

GEORGES BERNARD

## Stratégies optimales dans l'incertitude

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 108 (1967), p. 204-221

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1967\\_\\_108\\_\\_204\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1967__108__204_0)

© Société de statistique de Paris, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## STRATÉGIES OPTIMALES DANS L'INCERTITUDE

### Section 1 : Formulation du problème

**1.1.** Les références [1, 2, 4, 7, 8, 10, 11 et 12] et la bibliographie très fournie contenue dans ces publications exposent dans sa généralité la théorie moderne de la décision.

Dans ce qui suit l'auteur se borne à exposer quelques réflexions élémentaires qui lui sont venues à la lecture de l'article de MM. Thompson et Beranek [9]. Pour la plupart elles constituent un rappel de résultats bien connus. Le reste présente une interprétation moins fréquemment rencontrée, sinon nouvelle, des stratégies optimales en information imparfaite.

**1.2.** Nous examinons le problème de la décision optimale dans sa structure statique et discrète suivante :

- soient  $m$  actions possibles d'un agent :  $A_1, A_2, \dots, A_t, \dots, A_m$
- soient  $n$  états de la Nature ou actions possibles d'un autre agent, considéré alors et dit adversaire du premier agent :

$$N_1, N_2, \dots, N_j, \dots, N_n \quad m \geq n$$

— soit  $g_{tj}$  le gain, connu a priori, de l'agent faisant l'action  $A_t$  lorsque l'état  $N_j$  se réalise (ou l'adversaire fait l'action  $N_j$ ).

La matrice  $G \{g_{tj}\}$  est donnée.

**1.3.** La lecture de [1, 2 et 8] permet de se familiariser avec les critères pessimistes utilisables en absence de toute prévision de l'avenir, d'une prédiction de ce que « fera » la Nature ou, réellement, l'adversaire lorsqu'on fera  $A_t$  : l'information disponible se borne à la connaissance du tableau  $G$ .

On dit alors que l'avenir n'est pas probabilisable et on applique pour l'agent le raisonnement aujourd'hui classique du jeu à deux personnes à somme nulle :

Si l'agent choisit l'action  $A_t$ , la Nature (ou l'adversaire) choisira l'état  $N_j$  tel que sa « perte » soit minimum, donc la valeur de  $g_{tj}$  minimum :

$$\forall i, A_t \Rightarrow N_j : \min_j g_{tj} \quad (1)$$

L'agent choisit alors l'action optimale  $A^0$  telle que son gain soit maximum sous la contrainte (1) :

$$A^0 : \max_i / N_j : \min_j g_{ij} / \quad (2)$$

donc :

$$g_{ij}^0 \text{ maximin} = \max_i \min_j g_{ij}$$

C'est ce qu'on appelle agir suivant le critère maximin (ou minimax en cas de pertes ou coûts inscrits dans les cases de G). Il est évident qu'il existe *toujours* un résultat  $g_{ij}^0$  ainsi défini.

Dans la littérature la « stratégie »  $A^0$  est dite « stratégie pure », puisqu'elle définit un seul acte optimal, par opposition aux « stratégies mixtes » qui définissent plus d'un acte optimal. Nous écrirons « action » ou « acte » optimal pour « stratégie pure » et « stratégie » pour « stratégie mixte », dans un sens d'ailleurs un peu plus large que dans la littérature.

1.4. Si l'on agit en face de la Nature, il est absurde de penser qu'Elle puisse faire de son côté un tel raisonnement. Il est même d'un pessimisme exagéré et non fondé a priori d'admettre que la Nature « choisisse l'état  $N_j$  tel que sa « perte » soit minimum ». La notion de « perte » de la Nature n'a guère de sens ; appliquer la règle du jeu à somme nulle est peu défendable, sinon pour dire qu'en choisissant  $A^0$  on se prémunit contre la malchance la plus noire possible, que l'état de la Nature soit justement :

$$\forall i, N_j : \min_j g_{ij}$$

Bien que très peu probable, une telle situation n'est ni absurde ni impossible.

1.5. Si, par contre, il s'agit d'un conflit, d'un combat ou d'un jeu entre deux personnes disposant toutes les deux de la seule connaissance de G, par ailleurs également conscientes de leur intérêt et agissant en conséquence, dans lesquels ce que l'un gagne l'autre perd, il faut reproduire le raisonnement du paragraphe 1.3. pour l'adversaire de l'agent :

Si cet adversaire fait l'action  $N_j$ , l'agent choisira  $A_i$  telle que son gain soit maximum, la perte de l'adversaire maximum :

$$\forall j, N_j \Rightarrow A_i : \max_i g_{ij} \quad (3)$$

L'adversaire choisira donc l'action  $N^0$  telle que sa perte soit minimum sous la contrainte (3) :

$$N^0 : \min_j / A_i : \max_i g_{ij} / \quad (4)$$

donc :

$$g_{ij}^0 \text{ minimax} = \min_j \max_i g_{ij}$$

Si

$$g_{ij}^0 \text{ maximin} = g_{ij}^0 \text{ minimax},$$

la case correspondante du tableau G est appelée « col » ou « saddle point » et la stratégie pure ou action  $A^0$  pour l'agent et  $N^0$  pour l'adversaire sont optimales pour eux deux.

1.6. Si

$$g_{ij}^0 \text{ maximin} \neq g_{ij}^0 \text{ minimax}$$

il est connu que le comportement optimal de l'agent est une certaine stratégie composée d'actions  $A_i$  et le comportement optimal de son adversaire, s'il y a lieu, une stratégie composée d'actions  $N_j$ .

Le raisonnement suivant le démontre et donne en même temps la méthode de calcul des stratégies optimales.

On admet que l'espérance du gain (ou de la perte) est le critère du choix. L'agent cherche une distribution de probabilités a priori d'actions à entreprendre telle que l'espérance de son gain soit indépendante de l'état de la Nature (ou de l'action de l'adversaire) et la plus grande possible. Il agira alors suivant une stratégie définie par un dispositif de réalisation d'aléas, c'est-à-dire en choisissant les actions composant cette stratégie au moyen d'un système de paris.

La distribution de probabilités à trouver est la solution d'un système d'équations linéaires. En effet, la stratégie de l'agent consiste à transformer les actions  $A_i$  possibles, entre lesquelles il ne sait pas choisir, en un aléa  $\{A_i, p_i\}$  où  $p_i$  est la probabilité qu'il choisisse justement  $A_i$ . Si  $E(g_{ij})$  est dans ces conditions son espérance de gain, on doit avoir :

$$\max E(g_{ij}) = M = \sum_i g_{ij} p_i \quad \forall j; \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_i p_i = 1 \quad (5)$$

(5) est un système de  $n + 1$  équations ( $j = 1, \dots, n$ ) à  $m + 1$  inconnues  $p_1 \dots p_m$  et la valeur de l'espérance  $M$ .

Il est classique de rechercher sa solution par sa transformation en un programme linéaire  $m \times n$ , dont le vecteur  $p$  est l'inconnue et la matrice  $G$  la matrice caractéristique. (voir [7]).

