuse.

Il serait évidemment intéressant d'effectuer des recherches, tant sur la théorie éventuelle de la règle de la racine carrée que sur l'utilisation pratique des graphiques qui l'incorporent, tant pour des études historiques que pour des comparaisons entre pays.

Sur le plan théorique, notons la différence qu'il faut faire entre le *volume en circulation* d'une coupure et sa *fréquence d'utilisation*. Il est généralement reconnu que les coupures circulent d'autant plus vite que leur valeur est faible et c'est la raison pour laquelle on utilise des pièces pour les petites coupures, leur usure étant moins rapide. A part cette relation générale, on ne peut pas être certain qu'il y ait un lien étroit entre le volume en circulation et la fréquence d'utilisation. Nous voudrions formuler ici l'hypothèse que *les volumes en circulation sont déterminés beaucoup plus par le rôle de chaque coupure dans les stocks individuels plutôt que par les mouvements*. On objectera aussitôt que les stocks sont constitués en vue des mouvements prévisibles et que ces deux éléments sont donc étroitement interdépendants. Nous pensons qu'en réalité la relation entre les stocks et les mouvements n'est ni simple, ni évidente et qu'elle mérite aussi une étude approfondie.

III — NOMBRE TOTAL DE COUPURES EN CIRCULATION

Au premier chapitre, nous nous sommes attachés à évaluer les mérites de séries comportant différents nombres de signes par décade. Au second chapitre, nous avons suggéré l'existence d'une règle qui met en relation la valeur de chaque coupure et la valeur de la circulation de cette coupure.

Il est curieux de remarquer que si on suppose exacte la règle de la racine carrée et qu'on compare entre elles différentes séries harmoniques, un développement mathématique relativement simple ⁽¹⁾ permet de démontrer que *si on emploie des séries harmoniques, le nombre total de signes monétaires en circulation est indépendant de la série choisie*. On suppose pour cela des séries harmoniques parfaites couvrant un nombre donné de décades, avec un, deux ou plus signes par décade. On calcule le rapport entre le nombre total des signes monétaires en circulation et la valeur globale qu'ils représentent. On trouve que ce rapport est égal à $10^{-d/2}$ (si la plus petite coupure est prise comme unité) où d est le nombre de décades entre la plus petite et la plus grande coupure. Le rapport est donc indépendant du nombre de signes par décade dans la série utilisée.

Les suppositions faites ici sont bien sûr assez loin de la réalité pratique, mais il est probable que la conclusion n'est pas pour autant dénuée d'intérêt. Elle peut servir à orienter des recherches ultérieures qui démontreraient les deux propositions suivantes :

- 1) Si on veut réduire le nombre global de coupures en circulation, le seul moyen est de créer de nouvelles, plus grosses coupures (si la circulation peut les accepter); on n'obtient guère de changement en réduisant le nombre de coupures par décade.
- 2) Si le nombre de coupures par décade a été choisi, c'est quand on se rapproche le plus possible d'une série harmonique *régulière* que le nombre total de coupures en circulation est minimum.

Jean-Claude HENTSCH
*Banquier, ancien président
 de l'Association suisse des analystes financiers*

NOMBRE TOTAL DES COUPURES EN CIRCULATION

p = nombre de types de coupures par décade;

d = nombre de décades recouvertes. La plus petite coupure est prise comme unité.

valeur des coupures successives :

$$(10^{1/p})^0 \quad (10^{1/p})^1 \quad (10^{1/p})^2 \quad \dots \quad (10^{1/p})^{pd}$$

Soit :

$$10^0 \quad 10^{1/p} \quad 10^{2/p} \quad \dots \quad 10^{pd/p}$$

nombre de coupures différentes = $pd + 1$

1. Nous donnons en annexe les formules utilisées et, à titre d'illustration, des exemples de répartition théorique couvrant trois décades.

montants en circulation (proportionnels à la racine carrée de la valeur des coupures) :

$$k 10^0 \quad k 10^{1/2p} \quad k 10^{2/2p} \quad \dots \quad k 10^{pd/2p}$$

la somme des montants, ou circulation totale est alors :

$$\sum_0^{pd} = k \frac{10^{(pd+1)/2p} - 1}{10^{1/2p} - 1}$$

quantité de chaque coupure :

$$k 10^0 \cdot k 10^{-1/2p} \quad k 10^{-2/2p} \quad \dots \quad k 10^{-pd/2p}$$

somme des quantités de toutes les coupures, rapportée au montant total :

$$\frac{10^0 + 10^{-1/2p} + 10^{-2/2p} + \dots + 10^{-pd/2p}}{10^0 + 10^{1/2p} + 10^{2/2p} + \dots + 10^{pd/2p}} = 10^{-d/2}$$

