Journal de la société statistique de Paris

Pierre Vendryès

Mathématique déterministe et mathématique de l'aléatoire

Journal de la société statistique de Paris, tome 103 (1962), p. 17-38
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1962__103__17_0>

V

MATHÉMATIQUE DÉTERMINISTE ET MATHÉMATIQUE DE L'ALÉATOIRE

Dans les processus temporels, objets d'études des sciences de la nature, on peut distinguer au moins deux variétés : les processus déterministes et les processus éventuels. Voici les définitions que l'on peut en donner :

Un processus est *déterministe* lorsqu'il est ce qu'il est et ne peut simultanément être autre que ce qu'il est. Ce caractère *d'unicité* lui est essentiel.

Un processus est *éventuel* lorsque, avant de se réaliser, il peut se réaliser de plusieurs manières simultanément possibles. Ce caractère de *multiplicité* lui est essentiel. Mais si, avant de se réaliser, un événement éventuel comporte plusieurs cas possibles, au moment de sa réalisation, un seul de ses cas possibles se réalisera, à l'exclusion de tous les autres. On exprime cette exclusion dans le temps en disant que les cas possibles sont *incompatibles* entre eux. Multiplicité et incompatibilité sont les deux caractères spécifiques de l'événement éventuel.

Un événement éventuel qui sera mathématiquement probabilisable sera dit : *aléatoire.* C'est ainsi que l'on aura l'occasion de parler d'une mathématique de l'aléatoire.

En réduisant à l'unité le nombre des cas possibles, le déterminisme peut être considéré comme un cas particulier de l'indéterminisme. Cette conception du déterminisme en tant que réducteur du nombre des cas possibles a une grande importance pour la philosophie scientifique. La multiplicité est un caractère d'indéterminisme. L'incompatibilité doit s'ajouter à la multiplicité pour qu'il y ait éventualité.

Entre deux systèmes naturels, il y aura donc lieu de distinguer deux types de *relations*, les relations déterministes, qui ne peuvent être autres que ce qu'elles sont, et les relations éventuelles, qui, avant de se réaliser, comportent de multiples cas possibles.

Or, ces deux types de relations ont été soumis à la mathématique. En particulier, il existe une mathématique de l'aléatoire, ou calcul des probabilités. Faut-il alors conclure à deux types différents de mathématiques?

Cette coupure entre mathématique déterministe et mathématique de l'aléatoire ne résulterait donc pas d'un artifice de classification arbitraire. Elle atteindrait la mathématique dans ses fondements. En effet, la mathématique étudie des relations abstraites entre des êtres abstraits. Elle réunit sous le nom *d'ensembles* les êtres qu'elle choisit comme objets d'étude. Et, en distinguant, comme je viens de le faire, deux variétés, au moins, de relations, il y aurait effectivement lieu de distinguer deux variétés de mathématiques.

Non sans raison, les mathématiciens défendent l'unité de la mathématique. Si la mathématique est une et indivisible, quelles sont les conséquences, dans l'emploi de cette mathématique, de cette dualité des relations?

I. LA MATHÉMATIQUE DÉTERMINISTE

Depuis des siècles, les mathématiciens utilisent couramment le mot déterminisme, et sous des formes variées : détermination d'une solution, valeur bien déterminée, forme indéterminée, déterminations multiples, détermination principale, déterminant, ... J'admettrai que le mot déterminisme est pris, en mathématique, et bien que la mathématique soit intemporelle, dans le même sens que celui que j'ai donné. Et je vais transcrire en langage déterministe tout un vaste domaine des mathématiques.

A. LA RELATION DÉTERMINISTE

Entre deux être abstraits, une relation est déterministe lorsqu'elle est ce qu'elle est et ne peut simultanément être autre que ce qu'elle est. Elle établit entre eux une correspondance univoque. Lorsqu'elle existe dans les deux sens, elle établit une correspondance bi-univoque.

La propriété déterministe d'une relation est première par rapport à d'autres propriétés.

Soit, par exemple, la relation de transitivité. Une relation $\mathcal{R}$, qui existe entre éléments a b c, d'un ensemble, est qualifiée de *transitive* si : $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$ *implique* que $a \mathcal{R} c$. Or, pour être transitive, une relation doit être déterministe.

En effet, d'une part, la lettre b doit désigner, dans les deux expressions $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$ un seul être. Car $a \mathcal{R} b$ et $d \mathcal{R} c$ n'implique pas que $a \mathcal{R} c$. Donc, une fois le premier b fixé, le second est déterminé. D'autre part, il faut que $\mathcal{R}$ soit déterministe. En effet, qu'il y ait relation éventuelle entre a et b, et entre b et c, n'implique pas qu'il y ait relation éventuelle entre a et c; la relation peut être déterministe entre a et c. Par contre, qu'il y ait relation déterministe entre a et b, et entre b et c, implique qu'il y ait relation déterministe entre a et c. Donc, pour qu'il y ait implication dans la définition de la transitivité, il faut que la relation $\mathcal{R}$ soit déterministe.

En conséquence, les relations qui ont, entre autres propriétés, la transitivité, sont déterministes. Par exemple, la *relation d'équivalence* et la *relation d'ordre*, qui sont, l'une et l'autre, transitives, ont comme premier caractère commun d'être déterministes. L'égalité est une relation déterministe. $a = b$ signifie que b est égal à a et ne peut être simultanément différent de a. Le symbole $a > b$ signifie que le nombre a est plus grand que le nombre b et n'est ni égal à lui, ni plus petit que lui. En pensant à l'importance qu'ont en mathématiques les relations d'ordre et d'équivalence, on voit l'intérêt de reconnaître leur caractère déterministe.

La propriété déterministe d'une relation devrait donc être analysée avant toute autre. En mathématiques, les relations ont acquis une plus grande importance que les êtres entre lesquels elles existent. La définition de la relation déterministe devrait donc être donnée au début même d'un enseignement des mathématiques.

B. L'OPÉRATION DÉTERMINANTE

Les relations existent entre deux ou plusieurs êtres définis. Les opérations, à partir d'êtres donnés, ont pour résultats de nouveaux êtres. Une fois ces nouveaux êtres obtenus, les opérations établissent, avec les anciens, des relations.

Je donnerai la définition suivante : Une opération est *déterminante* lorsqu'elle confère l'existence à un être déterminé. Celui-ci ne peut être autre qu'il est. Une opération déterminante effectue une transformation univoque.

Soit, par exemple, la définition d'une *loi de composition interne* dans un ensemble E. A tout couple (a, b) d'éléments de E, elle fait correspondre *un* élément c de E. L'opération définie par cette loi a un résultat unique. Elle est déterminante.

D'après cette définition, l'opération déterminante a une propriété supplémentaire : elle devient génératrice de l'être qu'elle détermine. Par exemple, à partir du nombre 1, on peut créer, à l'aide d'opérations déterminantes, de nouveaux nombres. En pensant à l'emploi que la mathématique fait de ces opérations pour créer ses nouveaux nombres et en y ajoutant des relations déterministes d'ordre, on voit à quel point cette mathématique est fondamentalement déterministe.

La propriété déterminante d'une opération doit être analysée en elle-même. Voici la méthode habituelle d'analyse. On suppose que l'on puisse, en effectuant l'opération sur de mêmes éléments, obtenir deux résultats différents; ensuite, on prouve que ces deux résultats sont égaux, donc qu'ils n'en font qu'un. Le résultat ne peut être autre que ce qu'il est.

Par exemple, une loi associative *détermine*, dans un ensemble qui possède un élément neutre pour cette loi, *un* symétrique pour tout élément de cet ensemble. Analysons la démonstration de ce théorème. Désignons par L la loi associative, par E l'ensemble et par e l'élément neutre de cet ensemble pour la loi. Supposons alors que la loi fasse correspondre à un élément x de E, *deux* symétriques x' et x'' distincts, ces éléments x' et x'' appartenant à E. Nous aurions :

$$x \mathrm{L} x' = x' \mathrm{L} x = e \qquad \text{et} \qquad x \mathrm{L} x'' = x'' \mathrm{L} x = e$$

Mais, comme la loi est associative,

$$x'' \mathrm{L} (x \mathrm{L} x') = (x'' \mathrm{L} x) \mathrm{L} x'$$

c'est-à-dire :

$$x'' \mathrm{L} e = e \mathrm{L} x'$$

Or,

$$x'' \mathrm{L} e = x'' \qquad \text{et} \qquad e \mathrm{L} x' = x'$$

Donc : $x'' = x'$. Donc, il y a un seul symétrique. Le résultat ne pouvant être autre que ce qu'il est, est unique. La loi est bien déterminante.

