Journal de la société statistique de Paris

Maurice Dumas

Les interprétations non classiques des épreuves de réception

Journal de la société statistique de Paris, tome 110 (1969), p. 85-117
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1969__110__85_0>

II

LES INTERPRÉTATIONS NON CLASSIQUES DES ÉPREUVES DE RÉCEPTION

TABLE DES MATIÈRES

1. Le domaine de l'exposé

Les épreuves de réception — ou plans d'échantillonnage — sont ces épreuves qui sont subies par des éléments, choisis au hasard dans un lot et dont les conditions sont précisées dans une sorte de cahier des charges par une clause telle que celle-ci, liant fournisseur et client :

« Le lot d'éléments présenté par le fournisseur sera accepté par le client si n éléments soumis chacun à tel essai, fait apparaître des défectueux en nombre au plus égal au « nombre d'acceptation » A; le lot est rejeté dans le cas contraire. »

Cet exemple particulièrement simple est celui auquel je vais me tenir, sauf indication contraire, dans le cours de mon exposé; chacun a reconnu qu'il s'agit d'un plan d'échantillonnage *simple* (par opposition à *multiple*) convenant au cas où à la suite de l'essai, l'élément qui l'a subi ne peut recevoir que l'un des deux attributs : *bon* ou *défectueux*.

Pratiquement, un tel plan d'échantillonnage est défini par les deux nombres n, effectif de l'échantillon et A, nombre d'acceptation; il est connu et utilisé depuis longtemps; mais c'est seulement depuis le début du siècle que des auteurs ont cherché à interpréter par le moyen de considérations statistiques quelles garanties l'on pouvait attendre d'un tel plan, afin d'en déduire quelques bases logiques de choix de n et de A, en fonction notamment de l'effectif du lot, de la nature des éléments et de celle des essais envisagés. C'est dire l'importance que présente l'interprétation que l'on retient.

Or les interprétations proposées sont nombreuses. J'ai promis dans le titre de me borner à parler des interprétations non classiques. Mais je ne peux pas le faire si, pour le moins, je ne cite pas celles qui sont classiques.

2. Les fascicules AFNOR

D'ailleurs, le partage entre épreuves de réception classiques et non classiques est-il facile à faire? Il se trouve que depuis peu l'on peut répondre « oui » à cette question, si l'on veut bien considérer comme classiques les épreuves que l'Association française de normalisation (AFNOR) vient de définir (1967) dans l'un des trois fascicules de documentation, présentés ici, succinctement, dans l'ordre inverse de leur numérotation.

Le fascicule X 06-023 (1) est la traduction d'un document américain, relatif à un cas où le résultat de l'essai est, non pas un attribut, mais un nombre; par son sujet, ce fascicule ne rentre aucunement dans le cadre de mon exposé.

Le fascicule X 06-022 est la traduction du document américain dit MIL STD 105 D (lire : Military Standard 105 D) définissant des conditions de réception, relatives au cas où le résultat de l'essai est un attribut; il se trouve donc être rigoureusement dans le cadre de mon exposé; il y a seulement que je m'abstiendrai d'évoquer deux éventualités qu'il considère : les plans multiples; la réception d'après le nombre des défauts.

Enfin le fascicule X 06-021 est une sorte d'introduction dans laquelle la Commission AFNOR qui eut à connaître des traductions dont il vient d'être question, a entendu exposer des théories d'épreuves de réception, afin d'aider à la compréhension, et par suite à l'application correcte, des documents américains.

Cette commission n'engageait certes pas la responsabilité de notre société, mais on ne peut s'empêcher de constater qu'elle comprenait plusieurs de ses membres et en premier lieu le président que vous venez d'élire, secondé par notre président en exercice et plusieurs de nos anciens présidents.

3. La courbe d'efficacité

Je rappelle brièvement ce que l'on entend par « courbe d'efficacité » d'une épreuve de réception, étant donné que cette courbe se trouve être à la base des interprétations exposées dans le fascicule AFNOR. (N.B. Je désigne ainsi le fascicule X 06-021).

En abscisses, l'on porte, entre 0 et 1, les proportions p de défectueux qui peuvent exister dans le lot présenté en réception. En ordonnées l'on porte à la hauteur de la propor-

1. Voir la réference complète dans la bibliographie en fin de l'exposé. Les noms propres que je cite dans l'exposé sont tous, sauf exception, repris dans cette bibliographie.

tion p, la probabilité P qu'un prélèvement au hasard d'effectif n, issu du lot caractérisé par p, fasse apparaître au plus A défectueux; autrement dit : la probabilité que le lot caractérisé par p soit accepté à la suite de l'épreuve de réception définie par n et A. La figure 1 montre l'allure générale d'une courbe d'efficacité.

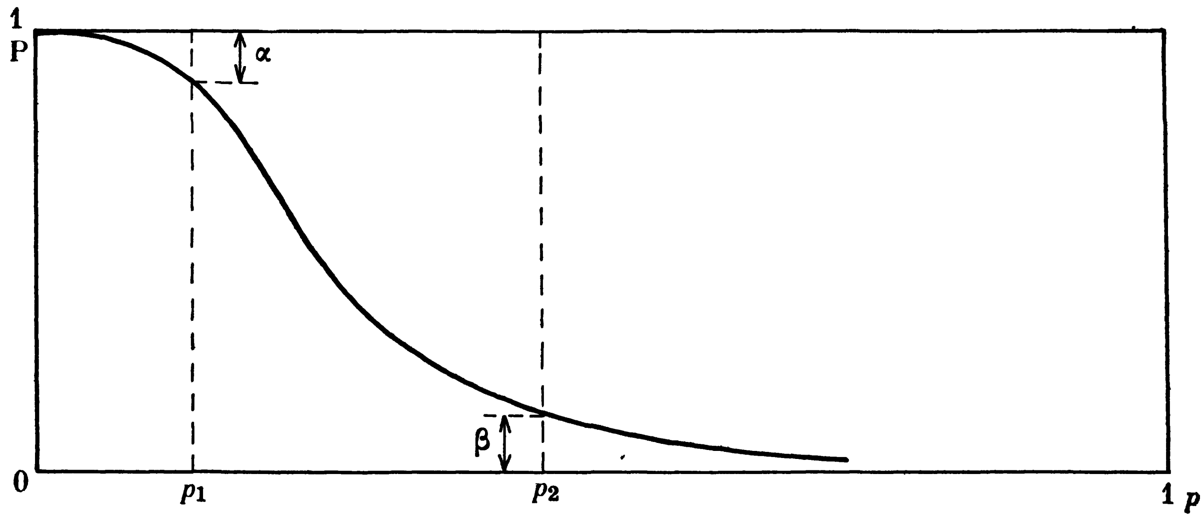

Fig. 1. — *Courbe d'efficacité*

Sur cette figure sont marquées plus particulièrement deux proportions, faibles, de défectueux p_1 et $p_2 > p_1$. Il est classique de considérer p_2 comme étant une proportion de défectueux que le client estime pouvoir à la rigueur admettre et qu'il voudrait, par suite, ne voir dépassée dans aucun des lots acceptés; à p_2 correspond cependant une probabilité d'acceptation β, non nulle; β est dit « risque du client ».

Ne serait-ce que par symétrie, à $p_1 < p_2$ on associe la probabilité α mesurée *au-dessus* de la courbe d'efficacité; c'est la probabilité que soit rejeté un lot caractérisé par p_1, c'est-à-dire un lot qui est largement assez bon pour satisfaire le client; α est dit « risque du producteur ».

A propos des risques dont il vient d'être parlé, il n'est pas déplacé de noter dans l'exposé, à caractère historique, que je vous présente, un passage d'une lettre reçue de M. Romig : « Le docteur Sam Wilkes (décédé) de Princeton, a publié une étude dans laquelle il établit que MM. Dodge et Romig ont été les premiers à faire état des erreurs type I et type II d'un emploi si courant aujourd'hui en matière de tests d'hypothèses statistiques. »

Or les risques en cause plus haut correspondent précisément aux erreurs des types I et II.

4. Trois familles d'interprétation

De la courbe d'efficacité on fait dériver les deux interprétations classiques, exposées dans le fascicule AFNOR. Cependant, pour la commodité de mon exposé, je réserve l'expression d'« interprétation par la courbe d'efficacité » à l'une d'elles, à savoir à celle à laquelle J. Neyman et E. S. Pearson ont attaché leurs noms : si l'on se donne les paires α p_1 et β p_2 et si l'on écrit à la fois la relation qui lie α à p_1 et celle qui lie β à p_2, ces deux relations permettent de déterminer deux inconnues, en l'occurrence les valeurs de n et A, soit, finalement, les conditions de réception.

La deuxième interprétation classique est celle correspondant à l'épreuve séquentielle de Wald; elle a, elle aussi, pour base les paires $\alpha\ p_1$ et $\beta\ p_2$ mais, du fait qu'il s'agit d'une épreuve séquentielle — épreuve pour laquelle l'effectif des essais qu'elle comporte dépend des premiers résultats obtenus au lieu d'être fixée, *ne varietur*, à l'avance — la théorie conduit à considérer des « rapports de vraisemblances »; aussi ai-je retenu de désigner ici cette interprétation par « interprétation par les rapports de vraisemblances ». On sait qu'étant donné le résultat d'une épreuve caractérisé par l'effectif n' de cette épreuve et le nombre de défectueux k constaté, la vraisemblance de l'hypothèse H_i, à savoir $p = p_i$, est égale à la probabilité que, dans cette hypothèse, l'on constate exactement k défectueux en n'.

Enfin, en dépit du silence de l'AFNOR, je ne puis pas oublier de parler d'une autre forme d'interprétation, bien antérieure aux précédentes et que j'évoquerai en dernier lieu, car j'ai résolu de remonter par principe dans le temps, plutôt que de le descendre : c'est l'interprétation par des probabilités à posteriori, qui, vous le verrez, a bien, elle aussi, ses lettres de noblesse.

5. Chronologie a l'envers

Remonter dans le temps, ai-je dit; cela va de pair avec un certain historique des questions traitées. Et pour situer sans plus tarder quelques époques, je donne dans le tableau de la figure 2, des noms d'auteurs et de documents, avec dates à l'appui, pour chacune des trois formes d'interprétation que je viens d'évoquer.

Tableau des auteurs

	Interprétations par		
	le rapport des vraisemblances	la courbe d'efficacité	des probabilités à posteriori (1)
	1967. AFNOR	1967. AFNOR	
		1963. MIL STD 105 D	1965. G. Hansel et D. Grouchko
1960			
	1953. M. D.	1955. E. L. Grant 1953. R. Cavé	
1950			
		1949. H. C. Hamaker	
		1949. JAN STD 105 (origine des MIL STD 105)	1947. J. Bouzitat 1945. *L. E. SIMON*
	Env. 1942. A. Wald et G. A. Barnard	1943. H. F. Dodge	
1940			
		1936. J. Neyman et E. S. Pearson	
1930			
		1929. H. F. Dodge et H. G. Romig	1928-1930. *G. GRODSKI*
		1925. (décembre). L. Vallery	1928. P. P. Coggins 1924. E. C. Molina
		1925. (avril). M. D.	
1920			
1910			
1900			1903. *J. E. ESTIENNE*

1. Sont en italique les noms d'auteurs d'études spécialement orientées sur les conditions de réception.

Fig. 2

Si comme il est probable mon tableau présente des omissions regrettables, je prie ceux qui en sont victimes, ou leur mémoire, de bien vouloir ne pas m'en tenir par trop rigueur. Et je remercie par avance ceux qui voudraient bien me signaler ces omissions, et m'aider par là dans mes efforts pour faire œuvre d'historien impartial. Je considère en la matière comme regrettable toute omission qui a trait à un point de vue intéressant non signalé, ainsi que celle qui conduit à l'attribution à un auteur d'une priorité qui ne lui revient pas.

6. Quelques remarques

Avant d'entreprendre de resuivre le tableau et d'indiquer en face de chaque nom ce qui m'a fait le retenir, je me laisserais facilement entraîner à exposer quelques généralités d'un grand intérêt pratique, que cependant je me borne à évoquer rapidement.

Je donne à la technique la priorité sur la statistique; il ne faut demander à la statistique que ce que la technique ne peut donner, et en premier lieu il ne faut présenter à une épreuve de réception que des éléments groupés en un lot technique, c'est-à-dire en un lot ne comprenant que des éléments que l'on ne sait pas, techniquement, distinguer les uns des autres, autrement que par l'essai de réception : un lot non technique n'est pas digne d'une épreuve sur échantillon ! J'ai toujours particulièrement insisté sur ce point (voir : 1955).

Lorsque d'une épreuve on a retenu les nombres n' l'effectif et k le nombre des défectueux, l'on possède toute l'information que l'on peut tirer de l'épreuve. Cela se démontre et nous devons par suite le tenir pour assuré; mais cela se démontre à condition que les prélèvements aient bien eu lieu au hasard. Si donc un doute subsiste quant à l'intervention du hasard seul pour déterminer les choix faits, alors il est prudent d'entreprendre une étude susceptible de montrer qu'il n'est pas déraisonnable d'admettre que les prélèvements aient été correctement effectués.

Validité d'un résultat; validité d'une épreuve. Un résultat non valable est un résultat qui n'a pas été obtenu dans les conditions prescrites; il ne faut pas le confondre avec le « coup anormal », qui est relatif à un résultat qui surprend par sa nature ou par son intensité. Dans l'effectif d'une épreuve il ne faut compter que les résultats valables, au sens qui se déduit de ce qui précède; une épreuve de réception pour laquelle un effectif a été fixé à l'avance, n'est pas valable si son effectif, en résultats valables, n'est pas égal à l'effectif fixé.

Il arrive qu'un essai soit destructif, ou plus simplement, qu'il soit très coûteux; on est alors souvent conduit, par économie, à négliger quelque peu ce qu'enseigne la statistique pour se laisser guider par le bon sens, par ce bon sens que l'on ne doit jamais perdre de vue même lorsque le calcul a parlé; en l'occurrence, il convient manifestement de prendre un effectif d'échantillon aussi élevé qu'il est raisonnable de le faire et de ne tolérer aucun défectueux, ou que bien peu de défectueux.