**1.7.** S'il s'agit d'un jeu à somme nulle entre l'agent et son adversaire, le même raisonnement appliqué au comportement de ce dernier livre :

Soit  $q_j$  la probabilité a priori que l'adversaire choisisse l'action  $N_j$ . Il cherchera à rendre minimum l'espérance de sa perte, quelle que soit l'action  $A_i$  de l'agent :

$$\min E(g_{ij}) = M' = \sum_j g_{ij} q_j \quad \forall i; \quad 0 \leq q_j \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_j q_j = 1 \quad (6)$$

(6) est un système de  $m + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues :  $q_1, q_2, \dots, q_n$  et  $M'$

Sa solution est en général obtenue par sa transformation en un programme linéaire qui est le dual du programme issu de (5) (voir [7]).

Lorsqu'il y a col, ces programmes dégénèrent car les aléas  $A_i$  et  $N_j$  se concentrent en des points uniques de probabilité 1, qui déterminent le col, action optimale.

**1.8.** C'est là l'essentiel des raisonnements simples qui décrivent la démarche de von Neumann et Morgenstern dans [1].

En absence d'informations sur le comportement de l'adversaire ou de la Nature, on neutralise leur action dolosive possible en transformant son propre choix en un aléa à priori. Dans certains cas la méthode échoue; dans d'autres (existence d'un col) l'aléa dégénère en une certitude et la stratégie se transforme en une action (la stratégie mixte en stratégie pure). Si la méthode échoue et si l'on « joue » contre la Nature, on peut toujours utiliser le raisonnement maximin, qui est une action ou stratégie pure.

**1.9.** Dans certains cas le programme dual est plus facile à résoudre que le primal. On peut alors modifier légèrement le raisonnement ci-dessus et définir une action optimale en absence du col, lorsqu'on joue contre la Nature, action en général meilleure que le maximin pur. On peut d'ailleurs admettre cette solution pour d'autres raisons aussi, par exemple de simplicité de règle d'action, au lieu d'une stratégie, mais en gardant à l'esprit ce qu'elle signifie.

On résout le dual et on définit ainsi une distribution  $q$  des états de la Nature, qui est par hypothèse la plus défavorable pour l'agent, entre toutes les distributions possibles. Pour chacun de ses actes  $A_i$ , l'espérance de l'aléa  $\{g_{ij}, q_j\}$  est invariante par rapport à  $i$ ,

comme il vient d'être montré. Par hypothèse cette solution est équivalente à celle de la stratégie optimale d'un jeu de mêmes résultats avec un adversaire. Puisque la Nature ne peut pas « apprendre » la stratégie de l'agent et utiliser cette information additionnelle à son profit, comme le ferait un joueur, toute stratégie de l'agent reste optimale. Le critère maximin donne alors une indication non obligatoire de choix entre les  $m$  actions.

Certes, ce raisonnement est à la fois pessimiste et irréaliste. Il est pessimiste, car il suppose que la Nature ait « choisi » la distribution de probabilités de ses états la plus défavorable pour l'agent; il est irréaliste, car cette distribution peut être, et l'est avec une grande probabilité, différente.

Une distribution a priori d'états de la Nature est d'un caractère essentiellement extra-mathématique. C'est une quantification, qui peut se servir des mathématiques, de comportements ou d'expériences. La déduire formellement de la matrice des gains, comme il vient d'être fait, et cela de quelque manière que ce soit, est une incohérence logique, sauf évidemment dans une théorie des jeux ou des conflits. Mais alors les distributions de probabilités,  $p$  et  $q$ , sont des outils d'action et non pas des mesures d'incertitude. C'est une distinction essentielle rarement rencontrée.

**1.10.** Savage [2] propose d'utiliser les mêmes raisonnements mais en transformant la matrice des résultats  $G$  en une matrice « regrets »  $G'$ , pour l'agent, et  $G''$ , pour l'adversaire, s'il y a lieu.

Pour chaque état  $N_j$  possible, on calcule la différence entre le gain maximum et les autres gains, qui se réalisent pour toutes les autres actions possibles :

$$g'_{ij} = \max_t g_{tj} - g_{ij}$$

On admet ensuite que pour tout acte  $A_i$  l'agent recherche son regret le plus faible et la Nature ou l'adversaire son regret le plus grand :

$$\forall i, N_j : \max_j g'_{ij}$$

L'agent choisira l'action  $A_i$  telle que son regret soit sous cette contrainte le plus faible :

$$A_i^0 : \min_i / N_j : \max_j g'_{ij} / ; g_i^0 = \min_i \max_j g'_{ij}$$

Si l'agent a un adversaire, la matrice  $G$  est pour celui-ci une matrice de pertes; pour toute action  $A_i$  il va donc calculer la différence entre la perte la plus faible et les autres pertes, qui se réalisent pour tous les états  $N_j$  possibles; ce sera le regret de cet adversaire :

$$g''_{ij} = g_{ij} - \min_j g_{ij}$$

L'agent cherche à infliger à l'adversaire le regret maximum :

$$\forall j A_i : \max_i g''_{ij}$$

tandis que celui-ci choisira l'état  $N_j$  tel que son regret soit sous cette contrainte le plus faible :

$$N_j^0 : \min_j / A_i : \max_i g''_{ij} ; g_j^0 = \min_j \max_i g''_{ij}$$

Comme précédemment, si la case  $A_i^0$ ,  $N_j^0$  est unique, il y a col et la solution du jeu est une action ou stratégie pure; dans le cas contraire on peut appliquer les raisonnements de von Neumann sur les stratégies mixtes.

Le raisonnement de Savage ressort pour nous d'un problème qui est distinct du nôtre, car il consiste à savoir dans quelle mesure la matrice  $G$  représente des éléments corrects des choix. Il s'agit là de la théorie de l'utilité des valeurs certaines, tant qu'on manipule  $G$  en

dehors de toute quantification de l'incertitude; puis de l'utilité de ces valeurs, lorsqu'elles sont incertaines. Nous examinerons brièvement ce point plus loin, point qui est par ailleurs traité dans [13] et [15].

## Section 2 : L'avenir est neutre et probabilisable

**2.** Nous allons maintenant pour le principal borner notre examen à celui des actions ou stratégies optimales en face d'un ensemble d'états de la Nature indifférente, mais sur laquelle on dispose d'une information additionnelle : ces états sont distribués suivant un vecteur de probabilités donné a priori  $q (q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n)$ , quelconque et indépendant de la matrice  $G$ . Cette matrice pourra être remplacée par celle des regrets de l'agent ou, plus généralement, par celle des utilités des résultats d'une action  $A_i$  lorsque l'état  $N_j$  se produit.

**2.1.** Une action optimale (stratégie pure) strictement a priori, en absence de toute autre information additionnelle, est immédiatement définie par :

$$A^0 : \max_i E(g_{ij}) = \max_i \sum_j g_{ij} q_j \quad (7)$$

si le critère de choix est l'espérance du gain. On choisit l'action pour laquelle l'espérance de l'aléa ( $g_{ij}, q_j$ ) est la plus grande, parmi les  $m$  aléas possibles.

**2.2.** Les états de la Nature sont toujours a priori aléatoires de distribution  $q$ . A posteriori, l'un d'entre eux se produit et devient alors certain, puisque réalisé.

Nous faisons l'hypothèse, absurde, suivante : nous sommes capables de prédire parfaitement quel état  $N_j$  va se réaliser, parmi les  $n$  états possibles de l'aléa ( $N, q$ ). Sans piper le dé, nous savons qu'au prochain coup 3 va sortir, ou 6, ou 1.

