JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J.-J. BOULANGER

Remarques sur deux cas simples de programmation linéaire

Journal de la société statistique de Paris, tome 113 (1972), p. 64-74
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1972__113__64_0>

REMARQUES SUR DEUX CAS SIMPLES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

Le Simplexe est la méthode générale permettant la résolution des problèmes de programmation linéaire. Elle est sûre, efficace, élégante même, par contre elle repose sur des calculs assez lourds, même quand il est possible d'effectuer mécaniquement ceux-ci. Dans certains cas il est possible d'utiliser une méthode particulière permettant de diminuer ceux-ci, par exemple lorsque la matrice des coefficients ne comporte que des éléments de même signe, ce qui conduit à des problèmes des deux types suivants :

— Déterminer un ensemble d'activités x_i [1] conduisant à un revenu total R maximum, sachant que ces activités doivent satisfaire aux contraintes $Ax \leqslant b$ soit

$$\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{1n}\, x_n \leqslant b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{2n}\, x_n \leqslant b_2 \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{mn}\, x_n \leqslant b_m
\end{array}$$

les coefficients a_{ji} et les contraintes b_j étant tous positifs ou nuls.

— Déterminer un ensemble d'activités x_i [1] conduisant à un coût total C minimum sachant que ces activités doivent satisfaire aux contraintes $\mathrm{A}x \geqslant b$, les coefficients et contraintes étant tous positifs ou nuls.

Cas R maximum avec $Ax \leqslant b$

Dans « Le choix des investissements [2] » P. Massé présente le cas d'une ferme de Caroline du Nord pouvant concurremment exercer 6 activités qui sont : la culture des pommes de terre, du maïs, du soja; l'élevage du bœuf; la production des choux d'automne et des laitues d'automne. « Ces six activités exigent l'utilisation, en proportion variable, de neuf ressources : de la terre de printemps, de la terre d'automne, de l'outillage en capital, et six catégories de travail, réparties sur les six bimestres de l'année. Étant donnés les revenus nets unitaires r_i de chacune des six activités, les montants disponibles b_j de chacune des neuf ressources et la quantité a_{ji} de chaque ressource b_j consommée par une unité de l'activité i, on se propose de déterminer le programme optimum de production de l'exploitation agricole considérée », c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer les x_1, x_2, ... x_6 conduisant au maximum de $R = \sum_i r_i x_i$ en respectant les conditions $\sum_i a_{ji} x_i \leqslant b_j$.

Les données du problème sont rassemblées dans le tableau 1. Dans ce tableau on remplace les a_{ji} par des $b_{ji} = b_j r_i / a_{ji}$ ce qui conduit au tableau 2. Le b_{ji} possède une propriété particulière : il représente le revenu net qui serait procuré par l'activité i si la ressource j était le goulot d'étranglement de cette activité. Le goulot d'étranglement pour une activité i est donc déterminé par le minimum des b_{ji} par colonne et le revenu net procuré par

1. Avec $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ... $x_n \geqslant 0$.
2. P. Massé, Le choix des investissements (Dunod), p. 150-154.

TABLEAU 1

N°	Ressources	Unités	Activités						Montant b_i des ressources disponibles
			Pommes de terre	Maïs	Soja	Élevage	Choux d'Automne	Laitue d'Automne	
1	Terre de printemps	Acres	1	1	1	2	0	0	60
2	Terre d'automne	Acres	0	1	1	2	1	1	60
3	Capital de production	Dollars	99,40	37,75	19,75	54,40	74,75	53,00	2 000
4	Ttravail de J. F.	Heures	2,400	1,540	0	0	0	0	351
5	Travail de M. A.	Heures	2,400	1,960	0	0	0	0	448
6	Travail de M. J.	Heures	1,800	3,300	5,330	0	0	0	479
7	Travail de J. A.	Heures	0	0	2,070	0	8,700	0	388
8	Travail de S. O.	Heures	0	0	0,436	0	19,100	12,363	424
9	Travail de N. D.	Heures	0	3,000	0,364	0	9,100	26,737	359
r_i unitaire net		Dollars	83,40	72,35	27,30	72,05	217,25	455,00	

TABLEAU 2

Ressources	Activités						Montant des ressources disponibles
	1	2	3	4	5	6	
1	5 004	4 341	**1 638**	**2 161**	∞	∞	60
2	∞	4 341	**1 638**	**2 161**	13 035	27 300	60
3	**1 678**	**3 833**	2 765	2 649	5 813	17 170	2 000
4	12 197	16 490	∞	∞	∞	∞	351
5	15 568	16 537	∞	∞	∞	∞	448
6	22 194	10 502	2 453	∞	∞	∞	479
7	∞	∞	5 117	∞	9 689	∞	388
8	∞	∞	25 549	∞	**4 823**	15 604	424
9	∞	8 658	26 925	∞	8 571	**6 109**	359

l'activité i est égal à ce minimum. Le revenu net maximum procuré par une activité unique sera donc le maximum de ces minima soit 6 109 dollars, procuré par l'activité 6 au taux 13,427 = 359/26,737, alors que le goulot d'étranglement correspond à la ressource 9.