INTERPRÉTATIONS PAR LES RAPPORTS DE VRAISEMBLANCES

7. L'épreuve séquentielle non exhaustive de Wald

L'interprétation classique par les rapports de vraisemblances n'est pas intrinsèquement différente de celle dite « par la courbe d'efficacité » dont je parle plus loin, en ce sens que l'une et l'autre ont pour point de départ les deux paires α p_1 et β p_2, et que dans les deux cas les mêmes notations ont exactement les mêmes définitions et jouent les mêmes rôles. Partant de ces données, Wald et Barnard ont eu en vue d'établir le plan d'une épreuve séquentielle, ou progressive, c'est-à-dire d'une épreuve que l'on arrête, non pas après un nombre d'essais donné à l'avance, mais dès que les résultats peuvent être interprétés comme faisant courir au client comme au producteur des risques assez petits pour être acceptables c'est-à-dire des risques inférieurs respectivement à β et à α.

Ces recherches se situent vers 1942, au moment où Grande-Bretagne et U. S. A. supportaient un effort de guerre considérable; la publication de leurs résultats est bien postérieure. Le but général que se proposaient les auteurs était d'arriver à une épreuve plus économique, en moyenne, toutes choses égales, que toute autre épreuve interprétée par la courbe d'efficacité : ce but a été largement atteint et le succès que connaît leur épreuve consacre leurs efforts.

Wald et Barnard ont pensé à représenter le déroulement d'une épreuve par un cheminement sur un graphique comportant en ordonnée le nombre des défectueux et en abscisse soit (fig. 3) le nombre des bons soit le nombre total des essais valables. Ils ont imaginé que l'épreuve serait arrêtée lorsque le cheminement en cause dépasserait l'une ou l'autre de deux lignes tracées sur le graphique en fonction des données α p_1 et β p_2, l'une de ces lignes devant être la « ligne d'acceptation » parce que son dépassement entraînerait l'acceptation du lot, l'autre, inversement, la « ligne de rejet » pour la raison correspondante.

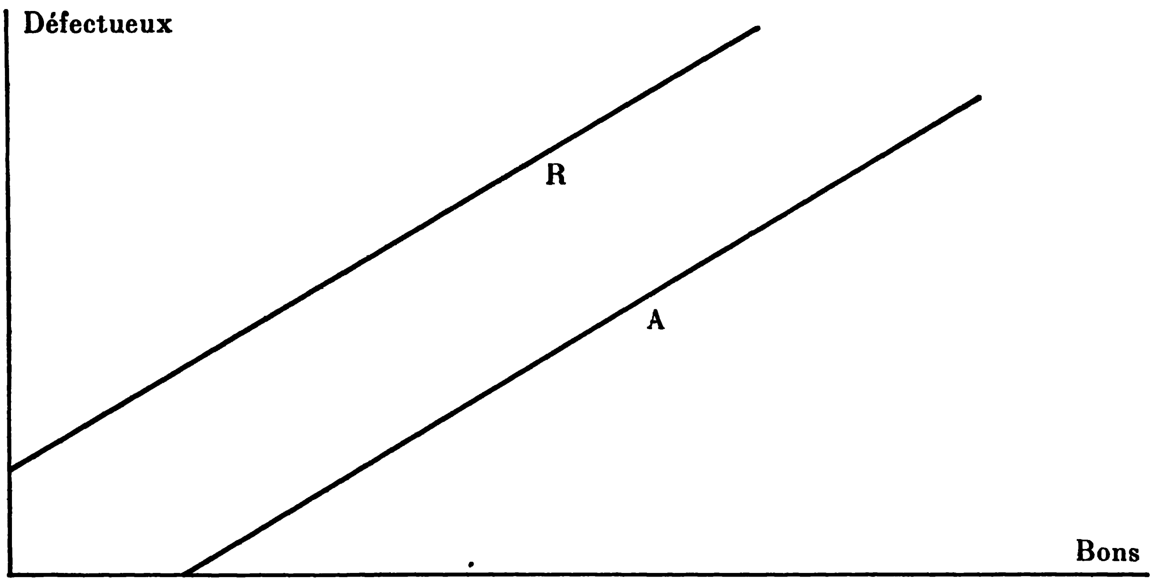

Fig. 3. — *Droites de Wald*

La théorie les a conduits à reconnaître que la ligne d'acceptation était définie par le rapport des vraisemblances de l'une et l'autre hypothèses H_1 et H_2 (définies par p_1 et p_2) : ce rapport a une valeur bien déterminée, égale à $\frac{\beta}{1-\alpha}$ en tous les points de la ligne. Il en est de même pour la ligne de rejet, avec $\frac{1-\beta}{\alpha}$ comme valeur du rapport en cause.

Il se trouve que ces lignes font partie de deux droites parallèles dont les ordonnées à l'origine et la pente commune sont connues au moyen de quelques logarithmes. Le fascicule AFNOR expose la méthode à suivre et donne des exemples numériques.

8. Les implications de la théorie de Wald

La théorie dont il vient d'être question implique que les prélèvements en vue de la constitution de l'échantillon aient lieu de façon non exhaustive; c'est là une faiblesse, puisque dans la pratique des prélèvements, l'exhaustivité est la règle générale. L'AFNOR indique que de ce fait la méthode n'est à suivre que si l'effectif du lot est suffisamment grand; elle précise ce point au cours de deux exemples numériques : aux données $p_1 = 0{,}01$; $p_2 = 0{,}05$; $\alpha = \beta = 0{,}05$ d'une part, et $p_1 = 0{,}02$; $p_2 = 0{,}10$; $\alpha = \beta = 0{,}10$ d'autre part correspondent des effectifs minimaux respectivement égaux à 2 160 et à 780. Ces minimums sont tellement considérables et sont tellement de nature à exclure du bénéfice des épreuves séquentielles un grand nombre de lots, qu'il convient manifestement de bien voir les raisons qui y conduisent et de chercher le moyen de s'en affranchir.

Les raisons sont simples et l'AFNOR ne les cache pas. L'une tient à ce que si l'on peut négliger l'influence de l'exhaustivité tant que le prélèvement n'atteint pas, disons, le dixième de l'effectif du lot, cela n'est plus permis au-delà de ce seuil. L'autre tient à ce que, théoriquement, l'épreuve séquentielle peut exiger l'essai d'un nombre infiniment grand d'éléments. De là découle une triple nécessité : d'une part, tronquer l'épreuve, c'est-à-dire l'arrêter au bout d'un certain nombre d'essais même si le cheminement n'a alors traversé aucune des deux lignes; d'autre part, fixer ce nombre *avant* le début de l'épreuve de réception, faute de quoi des difficultés administratives seraient à craindre, surtout si, simultanément, la sanction de l'épreuve n'est pas prévue dans tous les cas susceptibles de se présenter; enfin, fixer ce nombre assez grand pour qu'il ne soit pas déraisonnable de penser que normalement une décision interviendra avant que l'effectif des essais atteigne ce nombre. Ce sont là trois insuffisances congénitales de l'épreuve séquentielle de Wald. Il est clair que l'établissement de la théorie de l'épreuve séquentielle exhaustive, par opposition à l'épreuve séquentielle non exhaustive de Wald, est seule de nature à porter remède à ces insuffisances.

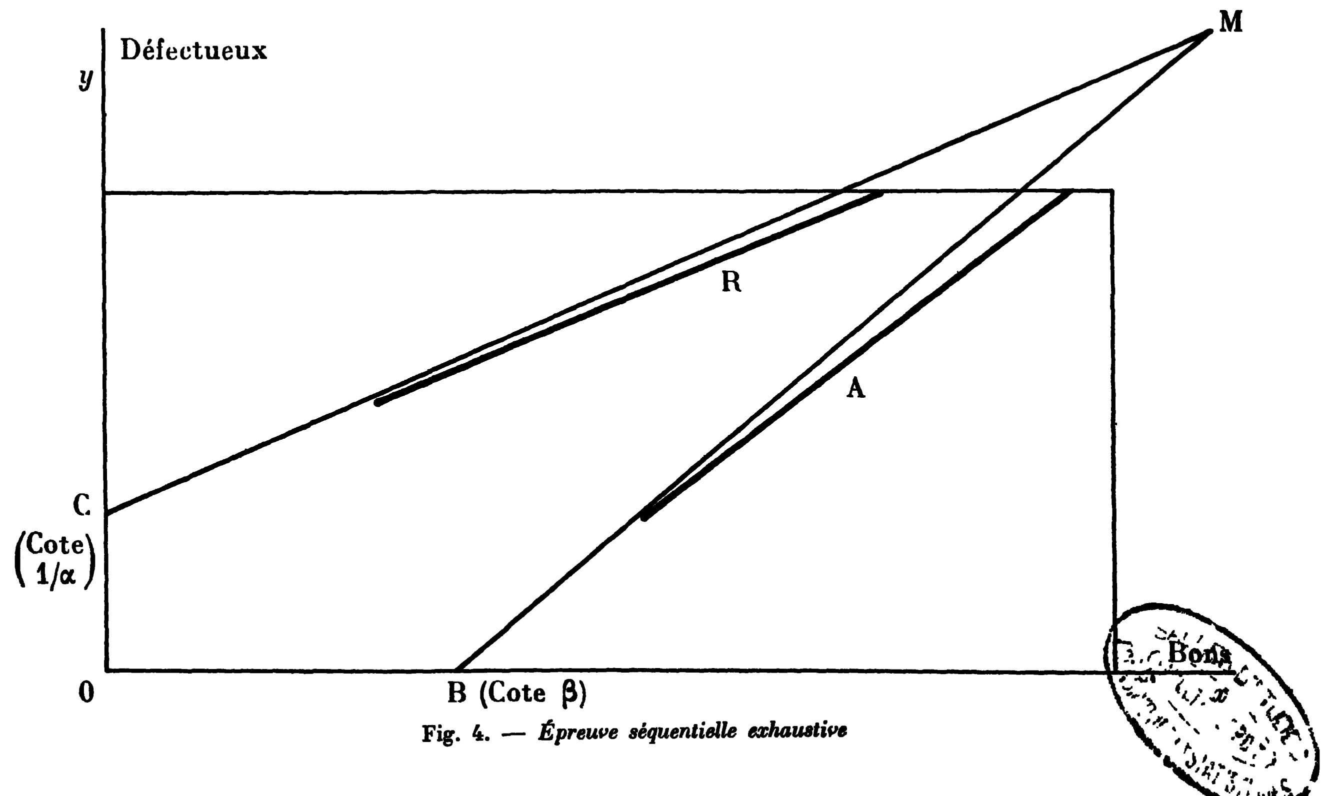

Fig. 4. — *Épreuve séquentielle exhaustive*

9. L'épreuve séquentielle exhaustive

En 1953 il ne m'a pas été trop difficile d'adapter le raisonnement de Barnard au cas exhaustif; voici les caractéristiques principales du plan auquel j'ai été conduit.

Les données sont U, l'effectif du lot, u_1 et u_2 les effectifs respectifs des défectueux correspondant à p_1 et p_2 et par suite aux risques α et β. Le graphique est construit avec en abscisses le nombre des bons et en ordonnées, celui des défectueux. Chaque point de coordonnées entières de ce graphique, limité aux valeurs susceptibles d'être utiles, est affecté d'une « cote » égale au rapport des vraisemblances de chacune des hypothèses caractérisées par u_1 et u_2, qui lui correspondent. La théorie conduit à considérer comme lignes d'acceptation et de rejet les lignes joignant respectivement les points de cote β et ceux de cote $\frac{1}{\alpha}$.

Pratiquement, il y a lieu (fig. 4) :

— de noter sur l'axe Ox le point B de cote β;

— de noter sur l'axe Oy le point C de cote $\frac{1}{\alpha}$;

— de porter sur le plan le point M de coordonnées

$$x = \mathrm{U} - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}, \; y = \frac{u_1 + u_2 + 1}{2};$$

— de joindre B et C à M.

Il se trouve que la ligne de cote β commence en B et se dirige à peu près exactement vers M; de la sorte, le calcul des cotes de quelques points voisins de BM suffit pour préciser complètement la ligne d'acceptation A.

De même, il se trouve que la ligne de cote $\frac{1}{\alpha}$ commence en C et se dirige à peu près exactement vers M; de la sorte, le calcul des cotes de quelques points voisins de CM suffit pour préciser complètement la ligne de rejet R.

10. Comparaison des épreuves exhaustive et non exhaustive

On peut regretter d'avoir à faire quelques calculs de cotes dans les conditions qui viennent d'être dites mais d'une part il ne faut pas croire que ces calculs soient très importants — à condition de disposer d'une table donnant les logarithmes des factorielles utiles, ils se réduisent à quelques additions — et d'autre part, il faut mettre en regard de ces calculs les avantages que l'on en tire : serrant la réalité d'aussi près que possible, aucun tronquage ne s'impose (si l'on en fixe un, c'est de plein gré et nullement pour satisfaire à une obligation); de plus le but d'une épreuve séquentielle est d'obtenir une décision de façon aussi économique que possible, et mieux vaut dans cette voie aller jusqu'au bout, grâce à l'épreuve séquentielle exhaustive, plutôt que de se contenter d'un à peu près, en s'arrêtant en chemin avec l'épreuve séquentielle non exhaustive. Je ne dis pas cela pour dissuader définitivement de suivre les enseignements de Wald; car chaque fois que l'effectif du lot est assez grand pour que l'on soit en bonnes conditions pour les appliquer, il n'y a certainement que bien peu à gagner à leur préférer l'épreuve séquentielle exhaustive et il y a quelques calculs à éviter : dans l'ensemble, donc, on s'y retrouve!

11. Reste a faire

Si la théorie de l'épreuve séquentielle exhaustive a pu être établie, cela n'implique pas qu'il n'y ait plus rien à faire dans la voie qui a été ouverte : les jeunes chercheurs peuvent être rassurés; leurs aînés leur laissent du travail.

En particulier, il y a d'abord à rendre pratique l'utilisation des enseignements de la théorie. Je pense que l'on devrait y arriver en répartissant chacune des données (U, u_1 et u_2, α et β) dans quelques classes, à limites judicieusement échelonnées, et en mettant sous forme de tables numériques les résultats des calculs effectués pour chacune des combinaisons possibles des classes entre elles.

Il y a aussi que la théorie aujourd'hui existante aboutit à une indication concernant le lot *avant* l'épreuve, c'est-à-dire le lot tel que le fournisseur l'a obtenu et d'après lequel il voudrait recevoir son « salaire »; le client, de son côté, n'est intéressé que par le lot dans l'état où il le met en magasin. Entre les deux états se situe l'épreuve de réception et cette épreuve change la qualité du lot : un élément trouvé « bon » à l'épreuve peut être réincorporé au lot, du moins lorsque l'essai n'est pas, par nature, destructif, tandis qu'un élément trouvé « défectueux » ne sera jamais réincorporé au lot.