Il est évident que dans ces conditions l'acte optimal  $A^0$  sera celui qui procure le gain maximum, pour chaque état  $N_j$  possible. Nous pouvons définir cet acte, puisque nous sommes capables de prédire la réalisation de l'état  $N_j$ :

$$j = j^0 \Rightarrow A_i^0 : \max_i g_{ij}^0$$

La stratégie optimale (stratégie mixte) sera donc :

$$\forall j, \text{ si } N_j \text{ arrive on fait } A_i^0 : \max_i g_{ij}$$

et la valeur de cette stratégie sera :

$$|A^0| = E(\max_i g_{ij}) = \sum_j (\max_i g_{ij} q_j) \quad (8)$$

$|A^0|$  est la stratégie de prévision parfaite. Elle est composée de  $m$  actions généralement distinctes, mais dont certaines peuvent être les mêmes que d'autres. Bien que de nature aussi limite que les stratégies mixtes neumanniennes, elle leur est opposée : c'est une stratégie de prescience, de la connaissance de l'avenir. C'est aussi une stratégie opérationnelle *a posteriori*, lorsque la décision sur  $A_i$  peut attendre la réalisation de  $N_j$ , stratégie dont la valeur est estimée a priori par l'expression (8).

Il est évident que, dans les hypothèses de l'analyse du problème, la décision de prévision parfaite est absolument optimale : il est impossible d'en définir une autre d'espérance plus grande.

**2.3.** Toutes les actions ou stratégies sont des éléments de l'ensemble des stratégies possibles, dont le nombre d'éléments est :

$$R = m^n \quad (9)$$

comme il est facile de le voir : pour chaque état  $N_j$  il y a  $m$  choix (par ligne de la matrice  $G$ ). Donc dans deux lignes il y a  $m, m$  choix, dans trois  $(m, m) \times m$  choix, etc.

Il est possible, du moins en théorie et cela d'autant plus facilement que les entiers  $m$  et  $n$  sont plus petits, d'énumérer toutes les stratégies et ensuite d'appliquer sur leur ensemble un ordre suivant un critère de préférence donné a priori. L'utilisation d'une calculatrice électronique élargit beaucoup le domaine pratique d'application d'une telle méthode d'exploration.

L'énoncé ci-dessus implique la définition générale d'une stratégie et d'un critère de préférence.

Nous proposons de dire qu'une stratégie définit un aléa a priori, compte tenu de la matrice  $G$ , et que l'utilité de cet aléa est une mesure — pour autant que l'utilité puisse l'être — dans l'espace des stratégies possibles du produit cartésien  $R$ .

**2.4.1.** Définissons par exemple une stratégie par l'énoncé :

$$\text{si l'état } N_j \text{ se produit, on fait l'action } A_i : N_j \Rightarrow A_i \quad (10)$$

En présence d'une distribution a priori des états  $N_j$ ,  $q$ , les aléas résultant de toutes les stratégies possibles ne se distinguent que par les valeurs des résultats (des cases de ma matrice  $G$ ).

On peut adopter, pour écrire ces stratégies, la notation de Chernoff et Moses [11] :

$$S(a, b, c, \dots) \quad (11)$$

où  $a, b, c, \dots = 1, 2, \dots i \dots m$  et le nombre de lettres différentes est égal à  $n$ .

Si le nombre  $i$  se trouve dans cette écriture au rang  $j$ , cela signifie que l'on entreprendra l'action  $A_i$  si l'état  $N_j$  se produit.

Puisque les utilités des aléas, comme les utilités en général, sont des fonctions monotones croissantes des valeurs et des probabilités, il est évident qu'il est immédiat de déterminer, suivant cette définition, dans l'ensemble  $R$  des stratégies, la meilleure et la pire d'entre elles.

La meilleure stratégie est celle de prévision parfaite (8), définie au § 2.2. ci-dessus et la pire est la stratégie définie de la même manière, sauf qu'à la place de  $\max_i$  on écrit  $\min_i$ . L'espérance de sa valeur est :

$$|A'^0| = \sum_j (\min_i g_{ij}) q_j \quad (12)$$

**2.4.2.** La définition (10) de stratégies n'est pas la seule possible : les stratégies mixtes de von Neumann et Morgenstern sont d'un type différent, que l'on peut interpréter ainsi :

On admet que la distribution a priori  $q$  des états de la Nature (ici des actions de l'adversaire) est la plus défavorable possible pour l'agent. La stratégie optimale de l'agent est définie comme un aléa a priori de distribution  $p$  telle que son utilité devienne indépendante des actions de l'adversaire, donc des états  $N_j$  distribués suivant  $q$ .

Admettons pour simplifier le raisonnement que l'utilité d'un aléa est l'espérance des gains. Le raisonnement de von Neumann et Morgenstern revient à un pari composé : l'utilité d'une action  $A_i$  est celle d'un aléa de  $n$  éléments  $g_{ij}$ ,  $j = 1 \dots n$ , de distribution  $q$ . L'espérance de cet aléa est un élément d'un deuxième aléa de  $m$  éléments  $A_1, A_2, \dots A_m$  de distribution  $p$ , dont l'espérance, l'utilité de la stratégie de l'agent, est la valeur du jeu, indépendante des états  $N_j$ .

L'adversaire de l'agent adoptant d'ailleurs la stratégie duale, consistant à distribuer ses actions  $N_j$  suivant une distribution a priori  $q$ , obtient une utilité du jeu, espérance d'un aléa composé, égale à celle du jeu de l'agent.

Cette interprétation des stratégies mixtes neumanniennes rend claire la raison contrai-

gnante pour laquelle ses auteurs ont adopté dans leur axiomatique de l'utilité l'axiome de l'indifférence entre les paris simples et composés :

$$U(aX_1 + (1 - a)X_2) = a U(X_1) + (1 - a) U(X_2)$$

**2.4.3.** Une troisième définition des stratégies consiste à remplacer dans (10) le membre de phrase : « si l'état  $N_j$  arrive » par « si l'on prévoit a priori que  $N_j$  va arriver » :

$$\text{prév } N_j = N_j^0 \Rightarrow A_i \quad (13)$$

Nous examinerons ces stratégies dans la section suivante. Leur classe est très importante, puisqu'elle comprend en fait tout ce que l'on définit par la recherche scientifique : c'est une démarche entre l'expérimentation, l'hypothèse constituant une prévision et la stratégie optimale découlant de cette prévision.

**2.5.** Avant d'entreprendre cet examen, il semble utile de rendre concrets, sur un exemple numérique simple, les résultats déjà obtenus.

**2.5.1.** Nous adopterons la matrice  $G$  de l'exemple 9, page 109, de [8] :

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$q$
$N_1$	3	5	2	$2/5$
$N_2$	0	6	8	$1/9$
$N_3$	4	1	3	$22/45$
$p$	$5/9$	$1/5$	$11/45$	

Les nombres portés dans ce tableau sont les gains de  $A$ , contrairement à [8].

Le critère maximin pour  $A$  conduit à adopter l'action  $A_3$  pour laquelle son gain ne peut pas être inférieur à 2, maximum des minimums des gains possibles pour les autres actions.

Le même critère, ici minimax, utilisé par  $N$ , supposé un joueur informé et intelligent, conduit à l'action (état)  $N_3$ , pour laquelle sa perte est au plus égale à 4, minimum des maxima des pertes possibles pour ses autres actions.