Cette activité 6 étant mise de côté, on peut déduire du tableau 2 le tableau 3 en fonction des ressources restantes.

TABLEAU 3

Ressources	Activités						Montant des ressources restantes
	1	2	3	4	5	6	
1	5 004	4 341	1 638	2 161	∞	∞	60
2	∞	3 369	1 271	**1 678**	10 117	21 189	46,57
3	**1 081**	2 469	1 781	1 706	3 745	11 061	1 288,4
4	12 197	16 490	∞	∞	∞	∞	351
5	15 568	16 537	∞	∞	∞	∞	448
6	22 194	10 502	2 453	∞	∞	∞	479
7	∞	∞	5 117	∞	9 689	∞	388
8	∞	∞	16 155	∞	2 935	9 495	258,0
9	∞	**0**	**0**	∞	**0**	**0**	0

Les minima des b_{ji} par colonne sont nuls sauf ceux des activités 1 et 4, et ceux-ci représentent les accroissements de revenu net pouvant être procurés par les activités 1 et 4 fonctionnant à leur maximum. Nous retiendrons celle qui procure le plus grand revenu net soit l'activité 4 au taux 23,285 = 46,57/2 et la ressource 2 devient un nouveau goulot d'étranglement.

L'activité 4 étant mise de côté on peut déduire du tableau 3 le tableau 4 en fonction des ressources restantes.

TABLEAU 4

Ressources	Activites						Ressources restantes
	1	2	3	4	5	6	
1	1 120	972	367	484	∞	∞	13,43
2	∞	0	0	**0**	0	0	0
3	**18,2**	41,5	29,9	28,7	63,1	186,3	21,7
4	12 197	16 490	∞	∞	∞	∞	351
5	15 568	16 537	∞	∞	∞	∞	448
6	22 194	20 502	2 453	∞	∞	∞	479
7	∞	∞	5 117	∞	9 689	∞	388
8	∞	∞	16 155	∞	2 935	9 495	258,0
9	∞	**0**	**0**	∞	**0**	**0**	0

Les minima des b_{ji} par colonne sont nuls sauf celui de l'activité 1 qui peut procurer un revenu supplémentaire de 18,2 dollars en fonctionnant au taux $21,7/99,4 = 0,218$. Le revenu net total procuré par les activités 6, 4, 1 est égal à $6\,109 + 1\,678 + 18 = 7\,805$ dollars.

Les activités 6, 4, 1 étant mises de côté on peut déduire du tableau 4 le tableau 5 en fonction des ressources restantes.

TABLEAU 5

Ressources	Activites						Dernieres ressources restantes
	1	2	3	4	5	6	
1	1 102	956	361	476	∞	∞	13,21
2	∞	0	0	0	0	0	0
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
4	12 180	16 467	∞	∞	∞	∞	350,5
5	15 551	16 518	∞	∞	∞	∞	447,5
6	22 180	10 495	2 451	∞	∞	∞	478,7
7	∞	∞	5 117	∞	9 689	∞	388
8	∞	∞	16 155	∞	2 935	9 495	258,0
9	∞	0	0	∞	0	0	0

Cette fois les minima par colonne sont tous nuls et l'on ne peut plus progresser par addition d'activité. Introduisons l'activité 5 au taux Δx_5 en supposant des variations Δx_1, Δx_4, Δx_6. Les trois goulots d'étranglement conduisent aux trois équations :

$$
\begin{aligned}
&2\,\Delta x_4 + \Delta x_5 + \Delta x_6 = 0 \\
&99{,}40\,\Delta x_1 + 55{,}40\,\Delta x_4 + 74{,}75\,\Delta x_5 + 53{,}00\,\Delta x_6 = 0 \\
&9{,}100\,\Delta x_6 + 26{,}737\,\Delta x_6 = 0 \\
\text{avec } &\Delta R = 83{,}40\,\Delta x_1 + 72{,}05\,\Delta x_4 + 217{,}25\,\Delta x_5 + 455{,}00\,\Delta x_6 > 0.
\end{aligned}
$$

La résolution du système précédent donne :

$$\Delta x_6 = -\,0{,}3404\,\Delta x_5,\ \Delta x_4 = -\,0{,}3298\,\Delta x_5,\ \Delta x_1 = -\,0{,}3900\,\Delta x_5,\ \text{d'où } \Delta R = 6{,}08\,\Delta x_5 > 0.$$

On augmente donc le revenu net total en introduisant l'activité 5. On peut voir facilement que l'activité 1 disparaît dès que $\Delta x_1 = -\,0{,}218$ On en déduit

$$\Delta x_5 = 0{,}218/0{,}390 = 0{,}5590,\ \Delta x_6 = -\,0{,}1903,\ \Delta x_4 = -\,0{,}1844,$$

d'où les nouvelles activités : $x_1 = 0$, $x_4 = 23{,}101$, $a_5 = 0{,}559$, $x_6 = 13{,}237$.