CIRCULATION THÉORIQUE
OBÉISSANT STRICTEMENT A LA RÈGLE DE LA RACINE CARRÉE
(SÉRIES HARMONIQUES EXACTES) SUR TROIS DÉCADES

<i>Coupures</i>	<i>Montants</i>	<i>Nombres</i>
<i>1 coupure par décade</i>		
1	218 000	218 400
10	691 000	69 100
100	2 184 000	21 800
1 000	6 907 000	6 900
Totaux . . .	10 000 000	356 200
<i>2 coupures par décade</i>		
1	141 000	140 900
3,16	251 000	79 200
10	446 000	44 600
31,6	792 000	25 100
100	1 409 000	14 100
316	2 506 000	7 900
1 000	4 456 000	4 500
Totaux . . .	10 001 000	316 300
<i>3 coupures par décade</i>		
1	103 000	103 000
2,15	151 000	70 200
4,64	222 000	47 800
10	326 000	32 600
21,5	478 000	22 200
46,4	702 000	15 100
100	1 030 000	10 300
215	1 512 000	7 000
464	2 219 000	4 800
1 000	3 257 000	3 300
Totaux . . .	10 000 000	316 300

INTERVENTIONS SUR LA COMMUNICATION DE M. J.-C. HENTSCH

M. J. LAMSON. — Fait remarquer que le fait que le nombre global de coupures est indépendant du nombre de coupures intermédiaires est la conséquence arithmétique de deux hypothèses :

— les montants émis sont proportionnels à la racine carrée des montants des coupures;

— les montants des coupures sont en progression géométrique.

M. J.-C. HENTSCH. — C'est exact. La proportionnalité à la racine carrée de la valeur des coupures est une hypothèse que l'expérience semble vérifier si et quand l'échelonnement ne s'écarte pas trop d'une série harmonique.

M. CHAUVET. — Je remarque que la France et la Belgique se singularisent par la pente caractérisée de leurs droites. On pense à l'influence des structures sociologiques. Mais alors, pourquoi une telle similitude? Il faudrait rechercher la cause dans les structures politico-financières...

M. J.-C. HENTSCH. — Le diagramme de la circulation en Belgique (qui n'a malheureusement pu, faute de place, être reproduit) fait apparaître des dents de scie de la même forme que celles du diagramme français, là où la coupure de 2 est omise, notamment dans la zone 100-500 francs. Similitude aussi avec le diagramme français car la forte circulation du billet de 1 000 francs belges est analogue à celle de la coupure française de 100 francs. Par contre, la France est seule à présenter une pente générale correspondant à un exposant de 0,6. La Belgique a un exposant d'environ 0,5 comme la Suisse, l'Allemagne et la Hollande mais il est difficile à définir avec précision à cause des grosses irrégularités dues précisément à l'absence de certaines coupures.

M. H. GUITTON. — Les coupures sont-elles une monnaie? Quelle est l'importance des espèces dans la masse monétaire? Quelle est la finalité des calculs extrêmement intéressants apportés par le conférencier?

M. J.-C. HENTSCH. — Le conférencier est conscient de n'avoir parlé que des espèces et de leurs aspects mécaniques qui sont sans rapport avec les problèmes économiques généraux. Mais les espèces jouent dans la vie quotidienne un rôle assez important pour qu'on se préoccupe d'optimiser leur fonctionnement et de chercher à quelles règles la circulation obéit.

M. VENTURA. — Le problème de la détermination du choix optimal des coupures ne me paraît pas requérir d'énormes moyens matériels. Grâce à l'informatique, et par un choix d'échantillon judicieux, par exemple les achats faits dans un grand magasin, allant d'articles très bon marché à des articles très chers, on peut parvenir au résultat recherché avec des moyens réduits au regard d'un problème considéré comme aussi important.