Je sais bien que certains préconisent, lorsque cela est matériellement possible, le remplacement de tout défectueux par un élément certainement bon; mais c'est là une pratique que je condamne absolument, car elle va à l'encontre de la priorité absolue que j'accorde à la technique : pour respecter une règle administrative, relative à l'effectif d'un lot, il ne convient certainement pas, sans précaution draconienne, de constituer ce lot par un mélange d'éléments provenant de deux lots de fabrication différents.

INTERPRÉTATIONS PAR LA COURBE D'EFFICACITÉ

12. Les lacunes du tableau

Il va de soi que, du moins en ce qui concerne les interprétations par la courbe d'efficacité, le tableau de la figure 2 est très incomplet. Entre tous les auteurs de tous pays — et même en me limitant à ceux que je connaissais — j'ai dû faire un choix afin de ne pas dépasser le cadre d'un exposé. J'ai en particulier négligé de citer certaines tables existantes, telles : le système militaire suédois, les tables AWF proposées par une commission de productivité en Allemagne fédérale, l'ASQC Standard A 2 et les tables du groupe de recherche statistique (S. R. G.) de l'Université Columbia. Mais il se trouve que ces tables, et quelques autres (MIL STD, Dodge et Romig, Système Philipps) ont fait l'objet en 1960 d'un examen critique et comparatif de la part d'une personnalité particulièrement qualifiée — le Dr H. C. Hamaker — et que le résultat de cet examen, publié dans la Revue de Statistique appliquée, peut être aisément étudié. Ce travail soulève bien quelques objections de ma part : peut-être le lecteur découvrira-t-il les principales, à la lumière des explications que je vais maintenant donner à propos des travaux que j'ai retenu de citer.

13. Les paires $\alpha\, p_1$ et $\beta\, p_2$

J'ai noté plus haut ce qu'il fallait entendre par « courbe d'efficacité » et comment la considération des deux paires $\alpha\, p_1$ et $\beta\, p_2$ conduisait à retenir sans aucun arbitraire les deux quantités n et A qui définissent entièrement l'épreuve de réception simple, seule évoquée ici.

Encore faut-il avoir choisi judicieusement les quatre éléments des deux paires.

Les risques α et β sont à peu près standardisés aux valeurs 0,05 et 0,10, mais p_1 et p_2 ne peuvent guère être que des cas d'espèce.

L'AFNOR, reprenant à son compte l'apport en cette matière de J. Neyman et E. S. Pearson, laisse en quelque sorte au client le soin de fixer β et p_2 en fonction de l'utilisation qui sera faite des éléments des lots acceptés; et elle laisse au producteur — ne serait-ce que par raison de symétrie, pour que la balance soit tenue égale entre les deux points de vue, à la fois respectables et dans une certaine mesure, opposés — le soin de fixer α et p_1. Si quelques incompatibilités pratiques apparaissent, sans doute est-ce que les possibilités du producteur ne sont pas en matière de qualité à la hauteur de ce qui est nécessaire au client. A chacun des deux d'en tirer les conséquences.

14. Le point NΠ

Sur le graphique (fig. 5) construit avec en abscisses l'effectif total des essais n' et en ordonnées celui des défectueux k, je peux marquer le point n et A définissant l'épreuve simple correspondant aux données. Il n'est pas habituel de donner à ce point le nom de « point de Neyman et Pearson » et de le symboliser par les lettres NΠ; c'est cependant ce que je vais faire pour la simplicité de mon exposé, tout en pensant ne pas manquer au respect que m'inspirent ces deux savants.

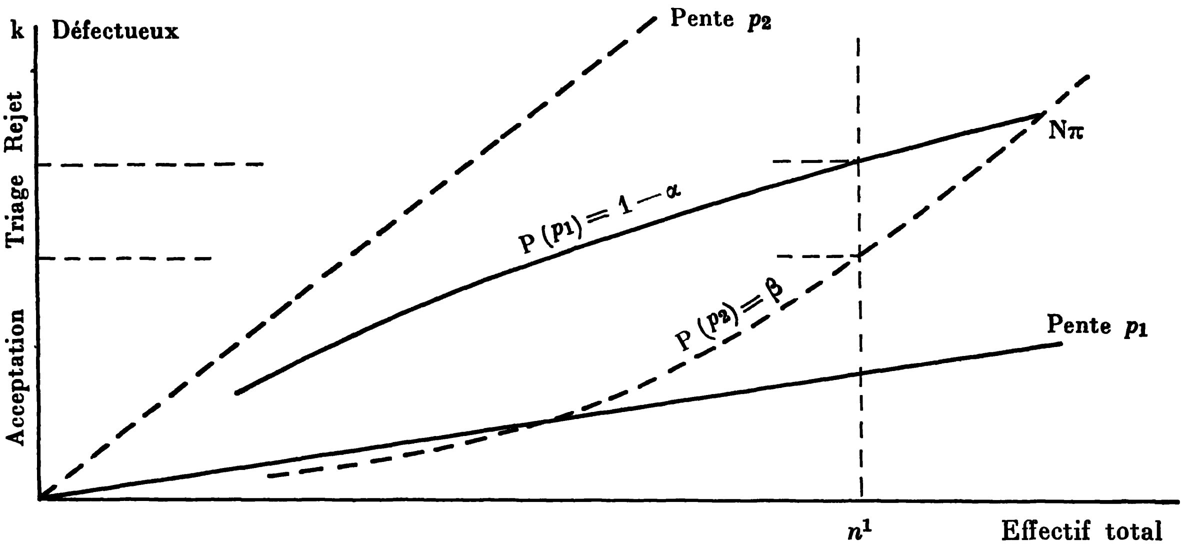

Fig. 5. — *Les trois décisions : Graphique*

Sur le même graphique je trace, partant de l'origine, la droite de pente p_1. A chaque valeur de l'abscisse je peux faire correspondre le point dont l'ordonnée, entière ou non, a pour probabilité intégrale $1 - \alpha$ lorsque le lot est caractérisé par une proportion de défectueux égale à p_1; α étant petit, la ligne correspondante, soit L_α, est entièrement au-dessus de la droite de pente p_1 et présente l'allure générale d'un arc de parabole d'axe parallèle à cette droite.

Je trace de même la droite de pente p_2 et la ligne, soit L_β, lui correspondant, définie par la probabilité intégrale β; cette ligne, entièrement au-dessous de la droite de pente p_2, présente l'allure générale d'un arc de parabole d'axe parallèle à cette droite.

Ces deux arcs se coupent précisément au point NΠ, dont c'est là une construction, à vrai dire, assez insolite.

J'entreprends maintenant, sans plus attendre, de présenter quelques travaux typiques des auteurs cités dans le tableau; je commence par les plus récents, puisque je me suis fixé de remonter dans le temps.

15. Les auteurs récents

a) En 1955, dans un rapport rédigé en commun avec G. J. Lieberman, E. L. Grant cite comme lui ayant été suggéré par le Pr Henry Goode de la Stanford University, un plan que je présente à partir du graphique que je viens d'établir. Les données sont celles qui conduisent au point NΠ; mais l'effectif de l'échantillon est pris égal à n', inférieur à n abscisse de NΠ. De la sorte (fig. 5) trois éventualités peuvent se présenter, d'après la position du nombre k des défectueux constaté à l'épreuve par rapport aux ordonnées k_β et k_α des points des lignes L_β et L_α d'abscisse n' :

— ou bien k est inférieur à k_β : le lot est accepté;

— ou bien k est supérieur à k_α : le lot est rejeté;

— ou bien k est compris entre k_β et k_α : le lot est soumis à un triage à 100 %.

Ce plan, dit plan des trois décisions, respecte les données, c'est-à-dire les paires $\alpha\ p_1$ et $\beta\ p_2$; il n'est pas applicable aux lots de n'importe quels éléments; il peut néanmoins rendre des services. Reste à voir comment il se place par rapport au plan classique du point de vue de l'économie : sans doute est-il avantageux dans les cas extrêmes de lots très bons ou très mauvais. Il conduit à tracer deux courbes d'efficacité et non pas une seule (fig. 6) : $\alpha\ p_1$ et n' suffisent pour définir la courbe d'efficacité correspondant au rejet; et $\beta\ p_2$, joint au même n', suffit pour définir celle correspondant à l'acceptation.

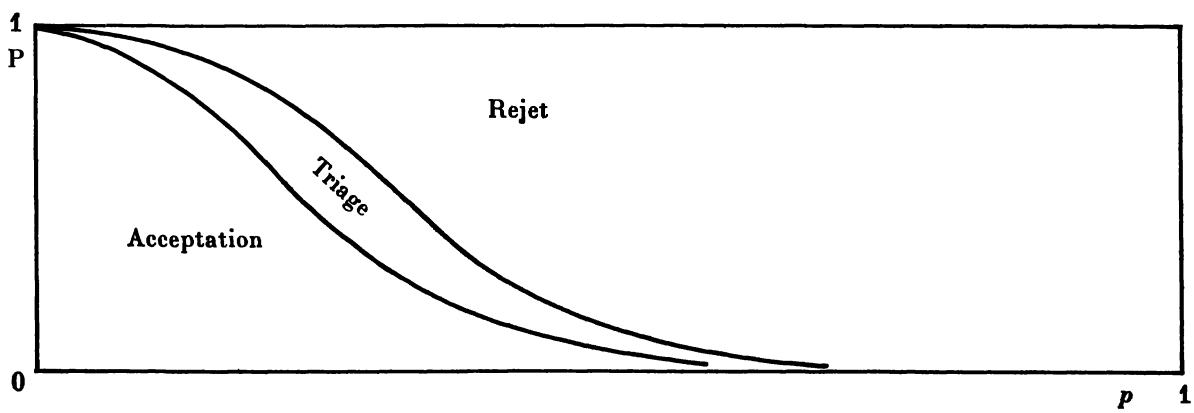

Fig. 6. — *Les trois décisions : Courbes d'efficacité*

b) En 1953, R. Cavé, ingénieur militaire de l'Armement, a publié un abaque d'emploi facile qui renseigne immédiatement sur les valeurs de n et de A correspondant aux données $\alpha\ p_1$ et $\beta\ p_2$. Voilà qui est très précieux pour plusieurs raisons. Il y a d'abord que si les équations donnant n et A sont faciles à écrire, leur résolution n'est pas immédiate. Il y a aussi que cet abaque fait bien apparaître que des approximations s'imposent du fait que n et A sont nécessairement des entiers et aide à choisir entre plusieurs approximations possibles, celle que l'on retiendra.

c) En 1949, H. C. Hamaker propose un moyen qui évite de passer par l'intermédiaire des paires $\alpha\ p_1$ et $\beta\ p_2$: il considère directement les valeurs de n et de A qui définissent une épreuve de réception et classe ces épreuves en deux catégories, d'une part suivant le « *point de contrôle* », dit aussi « *qualité standard* » ou encore « *point d'indifférence* » qui est défini comme étant la qualité p_s à laquelle correspond 0,50, comme la probabilité d'acceptation — et par suite aussi de rejet — et d'autre part suivant la valeur du *nombre d'acceptation* A.

Ce classement a au moins pour lui de donner lieu à des représentations graphiques assez expressives, comme nous allons le voir, et par suite bien de nature à aider à choisir les données n et A du plan que l'on retiendra.

A chaque paire p_s et A correspond une courbe d'efficacité bien déterminée.

A p_s donné, toutes les courbes d'efficacité forment un éventail autour du point de coordonnées p_s et 0,50; la pente des rayons de cet éventail (fig. 7) croît avec A.

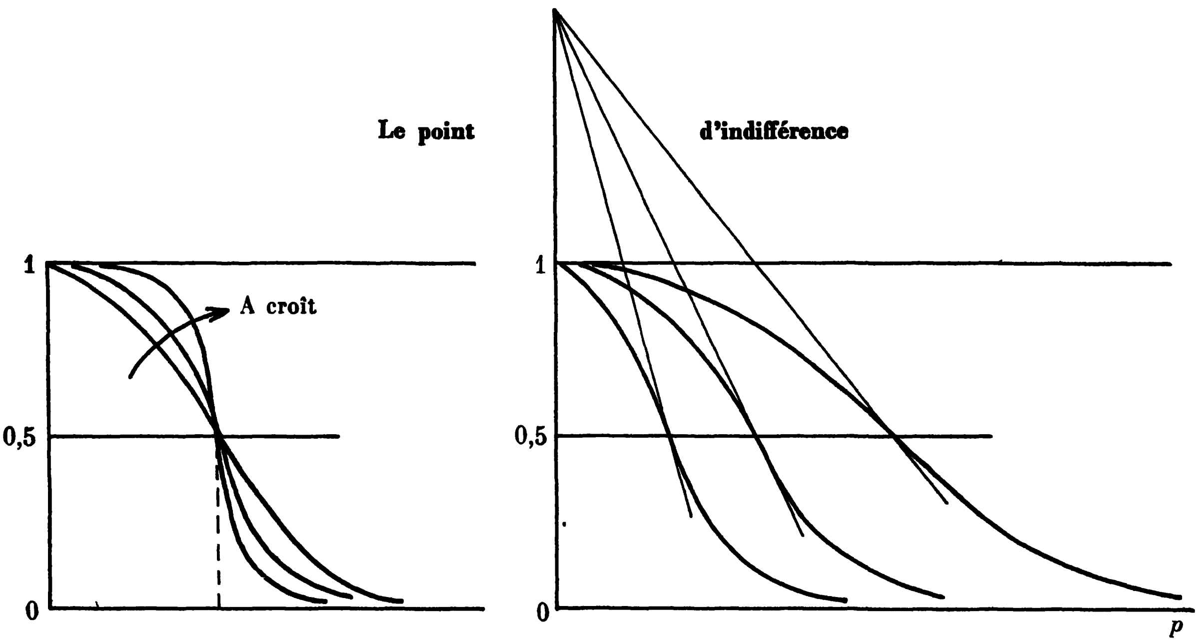

Fig. 7. — p_s *constant*

Fig. 8. — *A constant*

A A donné, les courbes d'efficacité forment un réseau; leurs pentes, aux points d'ordonnée 0,50, décroissent lorsque p_1 croît; plus précisément, les pentes relatives correspondantes, définies par le rapport $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} : \frac{\mathrm{d}p}{p}$ $\left(\text{à bien distinguer de la pente analytique } \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}p}\right)$ sont constantes, de sorte que l'on peut utiliser la construction indiquée par la figure 8.