Une telle loi confère à un ensemble une structure de groupe. Cette structure est déterminée par la loi. De même, un anneau, un corps, sont des structures déterminées par des lois déterminantes. Un espace vectoriel est un ensemble muni de structures déterminées. De tels ensembles sont à la fois générés, structurés et déterminés par des opérations déterminantes.

Je vais passer en revue, à titre d'exemples simples, et en suivant leur ordre naturel, les opérations élémentaires de la Mathématique des nombres, puis de la Mathématique des variables, ou Analyse infinitésimale. Je ne ferai qu'une allusion aux opérations déterminantes entre êtres géométriques. La facilité avec laquelle les propriétés de ces opérations peuvent être transcrites en termes de déterminisme doit servir à corriger l'impression que cette transcription est tendancieuse.

C. MATHÉMATIQUE DÉTERMINANTE DES NOMBRES

1. *L'addition* est une opération déterminante. La somme de deux nombres est un nombre unique. A partir du nombre 1, elle crée tous les nombres qui constituent l'ensemble N des nombres entiers naturels. En ajoutant 1 à chacun des nombres, elle lui crée un suivant. On exprime ce fait avec la relation d'ordre que l'on impose axiomatiquement dans la définition de l'ensemble N. Cet ensemble est déterminé.

Par convention, l'addition conserve la valeur de l'unité. Que l'on ajoute 1 à 15 ou à 369 187, c'est toujours le même nombre 1 que l'on ajoute. Cette propriété rend particulièrement claire la démonstration des propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition.

Dire que l'addition est associative et que

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c = d$$

c'est dire que la somme d est le total des unités qui sont contenues dans a, dans b et dans c, et que l'on peut dissocier et associer à volonté ces unités. Cela est particulièrement clair lorsque toutes ces unités sont identiques.

Dire que l'addition est commutative et que

$$a + b = b + a$$

c'est dire que le résultat est indépendant de *l'ordre* dans lequel est effectuée l'opération. a et b sont eux-mêmes des sommes d'unités qui, toutes, sont identiques, donc interchangeables. Soit $b = 1$. Si la valeur de l'unité n'était pas toujours la même et dépendait de l'ordre, on aurait $a + 1 \neq 1 + a$; à moins d'admettre que le changement de position de l'unité par rapport à a ne rétablisse automatiquement cette égalité, en modifiant la valeur de 1 et de a.

Tout nombre entier est la somme d'unités identiques, disjointes et commutables que l'on fond, par une opération déterminante, l'addition, en un total unique, ce nombre.

2. *La soustraction*, opération réciproque de l'addition, est elle aussi déterminante. La différence de deux nombres est un nombre déterminé. Étant déterminante, cette opération a été utilisée pour créer de nouveaux nombres, les nombres négatifs. Il en est résulté une extension de l'ensemble N et la formation de l'ensemble Z des nombres entiers rationnels. Cet ensemble est symétrisé par rapport à l'élément neutre de l'addition, le zéro. Il a une structure de groupe pour l'opération d'addition. L'idée de nombre a été enrichie par celle de nombre relatif. La loi de symétrisation est déterminante. L'ensemble Z est déterminé.

3. *La multiplication* est déterminante. Le produit de deux facteurs est un nombre déterminé. Étant une addition répétée, la multiplication ne crée pas d'autres nombres que les opérations précédentes. Elle est, pour l'ensemble Z, une loi de composition interne. Elle s'ajoute à l'addition, et est distributive par rapport à elle. Ces deux lois confèrent à l'ensemble Z sa structure d'anneau. L'ensemble Z est bien déterminé.

4. *La division*, opération réciproque de la multiplication, est déterminante. Le quotient de deux termes est un nombre déterminé. Mais cette affirmation exige les commentaires suivants :

a) Lorsque le dividende est exactement divisible par le diviseur, le quotient est un nombre entier, qui fait partie de l'ensemble Z.

b) Lorsque le dividende n'est pas exactement divisible par le diviseur, le quotient n'est plus un nombre entier. Il a fallu alors utiliser la propriété déterminante de la division pour créer de nouveaux nombres, les nombres fractionnaires. Le résultat a été une extension de l'ensemble Z et la formation de l'ensemble Q des nombres rationnels. Cet ensemble est symétrisé par rapport à l'élément neutre de la multiplication, l'unité. Il a une deuxième structure de groupe, par rapport à la multiplication. Il a finalement une structure de corps. L'ensemble Q est déterminé.

On peut remarquer que si un nombre fractionnaire est déterminé, sa valeur chiffrée n'est pas toujours exactement accessible. Par exemple, on a bien : $2/5 = 0{,}4$; mais on a aussi : $4/7 = 0{,}571428\ 571428\ 5...$, les périodes 571428 se répétant indéfiniment.

c) Le troisième commentaire est encore plus important. Il y a, en effet, un cas particulier remarquable. Lorsque le dividende et le diviseur sont nuls, tous les deux, le quotient reste *indéterminé*. En effet, pour qu'un produit de deux nombres soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs le soit $0 \times q = 0$. Et cette égalité est exacte quel que soit le nombre q. Il en résulte que $0/0 = q$, cette égalité étant exacte quel que soit le nombre q. Le résultat n'est donc pas déterminé.

Voilà donc un cas où une opération déterminante, la division, n'aboutit, à cause de la nature des termes sur lesquels elle opère, qu'à un quotient indéterminé. Ce cas particulier, unique dans l'ensemble des résultats obtenus par toutes les opérations précédentes, crée une fissure dans le déterminisme mathématique.

Avant d'en terminer avec ces quatre opérations, il faut signaler leur propriété commune d'être *unidéterminantes*, le résultat de chacune d'elles s'exprimant sous la forme d'une détermination unique.

La transformation homographique

$$m = \frac{an + b}{cn + d}$$

qui met en œuvre ces quatre opérations, est la transformation algébrique la plus générale qui soit unidéterminante et fasse correspondre une seule valeur de m à une valeur de n, et une seule valeur de n à une valeur de m.

Les équations du premier degré ne font intervenir que ces quatre opérations. Elles traitent de relations de proportionnalité, qui s'expriment à l'aide de l'opération de multiplication. La résolution d'une équation du premier degré utilise donc l'opération réciproque, la division. Le résultat se présentera donc sous la forme d'un quotient, avec une détermination unique.

La théorie des systèmes d'équations du premier degré a pour principal objet de déterminer le système des solutions. Cette détermination exige deux conditions : que le nombre des équations soit égal au nombre des inconnues et que ces équations soient indépendantes entre elles. Il est significatif que ce soit à propos de cette détermination que les mathématiciens aient créé la théorie des *déterminants*. Le mot exprime le rôle fonctionnel.

5. *L'élévation aux puissances*, multiplication répétée, est, elle aussi, une opération déterminante et même unidéterminante. La puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a est un nombre c déterminé.

Cette propriété unidéterminante est utilisée dans les systèmes de numération. En numération décimale, un nombre est exprimé sous la forme de la somme de produits de puissances de 10. La propriété unidéterminante, commune à l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances, est une condition nécessaire de l'emploi de ces opérations dans les systèmes de numération.

Dans le champ d'application de l'élévation aux puissances, il faut signaler le domaine particulier des exposants pairs. En effet, les puissances d'exposant pair des nombres positifs et des nombres négatifs opposés sont les mêmes nombres. Dans ces cas, une même opération unidéterminante, appliquée à deux nombres différents, qui sont, d'ailleurs, deux nombres opposés, donne un seul résultat.

6. *L'extraction des racines*, opération réciproque de l'élévation aux puissances, est déterminante. La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre c est un nombre a déterminé. Mais cette affirmation exige les commentaires suivants :

a) Il est exceptionnel que l'extraction d'une racine ait pour résultat un nombre de l'ensemble Q. Il a fallu procéder à une extension de cet ensemble par la création des nombres irrationnels. Voilà donc, après la soustraction et la division, un troisième exemple d'opération réciproque déterminante dont la mise en œuvre a eu pour résultat la création de nouveaux nombres. L'ensemble des anciens nombres devient un sous-ensemble du nouvel ensemble.