On peut vérifier que l'introduction des activités 2 et 3 n'améliore pas le revenu net total, dont l'optimum est obtenu en utilisant les activités 4, 5, 6 aux taux $x_4 = 23{,}101$, $x_5 = 0{,}559$, $x_6 = 13{,}237$ ce qui conduit au revenu net total

$$R = 72{,}05 \cdot 23{,}101 + 217{,}25 \cdot 0{,}559 + 455{,}00 \cdot 13{,}237 = 7\,808{,}6\,\$ \# 7\,809 \text{ dollars.}$$

Remarque : On aurait pu se dispenser de dresser le tableau 5; les b_{ji} relatifs à la ressource 3 étant tous finis, il était naturel qu'en saturant la ressource 3 on obtienne de nouveaux b_{ji} tous nuls. Ceci aurait pu se produire dès la deuxième activité. Il aurait suffi que les a_{ji} de la ressource 9 soient tous différents de zéro, pour que l'on ne puisse plus progresser que par substitution simple ou substitution-addition.

Il est, d'autre part, des cas où, dès le départ, on peut éliminer certaines activités. En effet, si une activité i ($i \neq 6$) appartient à la solution finale, comme le résultat final ne dépend pas de l'ordre du cheminement, cette activité i aurait pu être la deuxième activité considérée et comme elle appartient à la solution finale, c'est que son introduction augmente le revenu R, donc que l'on a : $\Delta R = r_i \Delta x_i + r_6 \Delta x_6 > 0$ (avec $\Delta x_i > 0$). Or Δx_i et Δx_6 sont liés par la relation : $a_{9i}\,\Delta x_i + a_{96}\,\Delta\, x_6 = 0$ [1], d'où : $r_i \Delta x_i - r_6 a_{9i} \Delta x_i / a_{96} > 0$ ou $r_i / a_{9i} > r_6 / a_{96}$ d'où en multipliant par b_9 : $b_{9i} = b_9 r_i / a_{9i} > b_9 r_6 / a_{96} = b_{96}$. Donc si une activité appartient à la solution finale, c'est que l'on a : $b_{9i} > b_{96}$. Inversement si b_{9i} est supérieur à b_{96}, i est susceptible d'appartenir à la solution finale et corollairement toute activité i pour laquelle on a : $b_{9i} < b_{96}$ peut être éliminée. Ce qui n'est pas le cas de l'exemple précédent où tous les b_{9i} sont supérieurs à b_{96}. Par contre on peut vérifier que les activités 1 et 3 sont respectivement éliminées par les activités 2 et 4 (mêmes goulots d'étranglement et inégalités : $b_{31} < b_{32}$ et $b_{23} < b_{24}$) et comme les activités 2 et 4 ne peuvent appartenir à la solution finale (sinon on aurait : $b_{32} < b_{34}$ et $b_{24} < b_{22}$), celle-ci comprendra au plus les activités 4, 5, 6 ou 2, 5, 6.

Cas C minimum avec $Ax \geqslant b$

L'exemple étudié est également emprunté à l'ouvrage de P. Massé [2]. Il concerne un programme d'équipement électrique défini à l'aide de trois objectifs de production A, B, C à atteindre avec ou sans marge, A étant la puissance moyenne d'heures pleines d'hiver, B la puissance de pointe, C l'énergie annuelle, et ceci à l'aide de 5 usines unitaires, les indices 1, 2, 3, 4, 5 correspondant aux 5 types d'usine : thermique, fils de l'eau, réservoir saisonnier, réservoir journalier ou éclusée, marémotrice. Chacune de ces usines sera caractérisée par 5 paramètres :

a' = puissance moyenne d'heure pleines d'hiver (en GW).
b' = puissance de pointe (en GW)
c' = énergie annuelle (en TWh)
d' = dépense d'investissement unitaire (en milliards)
g' = partie variable du coût actualisé (en milliards).

Le coût total actualisé est donné par la formule :

$$C = \sum_i g_i' x_i + 270 \text{ (milliards)}$$

1. On suppose que l'activité 6 appartient à la solution finale comme première activité.
2. P. Massé, Le choix des investissements (Dunod), p. 173.

Ce problème offre simplement un intérêt d'exemple. En effet les données numériques étaient déjà anciennes lorsque P. Massé écrivit son ouvrage et les chiffres relatifs à la marémotrice peu sûrs.