L'exemple ainsi choisi, exprès, pour qu'il n'y ait pas de col, il est immédiat de calculer les distributions de probabilité  $p$  et  $q$  de stratégies (mixtes) optimales du jeu :

$$\begin{aligned} 3p_1 + 5p_2 + 2p_3 = 0p_1 + 6p_2 + 8p_3 = 4p_1 + p_2 + 3p_3 & \quad \text{et } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 3q_1 + 0q_2 + 4q_3 = 5q_1 + 6q_2 + 1q_3 = 2q_1 + 8q_2 + 3q_3 & \quad \text{et } q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} p_1 = 5/9 & \quad p_2 = 1/5 & \quad p_3 = 11/45 \\ q_1 = 2/5 & \quad q_2 = 1/9 & \quad q_3 = 22/45 \end{aligned}$$

**2.5.2.** Si  $A$  et  $N$  sont deux joueurs dont l'un gagne ce que l'autre perd, la stratégie optimale de  $A$  est de tirer au sort son action dans le rapport des fréquences 25 : 9 : 11, tandis que celle de  $N$  est de tirer au sort son action dans le rapport des fréquences 18 : 5 : 22.

Dans ces conditions l'espérance du gain de  $A$  ou de perte de  $N$  sera, quelle que soit l'action de l'autre, choisie par le sort, égale à :

$$6p_2 + 8p_3 = 3q_1 + 4q_3 = 6/5 + 88/45 = (54 + 88)/45 = 142/45 = 3,156..$$

Le gain de  $A$  est alors supérieur en moyenne au gain maximin de 2, la perte de  $N$  inférieure en moyenne à la perte minimax de 4.

**2.5.3.** Si  $A$  agit en face de la Nature, en absence de toute information autre que celle du tableau des gains possibles, il est avantageux pour lui, et moins pessimiste, de remplacer l'utilisation du critère maximin par la supposition que la distribution de probabilités des états



de la Nature est a priori celle définie par le vecteur  $q$ . L'espérance de son gain devient 3,156 au lieu de la valeur maximin 2. Mais ses trois actions possibles sont alors indifférentes :

$$E/S(111)/ = E/S(222)/ = E/S(333)/ = 142/45$$

tandis que le critère maximin indique impérativement l'action  $A_3$  [stratégie S (333)].

**2.5.4.** La meilleure stratégie pour A est évidemment S (231) : si  $N_1$  arrive on fait  $A_2$ , si  $N_2$  arrive on fait  $A_3$ , si  $N_3$  arrive on fait  $A_1$ .

Son espérance a priori est égale à

$$5 \times 2/5 + 8/9 + 88/45 = (90 + 40 + 88)/45 = 218/45 = 4,85$$

La pire stratégie est S (312) dont l'espérance a priori est de  $58/45 = 1,3$ .

**2.5.5.** L'analyse ci-dessus montre donc qu'en absence de toute information autre que la connaissance de G et en absence de tout effort de prévision il y a lieu d'utiliser l'action  $A_3$  [stratégie S(333)] et on peut espérer alors un gain moyen de 3,156.

Il est absurde de penser que la Nature ait des « utilités ». Si, par contre, on remplace pour A les valeurs des gains par leurs utilités (certaines) ou encore, en suivant [15], on calcule les utilités des aléas résultant des stratégies possibles, les indications des choix changeront. Il est par exemple facile de voir que si l'utilité marginale des gains est décroissante, la stratégie S(111) (action  $A_1$ ) devient optimale.

**2.6.** Il n'y a dans la grande majorité des cas réels aucune raison suffisante pour accepter la distribution  $q$  comme celle des probabilités réelles (objectives ou subjectives) d'arrivée des états  $N_j$ . Il est même généralement possible, en vertu d'une information plus ou moins complète et certaine, de préciser une distribution à priori  $q'$ . Les choix optimaux changent alors.

Par exemple, supposons que la distribution  $q'$  soit :

$$q'_1 = 0,5 \quad q'_2 = 0,3 \quad q'_3 = 0,2$$

Les espérances des trois actions possibles deviennent :

$$\begin{aligned} A_1 = S(111) &= 1,5 + 0,8 = 2,3 & A_2 = S(222) &= 2,5 + 1,8 + 0,2 = 4,5 \\ A_3 = S(333) &= 1,0 + 2,4 + 0,6 = 4,0 \end{aligned}$$

La meilleure stratégie est indépendante de la distribution des probabilités, mais la valeur de son espérance change :

$$E/S(231)/ = 2,5 + 2,4 + 0,8 = 5,7$$

Il en est de même de la pire stratégie :

$$E/S(312)/ = 1,0 + 0,2 = 1,2$$

En prévision parfaite, la meilleure stratégie reste donc S(231); en absence de toute prévision l'action optimale devient S(222).

**2.7.** Nous pouvons répéter la même suite de raisonnements avec la matrice de regrets de A, G', et de N, G''. Elles sont facilement construites (voir paragraphe 1.10) :

G'	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	q''	G''	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
N <sub>1</sub>	2	0	3	2/5		3	4	0
N <sub>2</sub>	8	2	0	1/9		0	5	6
N <sub>3</sub>	0	3	1	22/45		4	0	1
					p''	5/9	1/5	11/45

Le critère minimax pour A conduit à adopter l'action  $A_2$  ou  $A_3$ , puisque dans ces deux choix le regret de A ne peut pas dépasser le minimum des maxima possibles de ce regret pour les trois états possibles de la Nature, minimum égal à 3.

Si la Nature est un être intelligent, elle appliquera le même critère minimax à sa matrice de regrets  $G''$ . Cela la conduira à adopter l'action (état)  $N_3$ , pour lequel son regret sera au plus de 4, minimum des maxima des regrets pour toutes les actions possibles de A, ou l'état  $N_1$ , où il en est de même.

L'exemple ayant été choisi pour qu'il n'y ait pas de col, on peut calculer les distributions de probabilités  $p''$  et  $q''$  des stratégies optimales du jeu; mais ici on doit utiliser la matrice  $G''$  pour  $p''$  et  $G'$  pour  $q''$ . Il a été démontré dans [2] que ces distributions sont les mêmes que pour  $G$  :  $p'' = p$  et  $q'' = q$ .

L'espérance du regret de A ou de N, si tous les deux adoptent la stratégie neumannienne sera égale à :

$$\begin{aligned} 4/5 + 8/9 &= (36 + 40)/45 = 76/45 = 2/9 + 66/45 = 6/5 + 22/45 = 1,69 \\ 15/9 + 4/5 &= (75 + 36)/45 = 111/45 = 1 + 66/45 = 20/9 + 11/45 = 2,47 \end{aligned}$$

Pour les deux adversaires l'espérance du regret est plus faible que sa valeur par application du critère minimax.

La meilleure stratégie pour A est celle de prévision parfaite, donc encore S(231), de regret nul (ce qui est évident) et la pire S(312), de regret maximum. L'espérance de la première est nulle, de la seconde égale à :

$$6/5 + 8/9 + 66/45 = 160/45 = 3,56$$

**2.8.** Nous avons ainsi examiné, dans notre exemple, 5 stratégies : les trois actions (111), (222), (333), la stratégie la meilleure (231) et la pire (312). Il reste

$$(3^3 = 27) - 5 = 22$$

autres stratégies, dont il est facile de dresser le tableau de définitions et de valeurs d'espérances (pour l'ensemble des 27 stratégies, espérances multipliées par 45, énumérées par ordre décroissant de leur valeur) :

Stratégie	E	Stratégie	E	Stratégie	E
231	218	213	156	132	116
221	208	321	154	212	112
233	196	232	152	122	106
223	186	123	150	313	102
131	182	111, 222,		332	98
211	178	333	142	322	88
121	172	323	132	112	76
331	164	311	124	312	58
133	160	113	120		

Un ordinateur rapide serait capable d'établir un tel tableau pour un nombre plus grand d'actions et d'états, bien que pour  $6 \times 6$  il s'agit déjà de plus de 46 000 stratégies possibles et pour  $9 \times 9$  leur nombre devient environ  $7 \times 10^8$ ...