Mais si un nombre irrationnel est bien déterminé, sa valeur n'est pas en général accessible. Compris entre deux suites infinies de nombres rationnels, il ne peut être atteint exactement, même s'il est possible de restreindre indéfiniment l'intervalle des nombres rationnels entre lesquels il se trouve.

b) L'extraction des racines d'indice pair, réciproque de l'élévation aux puissances d'exposant pair, va sembler mettre en cause le déterminisme de l'opération. En effet, la même opération, appliquée à un même nombre c, pourra donner deux résultats différents. $\sqrt[2]{(+25)}$ est aussi bien égal à $+5$ qu'à -5.

Ce cas est cependant différent de celui de la division de zéro par zéro, dont le résultat était tout à fait indéterminé. Les deux résultats d'une extraction de racine d'indice pair ne sont pas quelconques. Leur valeur absolue est déterminée. C'est leur signe qui ne l'est pas. Il faut parler, non d'indétermination, mais, comme on le fait depuis des siècles, de *double détermination*. Et on peut parler d'une opération bidéterminante.

L'exemple physique suivant permet de préciser cette idée de double détermination. La trajectoire parabolique d'un projectile coupe à deux instants différents la même altitude. Cette double détermination n'est pas de l'indétermination. La trajectoire est déterminée. Et, entre deux déterminations égales en altitude, il y a un intervalle temporel. Au contraire, dans le cas de l'événement aléatoire, c'est à un seul et même instant que l'événement se présente sous la forme de ses divers cas possibles.

c) La propriété déterminante de l'extraction des racines a été utilisée pour créer, non seulement les nombres irrationnels, mais aussi les nombres imaginaires. Toutes les racines d'indice pair des nombres négatifs sont des nombres imaginaires. Ces nouveaux nombres ont fait éclater le cadre des nombres réels. Comme le disait Euler, ils ne sont « ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien ». Leur existence leur a été conférée par une opération déterminante. Ce sont les nombres qui, multipliés par eux-mêmes, sont des nombres négatifs.

7. *Le calcul exponentiel et le calcul logarithmique* succèdent naturellement au calcul des puissances et des racines. Dans la formule

$$a^m = c$$

au lieu d'attribuer, comme dans le calcul des puissances et des racines, une valeur fixe à m, on attribue une valeur fixe à a et on lui donne le nom de base. En donnant à l'exposant m une valeur quelconque, le calcul exponentiel calcule c. Réciproquement, en donnant à c une valeur quelconque, le calcul logarithmique calcule m, logarithme de c.

Le calcul exponentiel et le calcul logarithmique utilisent, l'un et l'autre, des opérations unidéterminantes. Cela est une condition nécessaire pour l'utilisation pratique des logarithmes. La correspondance entre un nombre et son logarithme doit être bi-univoque pour que, dans les calculs courants, on puisse remplacer chaque nombre par son logarithme.

Il est exceptionnel qu'un logarithme soit un nombre compris dans l'ensemble des nombres précédemment définis. La propriété déterminante du calcul logarithmique a été utilisée pour créer de nouveaux nombres, les nombres transcendants logarithmiques, dont la valeur chiffrée n'est pas en général exactement accessible.

8. De l'ensemble des nombres transcendants logarithmiques, il est naturel de passer à l'ensemble des nombres transcendants *trigonométriques*. Entre ces deux variétés de nombres il y a une parenté, qui apparaît lorsqu'on passe du domaine réel au domaine complexe, et dont la découverte par Euler était considérée par Lagrange comme l'une des plus belles du XVIII^e siècle.

Ces nombres trigonométriques ont l'intérêt de faire discuter des relations entre périodicité et déterminisme.

Entre un arc de cercle a, d'extrémité M, et ses lignes trigonométriques, par exemple, le sinus, les relations sont déterministes. A un arc correspond, d'une seule manière possible, son sinus. Mais, à un même sinus correspondent des arcs en nombre quelconque, compris dans l'une des deux formules : $2k\pi + a$ et $(2k + 1)\pi - a$.

L'on n'a, pourtant, pas à parler d'indéterminisme. A nouveau, il faut définir des déterminations multiples, et en nombre infiniment grand. La mesure a de l'arc a une valeur bien déterminée. C'est le nombre entier k qui est quelconque; mais il est attaché à une autre grandeur, l'intervalle entre les déterminations successives. C'est le nombre des périodes.

Là encore, un exemple physique permet de préciser cette idée. Un mobile, astreint à suivre une trajectoire circulaire bien déterminée, repasse périodiquement par le même point M. Les périodes se succèdent dans le temps. Il n'y a pas indéterminisme.

Pour éviter cette multitude de déterminations, la trigonométrie choisit au besoin la détermination principale.

Dans les exemples précédents, une opération multidéterminante avait des résultats déterminés pour une part, et indéterminés pour une autre. Ces opérations multidéterminantes étaient réciproques d'opérations unidéterminantes qui, appliquées à des nombres différents, donnaient le même résultat.

9. *Les nombres complexes*, qui résultent de la composition des nombres réels et des nombres imaginaires, sont représentés, depuis la fin du XVIII^e^ siècle, par les points du plan complexe. Chaque nombre est l'affixe d'un point déterminé de ce plan.

Les opérations sur les nombres complexes sont représentées par des opérations géométriques dans ce plan. Par exemple, l'addition est représentée par une translation dans le plan, et la multiplication par l'adjonction d'une rotation et d'une homothétie. Cette correspondance entre opérations numériques et opérations géométriques révèle leur parenté profonde. Les relations entre les êtres ont plus d'importance que ces êtres eux-mêmes. La translation a les mêmes propriétés formelles que l'addition. Il existe une structure de groupe pour la translation comme pour l'addition. Dans cette correspondance formelle entre opérations géométriques et opérations numériques, il faut alors évoquer la propriété déterminante.

Une translation a un résultat déterminé. Les opérations géométriques sont aussi déterminantes que les opérations numériques. Ce caractère déterminant est la raison première de leur parenté profonde.

Cette remarque peut faire l'objet d'une généralisation hardie. Le concept d'espace lui-même est en cause. L'idée d'espace exige celle de topologie, dans la définition de laquelle intervient la relation d'ordre, qui est déterministe. Par exemple, on appelle intervalle ouvert $[\alpha, \beta]$ sur l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des éléments x de R tels que $\alpha < x < \beta$. Il vaudrait mieux donner la définition suivante : un espace est un ensemble de points entre lesquels les relations sont déterministes. Un espace sert de transmetteur de relations déterministes. Définir un espace comme un ensemble muni d'une topologie est une tautologie. C'est définir l'idée d'espace à l'aide d'une idée qui contient déjà en elle-même l'essentiel de ce que contient l'idée d'espace.

Pour construire un espace à partir d'un point, il faut convenir de la variété de l'opération déterminante qui permettra de déterminer un autre point. Si, par rapport à un point donné, tout autre point pouvait avoir de multiples positions simultanément possibles, il serait impossible de concevoir un espace. Par conséquent, il sera logique, lorsqu'on aura à sortir de la mathématique déterministe, de penser sans espace.

Pendant des siècles, l'humanité a cru à l'existence d'un espace unique. Depuis le début du XIX^e^ siècle, elle a conçu l'existence d'une infinité d'espaces possibles. Il lui reste à penser le néant, sans aucun espace. Faisant abstraction de ses notions de ligne, voisinage, distance, intervalle, espace métrique, espace vectoriel, ..., le mathématicien doit accepter de sentir le sol disparaître alors sous ses pieds.

D. MATHÉMATIQUE DÉTERMINANTE DES VARIABLES

La mathématique des variables n'a pas pour objets d'autres grandeurs que la mathématique des nombres. Mais la perspective n'est pas la même. Les nombres sont des grandeurs fixes, qui ont des valeurs différentes. En complétant ses ensembles numériques, la mathématique des nombres a montré que deux nombres peuvent différer aussi peu qu'on le désire. Mais, au lieu de considérer des grandeurs différentes, il est possible d'admettre qu'il s'agit d'une seule grandeur qui, en variant, peut prendre successivement toutes ces valeurs différentes. Une telle grandeur devient une variable.

Les relations entre variables ont fait définir l'idée déterministe de fonction. Rappelons la définition que Riemann a donnée de la fonction : « y est fonction de x si, à chaque valeur de x, correspond une valeur de y bien déterminée, quel que soit le procédé qui a permis d'établir cette correspondance ». Dans une telle définition, la détermination de y est l'idée essentielle, puisque, en lui-même, le procédé de détermination n'a pas d'importance.