Les paramètres a_{ji} correspondant aux 5 usines sont rassemblés dans le tableau 6; on a ajouté à ceux-ci les $b'_{ji} = d'_i b_j / a_{ji}$ relatifs aux 3 contraintes.

TABLEAU 6

	Usines					Contraintes b_j de production
	1	2	3	4	5	
a'	1	1	1	1	1	1,692
b'	1,15	1,10	1,20	3	2,13	2,307
c'	7	12,6	1,3	7,35	5,47	7,200
d'	97	420	130	310	213	
g'	136	56	101	104	79	
b'_{1i}	164,1	710,6	220,0	**524,5**	**360,4**	1,692
b'_{2i}	**194,6**	**880,9**	249,9	238,4	230,7	2,307
b'_{3i}	99,8	240,0	**720,0**	303,7	280,4	7,200

Un b'_{ji} représente la dépense d'investissement qu'entraînerait l'activité i, si l'intensité de cette activité correspondait à une production du bien j égale à la contrainte b_j. Pour obtenir une solution de départ satisfaisante il faut chercher de b'_{ji} maximum par activité et choisir l'activité correspondant au minimum de ces $b'_{ji} \cdot b'_{21} = 194{,}6$ répond à la question. On peut démontrer que cette solution est la meilleure. En effet si une activité i (différente de 1) appartient à la solution finale, comme le résultat final ne dépend pas de l'ordre du cheminement, cette activité i aurait pu être la deuxième activité considérée et comme elle appartient à la solution finale, c'est que son introduction diminue le montant des dépenses d'investissement I donc que l'on a

$$\Delta \mathrm{I} = d'_1 \Delta x_1 + d'_i \, \Delta x_i < 0 \text{ (avec } \Delta x_i > 0).$$

Or Δx_1 et Δx_i sont liés par la relation

$$a_{21} \cdot \Delta x_1 + a_{2i} \cdot \Delta x_i = 0 \text{ (}^1\text{)}$$

d'où

$$d'_i \Delta x_i - d'_1 \, a_{2i} \, \Delta x_i / a_{21} < 0 \quad \text{(avec } \Delta x_i > 0) \quad \text{ou} \quad d'_i / a_{2i} < d'_1 / a_{21}$$

d'où en multipliant par $b_2 : b'_{2i} = b_2 d'_i / a_{2i} < b_2 d'_1 / a_{21} = b'_{21}$. Donc si une activité i appartient à la solution finale c'est que l'on a $b'_{2i} < b'_{21}$. Inversement si b'_{2i} est inférieur à b'_{21}, i est susceptible d'appartenir à la solution finale et corollairement toute activité i pour laquelle on a $b'_{2i} > b'_{21}$ peut être éliminée. Ce qui est le cas de l'exemple ci-dessus où tous les b'_{2i} sont supérieurs à b'_{21}. Dans le cas où l'on cherche le montant d'investissement minimum, la solution ne comporte qu'une seule activité, l'activité 1 au taux $x_1 = 2{,}307/1{,}15 = 2{,}0061$, le montant de l'investissement I étant égal à 194,6.

Mais on peut également chercher le coût total actualisé minimum. Dans ce cas on calcule les $b_{ji} = g'_i b_j / a_{ji}$ relatifs aux 3 valeurs de j : 1, 2, 3 et rassemblés dans le tableau 7.

1. On suppose que l'activité 1 appartient à la solution finale comme 1re activité.

TABLEAU 7

	Usines					Contraintes de production
	1	2	3	4	5	
b_{1i}	230,1	94,8	170,9	**176,0**	**133,7**	1,692
b_{2i}	**272,8**	**117,4**	194,2	80,0	85,6	2,307
b_{3i}	139,9	32,0	**559,2**	101,9	104,0	7,200
b_{4i}	380,0	36,1	210,5	90,9	100,5	271

On cherche les b_{ji} maximum par colonne, puis le minimum de ces b_{ji} ce qui conduit à $b_{22} = 117{,}4$ d'où $x_2 = 2{,}307/1{,}10 = 2{,}0973$ et $C = 117{,}4 + 270 = 387{,}4$. On remarque que seules les activités 4 et 5 peuvent, outre l'activité 2, faire partie de la solution finale. Mais comme on a : $b_{14} > b_{15}$, l'activité 4 ne fait pas partie de la solution finale si l'activité 5 en fait partie. On peut donc se contenter d'essayer les activités 2 et 5, et considérer que c'est la solution finale si l'activité 5 n'est pas éliminée.