M. J.-C. HENTSCH. — L'emploi d'un échantillon de prix a été mentionné en rapport avec la détermination précise du critère de commodité. C'est en se servant d'un tel échantillon (réel ou artificiel) qu'on déterminera le nombre moyen de coupures utilisé. Le conférencier sait bien que l'informatique moderne permet de faire les calculs requis, calculs qui

toutefois dépassent les possibilités d'un homme seul. On fera appel à l'informatique pour ces calculs dès que les milieux directement concernés auront pu être convaincus de l'intérêt économique de connaître les résultats.

M. F. ROSENFELD. — L'exposé et les graphiques de M. Hentsch montrent que la coupure de 100 F joue très vraisemblablement un rôle de stockage en France, alors qu'aux États-Unis les grosses coupures ne semblent pas jouer un tel rôle.

M. J.-C. HENTSCH. — Oui, c'est probablement dû à l'usage des chèques aux U.S.A.

M. SAINT-SAUVEUR. — Comment expliquez-vous l'« anomalie » de la valeur 100 D.M, 100 FF ou 100FS? Précaution des ménages?

M. J.-C. HENTSCH. — Nous avons cherché à mettre les anomalies en évidence et avons montré que l'absence d'une coupure double ne peut expliquer qu'en partie la forte circulation de ces coupures.

M. H. HIERCHE. — Une économie étant formée de niveaux différents de transactions : achats nécessaires à la vie quotidienne; achats de biens plus durables; achats de bien d'équipement, à chaque niveau correspond un besoin en moyens monétaires de paiements. Les modifications structurelles des opérations proposées et des moyens monétaires de les acquitter agissent réciproquement. La fixation des prix, au niveau le plus bas, est extrêmement sensible aux possibilités des types monétaires mis en circulation.

M. J.-C. HENTSCH. — Ce commentaire est extrêmement judicieux. Il y a différents niveaux de transactions pour lesquelles les coupures qui sont élevées par rapport à ce niveau jouent leur rôle de valeurs principales alors que les coupures faibles par rapport à ce niveau jouent un rôle de coupures divisionnaires.

Il est extrêmement intéressant de constater, comme nous l'avons fait, qu'en pratique tous ces niveaux de transactions sont fondus en un seul système dont le fonctionnement semble homogène et dont les éléments s'articulent harmonieusement les uns sur les autres.

M. R. SERGENT. — Les critères principaux retenus par l'étude de M. Hentsch paraissent se rattacher à la recherche

- 1) du coût minimum de l'émission,
- 2) de la commodité des usagers.

Ne peut-on imaginer que les pouvoirs publics sont guidés par d'autres soucis tels que

- 3) la lutte contre la hausse des prix qui peut maintenir artificiellement la circulation de monnaies divisionnaires de faible valeur.

Ou même qu'ils provoquent par :

- 4) la fiscalité, l'apparition de prix exprimés avec des décimales qui, à leur tour, exigent la manipulation de ces monnaies divisionnaires.

M. J.-C. HENTSCH. — Comme cela a été dit au début de l'exposé, la circulation fiduciaire doit être envisagée sous de nombreux aspects et les pouvoirs publics sont préoccupés par beaucoup de ces aspects, ce qui ne veut pas dire qu'ils aient tous été abordés au cours de l'exposé.

Dans le cadre de la lutte contre la hausse des prix, se présentent deux de ces problèmes : le choix optimal du pouvoir d'achat de l'unité de base et le maintien en circulation de coupures d'un pouvoir d'achat suffisamment faible.

Comme nous sommes malheureusement victimes d'une inflation presque constante, les préoccupations concernant le pouvoir d'achat de l'unité sont reléguées au second plan dans la plupart des pays et on doit envisager d'utiliser une série de valeurs qui soit commode sur toute la largeur du spectre monétaire sans pouvoir accorder beaucoup d'importance à l'emplacement exact de l'unité de base dans ce spectre.

Il est clair que les impôts du type TVA ont pour effet de donner à de nombreux prix des décimales supplémentaires. Cela signifie simplement qu'un plus grand nombre de prix comportera quatre chiffres significatifs alors que sans cela ils n'auraient peut-être que trois chiffres significatifs. C'est un facteur dont il est facile de tenir compte lors du calcul exact du critère de commodité; on s'apercevra qu'en fait cette différence n'a pas une grande influence sur la valeur du critère. C'est d'ailleurs très heureux car il importe de pouvoir comparer entre elles les différentes séries monétaires sans avoir à tenir compte de particularités régionales.