Les opérations, dérivation et intégration, qui ont été définies entre fonctions, sont-elles déterminantes?

Je vais montrer que les créateurs de la *dérivation* ont eu à résoudre un problème d'indéterminisme.

1. La dérivation doit être une opération déterminante.

En effet, à partir d'une fonction primitive donnée, on peut concevoir l'existence d'une fonction dérivée bien déterminée. La pente de la tangente à une courbe est, elle aussi, une grandeur variable; et ses variations sont liées aux variations de la courbe. Entre les deux fonctions, la primitive, qui est représentée par la courbe, et la dérivée, qui est mesurée par la pente de la tangente en chaque point, doit, par conséquent, exister une relation déterministe. Il s'agit donc de définir une opération déterminante, la dérivation, qui, à partir d'une fonction primitive donnée, permette de déterminer point par point la fonction dérivée.

2. Or, au moment même où l'on veut définir cette opération déterminante, on se trouve en plein indéterminisme.

Soit M l'un des points de la courbe. Il s'agit de déterminer la pente de la tangente à la courbe en ce point. Or, un point ne suffit pas, à lui seul, pour déterminer une droite. Il faut une deuxième donnée déterminante. Par le point M peuvent passer une infinité de droites. Nous sommes bien en plein indéterminisme.

Cet indéterminisme est une difficulté cachée. Les exposés de calcul différentiel ne l'exposent pas dans toute sa clarté.

Il se ramène à celui du quotient 0/0 en mathématique des nombres. Choisissons un deuxième point R sur la courbe, et traçons la sécante qui passe par M et R. La direction de la sécante est déterminée par ces deux points. Et sa pente est déterminée par le rapport $\Delta y / \Delta x$ des deux diffé-

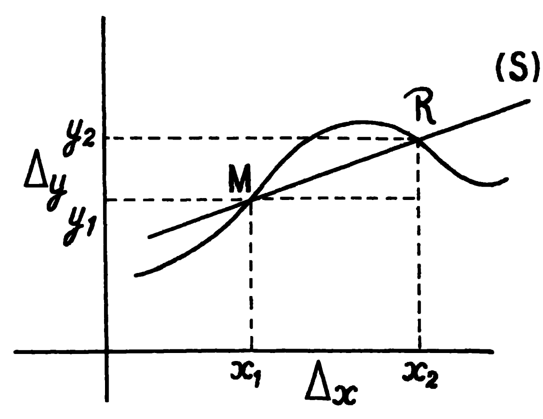

FIG. 1.

rences $\Delta y = y_2 - y_1 =$ PR et $\Delta x = x_2 - x_1 =$ MP. Nous transformerons la sécante en la tangente au point M en faisant glisser le point R jusqu'au point M. Mais alors les segments PR et MP seront l'un et l'autre annulés. Et le rapport PR/MP sera égal à 0/0. La sécante, dont la direction est bien déterminée, perd ce déterminisme au moment même où elle devient tangente.

Pour créer la dérivation, il a fallu triompher de cet indéterminisme.

3. Le raisonnement suivant, du Cours de Mathématiques générales de H. Bouasse, met en évidence le principe de la méthode à suivre.

Soit un cercle de centre O, et un point A de la circonférence. La droite OA est déterminée par les points O et A. La tangente (T) à la circonférence au point A est déterminée par les deux conditions de passer par le point A et d'être perpendiculaire au rayon OA.

Soit B un point quelconque de la circonférence. Les points A et B déterminent la sécante (S). Le rayon OB permet enfin de déterminer le triangle isocèle OAB. Entre les trois angles de ce triangle, existe la relation :

$$\alpha + 2\,\beta = 2 \text{ angles droits}$$

Cette relation est valable pour tout triangle OAB, le point B pouvant être situé n'importe où sur la circonférence. Elle est exacte quelle que soit la valeur de l'angle α et celle des angles β par conséquent. Nous pouvons déplacer le point B sur la circonférence. La relation persiste toujours.

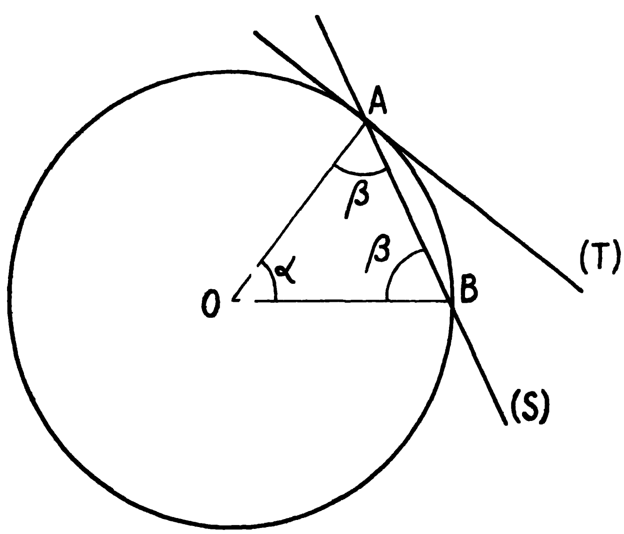

Fig. 2.

Amenons alors le point B en coïncidence avec le point A. L'angle α s'annule. Et la relation devient : $2\beta + 0 = 2$ angles droits, c'est-à-dire : $\beta = 1$ angle droit. La sécante (S), devenue perpendiculaire en A au rayon OA, est devenue la tangente (T).

Or, en disant cela, nous admettons ce fait essentiel que la relation, énoncée entre les angles du triangle OAB, persiste, non seulement quelle que soit la distance entre A et B, mais alors même que cette distance s'est annulée et que le triangle a disparu.

Voilà le principe de la méthode qui était nécessaire pour sortir de l'impasse indéterministe. L'essentiel du raisonnement précédent est de conclure à la persistance d'une relation entre les parties d'un être abstrait, alors même que cet être disparaît, par résorption.

4. Appliquons cette méthode à la dérivation. Pour déterminer la tangente en un point M d'une courbe, nous avons une première donnée déterminante, la position même de ce point. Cherchons une deuxième relation déterminante à partir du rapport PR/PM $= \Delta y/\Delta x$ lui-même. Ce rapport est égal à 0/0. Cherchons donc à ce rapport une valeur qui persiste alors même que Δx et Δy s'annulent.

Zéro est élément neutre pour l'addition. $a + 0 = a$. Et le facteur zéro annule un produit. $b \times 0 = 0$. Dans le cas où nous pourrions présenter le rapport $\Delta y/\Delta x$ sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a + b\,\Delta x$$

nous devrions, en voulant annuler Δx, donc Δy, obtenir :

$$\frac{0}{0} = a + 0 = a$$

Et la relation, valable quelle que soit la valeur de Δx, persisterait alors même que Δx et Δy seraient annulés. Le rapport $\Delta y/\Delta x$, loin de s'indéterminer, prendrait une valeur déterminée a.

5. Mais, d'un autre côté, les mathématiciens ne pouvaient accepter un tel emploi de ce rapport 0/0.

Et alors, ne pouvant ni accepter que la somme $a + b\,\Delta x$ soit égale à a, sans que Δx soit égal à zéro, ni que, lorsque ce Δx est égal à zéro, le rapport $\Delta y/\Delta x$ devienne indéterminé sous la forme 0/0, ils décidèrent que ce Δx, qui devait être nul sans pouvoir s'annuler, serait une quantité variable tendant vers zéro. Elle différerait de zéro juste de ce qu'il faudrait pour ne pas s'anéantir.

Δy variant en même temps que Δx, ces deux différences ont zéro pour limite.

La dérivée en un point est alors définie par la valeur limite vers laquelle tend le quotient $\Delta y/\Delta x$ lorsque Δx tend vers zéro.

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{lorsque } \Delta x \text{ tend vers zéro.}$$

La difficulté profonde de la dérivation reste cachée dans un tel énoncé, un peu énigmatique. Elle n'apparaît que lorsqu'on cherche systématiquement le pouvoir déterminant de la dérivation. Les mathématiciens eurent à hésiter entre l'indéterminisme de 0/0, s'ils annulaient Δx, et l'imprécision de $a + b \cdot \Delta x = a$, s'ils ne l'annulaient pas. Ils tournèrent la difficulté en rendant Δx aussi voisin de zéro qu'on pouvait le désirer pour la précision, mais sans l'annuler en raison de l'indéterminisme.