On essaie l'activité 5 au taux Δx_5 et le système devient :

$$\begin{aligned}
&2{,}0973 + \Delta x_2 + \Delta x_5 \geqslant 1{,}692 \\
&1{,}10\,\Delta x_2 + 2{,}13\,\Delta x_5 = 0 \\
&12{,}6 \cdot (2{,}0973 + \Delta x_2) + 5{,}47\,\Delta x_5 \geqslant 7{,}200 \\
&\Delta C = 56\,\Delta x_2 + 79\,\Delta x_5 < 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&0{,}4053 - 0{,}9364\,\Delta x_5 \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \quad \Delta x_5 \leqslant 0{,}4327 \\
&\Delta x_2 = -2{,}13/1{,}10 \cdot \Delta x_5 = -1{,}9364\,\Delta x_5 \\
&19{,}226 - 18{,}929\,\Delta x_5 \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \quad \Delta x_5 \leqslant 1{,}0157 \\
&\Delta C = \Delta x_5 \cdot (79 - 56 \cdot 1{,}9364) < 0 \text{ si } \Delta x_5 > 0.
\end{aligned}$$

d'où $\Delta x_5 = 0{,}4327$ et $\Delta x_2 = -0{,}8379$

d'où $x_5 = 0{,}4327$, $x_2 = 1{,}2593$ et $C = 374{,}7$, ce qui est la solution finale.

On voit que l'on obtient des résultats complètement différents selon que l'on recherche le minimum du montant de l'investissement ou le minimum du coût total actualisé. Ceci provient de ce que le coût actualisé est d'autant plus faible que le montant de l'investissement est élevé et inversement. La première approche sacrifie le futur au profit du présent, la deuxième le présent au profit du futur. On peut, soit utiliser la seconde approche en ajoutant une contrainte supplémentaire : le montant total des investissements à ne pas dépasser, soit rechercher un arbitrage entre le présent et l'avenir.

La contrainte supplémentaire est : $I \leqslant 271$ milliards de francs.

Pour qu'une activité x_i satisfasse aux trois premières contraintes il suffit que l'on ait $x_i \geqslant X_i$, avec $X_i = \max$ de b_j/a_{ji} $(j = 1, 2, 3)$.

Pour qu'une activité x_i satisfasse à la contrainte supplémentaire il suffit que l'on ait $x_i \leqslant b_4/a_{4i}$.

Pour qu'une activité x_i satisfasse aux 4 contraintes il suffit donc que l'on ait $X_i \leqslant x_i \leqslant b_4/a_{4i}$ donc $X_i \leqslant b_4/a_{4i}$ ou encore $X_i \cdot g_i' \leqslant b_4 g_i'/a_{4i}$, ou encore max de $b_{ji} \leqslant b_{4i}$ $(j = 1, 2, 3)$. Les b_{4i} sont rassemblés dans le tableau 7. L'activité 1 satisfait à la condition (c'est d'ailleurs la seule). Elle peut donc servir de départ pour la programmation et l'on a comme solution de départ : $x_1 = 2{,}0061$, $I = 194{,}6$ et $C = 272{,}8 + 270 = 542{,}8$.

Bien entendu la solution finale varie avec le montant de l'investissement à ne pas dépasser. D'autre part le critère de choix étant le coût total actualisé, les solutions pour lesquelles le montant de l'investissement est voisin de la contrainte seront favorisées. C'est pourquoi la recherche d'un arbitrage entre le présent et l'avenir peut paraître préférable.

Autre méthode

La détermination d'un arbitrage s'appuie sur des considérations un peu différentes.

Soit l'objectif : $A = 1{,}692$

$B = 2{,}307$

$C = 7{,}200$

Posons $A' = 1$, $B' = B/A = 1{,}3635$, $C' = C/A = 4{,}2553$ et reprenons le tableau 6 donnant les a_{jt}. On peut effectuer des moyennes pondérées des caractéristiques des usines prises 2 à 2 de façon à obtenir des b' résultants égaux à $B' = 1{,}3635$. Il suffit d'associer deux usines pour lesquelles l'un des b' est inférieur à B' et l'autre supérieur. On obtient ainsi 6 nouvelles usines présentant les caractéristiques du tableau 8, auxquelles sont ajoutées les usines 4 et 5 qui satisfont elles-mêmes aux contraintes $b' \geqslant B'$ et $c' \geqslant C'$.

TABLEAU 8

Usine	Composantes	Taux	b'	c'	d'	g'
4	usine 4	1	3	7,35	310	104
5	usine 5	1	2,13	5,47	213	79
6	usine 1 usine 4	0,8846 0,1154	1,3635	7,04	121,6	132,3
7	usine 1 usine 5	0,7821 0,2179	1,3635	6,67	122,3	123,6
8	usine 2 usine 4	0,8613 0,1387	1,3635	11,87	404,7	62,7
9	usine 2 usine 5	0,7442 0,2558	1,3635	10,78	367,0	61,9
10	usine 3 usine 4	0,9092 0,0908	1,3635	1,85	146,3	101,3
11	usine 3 usine 5	0,8242 0,1758	1,3635	2,03	144,6	97,1

Dans ce tableau on a $c' > C' = 4{,}2553$ pour les 6 premières usines et $c' < C'$ pour les 2 dernières. Chacune de ces deux dernières doit être regroupée avec l'une des 6 premières de façon à avoir un c' résultant égal à C'. On obtient ainsi 12 nouvelles usines présentant les caractéristiques du tableau 9.