### Section 3 : Stratégies optimales en prévision imparfaite

3. L'analyse faite montre que le problème de la stratégie optimale dans l'incertitude dépend de trois sortes de paramètres :

**3.1. La matrice des résultats  $G$ .** On en admet la parfaite détermination en ce qui concerne les gains (ou les coûts ou les pertes); mais elle peut, d'une manière aussi déterminée, être définie en regrets, formalisés par la méthode de Savage; elle peut aussi être définie en utilités, par définition subjectives, des résultats, avec toutes les difficultés et les finesses de la mesure de ces utilités. Quoi qu'il en soit, la matrice contient un minimum d'informations nécessaires pour qu'on puisse opérer un choix entre les stratégies, informations sur les grandeurs ou valeurs et sur les comportements du décideur en présence de ces valeurs.

**3.2. Le vecteur de probabilités a priori d'états de la Nature.** En absence d'informations additionnelles à celle contenue dans la matrice des résultats, ce vecteur peut être déterminé à partir de cette matrice, par le calcul de von Neumann; il est alors pessimiste. Ce calcul peut dégénérer et donner le critère d'action (de stratégie pure) du col. Une certaine information sur le comportement du décideur peut faire établir un vecteur subjectif de ces probabilités, seul compatible avec l'utilisation des utilités neumanniennes dans la matrice des résultats. En présence d'informations par exemple sur la fréquence de réalisation d'états  $N$ , on peut préférer d'utiliser un vecteur de probabilités objectives, mais il faut alors préciser d'une autre manière la mesure de l'utilité des résultats de la matrice  $G$ .

**3.3. La définition des stratégies.** Nous avons admis qu'une stratégie définit un aléa dont l'utilité permet d'établir un ordre dans l'espace des stratégies possibles. Nous avons décrit trois définitions de stratégies :

**3.3.1. La stratégie neumannienne ou du jeu,** consistant à appliquer sur le vecteur d'actions possibles une distribution de probabilités et à obtenir ainsi un aléa a priori qui constitue la stratégie. Il est souvent possible de déterminer à partir de la matrice  $G$  une distribution  $p$  définissant la stratégie optimale en présence d'un adversaire, dans un jeu à somme nulle.

La stratégie neumannienne est évidemment opérationnelle, lorsqu'elle existe, et elle n'exige pour sa définition aucune information supplémentaire à celle contenue dans la matrice  $G$ .

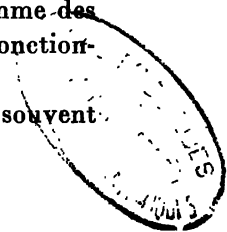
Dans le cas d'action en face de la Nature, cette stratégie est irréaliste et pessimiste.

**3.3.2. L'ensemble des stratégies définies par (10) :** Si  $N_j$  arrive on fait  $A_i$ .

Cet ensemble de stratégies n'est pas en général opérationnel, car il s'agit en fait dans la plupart des situations de décider du choix de  $A_i$  avant que l'on sache quel état  $N_j$  arrivera. Mais cet ensemble correspond à l'une des limites des possibilités et est à ce titre d'une grande utilité pour l'analyse. Il représente en effet l'espace de stratégies de prévision parfaite : en plus de l'information contenue dans la matrice  $G$  et dans la distribution a priori  $q$ , on détient le pouvoir de deviner correctement l'état futur de la Nature ou, dans des situations particulières, la possibilité d'attendre, pour décider du choix de  $A_i$ , que l'état  $N_j$  soit connu, d'agir a posteriori.

Nous avons vu que l'ordre a priori dans cet ensemble de stratégies est facile à établir; la meilleure et la pire de ces stratégies sont indépendantes de la distribution  $q$  comme des fonctions d'utilité et peuvent être définies, en absence d'informations sur ces deux fonctionnelles, sur la base de la seule matrice  $G$ .

Les décisions réelles tiennent en général compte d'autres informations, souvent



non quantifiables, en plus de celles contenues dans la matrice  $G$  et la distribution  $q$ . Il est alors utile de pouvoir raisonner sur l'ensemble des stratégies (10) et leur ordre, et non pas seulement définir la meilleure d'entre elles, donc d'utiliser non seulement la matrice  $G$  mais aussi la distribution  $q$ .

C'est en général le cas, par exemple, de décisions fondées sur des calculs de bénéfices actualisés en prévision parfaite, calculs qui interviennent dans les choix d'investissements.

**3.3.3.** La troisième définition du paragraphe 2.4.3. (13) :  $P_k =$  prévision de  $N_j \Rightarrow A_t$ .

On introduit ainsi dans le problème une information supplémentaire qui, comme la matrice  $G$  et la distribution  $q$ , possède un coût ou plus généralement une désutilité, à rapprocher, comme on doit le faire pour les deux informations précédentes, de l'utilité qu'elle procure et qui peut être quantifiée par le surcroît des valeurs des stratégies optimales définies avec son aide.

**3.4.** Nous allons aborder l'étude de cette classe de stratégies en nous inspirant de [9] et des publications citées dans la bibliographie de [9].

Faire la prévision  $P_k$  consiste à définir une distribution  $r_{kj}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , de probabilités conditionnelles de la réalisation de la prévision  $P_k$  si l'état  $N_j$  arrive :

$$\Pr(P_k/N_j) = r_{kj} \quad \sum_k r_{kj} = 1 \quad r_{kj} \geq 0 \quad (14)$$

L'information contenue dans l'ensemble de la prévision est donc formalisée par une matrice carrée  $P$  de probabilités conditionnelles :

	$P_1$	$P_2$	$\dots$	$P_k$	$\dots$	$P_n$
$N_1$	$r_{11}$	$r_{21}$	$\dots$	$r_{k1}$	$\dots$	$r_{n1}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$N_j$	$r_{1j}$	$r_{2j}$	$\dots$	$r_{kj}$	$\dots$	$r_{nj}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$N_n$	$r_{1n}$	$r_{2n}$	$\dots$	$r_{kn}$	$\dots$	$r_{nn}$

Si la prévision est parfaite, cette matrice devient unité :

$$r_{kj, k \neq j} = 0, r_{11} = r_{22} = \dots r_{jj} \dots = r_{nn} = 1.$$

C'est une matrice de Markow. Si les prévisions et les choix forment une séquence, une chaîne de Markow, en quelque sorte inversée dans le temps par rapport aux définitions usuelles, les représente. Elle ne donne pas, en effet, les probabilités conditionnelles d'arrivée dans une période  $t + 1$  de l'état  $P_k$  si l'état  $N_j$  arrive dans la période  $t$ , mais les probabilités conditionnelles de la prévision dans la période  $t$  de l'état  $P_k$  si l'état  $N_j$  arrive dans la période  $t + 1$ .