6. La question suivante mériterait d'être discutée. Le déterminisme de la dérivation n'est-il pas la raison de la propriété suivante : Une fonction qui a une dérivée finie pour une valeur c de la variable x, est *continue* pour cette valeur c?

Il semble que la définition de la continuité exige celle de déterminisme et qu'une discontinuité puisse créer une rupture de déterminisme. A une même valeur de la variable, peuvent alors correspondre une infinité de valeurs simultanément possibles de la fonction. Pour une valeur de la variable, on peut avoir à parler de déterminisme à droite et de déterminisme à gauche de la fonction.

Les relations entre le déterminisme et la continuité sont difficiles à analyser. Pour qu'il y ait continuité, le déterminisme semble nécessaire. Pour qu'il y ait indéterminisme, il faut qu'il y ait discontinuité. Pour qu'entre deux ensembles les relations soient indéterministes, il est nécessaire que ces ensembles soient disjoints. Mais la difficulté se trouve dans les relations entre discontinuité et déterminisme.

A propos de *l'intégration*, je ferai seulement les trois remarques suivantes.

1. Avec l'intégration, les mathématiciens ont voulu définir une opération déterminante. Celle-ci doit avoir, abstraction faite de la constante arbitraire, un résultat déterminé, l'intégrale. On déclare même qu'une intégrale définie *n'a pas de sens* lorsque le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ ne représente pas une quantité déterminée.

2. L'intégration donne l'occasion d'évoquer un cas d'indéterminisme de la mathématique des nombres, différent du cas particulier du rapport 0/0, auquel se ramène celui de 0^0, puisque $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0}{0}\cdot$ En effet, il y a aussi le cas des séries numériques qui sont, non seulement divergentes, mais indéterminées. L'intégrale a pu, en tant que limite d'une somme dont le nombre des termes devient infiniment grand, faire discuter d'un indéterminisme de même nature. Les créateurs de la mathématique des variables eurent la malchance, en voulant définir deux opérations déterminantes, la dérivation et l'intégration, de rencontrer les cas majeurs d'indéterminisme de la mathématique des nombres.

3. Un problème difficile de l'intégration a été posé par la discontinuité des êtres sur lesquels pouvait porter cette opération. La difficulté des relations qui existent entre discontinuité et déterminisme ne serait-elle pas la principale des raisons qui ont obligé les mathématiciens à reprendre, de génération en génération, la question de l'intégration? C'est bien ainsi que Lebesgue a présenté le dessein de Riemann : « Riemann porte son attention sur le procédé opératoire qui permet, dans le cas des fonctions continues, de calculer l'intégrale avec telle approximation que l'on veut, et il demande dans quels cas ce procédé, appliqué à des fonctions discontinues, donne un nombre déterminé ». Peut-être, bien des difficultés seraient éclaircies si l'on savait définir exactement les relations qui existent entre les notions désignées par ces quatre mots : continuité, discontinuité, déterminisme et indéterminisme.

II. MATHÉMATIQUE DE L'ALÉATOIRE

Cet exposé de la mathématique déterministe, même réduit à ses opérations élémentaires, ne prend tout son intérêt que par son contraste avec la mathématique de l'aléatoire. En effet, a été créée une mathématique des processus éventuels, qui, lorsqu'ils sont probabilisables, sont qualifiés d'aléatoires.

A. LA MULTIPLICITÉ ET L'INCOMPATIBILITÉ DES CAS POSSIBLES

Reprenons la définition : Entre deux êtres, les relations sont éventuelles lorsque, avant de se réaliser, elles peuvent se réaliser de plusieurs manières simultanément possibles, ces divers cas étant incompatibles entre eux et s'excluant les uns les autres au moment de la réalisation, puisqu'un seul d'entre eux se réalisera.

Deux idées essentielles sont comprises dans cette définition : la multiplicité, antérieure à la réalisation, des *cas possibles*, et leur incompatibilité, contemporaine de cette réalisation. L'incompatibilité s'ajoute à la multiplicité, qui, en elle-même, se réduit à de l'indéterminisme. L'incompatibilité est même plus importante que la multiplicité, car cette multiplicité n'est peut-être que la condition nécessaire de l'incompatibilité. Il faut que les cas soient multiples pour être incompatibles. Et il ne suffit pas de parler d'indéterminisme à propos de l'éventuel. Le mot indéterminisme a une valeur négative, exprimant le non-déterminisme. Les relations éventuelles méritent d'être traitées d'une manière aussi positive que les déterministes.

Le premier objet de la mathématique des relations éventuelles est donc de définir l'ensemble E des N cas possibles que comporte *l'épreuve.* C'est la première condition pour que l'ensemble soit probabilisable.

Des exemples élémentaires d'ensembles probabilisables sont donnés par les jeux de hasard, pour la raison que ces jeux ont été créés dans le but précis de réaliser des relations aléatoires sous une forme élémentaire. Par exemple, un jeu de 52 cartes offre 52 cas possibles. Les relations sont aléatoires entre le choix du joueur et le jeu dont une carte sera tirée au hasard.

L'épreuve consiste à tirer l'une quelconque des 52 cartes. Suivant le règlement du jeu, on peut définir des *événements* variés. Ce règlement fait définir, dans l'ensemble E des cas possibles, des sous-ensembles variés. Par exemple si le jeu consiste à tirer une Dame, le sous-ensemble comporte 4 cas possibles; s'il consiste à tirer une Figure, il en comporte 12.

Entre les cas possibles, les relations ne sont pas déterministes. Si l'ensemble avait une structure déterminée et connue du joueur, il faudrait artificiellement rompre ce déterminisme. Par exemple, imaginons que l'ensemble E des N cas possibles est, comme dans le jeu de 52 cartes, une partie de l'ensemble des entiers naturels. La définition axiomatique de cet ensemble lui impose la propriété d'être ordonné. Or, cette propriété doit être supprimée, car elle est déterministe, la relation d'ordre étant déterministe. C'est dans ce but que, avant de se servir d'un jeu de cartes, on le bat. Par ces permutations non ordonnées, qui, chaque fois, modifient l'ordre des cartes, on rompt tout ordre déterminé qui existerait entre elles. Cet indéterminisme est la première condition de l'aléatoire. Il est intermédiaire entre le déterminisme et l'aléatoire.

Il ne suffit pas aux cas possibles d'être multiples. Il leur faut encore être incompatibles entre eux. Cette incompatibilité fait que les sous-ensembles de l'ensemble E sont *disjoints.* Quand on choisit une, et une seule, parmi les 52 cartes d'un jeu, on met en évidence ce caractère d'incompatibilité.

De même, un dé offre six cas possibles. Il y a multiplicité des cas. Faire rouler ce dé sur une table est un geste qui correspond aux permutations des cartes et qui effectue les ruptures d'ordre qu'obtient le battage de ces cartes. Enfin, l'incompatibilité entre les cas se manifeste au moment où le dé se retourne sur l'une de ses six faces, à l'exclusion des autres. Sur chacune des faces, le nombre n'est qu'un numéro. Dans ce rôle, il peut être remplacé par un signe quelconque. Le rouge ou le noir peuvent servir au lieu du 1 ou du 2.

B. LA PROBABILITÉ DES CAS POSSIBLES

Après avoir défini ses cas possibles, la mathématique de l'aléatoire a encore à définir la *probabilité* de chacun d'eux. La possibilité d'existence de cas multiples et incompatibles est la donnée initiale de la théorie des probabilités. La distribution de la probabilité entre les cas est un problème second par rapport à la numération de ces cas.

On tend à donner de la probabilité une définition axiomatique, en tant que nombre P satisfaisant à cette première condition : $0 \leqslant P \leqslant 1$, et à une deuxième condition dite d'additivité complète : Si A_1, A_2, ..., A_n, ... sont des sous-ensembles disjoints, en nombre fini ou en infinité dénombrable, de l'ensemble E des cas possibles, la probabilité de la somme de ces sous-ensembles est égale à la somme des probabilités de chacun d'eux.

La probabilité devient alors une grandeur à laquelle la mathématique de l'aléatoire applique de nombreuses opérations de la mathématique déterministe. A ce point de vue, on peut parler de l'unité de la mathématique.

Je veux montrer que les propriétés que l'on énonce pour définir la probabilité n'ont pas été imposées comme des axiomes arbitraires, mais qu'elles ont pour raisons d'être les propriétés mêmes des relations aléatoires. L'existence de ces relations est bien la donnée première de la mathématique de l'aléatoire.