TABLEAU 9

Usine	Composantes	taux	c'	d'	g'
12	usine 4 usine 10	0,4373 0,5627	4,2553	217,9	102,5
13	usine 4 usine 11	0,4183 0,5817	4,2553	213,8	100,0
14	usine 5 usine 10	0,6644 0,3356	4,2553	190,6	86,5
15	usine 5 usine 11	0,6469 0,3531	4,2553	188,8	85,4
16	usine 6 usine 10	0,4634 0,5366	4,2553	134,9	115,7
17	usine 6 usine 11	0,4442 0,5558	4,2553	134,4	112,7
18	usine 7 usine 10	0,4990 0,5010	4,2553	134,3	112,4
19	usine 7 usine 11	0,4796 0,5204	4,2553	133,9	109,8
20	usine 8 usine 10	0,2400 0,7600	4,2553	208,3	92,0
21	usine 8 usine 11	0,2261 0,7739	4,2553	203,4	89,3
22	usine 9 usine 10	0,2694 0,7306	4,2553	205,8	90,7
23	usine 9 usine 11	0,2543 0,7457	4,2553	201,2	88,1

Sauf les usines 10 et 11, toutes les usines des tableaux 8 et 9 répondent aux conditions de l'équipement, mais on peut en éliminer un certain nombre qui sont moins avantageuses. On dira qu'une usine A est plus avantageuse qu'une usine B si l'on a à la fois $d'_A < d'_B$ et $g'_A < g'_B$. On voit ainsi que l'usine 5 est plus avantageuse que l'usine 4, l'usine 9 plus avantageuse que l'usine 8 et chacune des usines 15, 19, 23 plus avantageuse que ses trois précédentes. Les usines 10 et 11 étant éliminées pour leur valeur de c' trop faible, et l'usine 23 étant moins avantageuse que l'usine 15, il reste 6 usines : les usines 5, 6, 7, 9, 15, 19.

Nous avons en présence 6 usines correspondant à des montants d'investissement et coûts actualisés différents. Nous sommes amenés à les comparer deux à deux en supposant que l'on effectue le même investissement : $I_A = I_B + \Delta I$ $(\Delta I > 0)$ dans les deux cas et que l'investissement ΔI, effectué dans un autre secteur, procure un bénéfice, actualisé à la date de l'investissement, égal à $\varepsilon \cdot \Delta I$. De cette façon on est en droit de penser que le taux d'intérêt à long terme, donc le taux d'actualisation, est le même dans les deux cas, puisque l'on fait appel à la même quantité de capitaux sur le marché financier.

Le bénéfice actualisé à la date de l'investissement est dans le premier cas $pq/i - C_A$ (pq étant la valeur de la production annuelle et i le taux d'actualisation) et dans le deuxième cas : $pq/i - C_B + \Delta I\,(1 + \varepsilon)$. L'investissement A sera plus avantageux que l'investissement B si l'on a :

$$pq/i - C_A > pq/i - C_B + (1 + \varepsilon)\,\Delta I \qquad \text{ou} \qquad C_A + I_A\,(1 + \varepsilon) < C_B + I_B\,(1 + \varepsilon)$$

donc la solution la meilleure sera celle qui correspond au minimum de $C + I\,(1 + \varepsilon)$.

On a calculé $C + I\,(1 + \varepsilon)$ pour 3 valeurs de ε : 0 — 0,25 — 0,50 et les 6 usines. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 10 (avec $I = 1{,}692 \cdot d'$ et $C = 1{,}692 \cdot g' + 270$).

TABLEAU 10

	Usines					
	5	6	7	9	15	19
d'	213	121,6	122,3	367,0	188,8	133,9
g'	79	132,3	123,6	61,9	85,4	109,8
I	360,4	205,7	206,9	621,0	319,4	226,6
C	403,4	493,9	479,1	374,7	414,5	455,8
I + C	764	700	686	996	734	682
1,25 I + C	854	751	738	1 151	814	739
1,50 I + C	944	802	789	1 306	894	796

Les valeurs 0 — 0,25 — 0,50 de ε correspondent, pour des équipements de longue durée, à des taux de rentabilité de l'ordre de 8, 10 et 12 %. Comme l'investissement ΔI est un investissement complémentaire on peut penser que les investissements les plus rentables ont déjà été effectués, donc que le taux de rentabilité de ce dernier investissement sera probablement compris entre 8 et 10 %. C'est également entre 8 et 10 % que se situe le taux de rentabilité pour lequel $(1 + \varepsilon)I + C$ est le même pour les usines 7 et 19 ($\varepsilon = 0{,}20$), mais la composition de ces usines est notablement différente (1) puisque l'on a :

$$7 = 0{,}782\ 1 + 0{,}218\ 5$$
$$19 = 0{,}375\ 1 + 0{,}428\ 3 + 0{,}197\ 5$$

1. Comme l'a déjà signalé P. Massé.

Si $\varepsilon < 0{,}20$ l'usine 19 est plus avantageuse, si $\varepsilon > 0{,}20$ c'est l'usine 7, mais comme les écarts sont faibles on peut considérer toute combinaison des usines 7 et 19 comme satisfaisante.