16. Les Military Standards

a) En tête du fascicule AFNOR X 06-022 se trouve cette indication que le document américain traduit est le MIL STD 105 D dont la date est le 25 avril 1963 et qui, en tant que constituant une norme adoptée en outre par le Royaume-Uni et le Canada, a une désignation internationale, à savoir : ABC STD 105.

E. L. Grant (1952) indique l'origine de ce document.

En 1942, l'armée U. S. commença à utiliser des tables pour la réception de ses marchés; ces tables furent élaborées par Bell Telephone.

En 1945, la marine U. S. disposa dans le même but de tables préparées, à sa demande, par l'Université Columbia.

En 1949, à l'unification des services armés, les tables de la Marine furent retenues, sous la désignation de JAN (Joint Army Navy) STD 105, désignation qui l'année suivante devint MIL STD 105 A.

Des modifications ultérieures firent passer la dernière lettre de A à D.

b) Si l'on rapproche le fascicule AFNOR qui donne la théorie classique du MIL STD 105 D, traduit, on s'attend à ce que ce dernier représente une application pratique du premier. En fait, exagérant à plaisir, je dirais qu'entre les deux c'est le jour et la nuit!

Le fascicule AFNOR est basé sur la théorie de Neyman et Pearson, et l'on sait que ces auteurs ont tenu à ce que la balance soit égale entre fournisseur et client. Le MIL STD, au contraire, fait confiance au fournisseur et ne prévoit guère que la sanction d'un contrôle renforcé si des lots successifs apparaissent comme défectueux.

Le premier laisse en quelque sorte au fournisseur le soin de fixer la paire $p_1 \alpha$; le second considère que ce soin incombe au client qui indique, somme toute, au fournisseur : si vous me faisiez des lots de qualité p_1, je serais satisfait et recevrais la quasi-totalité des lots que vous me présenteriez.

Le premier se conçoit mal sans le recours à la courbe d'efficacité; le second donne des courbes d'efficacité approchées de chacun des plans qu'il envisage, mais il le fait en fin de texte, comme s'il voulait dire en substance : si la question du risque du client vous intéresse, regardez vous-même dans l'album, très complet, que je publie, celle qui peut faire votre affaire; en bref, le MIL STD fait apparaître en première position ce qui correspond à peu près à $\alpha = 0{,}05$ mais relègue au second plan toute table à β constant.

Le premier enseigne que, dans le cadre de la non-exhaustivité dans lequel il se place, l'effectif du lot n'est pas à prendre en considération pour le choix des quantités n et A définissant l'épreuve; le second, au contraire, bien que se plaçant lui aussi dans le cadre de la non-exhaustivité, met immédiatement l'utilisateur en présence d'un tableau donnant, en fonction de l'effectif du lot, une lettre repère dont toute la suite découle; j'ajoute que le tableau en cause prévoit 15 échelons d'effectifs de lot, avec comme échelons extrêmes 2 à 8 d'une part et plus de 500 000 d'autre part, et que ces échelons extrêmes et quelques-uns de leurs voisins, ne me plaisent guère : j'espère que, bien que figurant dans le tableau, ils ne sont pas utilisés dans la pratique.

c) Bien entendu, les différences auxquelles je viens de faire allusion ont été bien vues par les rédacteurs du fascicule AFNOR, et des justifications pertinentes ont été mises en avant. La vérité est que les MIL STD sont destinés, comme ils le disent eux-mêmes, aux cas où il y a réception de lots d'éléments produits en fabrication continue, tandis que la théorie de Neyman et Pearson ne distingue pas ce cas de celui des lots isolés sur lequel je reviens plus loin.

Je me borne à noter ici qu'Hamaker (1960) formule bien des réserves concernant les MIL STD et j'ajoute que ces derniers ont à mes yeux de très grands mérites, parmi lesquels je cite ceux-ci :

— le document est complet en ce sens que les tableaux de valeurs numériques sont accompagnés de textes donnant des indications et des prescriptions de toutes sortes;

— ces textes sont manifestement inspirés à la fois par la sagesse des penseurs et par l'expérience tirée de l'application pratique du document un nombre considérable de fois; j'ai eu plaisir à ce sujet à y lire que « chaque lot doit, autant que possible, être constitué d'*individus* d'un seul type, degré de qualité, classe, taille, composition, *essentiellement fabriqués dans les mêmes conditions et dans la même période de temps* » et qu'il ne faut pas confondre ce lot avec « un ensemble d'unités appelé lot dans d'autres buts ». Le moyen d'éviter toute confusion n'est-il pas de les distinguer par des qualificatifs tels que lots techniques ou homogènes pour les uns et lots administratifs pour les autres?

— la présentation en tableaux est bien de nature à inciter celui qui est confronté avec l'établissement de conditions de réception, à porter son choix en ce qui concerne les p_1, les α et même l'effectif (en ordre de grandeur) du lot sur des valeurs rondes notées sur les tableaux, plutôt que sur des valeurs intermédiaires qui, peut-être mieux que les autres, correspondraient à une certaine vue théorique : l'homme apprend ainsi à ne pas être esclave d'une $n^{\text{ième}}$ décimale, et cela est bien;

— ces valeurs rondes dont je viens de parler sont pour la plupart harmonieusement échelonnées en série Renard, et cela est bien aussi.

17. Les précurseurs

a) C'est en 1944 que Dodge et Romig ont publié en librairie les Sampling Inspection Tables, comprenant en première partie leurs travaux publiés en 1929 dans le Bell System Technical Journal. En tête du livre figure une introduction indiquant que depuis 1923 des ingénieurs de la Western Electric et de la Bell System travaillaient à mettre au point des dispositions convenant à des inspections finales pour le client. Le fait est que depuis 1923 ledit journal a publié des articles sur des sujets connexes : contrôle statistique de la qualité, interprétation par des probabilités à posteriori, mais l'article de 1929 est bien le premier ayant trait à une interprétation de conditions de réception, pouvant être rattachée à la notion de courbe d'efficacité, sans d'ailleurs, m'a-t-il semblé, que cette notion y soit dégagée. Je note que dès 1929, Dodge et Romig ont vu l'intérêt de distinguer des autres les lots techniques ou homogènes dont je parlais il y a un instant.

Les tables de Dodge et Romig correspondent au cas où l'on soumet aux essais non seulement les éléments prélevés en vue des épreuves de réception, mais aussi tous les éléments des lots n'ayant pas satisfait à ces épreuves, étant entendu que tous les éléments trouvés défectueux sont remplacés dans le lot par des éléments bons. Dans le cadre de cette convention, les auteurs ont montré que l'une des deux conditions dont on dispose pour fixer les données n et A de l'épreuve simple considérée pouvait être : rendre minimal le nombre total des essais à effectuer pour une proportion moyenne $\overline{p}$ de défectueux caractérisant la fabrication.

Quant à la seconde condition, elle donne lieu à deux variantes qui sont l'une et l'autre essentiellement en rapport avec la valeur de ce que l'on appelle le risque du client : β est pris systématiquement égal à 0,10. Je note à ce propos que ces auteurs ont, dans leur mémoire de 1929, utilisé explicitement l'expression de « risque du client » mais n'y ont cité aucun « risque du producteur ».

Il y aurait beaucoup à dire sur le cadre général adopté par ces auteurs dont j'espère ne pas avoir, dans ces quelques mots, trahi la pensée.

b) H. F. Dodge, seul cette fois, a imaginé en 1943 un plan qui, établi sur la même base $\beta = 0{,}10$ que ci-dessus, est bien adapté au cas de fabrication *en* continu.

Il est déjà difficile de constituer des lots méritant de faire l'objet d'une épreuve sur échantillon en cas de fabrication continue; cela l'est encore plus en cas de fabrication *en* continu où, par exemple, les éléments produits se présentent les uns à la suite des autres, sur une même courroie transporteuse.

Le plan, que Grant expose au n° 283 de son ouvrage (1952), consiste en ceci :

1° inspection des éléments à 100 %, dans l'ordre où ils se présentent, avec mention des numéros d'ordre des défectueux, lesquels sont, naturellement, éliminés de la production;

2° lorsque l'inspection précédente a fait apparaître à la suite un nombre i d'éléments trouvés bons, cette inspection est remplacée par un prélèvement au hasard d'un élément dans chacun des groupes successifs de x, ce qui, posant $f = \frac{100}{x}$, réalise une inspection à f %;

3° si au cours de l'inspection à f % un défectueux est trouvé, retour au 1° ci-dessus, c'est-à-dire à l'inspection à 100 % suivie éventuellement du 2°, etc.

Ainsi, par exemple, si l'on se fixe d'avoir normalement à contrôler un élément sur 20 ($x = 20$ d'où $f = 5$), il convient de prendre $i = 76$; moyennant quoi, au risque $\beta = 0{,}10$ près, l'on met en service une production qui ne contient pas plus de 20 défectueux sur 1 000.

Des précautions sont naturellement à prendre.

Si l'opérateur contrôle systématiquement le 20e élément qui se présente sur la courroie, on peut craindre que quelques manœuvres peu honnêtes, ou encore quelques perturbations cycliques, viennent troubler les résultats escomptés.

Mais au premier lieu des précautions à prendre, je place toutes celles qui sont en rapport avec l'approvisionnement de la courroie : ne doivent se présenter à la suite que des éléments dignes de figurer dans un même lot technique : un signal doit donc à la fois marquer l'achèvement d'un tel lot et, en bonne logique, provoquer d'une part l'individualisation au moins provisoire du « lot » achevé, et d'autre part, la reprise du processus à partir de l'inspection à 100 %.

On peut reprocher à ce plan qu'un défectueux n'est reconnu comme tel qu'alors que ses congénères sont déjà loin sur la courroie transporteuse, de sorte que la sanction ne peut guère concerner que des successeurs lointains de ce défectueux. On peut donc se demander si finalement ce plan, qui a reçu différentes adaptations sur lesquelles je n'insiste pas ici, est préférable à une inspection à 100 % généralisée? A cela je réponds : *oui* du point de vue des dépenses de contrôle et, *non* du point de vue de la sécurité du client, bien que l'inspection à 100 % ne donne jamais la certitude : « Il suffit, pour s'en convaincre », remarque Mothes (1962), « de lire un ouvrage scientifique, dont les épreuves ont pourtant été soigneusement relues et corrigées ».

Mais l'inspection à 100 % effectuée sur une fabrication en continu, et organisée de manière à garder trace des rangs des défectueux, permettrait une étude statistique basée sur ce que les Anglo-Saxons appellent des *runs* (différences des rangs de deux défectueux successifs); et cette étude serait de nature à faire apparaître à partir de quel moment il est déraisonnable d'admettre que la production est restée sous contrôle, indication très précieuse pour l'étude technique des causes de déréglage, en bien ou en mal, de la production.

Quant à l'étude statistique, j'ai montré (1952) qu'elle pouvait consister essentiellement en une recherche graphique particulièrement simple et instructive, puisqu'elle est en tous points comparable à l'utilisation qui est faite de la droite de Henry, à l'occasion du test de la normalité d'une série de mesures.

c) L. Vallery était pharmacien chimiste principal de la Marine (française) en 1925, lorsqu'il a publié un mémoire qui devrait suffire pour qu'il soit connu aussi comme statisticien. Il y a exposé que le problème des conditions de réception revenait à ceci : étant donné le pourcentage minimal de défectueux que l'on se propose de déceler non pas avec certitude mais avec une probabilité donnée, quel effectif de prélèvement faut-il adopter pour avoir précisément cette probabilité que le prélèvement comprenne un défectueux, et que par suite le lot soit rejeté? Ainsi il se fixe $A = 0$ et détermine n d'après les deux données p_2 et $1 - \beta$.

A propos de cette dernière probabilité, L. Vallery propose de lui donner une valeur supérieure à 0,50, soit 0,70 (d'où : $\beta = 0{,}30$) « afin que les transactions commerciales s'effectuent sur des bases morales, ce qui exige qu'en cas de tromperie sur la marchandise vendue, les chances de l'acheteur soient supérieures à celles du vendeur ».

Un autre point très remarquable du travail de L. Vallery est que l'auteur n'a pas hésité à aborder d'emblée le cas exhaustif, avec toutes les complications de calcul que cela implique.

d) M. Dumas : Il se trouve que c'est en 1925 également que j'ai indiqué quelles étaient les grandes lignes du problème des conditions de réception, à savoir celles dites à propos de L. Vallery. Je n'ai connu L. Vallery que plus tard et mon mémoire antériorise le sien de quelques mois. Comme lui j'ai pris en considération ce que j'ai désigné plus haut par p_2 et par $1 - \beta$ et comme lui j'ai pris $A = 0$. Mais d'une part je suis resté dans le cas non exhaustif et d'autre part j'ai envisagé le cas d'une épreuve double (un défectueux et un seul, constaté à l'épreuve, conduit à l'exécution d'une contre-épreuve devant ne faire constater aucun défectueux pour que le lot soit accepté). Pour tous ces cas j'ai donné, sous le nom de « courbes représentatives », les courbes d'efficacité correspondantes.

Quelques points de mon travail me paraissent mériter d'être signalés ici.

1° Ayant pris $A = 0$, je ne disposais plus que d'une condition au lieu de deux, mais la considération de la contre-épreuve me rendait, si j'ose dire, un degré de liberté, et cette liberté j'en ai usé, non pas pour mettre en avant un certain risque du producteur dont je n'avais pas même dégagé la notion, mais pour considérer qu'il y avait des conditions de réception plus avantageuses les unes que les autres : l'avantage appartient aux conditions pour lesquelles la tangente au point $p_2\,\beta$ de la courbe d'efficacité a la pente la plus grande, en valeur absolue.