La multiplicité des cas a pour conséquence que la probabilité de chacun d'eux n'est qu'une fraction. La probabilité doit être répartie entre les divers sous-ensembles de l'ensemble E. Chacun en a sa part; et l'ensemble en a la totalité. D'où la condition : $0 \leqslant P \leqslant 1$.

A l'incompatibilité des cas correspond la propriété d'additivité de la probabilité. Si l'ensemble E comprend deux sous-ensembles A_1 et A_2, l'incompatibilité disjoint ces sous-ensembles. Et la probabilité de la somme $A_1 + A_2$ est alors égale à la somme de leurs probabilités respectives. Lorsque A_1 et A_2 ne sont pas disjoints, la probabilité de leur somme est égale à la somme de leurs probabilités, mais diminuée de la probabilité du sous-ensemble des éléments communs à A_1 et A_2.

Les probabilités de plusieurs cas possibles sont additives, bien que l'ordre de ces cas ne doive pas intervenir, parce que l'addition est *commutative*. C'est cette propriété de l'addition qui permet à la mathématique de l'aléatoire d'utiliser des opérations de la mathématique déterministe. Une somme ne dépend pas de l'ordre attribué à ses termes. La suppression de toute relation d'ordre entre les cas possibles n'empêche pas leur additivité. De même, la mathématique de l'aléatoire fait un grand usage du calcul des combinaisons. Or, combiner k objets parmi n objets donnés, c'est avoir à choisir k de ces n objets, mais sans avoir à les ordonner.

Quant à l'expression mathématique, en elle-même, de la probabilité, elle peut soulever des difficultés. Chaque fois qu'on a à traiter un problème particulier, il faut préciser la loi selon laquelle les probabilités se distribuent entre les divers cas. En raison de cette difficulté, le calcul des probabilités s'est, historiquement, construit à l'aide d'exemples particulièrement simples, ceux pour lesquels les probabilités des divers cas sont égales entre elles. Par convention, les deux faces d'une pièce de monnaie parfaite créent deux cas d'égales probabilités. Une pièce réelle conviendra d'autant mieux qu'elle réalisera mieux cette égalité des probabilités.

C. LA PROBABILITÉ STATISTIQUE

Présentée comme je l'ai fait à partir des relations aléatoires, la mathématique de l'aléatoire se distingue nettement de la mathématique déterministe. Mais cette opposition, ainsi mise en lumière, risque d'être obscurcie par la probabilité statistique.

Lorsque la même épreuve se répète un très grand nombre de fois, chacun des cas possibles tend à se réaliser d'autant plus fréquemment qu'il est plus probable. Par de telles sommations statistiques de fréquences, il est donc possible de donner une nouvelle définition de la probabilité, presque expérimentale.

Or, ces fréquences, en s'affirmant d'autant plus que l'épreuve se renouvelle plus souvent, risquent de prendre une allure déterministe. En effet, on définit souvent le déterminisme par la prévisibilité. Cette propriété n'est, en fait, qu'une conséquence de l'unicité dans l'évolution des événements déterminés. Mais, avec une telle définition, on entretient la confusion entre l'aléatoire et le déterminé, car les permanences statistiques deviennent prévisibles, et d'autant plus que les épreuves deviennent plus nombreuses. La physique énonce des lois statistiques dont les conséquences sont aussi prévisibles que celles des lois de strict déterminisme. Les sommations statistiques offrent un moyen de sortir de l'aléatoire.

Cette prévisibilité statistique diffère pourtant de la prévisibilité strictement déterministe. La fréquence d'un cas possible tend vers la probabilité de ce cas avec une probabilité d'autant plus forte que le nombre des épreuves est plus grand. Mais cette tendance, tout en étant de plus en plus probable, reste toujours probable et seulement probable. Des fluctuations aléatoires peuvent toujours intervenir. Évidemment, certains événements ont une probabilité tellement minuscule que leur invraisemblance équivaut à l'impossibilité. « Si l'on venait me dire, répondait déjà J.-J. Rousseau, que des caractères d'imprimerie projetés au hasard ont donné *l'Énéide* tout arrangée, je ne daignerais pas faire un pas pour aller vérifier le mensonge. »

Le principal inconvénient des sommations statistiques est de masquer l'existence des relations aléatoires.

III. LES RELATIONS DÉTERMINISTES NATURELLES

Au cours du XVIIe siècle, les plus grands penseurs de l'Europe occidentale firent une découverte qui allait engager tout l'avenir intellectuel de l'humanité. Entre des systèmes naturels il existe des relations aussi déterministes que celles que les mathématiciens avaient reconnues entre leurs êtres abstraits. Cette découverte, préparée lentement, allait être le principe de la révolution intellectuelle que l'Europe a réalisée. Une philosophie nouvelle s'élabora, en remplacement des conceptions antérieures, dites scolastiques. En Italie, Galilée; en France, Descartes, Fermat, Pascal; en Angleterre, Bacon, Newton; en Allemagne, Képler, Leibniz, en furent les principaux artisans. La première science qui ait profité de ce nouvel art de penser, et la seule jusqu'à la fin du XVIIIe siècle, fut la Mécanique. D'où le nom de Mécanisme que reçut la nouvelle philosophie scientifique. Au XIXe siècle, celle-ci s'épanouit triomphalement dans la physique mathématique. Les lois naturelles, qui énoncent des relations déterministes entre des systèmes naturels, devinrent les matériaux élémentaires des théories scientifiques.

Le déterminisme des relations explique la prévisibilité de l'avenir. L'évolution des événements ne pouvant être autre que ce qu'elle doit être, se réalisera d'une seule manière possible dans le temps. C'est même elle qui est responsable du concept d'un temps unique et linéaire.

Au milieu du XIXe siècle, le Positivisme d'Auguste Comte (1798-1857) a été construit sur cette conception déterministe. « Le caractère fondamental de la philosophie positive est de regarder tous les phénomènes comme assujettis à des lois naturelles invariables. » La mathématique est placée « à la tête de la philosophie positive », car elle « constitue l'instrument le plus puissant que l'esprit humain puisse employer dans la recherche des lois des phénomènes naturels ». Il s'agit, bien sûr, de la mathématique déterministe, Comte rejetant violemment celle de l'aléatoire. La prévisibilité, l'un des caractères d'une science déterministe, est revendiquée par le Positivisme. « Le but final de toutes nos études positives est la juste prévision des événements. » D'où la célèbre formule : « Science, d'où prévoyance; prévoyance, d'où action. »

On finit même par admettre que la science avait pour objet de prévoir les événements. Une telle conception négligeait l'existence de relations aléatoires.

IV. LES RELATIONS ALÉATOIRES NATURELLES

Cela aura été l'une des plus grandes découvertes du XX^e siècle, et peut-être la plus grande, de reconnaître l'existence, entre les systèmes naturels, de relations aléatoires. A constater la valeur qu'a eue pour l'humanité la science déterministe, on peut conclure l'importance qu'aura celle de l'aléatoire. Cela revient à changer de science.

La science de l'aléatoire s'est développée lentement et difficilement à l'ombre de la déterministe. Si Fermat et Pascal furent les créateurs du calcul des probabilités, ce ne fut qu'en plein XIX^e siècle que Cournot (1801-1877) intégra dans la philosophie scientifique ses méditations sur l'aléatoire. Contemporain de Comte, Cournot fut beaucoup moins célèbre que lui, car il était un précurseur. Dans tous ses ouvrages de philosophie scientifique, qu'il publia de dix ans en dix ans, il exposa sa conception du hasard. « Il faut s'attacher exclusivement à ce qu'il y a de fondamental et de catégorique dans la notion du hasard, à savoir l'idée d'indépendance ou de l'absence de solidarité entre diverses séries de faits ou de causes. »

Cournot a clairement perçu la conséquence principale de sa conception. Ayant pour fondement l'indépendance réelle des événements, le hasard a un fondement naturel. Il faut donc distinguer, dans l'idée de probabilité, ce qu'il y a d'objectif, en raison de l'indépendance réelle des systèmes naturels, et de subjectif, en raison de la part d'ignorance qui reste dans nos connaissances.