Nous n'avons pas cependant examiné l'ensemble des solutions possibles. En effet, appelons « A avec marge » la solution $A > 1{,}692$ GW et « A sans marge » la solution $A = 1{,}692$ de même pour B et C. L'ensemble des solutions peut se grouper en 7 catégories :

Catégorie 1 : A, B, C sans marge
Catégorie 2 : A, B sans marge, C avec marge
Catégorie 3 : A, C, sans marge, B avec marge
Catégorie 4 : A sans marge, B et C avec marge
Catégorie 5 : B et C sans marge, A avec marge
Catégorie 6 : B sans marge, A et C avec marge
Catégorie 7 : C sans marge, A et B avec marge (1)

Or les usines 4 et 5 correspondent à la catégorie 4, les usines 6 à 9 correspondent à la catégorie 2, les usines 12 à 15 correspondent à la catégorie 3, les usines 16 à 23 correspondent à la catégorie 1.

Il manque les 3 dernières catégories que l'on détermine à partir du tableau 6 en divisant ses éléments par b' et c', ce qui conduit au tableau 11.

TABLEAU 11

	Usines					Contraintes réduites
	1	2	3	4	5	
a'	0,8696	0,9091	0,8333	0,3333	0,4695	0,7334
b'	1	1	1	1	1	1
c'	6,0870	11,4545	1,0833	2,4500	2,5681	3,1209
d'	84,35	381,82	108,33	103,33	100,00	
g'	118,26	50,91	84,17	34,67	37,09	
a'	0,1429	0,0794	0,7692	0,1361	0,1828	0,2350
b'	0,1643	0,0873	0,9231	0,4082	0,3894	0,3204
c'	1	1	1	1	1	1
d'	13,86	33,33	100	42,18	38,94	
g'	19,43	4,44	77,69	14,15	14,44	

TABLEAU 12

Usine	Composantes	Taux	a'	d'	g'	I	C
24	usine 1 usine 3	0,4072 0,5928	> 0,7334	98,57	98,06	227,4	496,2
25	usine 1 usine 4	0,1845 0,8155	< 0,7334		Pas de solution		
26	usine 1 usine 5	0,1571 0,8429	< 0,7334		Pas de solution		
27	usine 2 usine 3	0,1965 0,8035	> 0,7334	103,61	90,87	239,0	479,6
28	usine 2 usine 4	0,0745 0,9255	< 0,7334		Pas de solution		
29	usine 2 usine 5	0,0622 0,9378	< 0,7334		Pas de solution		
30	usine 1	1	> 0,7334			194,6	542,8
31	usine 2	1	> 0,7334			880,9	387,4
32	usine 3	1	> 0,2350			720	829,4

1. La catégorie 8 (A, B, C avec marge) ne présente aucun intérêt.

La catégorie 5 se déduit du premier tableau 11 en prenant la moyenne pondérée des c' de façon à ce que le c' résultant soit égal à 3,1209, soit 6 nouvelles usines (usines 24 à 29). La catégorie 6 se déduit directement du premier tableau 11 et comprend les usines 1 et 2 ($a' > 0{,}7334$ et $c' > 3{,}1209$). La catégorie 7 se déduit du second tableau 11 et comprend l'usine 3 ($a' > 0{,}2350$ et $b' > 0{,}3204$). Les résultats sont rassemblés dans le tableau 12.

Les usines 7 et 19 sont plus avantageuses que les usines 24 à 27. Les usines 31 et 32 ne peuvent entrer en compétition. Reste l'usine 30 pour laquelle on a : $I + C = 737$; $1{,}25\ I + C = 786$; $1{,}50\ I + C = 835$. Les usines 7 et 19 restent donc les usines les plus avantageuses.

Remarque : Le critère précédemment défini est applicable au cas où l'on utilise la première méthode; il suffit de remplacer la condition « C minimum » par la condition « $(1 + \varepsilon)\ I + C$ minimum ».