2° Je n'ai pas utilisé dans mon mémoire une expression du genre : risque du client; j'ai toujours désigné par l'équivalent de « probabilité minimale de rejeter un lot mauvais » ce que l'on représente aujourd'hui par $1 - \beta$; je continue à trouver que mon expression d'alors, bien qu'elle soit longue, est préférable à toute autre, telle que risque du client;

3° Dès cette époque, j'ai insisté sur l'intérêt qu'il y avait à ne pas fixer l'importance (c'est-à-dire l'effectif) du lot, mais à prescrire « qu'un lot ne peut comprendre que des éléments dont les matières sont respectivement toutes identiques entre elles, ..., dont telles opérations de confection auront été faites chacune par un seul et même ouvrier, et dont la confection, depuis telle opération jusqu'à telle autre, aura été achevée en un temps maximum donné ». C'était là ma conception d'alors du « lot technique », dont la définition est rapidement devenue pour moi : « lot composé d'éléments que l'on ne sait distinguer les uns des autres, ni par les matières premières utilisées ni par tout autre facteur dont l'influence sur la qualité du produit est reconnue ou simplement jugée possible ». Peut-être certains lecteurs ont-ils en mémoire quelques-unes des nombreuses tentatives que j'ai faites notamment à l'AFNOR pour faire définir un « lot homogène » ou, mieux, un « lot technique »; quelques résultats dans ce sens commencent à être obtenus (cf. : AFNOR X 06-021) : que ces résultats soient ou non le résultat de mes efforts, je suis heureux de les saluer, comme j'ai été heureux plus haut de souligner le sens particulier donné au mot « lot » pour les MIL STD, ainsi que par Dodge et Romig.

18. Priorité?

J'ai épuisé la liste des auteurs dont je voulais parler. Je me suis cité en dernier non par fausse modestie mais parce que je crois réellement avoir été le premier dans le temps à publier un raisonnement de probabilité directe pouvant servir d'interprétation aux conditions de réception, et, très précisément, un raisonnement basé sur des courbes d'efficacité, tracées explicitement. Si une antériorité venait à m'être indiquée, je ne manquerais pas de l'étudier et, le cas échéant, d'admettre sa validité. Dès maintenant cependant différents auteurs ont reconnu ma priorité.

En 1953, Cavé, au chapitre X de son ouvrage, a jugé intéressant de souligner que les premières courbes d'efficacité avaient été calculées par moi. De son côté, Mothes, dans ses ouvrages de 1952 (nº 11-1-2) et de 1962 (p. 261), a écrit que j'avais été amené à définir en 1925 la plupart des notions sur lesquelles reposent les schémas de Dodge et Romig et les théories classiques de Neyman et Pearson, et cela « vers la même époque » : je pense que ces derniers mots évoquent uniquement les travaux américains auxquels Dodge et Romig font allusion dans l'introduction de leurs Tables, et dont j'ai parlé plus haut.

J'ajoute que mon mémoire de 1925 a été traduit et publié en polonais par M. Wiadomosci et qu'il a été présenté en Russie, aux lecteurs soviétiques, par le Pr G. Grodski; dans un avant-propos, celui-ci déclare que mon article réalise pour la première fois le lien qui unit la théorie des probabilités aux questions de réception de lots d'éléments, et qu'il estime devoir marquer de la façon la plus claire ma priorité dans ce domaine. Mais Grodski n'en reste pas là : il avance qu'il y a mieux à faire, il promet de faire mieux et, de fait, quelques mois plus tard, il publie le mémoire évoqué plus loin.

C'est dans ces conditions qu'il m'a semblé qu'une antériorité éventuelle opposable à mes travaux ne pouvait guère provenir que de ce que j'appelle ici l'École de la Bell Telephone, et que le plus sûr en la matière était d'apprendre des Prs Dodge et Romig eux-mêmes ce qu'ils connaissaient de la question. J'ai donc pris la liberté de les interroger. Mais avant d'examiner leur aimable réponse, il faut bien savoir ce qui peut constituer une antériorité.

Avoir calculé des points de la courbe de répartition d'une loi de probabilité, et même avoir tracé cette courbe, ne constitue certainement pas, en soi, une antériorité.

Avoir fait correspondre à des probabilités intégrales une ou plusieurs notions telles que celles désignées par « risque du client » ou « risque du producteur », ou des notions analogues, constituerait une antériorité manifeste.

Entre ces cas extrêmes se situe celui où des probabilités intégrales sont discutées, éventuellement dans une ambiance d'échantillonnage, sans qu'aucune des notions précédentes ne soit dégagée : je vous invite à convenir avec moi qu'il n'y aurait pas là antériorité.

Quoi qu'il en soit, MM. Dodge et Romig, dans leur réponse à ma lettre, citent des travaux de Campbell (1923) et Thorndike (1926) publiées dans Bell System Technical Journal.

Comme il s'agit là de travaux relatifs à la loi de Poisson en général, sans aucune allusion particulière à l'échantillonnage, je ne les retiens pas comme antériorité.

Quant à M. Romig, il ajoute (1) (traduction libre) :

« A partir d'environ 1914, M. Molina et M. Hazard de la Bell System ont travaillé les problèmes d'échantillonnage. Vers 1918, dans un mémoire confidentiel à l'intérieur de la Compagnie, M. Hazard a tracé, à peu près sur la moitié de son domaine, une courbe de probabilité d'acceptation, courbe destinée à être utilisée, au niveau de la Direction centrale, pour l'échantillonnage des composants électriques. Molina avait, déjà en 1906, publié quelques relations mathématiques dans un mémoire donné au Canada. »

En présence de ces intéressantes précisions, je devais rechercher spécialement sur quoi avaient porté les travaux de Molina. Ce dernier a publié (5e édition en 1949) des tables dites « Poisson's exponential binomial limit »; il indique dans l'introduction que ces tables ont été utilisées à l'intérieur de la Bell System depuis 1900 pour la solution de problèmes de liaisons téléphoniques (trunking), mais que d'autres applications étaient apparues notamment depuis 1938 et que dans ces conditions il avait été retenu de les publier. Après l'introduction, une page signée du Pr Dodge indique que ces tables peuvent être utilisées dans des questions d'échantillonnage.

Cela suffit à montrer que les résultats des calculs de Molina intéressent l'échantillonnage mais que ses travaux n'ont aucunement été orientés sur ce point particulier. C'est d'ailleurs ce que nous a confirmé l'examen des mémoires de Molina de 1913, de 1924 (en collaboration avec R. P. Cowel) et de 1929 (en collaboration avec P. L. Wilkinson).

Je pense finalement que la priorité dite plus haut ne peut m'être refusée.

Mais si j'ai demandé qu'elle me soit reconnue, ce n'était pas pour diminuer tant soit peu le mérite des autres auteurs. Il est bien connu que, lorsqu'une idée est dans l'air, il y a souvent plusieurs auteurs, indépendants les uns des autres « au sens du calcul des probabilités », pour une même invention. Je ne prétends aucunement avoir influencé les travaux qu'à mon insu poursuivaient à la même époque les ingénieurs de la Western et de la Bell; et je sais qu'il n'y a eu aucune interaction entre les travaux de Vallery et les miens, bien que nous étions l'un et l'autre à leur époque directement au service de la Marine nationale.

19. En chronologie normale

Ma remontée dans le temps étant terminée en ce qui concerne les interprétations par la courbe d'efficacité, je vais en entreprendre une descente rapide pour faire le point.

Années 1920 : tous les précurseurs cités ont attaché un prix particulier au risque couru par le client, ne faisant aucune mention du point de vue du producteur, comme si la technique maniée par ce producteur pouvait obéir à un simple froncement de sourcils du client; je dirais que ce sont les *années du client-roi*.

Années 1930 : les auteurs découvrent le point de vue du producteur et disposant mathématiquement d'un paramètre permettant d'octroyer à ce dernier une part égale à celle du client, ils n'hésitent pas à lui conférer cette égalité; le summum en l'occurrence apparaît avec les vues d'Hamaker qui prend, avons-nous vu, $\alpha = \beta = 0{,}50$; je dirais que ce sont les *années de l'égalité de traitement*.

1. Starting about 1914, Mr. Molina and Mr. Hazard of the Bell System were working on Sampling Problems. About 1918 in a company confidential memorandum Mr. Hazard had about half a Probability of Acceptance Curve for use in Sampling components in Central Offices. Mr. Molina as early as 1906 published some of the mathematical relations in a paper given in Canada.

Années 1940 : Les documents militaires américains s'éloignent de l'égalité précédente; ils donnent une certaine primauté à la fabrication puisque p_1 est seul fixé; mais c'est le client qui fixe p_1 et qui l'indique explicitement au producteur. A partir de là, ce dernier peut évidemment faire valoir des raisons techniques et économiques en faveur d'une autre valeur de p_1; puis le client a de nouveau la parole : il a certes intérêt à être compréhensif vis-à-vis du producteur; il doit apprécier à leur valeur les difficultés techniques que rencontre ce dernier; mais c'est lui seul qui est juge de l'aptitude du produit à l'emploi, et c'est lui, en définitive, qui paye! Dans un style au goût du jour, je dirais que les années 1940 voient s'ouvrir l'*ère de la contestation* au sujet de p_1 et celle *du dialogue* entre les parties.

Sans doute est-il regrettable que cette ère ait débouché sur des documents (les MIL STD) qui, valables en cas de fabrication continue, laissent de côté deux cas importants : le cas des tirages exhaustifs et celui des lots isolés.

20. Cas exhaustif

Je tiens à indiquer aux jeunes chercheurs qu'en s'en tenant au principe des interprétations par la courbe d'efficacité, ils pourraient utilement porter leur attention sur le cas exhaustif.

Vallery a d'emblée, abordé ce cas; bien des auteurs ont indiqué les formules, mais il reste à rendre facile l'emploi de ces dernières.

Je pense avoir, dans cette voie, fait un pas en avant; j'ai indiqué dans un de mes ouvrages (1955) qu'en cas d'épreuve simple où aucun défectueux n'est toléré, la consultation d'un tableau de 9 lignes et 8 colonnes suffit à donner une idée de la réduction de l'effectif du prélèvement rendu possible, à risques égaux ou inférieurs, par la prise en considération de l'exhaustivité.

21. Les lots isolés

La Marine américaine paraît avoir été la première des trois armes à se préoccuper de la lacune que j'ai signalée concernant les lots isolés; pour y porter remède, elle s'est adressée à l'Université; mais sans doute a-t-elle craint de voir apparaître — au bout de combien de temps? — un nouveau MIL STD aussi volumineux que les précédents; le fait est qu'elle a demandé de ne rien inventer de nouveau, la question se trouvant alors limitée à ceci : en cas de lot isolé, comment utiliser judicieusement ce qui existe.

La réponse a été donnée par ce Rapport de Grant et Lieberman (1955) par lequel j'ai commencé ma remontée dans le temps, étant donné qu'il contenait une chose proscrite, à savoir une nouveauté.

Ce rapport est positivement du plus haut intérêt. Je ne puis ici qu'en noter trois points sur lesquels il met l'accent.

1° Le MIL STD existant ne convient pas, même si l'on a recours à l'inspection renforcée qu'il prévoit; l'on peut cependant utiliser les courbes d'efficacité qu'il donne pour tenter d'y trouver un p_2 et un β qui puissent être jugés convenables — ce qui revient, somme toute, au point de vue des précurseurs;

2° les tables d'Hamaker ne conviennent guère mieux que le MIL STD;

3° dans le cas où une inspection à 100 % peut avoir lieu, les conditions de réception changent de nature car de nouvelles possibilités sont offertes quant aux sanctions de l'épreuve; d'où les trois propositions suivantes :

— ou bien suivre le MIL STD — ce qui donne au producteur la garantie qu'il peut désirer — mais tout lot qui ne sera pas rejeté sera soumis à l'inspection à 100 %;

— ou bien suivre Dodge et Romig — ce qui fait courir au client un risque limité à 0,10 — et, comme le prévoient ces auteurs, tout lot qui ne sera pas accepté sera soumis à l'inspection à 100 %;

— ou bien suivre la nouveauté signalée au n° 15 : dans le plan à trois décisions, l'épreuve a comme sanction directe soit l'acceptation définitive, soit l'inspection à 100 %, soit le rejet définitif, suivant que le nombre de défectueux trouvés est plus ou moins grand.

22. Vues personnelles

Je suis naturellement heureux de ce que Grant et Lieberman se soient rapprochés sur certains points des précurseurs, mais je pense, qu'au risque d'enfreindre davantage le « n'inventez rien » qui leur était imposé, ils auraient pu, ils auraient dû conclure tout différemment.

Il s'agit d'abord de savoir ce qu'est un lot isolé; voici en effet quelques questions qui se présentent à ce sujet :

— un producteur qui interrompt parfois sa fabrication pour une autre toute semblable (exemple tiré de mon passé d'artilleur : chargements d'obus de calibres quelque peu différents) fabrique-t-il des lots « isolés » ou travaille-t-il en série?

— un cultivateur qui reçoit un wagon d'engrais n'est-il pas fondé à voir un lot isolé là où le producteur voit le produit d'une fabrication continue? n'est-il pas fondé à admettre difficilement le raisonnement qu'on lui tient? et dont je donne ici une caricature : je vous ai promis, dit le producteur, un taux d'acide phosphorique de 10; l'essai fait sur un prélèvement effectué dans votre wagon donne seulement 8; ce n'est pas incompatible avec ma promesse; payez-moi donc comme si l'on avait trouvé 10.

Les auteurs du Rapport ont rappelé comme définition du lot isolé : lot pour lequel la protection du client dépend entièrement de l'épreuve de réception. Manifestement aucun lot des deux exemples cités ne répond à cette définition. On peut même se demander comment il serait possible d'avoir affaire à un « lot isolé » sinon dans le cas d'une fabrication au laboratoire d'un produit entièrement nouveau, ou peut-être encore dans le cas d'une fabrication pour essais; mais aucun des lots correspondants n'est justiciable d'une épreuve de réception.

La vérité me semble être que pour tous les lots soumis à une telle épreuve, on a des connaissances à priori, mais que ces connaissances sont plus ou moins importantes. Il est clair que cette vérité, une fois admise, confère un intérêt particulier au cas qui me reste à examiner, celui des interprétations par des probabilités à posteriori.

INTERPRÉTATIONS PAR DES PROBABILITÉS A POSTERIORI

23. Avantages et inconvénients

Une interprétation par des probabilités à posteriori présente comme premier avantage de tenir compte des connaissances que l'on a sur le lot avant l'épreuve : je viens de montrer que ces connaissances ne sont jamais nulles; les négliger, c'est se priver délibérément d'un élément d'information que l'on possède : en a-t-on le droit?

Un autre avantage est qu'elle répond directement à la question qui intéresse au premier chef le client, du moins à partir du moment où celui-ci sait faire intervenir quelques notions de probabilités pour préciser sa pensée; et cette question est : « Sachant qu'un lot a satisfait à telles conditions de réception, quelle probabilité y a-t-il que ce lot soit un lot bon? »

En contrepartie, il faut savoir formuler une probabilité à priori et tout particulièrement il faut savoir exprimer mathématiquement ce qui correspond au cas limite où la connaissance à priori est rigoureusement nulle, car l'expression correspondante intervient dans tous les cas; entre autres :

— cas où l'on veut tenir compte d'une connaissance chiffrée par n défectueux sur N;

— cas, fréquent, où la connaissance à priori est faible ou difficilement chiffrable, et où on retient l'hypothèse que cette connaissance est nulle, afin d'être renseigné en toute sécurité.