Le traitement formel de  $P$  est classique. On a suivant l'axiome de Bayes de probabilités composées et les règles du calcul de probabilités (cf. [3, 5, 6]) :

$$\Pr(P_k) = \bar{q} \times \bar{r}_k = \sum_j q_j r_{kj} \quad (15)$$

$$\Pr(P_k \cap N_j) = \Pr(P_k) \times \Pr(N_j/P_k) = \Pr(N_j) \times \Pr(P_k/N_j) = q_j r_{kj} \quad (16)$$

d'où la « probabilité des causes » :

$$\Pr(N_j/P_k) = q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj} \quad (17)$$

**3.5.** Le problème consiste en ceci :

Étant donné une stratégie  $S(a, b, \dots, i, \dots, m)$ , définie suivant (11) et (13) (§2.4.) déterminer l'aléa qu'elle représente et calculer son utilité.

On pourra procéder de l'une des deux manières suivantes :

**3.5.1.** Si  $N_j$  arrive et  $P_k$  est la prévision de probabilité  $r_{kj}$ , on choisira, suivant la stratégie  $S$ , l'action  $A_i$ . Le résultat de cette action sera  $g_{ij}$ . L'espérance de la stratégie  $S$  sera donc, pour un état  $N_j$  :

$$E(A_i) = E(S/N_j) = \sum_k g_{ij}(r_{kj}) r_{kj} \quad (18)$$

et pour tous les états  $N_j$  possibles :

$$E(S) = \sum_j q_j E(A_i) = \sum_j \sum_k g_{ij} q_j r_{kj} \quad (19)$$

L'ordre dans l'espace des stratégies sera celui de ces espérances des gains ou d'utilités.

Cette procédure exige le calcul de  $m^n (n + 1)$  espérances et la comparaison de  $m^n$  d'entre elles : il y a  $m^n$  stratégies possibles, pour chacune on calcule  $n$  espérances  $E(A_i)$  plus l'espérance de la stratégie elle-même,  $E(S)$ .

Cette méthode directe d'énumération exhaustive de stratégies possibles est donc lourde.

**3.5.2.** On peut tenter une recherche plus directe de la stratégie optimale, par une sorte de décomposition par sous-optimisation de l'espace des stratégies :

Si  $P_k$  est la prévision, la stratégie  $S$  définit l'action  $A_i$ ; le résultat est  $g_{ij}$  de probabilité conditionnelle définie par (17). L'aléa  $A_i$  possède  $n$  éléments  $g_{ij}$  ( $j = 1 \dots n$ ) et son vecteur de probabilités est (17), donc son espérance de gains est :

$$E(A_i/P_k) = \sum_j g_{ij} (q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj}) \quad (20)$$

La stratégie  $S$  définit un aléa dont les éléments sont les espérances (20), au nombre de  $n$  ( $k = 1, \dots, n$ ) et dont la distribution est définie par (15). Il s'agit donc d'un aléa composé dont l'espérance est :

$$E(S) = \sum_k \sum_j q_j r_{kj} \sum_j g_{ij} (q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj}) = \sum_k \sum_j g_{ij} q_j r_{kj}$$

c'est-à-dire, comme il se doit, l'expression (19) de la première méthode.

Mais dans ce raisonnement on peut faire une sous-optimisation intermédiaire : parmi les  $m$  espérances  $E(A_i/P_k)$  on peut choisir celle de valeur maximum :

$$A_k = \max_i E(A_i/P_k) \quad (21)$$

Utilisée dans (19),  $A_k$  permet de définir directement la stratégie optimale et de calculer son espérance.

Cette deuxième méthode est plus avantageuse, puisqu'elle ne comporte le calcul que de  $mn + 1$  espérances :  $mn$  espérances  $A_k$  ( $i = 1 \dots m; k = 1 \dots n$ ) et une espérance  $E(S/A_k)$ .

Par exemple, pour  $m = n = 4$ , on a pour la méthode directe 1 280 espérances à calculer, tandis que la méthode par décomposition donne le résultat avec 17 calculs analogues. L'économie est très importante; mais on perd évidemment de l'information qui consiste en une description complète de l'espace des stratégies possibles, par la méthode directe.

**3.5.3.** A titre d'illustration, nous appliquerons la méthode de sous-optimisation à l'exemple numérique déjà utilisé.

Rappelons auparavant que la matrice  $P$  de prévisions peut être considérée comme le résultat d'expériences sur l'espace d'états de la Nature : chacun des aléas  $P_k/N_j$  peut être considéré comme la mesure, entachée d'erreurs, de l'état  $N_j$ .

**3.6.** Soit donc donnée l'information contenue dans le tableau ci-après :

		<i>i</i>			<i>j</i>			<i>k</i>		
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$P_1$	$P_2$	$P_3$			
<i>j</i>	$N_1$	3	5	2	2/5	<i>a</i>	1- <i>a</i>	0		
	$N_2$	0	6	8	1/9	0	<i>a</i>	1- <i>a</i>		
	$N_3$	4	1	3	22/45	1- <i>a</i>	0	<i>a</i>		

On a donné une forme simple, évidemment arbitraire, à la distribution  $r_{kj}$  : la probabilité d'une prédiction correcte d'arrivée d'un état  $N_j$  est  $a$ , dont la valeur est indépendante de  $j$ ; la probabilité de prévision d'un autre état parmi les trois possibles est complémentaire, tandis que celle du troisième est nulle.

Dans ces conditions les espérances des stratégies sont des fonctions linéaires de  $a$  et l'ordre dans l'espace des stratégies peut être facilement discuté en fonction du degré de pertinence de la prévision, défini par  $a$  :

- pour  $a = 0$ , la prévision est totalement fautive,
- pour  $a = 1$ , la prévision est parfaite.

Il semble utile, à titre d'exemple d'écriture d'un programme éventuel sur machine, de développer le raisonnement :

Si  $P_1$  est la prévision et la stratégie appelle l'action  $A_1$ , cet aléa  $a$  pour espérance, suivant (20), en n'écrivant pas le dénominateur qui disparaîtra :

$$\begin{aligned} g_{11}q_1r_{11} + g_{12}q_2r_{12} + g_{13}q_3r_{13} &= 3 \cdot (2/5) \cdot a + 0 \cdot (1/9) \cdot 0 + 4 \cdot (22/45) \cdot (1 - a) \\ &= 6a/5 + 88/45 - 88a/45 = (88 - 34a)/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_2$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{21}q_1r_{11} + g_{22}q_2r_{12} + g_{23}q_3r_{13} &= 5 \cdot (2/5) \cdot a + 6 \cdot (1/9) \cdot 0 + 1 \cdot (22/45) \cdot (1 - a) \\ &= 2a + (22 - 22a)/45 = (22 + 68a)/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_3$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{31}q_1r_{11} + g_{32}q_2r_{12} + g_{33}q_3r_{13} &= 2 \cdot (2/5) \cdot a + 8 \cdot (1/9) \cdot 0 + 3 \cdot (22/45) \cdot (1 - a) \\ &= 4a/5 + (66 - 66a)/45 = (66 - 30a)/45 \end{aligned}$$