Extension

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la limitation du montant des investissements introduisait une contrainte de sens opposé à celui des autres contraintes. Plus généralement on peut se poser le problème suivant :

Déterminer un ensemble d'activité x_i conduisant à un coût total C minimum sachant que ces activités doivent satisfaire aux contraintes suivantes :

$$\text{Système 1} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{kn}x_n \geqslant b_k \end{array} \right.$$

$$\text{Système 2} \left\{ \begin{array}{l} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 \ldots\ldots + a_{k+1,n}\,x_n \leqslant b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{array} \right.$$

On décompose le système en deux parties dans lesquelles les contraintes sont toutes de même sens et l'on cherche une solution à une seule activité satisfaisant les deux systèmes. On calcule les $b_{ji} = g'_i b_i / a_{ji}$ pour le premier système et les $b_{j'i} = g'_i b_j / a_{j'i}$ pour le second système (avec $1 \leqslant j \leqslant k$ et $k + 1 \leqslant j' \leqslant m$). Considérons l'activité i, le maximum des b_{ji} détermine un taux d'activité X_i, tel que pour $x_i \geqslant X_i$ les contraintes du système 1 sont satisfaites. De même le minimum des $b_{j'i}$ détermine un taux d'activité X'_i, tel que pour $x_i \leqslant X'_i$ les contraintes du système 2 sont satisfaites. Pour que l'activité i au taux x_i soit une solution du système global il suffit que l'on ait $X_i \leqslant x_i \leqslant X'_i$ ce qui entraîne $X_i \leqslant X'_i$ ou $g'_i X_i \leqslant g'_i X'_i$ ou encore : $\underset{i=C^{te}}{\text{Max}}\ b_{ji} \leqslant \underset{i=C^{te}}{\text{Min}}\ b_{j'i}$, i étant fixé. Il suffit donc, pour avoir une activité de départ, qu'il existe une valeur de i pour laquelle on ait $\underset{i=C^{te}}{\text{Max}}\ b_{ji} \leqslant \underset{i=C^{te}}{\text{Min}}\ b_{j'i}$.

Mais le système global peut avoir une solution sans qu'il existe une activité unique solution du système. Dans ce cas on peut utiliser la seconde méthode qui conduit à au moins une solution, si celle-ci existe, à condition que tous les a_{ji} soient différents de zéro. Soit b_1 la contrainte adoptée pour base.

On pose $\alpha_{ji} = a_{ji}/a_{1i}$, $\alpha_{j'i} = a_{j'i}/a_{1i}$, $\beta_j = b_j/b_1$, $\beta_{j'} = b_{j'}/b_1$ (avec $1 \leqslant j \leqslant k$ et $k + 1 \leqslant j' \leqslant m$). Les n activités et les contraintes prennent l'aspect du tableau 13.

Pour chaque contrainte adoptée comme base on obtient un tableau semblable au tableau 13.

TABLEAU 13

Activités				Contraintes réduites
1	2		n	
1	1	....	1	1
α_{21}	α_{22}	....	α_{2n}	β_2
....	....	....	....	....
$\alpha_{k,1}$	α_{k2}	....	α_{kn}	β_k
$\alpha_{k+1,1}$	$\alpha_{k+1,2}$	....	$\alpha_{k+1,n}$	β_{k+1}
....	....	....	....	....
$\alpha_{m,1}$	$\alpha_{m,2}$	....	$\alpha_{m,n}$	β_m

On associe comme précédemment les activités deux à deux en calculant les moyennes pondérées de leurs paramètres de façon à ce que le paramètre résultant soit égal à β_2, β_3 ... et en continuant de proche en proche jusqu'à une solution finale qui épouse le profil des contraintes réduites. Ainsi une activité i' sera une solution du système global si pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ on a $\alpha_{ji'} \geqslant \beta_j$, et pour tout j' $(k+1 \leqslant j' \leqslant m)$: $\alpha_{j'i'} \leqslant \beta_{j'}$. Il suffit alors de classer les solutions i' selon la valeur de l'expression $(1+\varepsilon)\, I + C$, qui représente un arbitrage entre le montant total de l'investissement et le coût total actualisé.

Extension 2

Cette dernière méthode s'étend au cas où certains a_{ji} sont nuls. Supposons a_{1i} nul, on divise par a_{1i} tous les autres paramètres de l'activité i, tous les quotients sont infinis. Il en est de même du coût unitaire actualisé. Donc l'activité i ne fait pas partie des solutions appartenant aux catégories « A sans marge », mais c'est la seule conséquence de la nullité de a_{1i} et la méthode s'étend au cas où certain a_{ji} sont nuls.

Remarque : La seconde méthode s'allonge d'une façon importante lorsque le nombre des activités du tableau de base (tableaux 6 et 11) dépasse quelques unités. Dans ce cas il vaut mieux revenir à la première méthode (après avoir déterminé, une solution de départ) et rechercher directement la solution rendant minima l'expression $(1+\varepsilon)\, I + C$.

J.-J. BOULANGER