Il semblerait ne pas y avoir grande difficulté à cela puisque les auteurs cités sur le tableau (fig. 2) ont tous choisi la même loi : celle qui exprime l'égalité de toutes les valeurs possibles de la proportion p des défectueux dans le lot, c'est-à-dire la loi caractérisée par $\mathrm{d}p$ ou, en bref, la loi $\mathrm{d}p$.

24. Les auteurs cités

a) L. E. Simon a consacré une part importante de son ouvrage à l'estimation du pourcentage de défectueux contenu dans un lot; cela l'a amené à publier des abaques relatifs à la fonction B incomplète, abaques qui peuvent être précieux dans de nombreux cas où il ne s'agit pas spécialement de l'interprétation d'une épreuve de réception par des probabilités à posteriori.

b) Grodski est ce professeur soviétique que j'ai évoqué (nº 18) à propos de mon mémoire de 1925. Je me trouve donc être à l'origine de son travail. Il avait promis de faire mieux que moi; sans doute a-t-il réussi; en tout cas, il s'est engagé dans une voie différente qu'aujourd'hui je juge meilleure, puisqu'il a choisi de raisonner par probabilités à priori et à posteriori. Il a eu le souci de calculer certaines probabilités avec 7 décimales exactes : je ne puis m'empêcher de trouver que c'est tout de même beaucoup!

c) Estienne est connu des philatélistes (en 1960, un timbre de 0,15 F a été émis à son effigie), des Niçois (à Cimiez un boulevard, avec buste, porte son nom), des artilleurs du début du siècle (il est le père des chars d'assaut) et aussi des statisticiens pour son « Essai sur l'art de conjecturer » avec d'une part un exposé sur le « calcul des cotes » (lequel établit une liaison que j'estime juste entre le calcul des probabilités et la statistique) et d'autre part l'étude pour laquelle il est cité ici.

J'attire votre attention sur la date — ancienne — de cette étude et sur de précieuses indications de bon sens qu'Estienne en a dégagées.

Nous y trouvons déjà cette règle qu'en cas d'épreuve double, il faut interpréter le résultat final d'après l'ensemble des deux résultats partiels.

Nous y trouvons une intéressante notion de « marque de fabrique » qui traduit la confiance à priori que le client peut avoir dans la livraison d'un fournisseur d'après le soin que ce dernier apporte généralement à l'exécution de ses marchés.

Nous y trouvons aussi que les marchés de gré à gré doivent être préférés aux marchés sur adjudication : les marchés d'État qui en règle générale étaient sur adjudication à l'époque d'Estienne sont aujourd'hui, sauf exception, des marchés de gré à gré.

On voit par là quelle richesse d'enseignements peut parfois être tirée d'une étude bien conduite, même si à la base de cette étude se trouve quelque élément contestable, à savoir la loi dp.

Contestable? le mot peut surprendre; aussi vais-je m'expliquer quelque peu à son sujet.

25. La loi dp et ses supporters

a) Je compte tout naturellement les trois auteurs cités, au nombre des supporters de la loi dp. En tant que tels, ils sont loin d'être isolés. Faute de pouvoir passer en revue tous les auteurs qui ont appliqué la formule de Bayes, je me borne ici à quelques-uns d'entre eux.

Au premier rang de ceux-ci se trouve Bayes lui-même, qui a retenu la loi dp puisque le raisonnement qu'il avait inventé a dû, semble-t-il, attendre Laplace (1) pour être formulé dans toute sa généralité, c'est-à-dire avec pour la probabilité à priori $f(p)$ dp et non plus simplement dp. Il est vrai que Laplace lui-même n'a guère appliqué la formule générale que dans le cas où $f(p) = 1$, c'est-à-dire avec la loi dp.

Ont agi en cela comme Laplace des sommités telles Poisson, Kolmogorof et K. Pearson, et aussi des personnalités bien connues dans le domaine des conditions de réception : J. Neyman et E. S. Pearson, par le biais des « vraisemblances » (1928). Dans le même cas se trouvent des auteurs dont les travaux ont paru dans Bell System Technical Journal à l'époque des premiers écrits de Dodge et Romig : E. C. Molina et P. P. Coggins, le premier soit seul, soit en collaboration avec R. L. Wilkinson ou R. P. Cowel.

J'ai aussi remarqué deux mémoires, l'un de Bouzitat, l'autre de G. Hansel et D. Grouchko, retenant l'un et l'autre la loi dp.

J'ai réservé une place à part au Pr Eyraud, dont un travail, qui tient en quelques lignes, fait partie d'un tout, que je vais évoquer ici.

b) Au congrès de Washington, 1947, de l'Institut international de Statistique a été discuté un rapport de M. le professeur Fréchet, rendant compte d'une enquête dont la question était celle de la réception d'un lot, à savoir, en substance : « Un événement E a été observé n fois en N épreuves. Sachant ou admettant que E y avait une probabilité constante (mais inconnue) p, que peut-on dire sur p, connaissant seulement n et N? Examiner

1. M. le professeur Fréchet (1947), après avoir noté que Bayes n'avait nulle part introduit $f(p)$ différent de 1, ajoute que Laplace a introduit $f(p)$, « mais la question reste ouverte de savoir s'il l'a fait le premier ».

le cas où $N = n = 1$. Placer en tête de la réponse « sans recours à la formule de Bayes » ou « réponse basée sur la formule de Bayes ».

Il y eut 16 répondants. J'en ai compté 7 qui avaient rejeté dès l'abord tout recours à la formule de Bayes. A l'opposé le Pr Eyraud a écrit la formule générale puis s'est borné à remarquer que « le cas le plus simple » était celui de la loi de probabilité à priori uniforme », c'est-à-dire celui de dp. Les 8 derniers répondants ont disserté plus ou moins sur les deux problèmes (sans ou avec recours à la formule de Bayes) et, suivant leur conviction, ont donné la solution de l'un d'entre eux, ou des deux.

MM. Cramér, Jordan, von Mises et Neyman ont pris parti contre la formule de Bayes. MM. Darmois, de Finetti et Fortet ont écrit la formule sous sa forme générale mais ils se sont abstenus de particulariser $f(p)$. J'ai moi-même traité le cas $f(p) = 1$ mais c'était pour le combattre, et j'ai mis en avant la loi $\dfrac{dp}{p(1-p)}$.

J'ai certainement paru bien audacieux de me singulariser de la sorte; cependant je ne faisais qu'exploiter cette idée qu'avant d'imaginer une loi couvrant d'emblée toute la zone des valeurs possibles de la proportion p, il était bon de remonter à la source de cette loi et de tenir compte avant le tirage de rang 2 du résultat donné par le tirage de rang 1.

Sans doute n'est-ce pas la place de discuter à fond cette question. Cependant, peut-être intéressera-t-il le lecteur de trouver quelques considérations que pour des raisons de simplicité je présente sous des noms de code, et que je place ainsi sous l'égide de noms prestigieux, qui de près ou de loin sont mis en cause dans l'exposé de ces considérations.

c) Il se trouve que cela va m'éloigner quelque peu de la question des conditions de réception; avant de le faire, je tiens à préciser ma position en ce qui concerne ces dernières : je maintiens que les interprétations par des probabilités à posteriori sont d'un intérêt particulier, mais je pense que les résultats qui ont été obtenus dans cette voie en partant de la loi caractérisée par dp sont à réviser pour les mettre en accord avec la loi caractérisée par $\dfrac{dp}{p(1-p)}$, pour représenter le cas extrême où la connaissance à priori est rigoureusement nulle.

Cette révision ne présente aucune difficulté. J'ai déjà donné (1955) les formules à appliquer aussi bien dans le cas exhaustif que dans le cas non exhaustif. Naturellement aucun lecteur ne s'attend à ce que lorsque l'on passe d'une loi à l'autre, des différences sensibles apparaissent; il suffit en effet que les quantités que j'ai désignées plus haut par n et N soient notables pour que l'influence de la loi de probabilité à priori choisie initialement soit négligeable. Il y a cependant un point où il y a opposition formelle entre les résultats; ce point est celui où n est nul ou égal à N. Je fais de ce cas l'objet d'une de mes considérations. (n° 27).

26. Considération « de Finetti »

a) Parmi les considérations émises à propos de l'emploi de la formule de Bayes au cours de l'enquête dont j'ai parlé, je relève spécialement celle de von Mises d'après laquelle le statisticien qui, comme lui, refuse l'emploi de la formule de Bayes, le fait pour une au moins des 3 raisons suivantes :

1. parce que $f(p)$ est inconnu;

2. parce qu'une telle fonction n'existe pas;

3. parce que p est une constante inconnue et nullement une variable aléatoire.

D'ailleurs, von Mises indique que cette raison 3 s'oppose également à tout raisonnement mettant en cause des vraisemblances, des probabilités fiduciaires, des intervalles de confiance, etc. (il faudrait d'ailleurs, ajoute-t-il, dire préalablement, clairement, ce que l'on entend au juste par ces expressions).

De toute façon, c'est bien le point 3 qu'il convient d'examiner en premier lieu.

b) De Finetti qui, au contraire de von Mises, refuse tout raisonnement non basé sur la formule de Bayes, indique que l'emploi de cette formule est justifié moyennant la définition suivante : la probabilité d'un événement est la mesure du degré de confiance d'un individu donné à l'égard de l'arrivée de l'événement; cette probabilité n'existe que par référence à l'opinion d'un individu ou d'un groupe d'individus.

Voilà une définition qui permet de parler de la « probabilité » de l'arrivée de Canasson III en tête du peloton dans le grand steeple de Z... Le joueur qui mise sur lui agit comme s'il avait confiance que Canasson III arrivera premier; le total des mises concentrées sur Canasson III est à la mesure de la « probabilité » que les joueurs dans leur ensemble attribuent à cette arrivée victorieuse.

c) La définition de de Finetti est donc séduisante, mais est-il bien judicieux de la poser? Je crois qu'il y a encore mieux à faire : c'est de suivre en l'occurrence Estienne qui, dès 1903, a distingué l'une de l'autre la *probabilité* des mathématiciens, à laquelle on peut assimiler la probabilité d'un événement tel que la sortie d'une boule blanche d'une urne de composition *connue*, de la *cote* qui est attribuée par un individu au tirage d'une blanche d'une urne de composition *inconnue*.

Estienne remarque qu'un individu ayant affecté une cote à un événement ne peut, sans illogisme, affecter n'importe quelle cote à un événement lié au premier. Le libre arbitre de l'individu est tempéré par la nécessité où se trouve cet individu de se soumettre aux règles de ce qu'Estienne appelle le « calcul des cotes »; il établit en tête de ce calcul des cotes que ces dernières se composent comme des probabilités; si par exemple l'individu qui a confiance dans la perfection d'un dé, et dans l'honnêteté du lanceur, affecte la cote 1/6 à l'arrivée de l'as, il ne peut pas affecter à l'arrivée successive de deux as une autre cote que 1/36.

Ainsi, développons le calcul des cotes; parlons de cotes à posteriori et non plus de probabilités à posteriori du moins dans le cas où il s'agit bien de cotes, et non de probabilités; et l'objection 3 de von Mises se trouve levée, en même temps que sont éclaircis bien d'autres raisonnements de la Statistique.

d) Restent les objections 1 et 2. Je serais tenté de dire qu'il m'importe peu de savoir que, philosophiquement, aux yeux de certains, $f(p)$ n'existe pas ou bien est inconnue, si je dispose d'une fonction $f(p)$ traduisant en langage mathématique ce que mon bon sens me dicte de faire ou m'incite à faire.

Prenons un exemple concret : quelle est donc votre démarche si l'on vous demande ce que vous pensez du contenu d'une urne, dont je modernise le schéma, en précisant que cette urne est constituée par un sac de plastique absolument opaque? Votre premier soin est de tâter cette urne; vous pouvez ainsi reconnaître qu'elle contient un ensemble de boules, homogène quant à la forme de celles-ci; mais pour ce qui est de leur couleur, vous ne pouvez qu'avouer n'en rien savoir du tout.

Là-dessus, vous tirez une boule : elle est blanche; on dirait, direz-vous, que l'urne contient des boules blanches. Une seconde boule est encore blanche et cela ne fait que renforcer votre opinion précédente. La troisième boule tirée est noire : vous découvrez ainsi qu'il peut y avoir des noires; peut-être s'y trouvent-elles dans une proportion voisine de 1 sur 3. Et ainsi de suite.

Traduisons ces indications de bon sens en langage probabiliste, pensant qu'il vous faut miser avant chaque tirage sur la couleur de la boule qui va sortir.

Avant le premier tirage, vous ne pouvez que vous en remettre au hasard. Vous ne pouvez que miser totalement sur blanc à la fois avant le deuxième tirage (vous gagnez) et avant le troisième tirage (vous perdez) : « miser totalement » c'est-à-dire miser comme si vous aviez la certitude que blanc allait sortir une fois de plus, puisque rien jusque-là ne vous fait soupçonner que des boules non-blanches pouvaient exister dans l'urne. Avant le quatrième tirage, vous ne pouvez que jouer blanc à 2 contre 1. Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que l'adoption de la loi $\mathrm{d}p$ ne convient nullement pour représenter cette démarche. La loi $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$, au contraire, la représente parfaitement. Adoptons donc la loi $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$!

27. Considération « Professeur Fréchet »

a) Dans ma réponse à l'enquête je n'ai pas craint d'avancer, trop brutalement et assez maladroitement, un point dont je viens de faire état, à savoir : « la connaissance exclusive de 1 fois sur 1 conduit à conclure à la certitude de l'arrivée de l'événement E, comme le veut le bon sens ».

C'était aller bien vite en besogne et je suis reconnaissant à M. Fréchet de n'avoir pas écarté d'un mot mon affirmation, et d'avoir seulement manifesté son scepticisme sous la forme interrogative. « Si l'on sait seulement qu'une seule épreuve ayant été faite, l'événement E s'est produit, en conclurait-on comme allant de soi que cet événement devait certainement se produire? »

En réalité, se laisser guider par la loi $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$ ne conduit nullement à présumer quelque chose avant l'épreuve (au contraire de ce que fait la loi $\mathrm{d}p$); en particulier, cela ne conduit pas à admettre la certitude de l'événement E avant l'épreuve; par contre, la loi $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$ conduit à admettre cette certitude *après* l'épreuve unique ayant fait apparaître l'événement E, c'est-à-dire seulement pour la seconde épreuve et pour toutes les suivantes tant que des blancs sont seuls à apparaître.

b) De plus, la certitude en cause ici est loin d'être absolue, et voici, en substance, ce que j'aurais dû ajouter à ma réponse.