Si  $P_2$  est la prévision et la stratégie appelle l'action  $A_1$ , cet aléa  $a$  pour espérance :

$$\begin{aligned} g_{11}q_1r_{21} + g_{12}q_2r_{22} + g_{13}q_3r_{23} &= 3 \cdot (2/5) \cdot (1 - a) + 0 \cdot (1/9) \cdot a + 4 \cdot (22/45) \cdot 0 \\ &= (54 - 54a)/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_2$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{21}q_1r_{21} + g_{22}q_2r_{22} + g_{23}q_3r_{23} &= 5 \cdot (2/5) \cdot (1 - a) + 6 \cdot (1/9) \cdot a + 1 \cdot (22/45) \cdot 0 \\ &= 2(1 - a) + 2/3a = 2 - 4/3a = (90 - 60a)/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_3$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{31}q_1r_{21} + g_{32}q_2r_{22} + g_{33}q_3r_{23} &= 2 \cdot (2/5) \cdot (1 - a) + 8 \cdot (1/9) \cdot a + 3 \cdot (22/45) \cdot 0 \\ &= (36 - 36a)/45 + 40a/45 = (36 + 4a)/45 \end{aligned}$$

Si  $P_3$  est la prévision et la stratégie appelle l'action  $A_1$ , cet aléa  $a$  pour l'espérance :

$$\begin{aligned} g_{11}q_1r_{31} + g_{12}q_2r_{32} + g_{13}q_3r_{33} &= 3 \cdot (2/5) \cdot 0 + 0 \cdot (1/9) \cdot (1 - a) + 4 \cdot (22/45) \cdot a \\ &= 88a/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_2$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{21}q_1r_{31} + g_{22}q_2r_{32} + g_{23}q_3r_{33} &= 5 \cdot (2/5) \cdot 0 + 6 \cdot (1/9) \cdot (1 - a) + 1 \cdot (22/45) \cdot a \\ &= (30 - 30a + 22a)/45 = (30 - 8a)/45 \end{aligned}$$

Si la stratégie appelle l'action  $A_3$ , l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$\begin{aligned} g_{31}q_1r_{31} + g_{32}q_2r_{32} + g_{33}q_3r_{33} &= 2 \cdot (2/5) \cdot 0 + 8 \cdot (1/9) \cdot (1 - a) + 3 \cdot (22/45) \cdot a \\ &= (40 - 40a + 66a)/45 = (40 + 26a)/45 \end{aligned}$$

**3.7.** L'examen du diagramme I, où on a tracé ces 9 droites montre que :

- pour  $0 \leq a < 0,65$  la meilleure stratégie est S(1,2,3)
- pour  $0,65 < a < 0,85$  la meilleure stratégie est S(2,2,1)
- pour  $0,85 < a < 1$  la meilleure stratégie est S(2,3,1)

L'espérance de ces stratégies s'écrit immédiatement :

$$\begin{aligned} E/S(123)/ &= (88 - 34a + 90 - 60a + 40 + 26a)/45 = (218 - 68a)/45 \\ E/S(221)/ &= (22 + 68a + 90 - 60a + 88a)/45 = (112 + 96a)/45 \\ E/S(231)/ &= (22 + 68a + 36 + 4a + 88a)/45 = (58 + 160a)/45 \end{aligned}$$

Le diagramme I indique aussi les pires stratégies, qui seraient les meilleures si la matrice G spécifiait non pas des gains mais des coûts ou pertes :

- pour  $0 < a < 0,3$  la pire stratégie est S(2,3,1)
- pour  $0,3 < a < 0,45$  la pire stratégie est S(2,1,2)
- pour  $0,45 < a < 1$  la pire stratégie est S(3,1,2)

Les espérances de ces stratégies sont :

$$\begin{aligned} E/S(231)/ &= (58 + 160a)/45 \text{ (voir ci-dessus)} \\ E/S(212)/ &= (22 + 68a + 54 - 54a + 30 - 8a)/45 = (106 + 6a)/45 \\ E/S(312)/ &= (66 - 30a + 54 - 54a + 30 - 8a)/45 = (150 - 92a)/45 \end{aligned}$$

Les résultats de cette discussion peuvent de prime abord surprendre : la stratégie directement optimale S(231) (voir § 2.5.4.) ne le demeure que pour des prévisions de très haute probabilité de leur correction :  $a > 0,85$ . Pour, par exemple,  $a = 0,5$ , c'est-à-dire 50 % de chances de deviner juste ce qui va arriver, la meilleure stratégie est, dans l'exemple, S(123), et de beaucoup, puisque les deux espérances sont alors :

$$E/S(123)/ = 184/45 \text{ et } E/S(231)/ = 138/45$$

La méthode classique de comparaison d'espérances en prévisions parfaites multiples (d'hypothèses « forte », « moyenne » et « basse », par exemple) peut donc conduire, d'après les résultats de notre étude, à des conclusions fortement erronées.

**3.8.** Récapitulons les gradations des stratégies optimales possibles et de leurs valeurs espérées croissantes, illustrées par notre exemple.

**3.8.1.** Si l'on est foncièrement pessimiste et l'on suppose la malchance la plus noire de rencontrer le cas le plus défavorable de la part de la Nature, on adopte le minimax, donc on décide l'action  $A_3$ , pour laquelle le calcul maximin indique un gain d'au moins 2 unités (§ 2.5.).

**3.8.2.** Si l'on suppose la Nature non pas soumise au hasard, mais jouant contre l'agent, et que l'on adopte la distribution de probabilités d'états de la Nature la plus défavorable (18 : 5 : 22), l'espérance des gains des actions  $A_1$ ,  $A_2$  ou  $A_3$  devient égale à 3,156... Pour contre-carrer la malice de la Nature, on mélangera ces trois actions au hasard, suivant une distribution de fréquences relatives 25 : 9 : 11. Ce sera la stratégie mixte neumannienne (§ 2.5.).

**3.8.3.** Mais il est juste d'admettre dans un jeu contre la Nature qu'Elle n'est pas malicieuse. Le hasard, contre lequel on peut vouloir se prémunir, peut toutefois faire que la distribution des probabilités des états de la Nature soit celle qui correspond à Sa malice (18 : 5 : 22). Cela est peu probable et, si l'on dispose d'une information quelconque sur cette distribution, on doit l'utiliser à la place de celle résultant de la théorie des jeux à somme nulle. On pourra alors définir l'action (stratégie pure) d'espérance maximum, à choisir : l'action  $A_2$ , de valeur espérée 4,5 (§ 2.6.).

**3.8.4.** Quelle que soit cette distribution a priori d'états de la Nature, on peut, à la place d'une action, chercher une stratégie meilleure, par une prévision a priori de ce qui arrivera, prévision, prédiction ou pari.

**3.3.4.1.** Si l'on est capable de gagner à tous les coups,  $a = 1$  (§ 3.7.), la valeur espérée de la stratégie S(231) est de 4,85. On a multiplié, par cette méthode perfectionnée, mais idéale, par 2,4 le gain du maximin... Ce cas correspond à l'action a posteriori, lorsqu'on peut attendre la réalisation de l'état de la Nature pour décider du choix de l'action à entreprendre. Une telle situation est rare.

**3.3.4.2.** Assez paradoxalement à première vue, bien que tout à fait rationnellement, il serait possible, dans un autre cas idéal, d'espérer le même gain, en jouant « à qui perd gagne », cette locution étant ici tout à fait justifiée. Si l'on parie à  $a = 0$ , c'est-à-dire l'on se trompe *toujours* dans ses prévisions, et si l'on adopte la stratégie S(123), le gain espéré est encore de 4,85.

**3.3.4.3.** Dans un cas plus réel, supposons qu'on tire la prévision à pile ou face. Il y a lieu d'adopter la stratégie S(123), dont la valeur espérée sera de  $184/45 = 4,1$ . La procédure sera la suivante, comme il est facile de voir :

On lance la pièce pour prévoir  $N_1$ ; si l'on gagne, on fait l'action  $A_1$ , si l'on perd, on prévoit  $N_2$  et on fait l'action  $A_2$ .