Les conceptions de Comte ont diffusé beaucoup plus rapidement que celles de Cournot, parce qu'elles allaient dans le sens même du courant intellectuel de l'époque. Obnubilé par les triomphes de la Mécanique, Comte a pris cette science comme modèle de toute connaissance. Et il ne porta sur le calcul des probabilités qu'un jugement « négatif », le traitant, selon les occasions, de sophistique, d'illusoire, de puéril, d'absurde, d'aberration surannée, de monstruosité philosophique. Cette violence de langage n'était que le signe d'une faiblesse dans la conception. Comte ne pouvait que redouter la science de l'aléatoire qui détruirait l'unité de son système philosophique. La coupure entre le déterminé et l'aléatoire est si profonde qu'elle sépare les penseurs.

L'aléatoire des relations entre systèmes naturels réduit l'ambition déterministe de la prévisibilité. La multiplicité des évolutions possibles rend l'avenir imprévisible, et leur incompatibilité rend l'évolution irréversible.

La coexistence, dans la nature, de relations déterministes et de relations aléatoires pose un problème. J'ai énoncé à plusieurs reprises la réponse à cette question en généralisant, avant même de la connaître, la conception de Cournot :

Les relations sont déterministes entre systèmes liés et aléatoires entre systèmes indépendants.

Cet énoncé a la valeur d'un principe universel. Il établit, par exemple, un lien entre, d'une part, la réalité du corps solide, dont le volume et la forme sont maintenus par des liaisons entre les parties, et, d'autre part, l'élaboration intellectuelle de la géométrie; ou encore entre l'existence de champs de force et la conception d'espaces. Des têtards, perdus au sein d'un océan d'eau homogène, loin de toute côte solide, et n'ayant jamais eu d'autres objets de perception que leurs congénères nageant en toute indépendance dans leur entourage, auraient besoin de créateurs doués d'un génie supérieur à ceux d'Archimède, Pascal, Newton et Einstein réunis, pour concevoir l'idée d'espace. Comme l'a remarqué Poincaré, s'il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.

La condition d'indépendance explique pourquoi il est difficile, en pratique, de réaliser un événement parfaitement aléatoire.

En poursuivant le raisonnement dans ce sens, on doit se demander si l'emploi que la théorie de l'état gazeux fait du calcul des probabilités, depuis le milieu du XIX^{e} siècle, n'a pas sa véritable justification dans l'indépendance des molécules lorsque la matière est à l'état gazeux parfait. Cette indépendance est un fait d'expérience, exprimé soit dans la loi de Joule, selon laquelle la dilatation d'un gaz parfait se produit sans absorption d'énergie, donc sans qu'il y ait de liaisons moléculaires à vaincre; soit dans la loi de Dalton, selon laquelle la pression d'un mélange de gaz est égale à la somme des pressions partielles de chacun d'eux, ce qui montre que chacun de ces gaz exerce sa pression comme s'il était seul, donc indépendamment des autres.

Or, la théorie cinétique de l'état gazeux parfait est présentée en général sous une forme essentiellement statistique, et non probabiliste, car elle ne se donne pas strictement comme base le caractère réellement aléatoire des relations que les molécules ont entre elles. La multiplicité des cas possibles n'est pas mise en valeur. Une théorie, qui serait systématiquement probabiliste et accessoirement statistique, n'utiliserait qu'une seule hypothèse, qui est à peine une hypothèse, l'indépendance des molécules, mais en y ajoutant, comme conséquence, l'aléatoire des relations entre ces molécules.

On peut imaginer le schéma encore qualitatif d'une telle théorie. L'attention se porterait sur une molécule quelconque M, mais sur elle seule, en toute indépendance, et la théorie se donnerait pour objet la trajectoire individuelle de cette molécule. Entre les molécules de ce gaz théorique, il n'y a rien, pas même un champ de force. Le mot vide désigne ce néant.

La trajectoire de la molécule resterait rectiligne et uniforme si elle n'était fréquemment perturbée par des rencontres avec d'autres molécules. Pour analyser le mouvement de cette molécule, il faudrait se libérer de tout système de référence spatial. Il faudrait rendre au vide son néant et ne pas le remplir avec un espace. Or, pour représenter les vitesses, on utilise les grandeurs vectorielles, mais la notion habituelle de vecteur manque de liberté. Le vecteur qualifié de libre est plus libéré que les vecteurs glissant et lié, sans être encore vraiment indépendant. Un vecteur libre appartient à l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace qui lui sont équipollents. L'ensemble des vecteurs libres de l'espace est à l'origine de la conception d'espace vectoriel. Mais un tel vecteur n'est pas conçu seul, en lui-même, et sans être englué dans un espace. Pour penser vraiment sans espace, il faudrait concevoir un nouveau type de grandeur vectorielle, qui n'aurait d'existence que locale et instantanée, et qui serait utilisée seulement au moment d'un choc pour calculer ce que devient la vitesse de la molécule M en se composant avec celle de la molécule avec laquelle M se heurte. De cette manière, chacun des chocs successifs, qui brisent la trajectoire de M, serait analysé en lui-même, indépendamment du choc précédent et du choc suivant. Le temps serait découpé en une suite d'événements discontinus, et sans loi de succession.

A ce nouveau type de grandeur vectorielle, il faudrait attribuer un nouvel adjectif. Comme les termes libre et indépendant sont déjà utilisés, on pourrait se servir de l'expression : *vecteur fou*, dans le sens où l'on parle d'une poulie folle, d'une herbe folle, ou d'une brise folle, qui fait virevolter en tout sens les girouettes. Un tel vecteur ne pourrait avoir d'existence qu'au moment de chacun des chocs, car ce qui servirait d'axe de référence pour le définir serait l'axe des centres C_1 et C_2 des molécules en choc. Un vecteur fou ne peut être considéré comme fonction de sa position dans l'espace. La notion de fonction de point perd tout sens. Un vecteur fou ne peut faire partie d'un espace vectoriel. On ne voit pas quel sens donner à l'expression : produit d'un vecteur fou par un scalaire. L'expression : espace vectoriel est peut-être malencontreuse, si elle ne comprend pas toutes les grandeurs vectorielles possibles.

L'axe des centres $C_1 C_2$ serait aussi un axe fou. Il ne serait pas rapporté à un espace commun à l'ensemble des molécules, mais il serait déterminé, la durée d'un choc, par les positions relatives des deux centres moléculaires. La théorie élémentaire du choc se fait en admettant que les molécules sont identiques, homogènes, sphériques, presque ponctuelles, et que les chocs sont centraux et élastiques. Soient $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$, les vitesses de M avant et après le choc, et $\mathbf{W}$ la vitesse de l'autre molécule avant le choc. La vitesse de cette molécule après le choc n'a pas d'intérêt. Seule, la composante u_1 de $\mathbf{V}_1$, sur l'axe $C_1 C_2$, est modifiée par le choc. Cette composante u_1 acquiert la valeur absolue de la composante w de $\mathbf{W}$ sur l'axe $C_1 C_2$, et devient u_2. Les vitesses $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ restent dans un même plan, qui comprend aussi l'axe $C_1 C_2$. Ce plan des $\mathbf{V}_1$-$\mathbf{V}_2$ est aussi un plan fou. L'ensemble des vecteurs fous, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{W}$, de l'axe fou $C_1 C_2$, et de ce plan fou forme un système fou. A l'aide de ces systèmes fous, chacun des chocs successifs peut être analysé en lui-même.

L'indépendance physique des molécules rend aléatoires leurs relations. Cette même indépendance rend aléatoires les relations que les chocs, subis successivement par M, ont entre eux. C'est la raison principale pour laquelle on ne peut plus construire d'espace vectoriel. Aucune opération entre deux vecteurs-vitesses quelconques n'a de sens. Pour les vecteurs fous, seule a un sens la composition de deux vecteurs fous à l'instant de la rencontre des molécules, mais à la condition qu'elles se rencontrent. Or, les rencontres sont aléatoires.

Avant la réalisation d'un choc, toutes les variétés de chocs sont possibles. Voilà mise en évidence la multiplicité des cas possibles ! Comme tous les chocs se font selon la même loi mécanique élémentaire, on peut considérer le choc, en lui-même, comme l'événement aléatoire, l'épreuve. Et chacune des variétés possibles de chocs, chacune avec son système fou particulier, deviendra l'un des cas possibles de cet événement. On peut concevoir tous les systèmes fous possibles comme les cas possibles d'un même système fou.