Si avant toute épreuve l'on est dans l'ignorance absolue concernant la coloration des boules d'une urne, et si N tirages n'ont fait apparaître que des boules blanches, il est possible de craindre que des non-blanches arrivent ultérieurement, mais il n'est manifestement pas possible de faire correspondre une probabilité bien définie à ce qu'il en soit ainsi; on peut dire que cette dernière probabilité est *plus faible* que celle qui aurait été attribuée à l'arrivée de non-blanches si le résultat avait été N — 1 blanches et 1 rouge; ou encore qu'elle est *au plus égale à* celle qui aurait été attribuée si le résultat connu était N blanches et 1 rouge; mais on ne peut pas prétendre qu'elle est *égale* à *telle* valeur.

Or, en cas de N blanches en N essais, qu'indiquent respectivement les lois dp et $\dfrac{dp}{p(1-p)}$?

La loi dp ne décille pas les yeux de qui se laisse entraîner comme un aveugle par les calculs qu'elle permet d'effectuer; et elle conduit à retenir une probabilité bien définie à l'arrivée de non-blanches. Me gardant bien de faire grief à Laplace de s'être ainsi laissé souvent entraîner, je ne puis le reprocher à ses disciples, tels que ceux cités dans le tableau.

La loi $\dfrac{dp}{p(1-p)}$ au contraire donne l'alarme, car on est bien forcé d'y regarder à deux fois avant de remplacer $(-1)!$ par sa valeur, qui est infiniment grande; elle incite à agir comme si l'on avait la certitude que le prochain tirage ferait apparaître encore une blanche, mais elle n'incite pas à en mettre sa main au feu : la limite supérieure calculée d'après 1 en $N+1$ serait là pour retenir le téméraire qui serait tenté de l'y mettre!

28. Considération « Bachelier »

a) Je pose une question à chaque lecteur : Si N tirages ont fait apparaître n blanches, quelle probabilité (je devrais dire : quelle cote) êtes-vous disposé à accorder au tirage d'une blanche lors du $N+1^{\text{ième}}$ tirage? : $\dfrac{n}{N}$? $\dfrac{2n}{2N}$? $\dfrac{n+a}{N+b}$ ou plus précisément $\dfrac{n+1}{N+2}$? une valeur autre?

Si, comme moi, vous optez pour n/N, alors c'est que, comme moi, vous rejetez la loi dp : le raisonnement que voici va vous en convaincre.

b) Une urne contient U boules; un premier tirage de N boules a fait apparaître n blanches et $N-n$ rouges; la question est de savoir quelle probabilité il convient d'attribuer à l'arrivée de 1 blanche et 2 rouges au cours de 3 nouveaux tirages, et plus généralement, à l'arrivée de m blanches et $M-m$ rouges en M nouveaux tirages.

Voici deux solutions de ce problème.

1re solution (*d'après Bachelier*). Dans le cas particulier énoncé, trois éventualités peuvent se produire, représentées respectivement par B R R, R B R et R R B. La probabilité cherchée est égale à la somme des probabilités correspondant respectivement à chacune de ces éventualités.

Éventualité B R R : avant le 1er tirage je donne la probabilité $\dfrac{n}{N}$ à l'arrivée de B et $\dfrac{N-n}{N}$ à celle de R; c'est B qui arrive; par suite, avant le 2e tirage, je donne la probabilité $\dfrac{n+1}{N+1}$ à l'arrivée de B et $\dfrac{N-n}{N+1}$ à l'arrivée de R; c'est R qui arrive; par suite enfin, avant le 3e tirage, je donne la probabilité $\dfrac{n+1}{N+2}$ à l'arrivée de B et $\dfrac{N-n+1}{N+2}$ à l'arrivée de R; c'est R qui arrive.

La probabilité à attribuer à B R R était donc égale au produit

$$\frac{n}{N} \times \frac{N-n}{N+1} \times \frac{N-n+1}{N+2}$$

Il est facile de voir :

— d'une part qu'à chacune des éventualités R B R et R R B correspondent la même probabilité;

— d'autre part que la probabilité cherchée est :

$$\frac{3\,n\,(\mathrm{N}-n)\,(\mathrm{N}-n+1)}{\mathrm{N}\,(\mathrm{N}+1)\,(\mathrm{N}+2)}$$

dans le cas particulier envisagé, et

$$\frac{\mathrm{M}\,!}{m\,!\,(\mathrm{M}-m)\,!}\times\frac{(\mathrm{N}-1)\,!}{(n-1)\,!\,(\mathrm{N}-n-1)\,!}\times\frac{(m+n-1)\,!\,(\mathrm{M}-m+\mathrm{N}-n-1)\,!}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}-1)\,!}$$

dans le cas général.

2e solution (*application de la formule de Bayes*). Soit $\varphi\,(u, \mathrm{U})$ la loi de probabilité à priori concernant la composition de l'urne caractérisée d'une façon générale par u blanches et $\mathrm{U}-u$ rouges. Le fait de connaître qu'un tirage a donné n blanches et $\mathrm{N}-n$ rouges conduit à la probabilité à posteriori

$$\frac{\varphi\,(u, \mathrm{U})\cdot \mathrm{C}_u^n\,\mathrm{C}_{\mathrm{U}-u}^{\mathrm{N}-n}}{\sum_{u=n}^{\mathrm{U}-\mathrm{N}-n}\varphi\,(u, \mathrm{U})\,\mathrm{C}_u^n\,\mathrm{C}_{\mathrm{U}-u}^{\mathrm{N}-n}}$$

A partir de là, un simple raisonnement de probabilité directe donne la solution du problème général; cette solution dépend manifestement de $\varphi\,(u, \mathrm{U})$; des calculs non indiqués ici montrent que si $\varphi\,(u, \mathrm{U})$ est pris égal à $\frac{1}{\mathrm{U}}$ — ce qui exprime l'égalité des probabilités à priori de toutes les compositions possibles de l'urne — la probabilité correspondant au cas général a pour expression :

$$\frac{\mathrm{M}\,!}{m\,!\,(\mathrm{M}-m)\,!}\times\frac{(\mathrm{N}+1)\,!}{n\,!\,(\mathrm{N}-n)\,!}\times\frac{(m+n)\,!\,(\mathrm{M}-m+\mathrm{N}-n)\,!}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}+1)\,!}$$

c) Je vous donne cette formule non pas pour que vous l'appliquiez, mais seulement pour vous permettre de constater qu'elle diffère de celle à laquelle a conduit le raisonnement de Bachelier; sans doute jugez-vous, comme moi, que la concordance entre ces deux formules devrait être absolue et que $\varphi\,(u, \mathrm{U})$ doit être choisi en conséquence; dans cette optique, la valeur $\varphi\,(u, \mathrm{U}) = \frac{1}{\mathrm{U}}$ ne convient certainement pas.

Tout cela a naturellement son équivalent dans le domaine où, U étant infini, on peut raisonner comme si la proportion p variait de façon continue. Cet équivalent conduit à exclure formellement la loi de probabilité à priori correspondant à $\varphi\,(u, \mathrm{U}) = \frac{1}{\mathrm{U}}$ c'est-à-dire la loi caractérisée par $\mathrm{d}p$, c'est-à-dire encore celle retenue par tous les auteurs cités dans le tableau; elle conduit inversement à envisager favorablement la loi caractérisée par $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$ qui, elle, réalise la concordance voulue.

·29. Considération « Borel »

Mon propos n'est pas d'exposer ici les arguments qui peuvent être avancés en faveur de cette loi $\frac{\mathrm{d}p}{p\,(1-p)}$, que Lhoste, en 1923, avait trouvée à la suite de considérations mathématiques très pertinentes. Mon propos n'est pas non plus de développer quelques conséquences théoriques de sa forme inhabituelle : le fait que $\int_0^1 \frac{dp}{p(1-p)}$ est infiniment grand a de quoi choquer et force à considérer cette loi comme virtuelle.

Je juge que c'est là une circonstance heureuse : chaque fois que, ne connaissant rien à priori on adopte une loi réelle, on est conduit à un illogisme certain : accepter dans ce cas exactement les mêmes conclusions que si l'on avait eu une connaissance très précise et très particulière, à savoir : la connaissance qui admet la loi réelle adoptée comme modèle mathématique. Voilà qui joue en particulier contre la loi dp, loi réelle, et en faveur de la loi $\frac{dp}{p(1-p)}$ loi virtuelle. Cette dernière loi a aussi pour elle d'être la loi limite d'une famille de lois réelles.

Émile Borel n'a pu admettre la notion de loi virtuelle; mais j'estime que c'est rendre hommage à sa mémoire que de citer le texte dont il a assorti la présentation à l'Académie des Sciences (1949) de deux notes, l'une de notre ancien président E. Baticle, l'autre de moi, où il était question d'une loi de probabilité à priori en tous points semblable à celle en cause ici. C'est par la lecture de ce texte que je termine mon exposé :

« Je n'ai pas cru devoir refuser de présenter ces notes car je suis d'avis que la liberté d'opinion est une condition nécessaire des progrès de la science; en fait bien des progrès importants ont été réalisés grâce à des hypothèses qui pouvaient paraître comme absurdes et même contradictoires.

Je tiens cependant à dire que, en ce qui me concerne, je reste fidèle à la formule de Bayes et à sa démonstration classique. Cette démonstration exige que la fonction $\varphi(p)$ qui définit la probabilité à priori satisfasse à la condition essentielle

$$\int_0^1 \varphi(p)\, dp = 1$$

Toute autre définition de la probabilité à priori ne me paraît pas acceptable. »

Maurice Dumas

DISCUSSION

M. Morice. — Avant de remercier M. Dumas de son très intéressant exposé, je voudrais rappeler qu'il a été l'un des premier en France à vouloir intéresser les ingénieurs au rôle des méthodes statistiques dans les épreuves de « recette », basées sur un jugement sur échantillon.

Divers articles publiés de 1925 à 1948, le conduisirent en 1949-50 à présenter en cinq fascicules successifs du Mémorial de l'Artillerie française, un important ouvrage sur les « Méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles » (en collaboration avec notre collègue P. Maheu), ouvrage très théorique, suivi en 1950 d'un exposé plus simple dans « Principes de l'application des méthodes statistiques à la production et à la recherche »

Peut-être est-ce en raison de leur caractère abstrait et du souci de rigueur de l'auteur, que les travaux de M. Dumas n'ont pas eu l'impact qu'ont obtenu les travaux anglo-saxons présentés de manière très pragmatique.

Les réflexions et critiques rapidement présentées par M. Dumas, montrent que le problème de « recette » n'est pas simple et que vouloir le réduire à l'emploi de « recettes » (de cuisine), n'est pas chose facile.

L'appel aux probabilités à priori que M. Dumas, oppose, comme d'autres auteurs modernes, à diverses méthodes devenues classiques, n'est en fait que le souci bien légitime de tenir compte de l'information préalable que l'on sait (ou que l'on croit savoir) posséder sur le caractère aléatoire lié à une production : c'est un sujet fort intéressant de reflexions d'ordre théorique et pratique sur lequel M. Dumas à attiré notre attention. En votre nom, je l'en remercie.

M. Vessereau. — Parmi les nombreux points évoqués ou développés par le conférencier dans son très intéressant exposé, j'en retiendrai trois qui appellent de ma part les remarques ou précisions suivantes.

Je ne pense pas qu'il y ait une différence fondamentale entre la « méthode du maximum de vraisemblance » et la méthode de la « fonction d'efficacité ». En fait — qu'il s'agisse d'un contrôle à effectif d'échantillon fixé, ou d'un contrôle progressif — on part d'une alternative simple : la proportion de défectueux est soit p_1, soit $p_2 > p_1$; on détermine ensuite les conditions du contrôle de façon qu'à p_1 soit attaché le risque α (fournisseur) et à p_2 le risque β (client). Ces conditions étant établies, la fonction d'efficacité — probabilité d'acceptation pour une proportion quelconque p de défectueux — en résulte.

Le fascicule de documentation de l'AFNOR, « Contrôle de réception », expose les principes classiques du contrôle, puis donne une description détaillée des tables d'échantillonnage américaines (qui ont été traduites en français) MIL STD 105 D et 414. Celles-ci ont été construites pour le contrôle d'une série de lots de la même fabrication; le document AFNOR montre comment, grâce aux courbes d'efficacité reproduites dans ces tables, elles peuvent aussi être utilisées pour le contrôle de lots isolés.

Le débat entre partisans et adversaires des probabilités subjectives n'est pas prêt d'être clos. Supposer que toutes les proportions p de défectueux sont à priori équiprobables est évidemment, dans un contrôle de réception, assez peu réaliste. Mais, lorsque l'effectif d'échantillon est assez grand, la loi de probabilité à posteriori de p tend à devenir indépendant des probabilités à priori que l'on peut attacher à p : M. Dumas l'a fait observer à la fin de son exposé. Cette propriété me paraît enlever une part d'intérêt à l'introduction de probabilités à priori.

M. Morice (2e intervention). — Le tirage exhaustif (non remise dans le lot des éléments observés) constitue la seule technique pratiquement utilisée : les approximations faites dans l'étude des plans d'échantillonnage (loi binomiale, loi de Poisson) sont en général valables, l'effectif de l'échantillon étant ou restant petit par rapport à celui du lot. Mais il en résulte cependant un certain risque de ne pouvoir utiliser le test progressif de Wald dans des conditions qui correspondent à ses bases théoriques. Il faut remercier M. Dumas d'avoir mis au point une méthode — numérique ou graphique comme la méthode de Wald — permettant de tenir compte du caractère exhaustif des tirages et définie, elle aussi, à partir des risques α, p_1, β, p_2.

Mais, si cette méthode permet le choix entre les hypothèses p_1 et p_2, c'est-à-dire la décision d'acceptation ou de rejet, il ne semble possible de définir à priori — à partir des seuls éléments α, p_1, β, p_2 — ni la courbe d'efficacité de l'essai, ni l'effectif moyen observé auquel il pourra donner lieu.