On lance la pièce pour prévoir  $N_2$ ; si l'on gagne, on fait l'action  $A_2$ , si l'on perd, on prévoit  $N_3$  et on fait l'action  $A_3$ .

On lance la pièce pour prévoir  $N_3$ ; si l'on gagne, on fait l'action  $A_3$ , si l'on perd, on prévoit  $N_1$  et on fait l'action  $A_1$ , etc.

On a établi ainsi une sorte de stratégie mixte au sens neumannien, de résultat en moyenne meilleur que celui du jeu à somme nulle.

**3.9.** A titre d'information sur l'espace des stratégies dans notre exemple, le diagramme II présente le résultat du calcul suivant la méthode de description exhaustive (§ 3.5.1.).

#### 4.0. Conclusions

Comme dans tous les problèmes de recherche d'ordre puis de l'optimum dans des espaces dénombrables finis, la méthode exhaustive n'est possible dans notre approche que dans les cas de faible nombre de dimensions; mais une méthode de décomposition et de sous-optimisation est possible et procure une économie d'effort de calcul considérable.

On pourrait aussi, comme dans d'autres problèmes, utiliser des méthodes de simulation pour explorer l'ordre de l'espace des décisions. Nous n'avons pas abordé l'étude de telles méthodes dans notre démarche. Il semble qu'en général la nécessité ne s'en fera sentir que pour des problèmes de très grande dimension.

Georges BERNARD,

*Chargé de Recherches au C.N.R.S.*

#### RÉFÉRENCES

- [1] J. VON NEUMANN & O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1947.
- [2] L. J. SAVAGE, *The Foundations of Statistics*, Wiley & Sons, New York, 1954.
- [3] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley & Sons, New York, 1957 et 1966.



- [4] P. C. FISHBURN, *Decision and Value Theory*, Wiley & Sons, New York, 1964.
- [5] R. FORTET, *Éléments de la théorie des probabilités*, t. I, C. N. R. S., Paris, 1965.
- [6] B. ROY, *Aléas numériques et distributions de probabilités usuelles*, Dunod, Paris, 1965.
- [7] S. VAJDA, traduction J. Bouzitat, *Théorie des jeux et programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1959.
- [8] J. D. WILLIAMS, *The Compleat Strategyst*, Mc Graw-Hill Co, 1954.
- [9] H. E. THOMPSON & W. BERANEK, *The Efficient Use of an Imperfect Forecast*, *Management Science*, vol. 13, n° 3, November 1966.
- [10] J. EUGÈNE, *L'approche scientifique des problèmes de décision*, *Ol Informatique*, nos 2 à 8, 1966-1967.
- [11] H. CHERNOFF & L. E. MOSES, *Elementary Decision Theory*, J. Wiley & Sons, New York, 1959.
- [12] H. SCHNEEWEISS, *Entscheidungskriterien bei Risiko*, Lange & Springer, Berlin 1967.
- [13] G. BERNARD, *Valeur Temps et Incertitude dans l'idée de l'Utilité*, C. N. R. S., 1965 (polycopié).
- [14] G. BERNARD, *Incertain et expertise : exemple d'un problème d'investissement*, *Revue française de Recherche opérationnelle*, n° 27, février 1963.
- [15] G. BERNARD, *Sur les fonctions d'utilité*, *Revue française de Recherche opérationnelle*, n° 41, avril 1966.

Diagramme 1

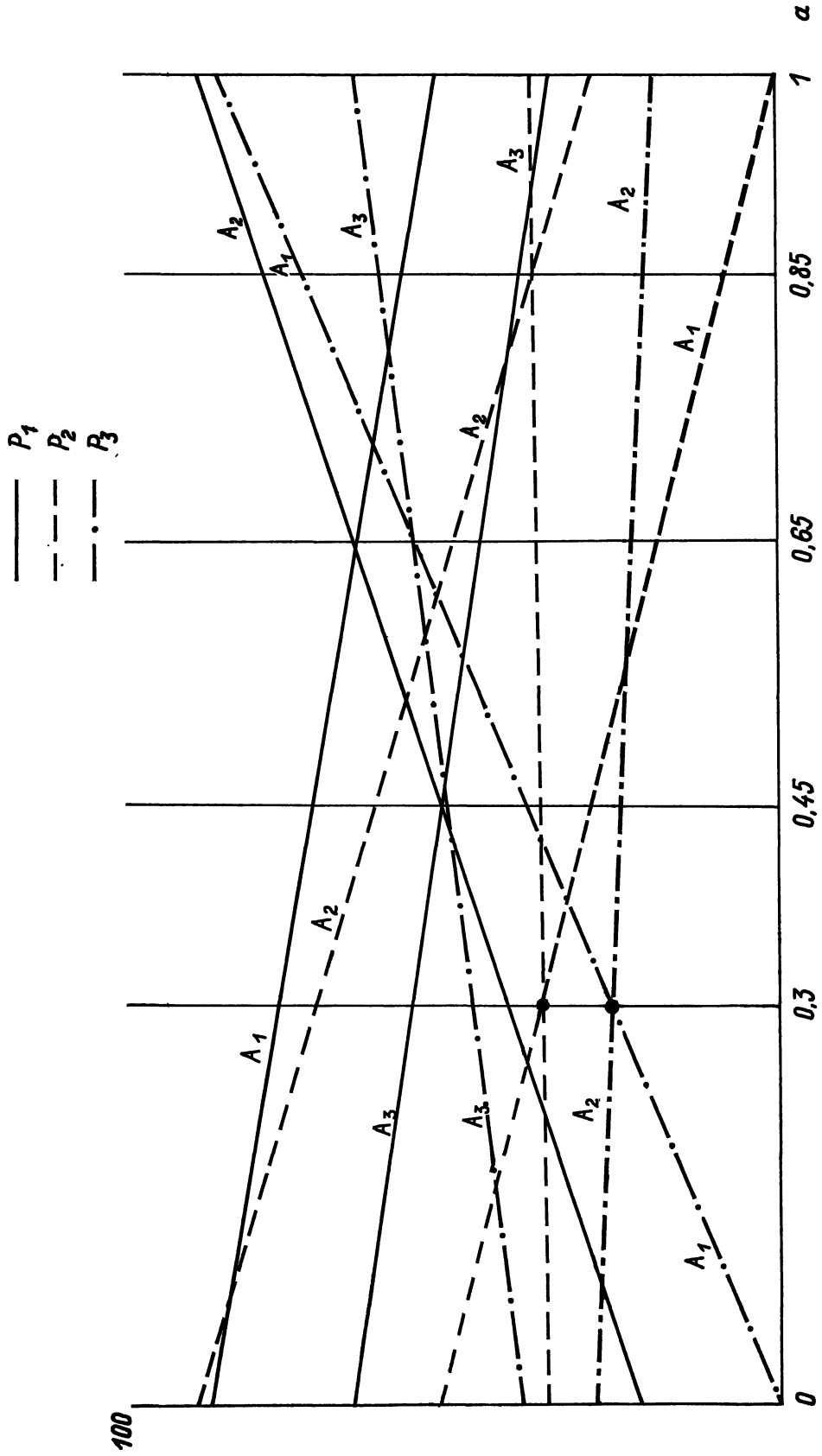


Diagramme 2