Ce sont cependant des éléments qui ne manquent pas d'intérêt pour les utilisateurs. Ainsi que l'a indiqué M. Dumas, il faut souhaiter que des efforts soient poursuivis dans ce sens. Si, analytiquement le problème apparaît insoluble, il semble que les moyens modernes de calcul, appliqués à une méthode se simulation devraient en permettre l'approche.

Permettez moi, pour terminer, de souligner l'importance et le succès des efforts accomplis par M. Dumas, au cours de toute sa carrière scientifique et technique, en faveur du développement de l'emploi des méthodes statistiques dans l'industrie.

M. Yves Lagaüzeire pose la question suivante :

« L'ordre et les intervalles des prélèvements effectués sur des produits fabriqués en série ont-ils une influence sur les résultats (l'interprétation) des épreuves de réception? »

M. Vessereau (2e intervention). — 1° A propos du test progressif de Wald, M. Dumas cite l'exemple des conditions :

$$p_1 = 0{,}01 \qquad p_2 = 0{,}05 \qquad \alpha = \beta = 0{,}05$$

qui entraînent, pour l'effectif du lot, une valeur minimale $N = 2\,160$. Cette valeur élevée résulte de deux exigences.

Il ne faut pas tronquer le test trop tôt, afin de ne pas modifier de façon importante les risques choisis, ce qui entraîne la condition : effectif d'échantillon $n \geqslant 216$.

La condition pratique de non exhaustivité $\frac{n}{N} \leqslant 0{,}10$ doit être respectée, ce qui entraîne $N \geqslant 2\,160$.

Je ferai remarquer que cette restriction sur l'importance du lot n'est pas liée essentiellement au fait qu'on adopte un test progressif, mais à ce que les conditions posées (p_1, p_2, α, β) sont très sévères. En échantillonnage classique, on doit avoir pour l'effectif du lot un minimum du même ordre de grandeur (vérification faite après la réunion, la condition est $N \geqslant 1\,900$).

2° Je préciserai, à l'intention de la majorité des auditeurs (MM. Dumas, Morice et moi-même connaissons bien la question, pour avoir participé aux travaux de la Commission des Méthodes Statistiques de l'AFNOR) les conditions dans lesquelles ont été préparés les fascicules de documentation AFNOR publiés en 1967.

On s'est d'abord préoccupé de rédiger un fascicule général sur le contrôle statistique de réception.

En cours de rédaction, on décida de traduire les normes MIL STD 105 D (contrôle par attributs) et MIL STD 414 (contrôle par mesures), les plans d'échantillonnage qu'elles contiennent étant d'emploi très courant dans l'industrie.

On s'est alors aperçu qu'il serait utile d'inclure dans le fascicule général un chapitre de commentaires sur les tables MIL STD, afin d'éviter les erreurs d'interprétation possibles lors de leur emploi (notamment dans le cas de lots isolés). Le fascicule ne recommande pas l'emploi des MIL STD : il les cite et les commente.

3° Lorsque la condition de non-exhaustivité est réalisée, l'utilisateur peut, à l'aide des tables de la loi binomiale, définir un plan d'échantillonnage satisfaisant à des conditions posées à priori sur les valeurs p_1, p_2, α et β.

Il pourra aussi, généralement, trouver un plan satisfaisant à des conditions voisines, à l'aide des courbes d'efficacité (il y en a plus de 140) données dans les MIL STD 105 D. Doit-on être très exigeant sur le respect des valeurs exactes choisies pour les risques α et β? Ces risques ont une signification concrète dans le cas d'une longue série de lots : ce sera la proportion des lots de la qualité p_1 qui sera refusée et la proportion des lots de la qualité p_2 qui sera acceptée. Mais dans le cas d'un lot isolé, leur signification en terme de probabilité est moins évidente.

Réponse de M. M. Dumas. — Les observations faites, à la fin de la réunion du 18 décembre 1968 et à la fin de celle du 16 avril 1969, par ses éminents collègues sont pour lui l'occasion de marquer son accord d'ensemble sur le fond de chacune d'elles et aussi de mettre l'accent sur quelques points, complétant heureusement son exposé. Ainsi :

— Il ne convient certes pas d'être très exigeant sur les valeurs à retenir pour p_1, p_2, α et β ; ces valeurs sont intéressantes plus en ordre de grandeur que comme valeurs rigoureuses, ce qui, soit dit en passant, diminue quelque peu l'intérêt pratique du reproche que l'on peut faire à l'épreuve séquentielle exhaustive de ne pas être encore arrivée au point où l'on sait tracer sa courbe d'efficacité.

— En cas de lot isolé, la notion de risque, interprétée par la proportion des lots de telle qualité, réjetés ou acceptés, est de peu d'intérêt; par contre une signification concrète peut être donnée à la quantité $1-\beta$ associée à la qualité p_2 considérée par le client comme frontière entre lots bons et lots mauvais : $1-\beta$ est la probabilité minimale que du fait de l'épreuve, le client a de rejeter tout lot mauvais.

— Les théories tenant compte de l'exhaustivité des prélèvements sont seules à offrir cet intérêt primordial de pouvoir être appliquées même à des lots de faible effectif.

— Les théories statistiques évoquées dans l'exposé reposent toutes sur ce que les prélèvements ont lieu au hasard et non pas suivant des règles fixées à l'avance; encore faut-il que le lot présenté en réception soit digne d'être jugé d'après un prélèvement effectué au hasard; il faut pour cela que le lot soit composé d'éléments que, techniquement, l'on ne sache pas distinguer les uns des autres; si quelque constatation donne à penser qu'il n'en est pas ou qu'il n'en est plus ainsi, alors le producteur doit entreprendre l'étude technique correspondante et des dispositions particulièrement rigoureuses doivent être appliquées jusqu'à ce que l'étude en cause ait abouti et que ses résultats se soient traduits dans les faits; quoi qu'il en soit, en cas de lot « digne », l'ordre des prélèvements est sans importance.

— S'il est vrai que dans le cas général, les résultats atteints avec deux lois de probabilité à priori différentes, concordent de plus en plus entre eux lorsque N croît, il y a par contre un cas particulier important à considérer : si N tirages n'ont fait apparaître que des boules blanches, l'interprétation est fondamentalement différente — même lorsque N est grand — suivant que l'on adopte comme loi de probabilité à priori celle considérée au n° 27 ou toute autre.

BIBLIOGRAPHIE

Nos

ABC STD 105 : Voir JAN STD 105

AFNOR (juin 1967) : Fascicules de documentation 2, 3, 7, 8, 13, 16, 17
X 06-021 : *Contrôle statistique de réception;*
X 06-022 : *Règles et tables d'échantillonnage pour les contrôles par attributs et par décompte du nombre des défauts;*
X 06-023 : *Règles et tables d'échantillonnage pour les contrôles par mesures des pourcentages de défectueux.*

Bachelier L. (1912) : *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars 28

BARNARD G. A. (1946) : *Sequential Tests in Industrial Statistics*, Royal Statistical Society 7, 9

BATICLE E. (1949) : *Sur une loi de probabilité à priori pour l'interprétation des tirages dans une urne*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 228 29

BAYES T. (1671-1746; édition posthume, 1763) : *An Essay towards Solving a Pròblem in the Doctrine of Chances.* Philosophical Transactions, vol. I-iii . . . . 25 et suivantes

BOREL E. (1949) : *Note*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 228, p. 906 29

BOUZITAT J. (1947) : *Note sur un problème de sondage*, O. N. E. R. A., Pub. n° 1 . 25

CAMPBELL G. A. (1923) : *Probability Curves Showing Poisson's Exponential Summation*, Bell System Technical Journal, vol. 2, n° 1 18

CAVÉ R. (1953) : *Le contrôle statistique des fabrications*, Eyrolles (1re éd.) 15, 18

COGGINS P. P. (1928) : *Some General Results of Elementary Theory for Engineering Use*, Bell System Technical Journal, vol. 7, n° 1. 25

COWEL R. P. (1924) : voir MOLINA (1924).

DODGE H. F. (1943) : *A Sampling Inspection Plan for Continuous Production*, The Annals of Mathematical Statistics, vol. 4, septembre 17

(1949) : voir MOLINA (1949)

DODGE H. F. et ROMIG H. G. (1929) : *A Method of Sampling Inspection*, Bell System Technical Journal, vol. 8, n° 4. *N. B.* Ce mémoire qui contient des graphiques mais pas de tables, a été incorporé dans :

(1944) : *Sampling Inspection Tables*, John Wiley and Sons, et dans les rééditions de cet ouvrage 3, 12, 17, 18, 21, 25

DUMAS M. (1925) : *Sur une interprétation des conditions de recette*, Mémorial de l'Artillerie française, 2e fasc. *N. B.* Ce mémoire a, par exception, été incorporé dans : *Quelques travaux commentés par leur auteur*, Mémorial de l'Artillerie française, 1957, 2e fasc. 17, 18, 24

(1949) : *Interprétations de résultats de tirages exhaustifs*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 228 29

(1952) : *L'interprétation des séries de résultats blancs et noirs*, Mémorial de l'Artillerie française, 3e fasc. 17

(1953) : *Épreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 237 et 238. Sur le même sujet : *L'épreuve séquentielle exhaustive*, Revue de Statistique appliquée. 1969, vol. XVII-n° 1. 9

(1955) : *Les épreuves sur échantillon*, Centre national de la Recherche scientifique 6, 20, 25

ESTIENNE J. E. (1903) : *Essai sur l'art de conjecturer*, Revue d'Artillerie, t. 61 et 62, Berger-Levrault. *N. B.* Ce mémoire a été incorporé dans « Loisirs d'Artilleur » (1906), Berger-Levrault 24, 26

EYRAUD H. (1947) : voir FRÉCHET (1947) et. 25

DE FINETTI B. (1947) : voir FRÉCHET (1947) et. 25, 26

FRÉCHET M. (1947) : *Estimation statistique des paramètres*, Rapport à l'Institut international de Statistique, Congrès de Washington, suivi des réponses à l'enquête, émanant de MM. : 1. R. von Mises; 2. R. Fortet; 3. Bruno de Finetti; 4. Henri Eyraud; 5. Maurice Dumas; 6. M. S. Bartlett; 7. J. Neyman; 8. Georges Darmois; 9. L. H. C. Tippett; 10. Maurice Kendall; 11. R. C. Geary; 12. Lucien Féraud; 13. Oskar Anderson; 14. J. B. D. Derksen; 15. Charles Jordan; 16. Harold Cramér 25, 27

GRANT E. L. (1952) : *Statistical Quality Control*, McGraw-Hill, 2e éd. 16, 17

GRANT E. L. et G. J. LIEBERMAN (1955) : *The Problem of the Isolated Lot*, Rapport technique n° 9 pour l'Office of Naval Research 15, 21, 22

GRODSKI G. (1928-1929-1930) : *Établissement rationnel de conditions techniques pour la recette d'objets fabriqués en grande série* (en russe), Guerre et Technique 18, 24

GROUCHKO D. (1965) : Voir HANSEL G. (1965).

HAMAKER H. C. (1949) : *Some Notes on Lot by Lot Inspection by Attributs*, Institut international de Statistique, Congrès de Berne. *N. B.* Ce mémoire a été publié non dans les C. R. du Congrès, mais dans la Revue de l'Institut international de Statistique (1950), vol. 18, n° 3/4 . . . . 15, 19, 21

(1949) : *Lot Inspection by Sampling*, Philipps Technical Review, vol. 11 . 15, 19, 21

(1960) : *Le contrôle qualitatif sur échantillon*, Revue de Statistique appliquée, vol. VIII 12, 16

HANSEL G. et GROUCHKO D. (1965) : *Prévision séquentielle par la méthode de Bayes*, Revue de Statistique appliquée, vol. XIII 25

HAZARD (vers 1918). Mémoire confidentiel 18

JAN STD 105 (1949), devenu, après retouches diverses MIL STD 105 D et ABC STD 105. *N. B.* Traduction incorporée dans le fascicule de documentation AFNOR X 06-022 . . . . 2, 8, 16, 19, 21

LAPLACE P. S. (1812) : *Théorie analytique des probabilités* 25

LHOSTE E. (1923) : *Le calcul des probabilités appliqué à l'Artillerie*, Mémorial de l'Artillerie française 29

LIEBERMAN G. J. (1955) : Voir GRANT E. L. (1955).

MIL STD 105 D : Voir JAN STD 105.

VON MISES R. (1947) : Voir FRÉCHET (1947) et 26

MOLINA E. C. (1913) : *Computation Formula for the Problem of an Event Happening at least C Times in N Trials*, American Mathematical Monthly, juin . . . 18

(1924) : *A formula for the Solution of Some Problems of Sampling*, Congrès international des Mathématiciens à Toronto 25

(1949) : *Poisson's Exponential Binomial Limit*, Van Nostrand Cy, 5e édit. *N. B.* Cet ouvrage contient une sorte d'introduction de H. F. DODGE . . . 18

MOLINA E. C. et R. P. COWEL (1924) : *Deviations of Random Samples*, Bell System Technical Journal, vol. 3, n° 1 18

MOLINA E. C. et R. L. WILKINSON (1929) : *The Frequency Distribution of the Unknown Mean of a Sample Universe*, Bell System Technical Journal, vol. 8, n° 4 . . 25

MOTHES J. (1952) : *Techniques modernes de contrôle des fabrications*, tome I, Dunod 18

(1962) : *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise*, Dunod 17, 18

NEYMAN J. et E. S. PEARSON (1928) : *On the Use and Interpretation of Certain Tests Criteria*, Biometrika XX A, Parts I-II 25

(1936) : Statistical Research Memoirs, University College, Londres . . 4, 13, 14, 16, 18, 25

PEARSON E. S. (1928 et 1936) : Voir NEYMAN J. (1928 et 1936).

ROMIG H. G. (1929) : Voir DODGE H. F. (1929).

SIMON L. E. (1945) : *An Engineer's Manual of Statistical Methods*, Chapman and Hall 24

THORNDIKE F. (1926) : *Application of Poisson's Probability Summation*, Bell System Technical Journal, vol. 5, n° 4 18

VALLERY L. (1925) : *Le calcul des probabilités appliqué au prélèvement des échantillons en matière d'expertise*, Annales des falsifications et des fraudes, décembre . . 17, 18, 20

WALD A. (1947 : publication différée) : *Sequential Analysis*, John Wiley and Sons 4, 7, 8, 10

WIADOMOSCI (1931) : En polonais, Techniczno Artyleryjskie n° 8 18

WILKINSON R. L. (1929) : Voir MOLINA. (1929).