De cette manière le chaos moléculaire se transcrit directement en termes probabilistes. La vitesse de M est une variable aléatoire, car elle peut, à tout moment ultérieur, prendre l'une ou l'autre parmi une infinité de valeurs différentes, exclusives les unes des autres. Au moment même où M va se heurter à une autre molécule quelconque G, une troisième molécule quelconque T peut faire dévier soit M soit G et anéantir le choc qui allait être réalisé. Et, s'il doit y avoir effectivement choc, la molécule avec laquelle M se heurtera peut arriver sur elle de n'importe quelle direction. Et, avant tout choc, $\mathbf{W}$ peut être ou supérieure ou inférieure, ou même égale à $\mathbf{V}_1$. Aucune relation d'ordre ne peut être reconnue entre $\mathbf{V}_1$ et les $\mathbf{W}$ possibles. Le nombre des cas possibles est infiniment grand, et il faudra utiliser la théorie des probabilités continues.

Pour calculer ces probabilités, il faudra numérer toutes les variétés possibles de $\mathbf{V}_2$, puis définir, en tenant compte de l'égale probabilité des directions possibles de $\mathbf{V}_1$ et aussi de celles de $\mathbf{W}$, ainsi que de l'indépendance des directions possibles de $\mathbf{V}_1$ et de $\mathbf{W}$, la répartition de la densité de la probabilité entre les variétés possibles infiniment nombreuses de $\mathbf{V}_2$.

On peut parvenir, au moins qualitativement, au résultat suivant. Lorsque $\mathbf{W}$ est supérieure en module à $\mathbf{V}_1$, la probabilité que $\mathbf{V}_2$ soit supérieure à $\mathbf{V}_1$ est plus grande que la probabilité que $\mathbf{V}_2$ soit inférieure à $\mathbf{V}_1$. Et ces probabilités des valeurs de $\mathbf{V}_2$ sont d'autant plus inégales que $\mathbf{W}$ diffère plus de $\mathbf{V}_1$. Réciproquement, lorsque $\mathbf{W}$ est inférieure à $\mathbf{V}_1$, la probabilité que $\mathbf{V}_2$ soit plus petite que $\mathbf{V}_1$ dépasse la probabilité que $\mathbf{V}_2$ soit plus grande que $\mathbf{V}_1$, d'autant plus que $\mathbf{W}$ diffère plus de $\mathbf{V}_1$.

Suivons alors la molécule M à l'intérieur du gaz. Plus elle aura une grande vitesse, et moins elle aura de chances de heurter une molécule qui ait une vitesse encore supérieure à la sienne. La probabilité que la vitesse de M soit amoindrie à la suite d'un choc augmente très vite avec cette vitesse même. De même, plus faible sera la vitesse de M, et plus cette vitesse aura de chances d'être accrue. Les grandes et les petites vitesses sont de très faibles probabilités. Et les très grandes et très petites vitesses n'ont que des probabilités très minuscules. La répartition de la probabilité entre les vitesses devient ténue à l'extrême aux deux extrêmes. Les probabilités sont concentrées vers les vitesses moyennes.

Mais, pour ces vitesses moyennes, un effet opposé se fait sentir. Plus la vitesse de M est voisine de celles de la moyenne des molécules, plus elle a de chances d'être écartée de cette vitesse moyenne sous l'action des chocs. Si l'effet de concentration des probabilités est maximal pour les vitesses extrêmes, un effet de dispersion est maximal pour les vitesses moyennes.

En raison de ce double effet, les probabilités des diverses vitesses possibles de M ont une densité maximale pour les vitesses moyennes; et, à partir de ce maximum, elles se répartissent en décroissant avec l'écart même des vitesses par rapport à ces moyennes. Cette répartition prend la forme d'une montagne, dont le profil s'apparente nettement à la courbe en cloche de Gauss-Laplace.

Or, M n'est que l'une quelconque des molécules du gaz. Toutes ces molécules sont indépendantes. La vitesse de chacune d'elles est une variable aléatoire qui doit suivre la même loi de variation que M, mais indépendamment d'elle. Par sommation statistique, la fréquence d'une vitesse donnée, à un moment donné, à l'intérieur du gaz, doit être voisine de la probabilité de cette vitesse, en raison du grand nombre des molécules. Par cette théorie purement probabiliste, on retrouve bien le contenu essentiel de la loi de Maxwell. Mais la théorie de Maxwell et de Boltzmann était plus statistique que probabiliste, car elle désirait surtout retrouver les propriétés thermodynamiques globales de l'état gazeux.

V. L'AUTONOMIE ET LA PROBABILITÉ

L'esquisse, que je viens de faire, d'une théorie probabiliste du mouvement moléculaire admet que des relations aléatoires existent réellement entre des systèmes naturels. Le caractère aléatoire du mouvement brownien, résultant de l'agitation moléculaire, a acquis toute sa réalité dans les expériences de Jean Perrin. Entre la particule brownienne et les repères solides de l'observateur, les relations sont objectivement aléatoires.

L'interprétation probabiliste, que j'ai proposée il y a vingt ans, de l'autonomie des animaux, fait partie du même ensemble théorique. En acquérant leur autonomie, les animaux se rendent indépendants du milieu extérieur. Leurs relations avec ce milieu en deviennent aléatoires. Le mouvement animal que j'ai qualifié de brownoïde a acquis sa réalité dans les expériences que j'ai faites avec mon ami Malterre et que j'ai rapportées devant notre Société en 1953. Ce mouvement brownoïde des animaux et le mouvement brownien des particules diffèrent dans leur nature, mais se ressemblent par la forme. Pour faire la théorie de l'un comme de l'autre, il faut employer la mathématique de l'aléatoire. Cette parenté formelle est de grande signification.

L'autonomie des animaux diffère de l'indépendance des molécules en ce qu'elle n'est pas un simple manque de dépendance. L'autonomie est une indépendance effectivement acquise, presque conquise sur le milieu extérieur. Deux mécanismes physiologiques interviennent dans cette acquisition, la mise en réserve et la régulation. Ces mécanismes, responsables de l'autonomie, donc de l'aléatoire qui en résulte, effectuent une véritable rupture de déterminisme. Une mise en réserve, qui accumule les conditions nécessaires à un usage ultérieur, rompt bien un déterminisme et a un effet contre-aléatoire. Et, dans leurs boucles de régulation, les mécanismes régulateurs annulent du déterminisme en opposant en grandeur et en signe un déterminisme de réaction à un déterminisme d'action. A l'intérieur de l'organisme, une partie serrée se joue entre le déterminé et l'aléatoire. La physiologie théorique devra utiliser avec beaucoup de souplesse la mathématique déterministe et la mathématique de l'aléatoire.

Mais la pleine signification de l'idée de probabilité et de son emploi dans la science ne peut être encore obtenue par les seules explications qui précèdent. L'idée de probabilité est plus complexe. Maintes et maintes fois, les hommes se sont posé la question de savoir si la probabilité est objective ou subjective et même s'ils devaient distinguer deux variétés de probabilités. Or, c'est encore la conception de l'autonomie qui permet de résoudre ce problème séculaire. L'homme ne profite pas seulement de son autonomie physiologique. Il est aussi doué d'une autonomie mentale, grâce à laquelle il peut concevoir des idées. Or, ses idées ne sont que probables. Cette probabilité, dont il n'a cessé de se plaindre, et qui intervient dans les relations entre le sujet pensant et le monde extérieur, c'est la probabilité subjective. Elle diffère de la probabilité objective qui existe entre la trajectoire de ce même homme, lorsqu'il flâne, et un repère extérieur.

Pour se connaître, l'homme aura donc à faire intervenir, non seulement la mathématique de l'aléatoire, en plus de la mathématique déterministe, mais ces deux variétés de probabilité, l'objective et la subjective.

Il ne faut, d'ailleurs, limiter ni la mathématique, ni la probabilité, aux deux variétés que j'ai décrites.

En effet, en plus des relations déterministes et des relations aléatoires, il faut concevoir des relations finalistes. Chacune d'elles traite à sa manière l'idée de temps. En théorie déterministe, le moment présent est inclus dans la ligne unique du temps entre le passé et le futur; l'avenir est prévisible, et l'évolution est, en principe, réversible. En théorie de l'aléatoire, le moment présent, étant celui où l'événement aléatoire se réalise, coupe le futur du passé, puisqu'un seul des cas antérieurement possibles se réalise; le présent devient du futur sous une seule des formes possibles; et l'évolution est irréversible. En théorie finaliste, c'est le futur qui intervient dans l'organisation du présent.

Quant à l'idée de probabilité, elle est encore plus riche que de ses deux variétés objective et subjective. Par exemple, en histoire humaine, j'ai montré qu'il faut utiliser l'idée de possibilité d'action. L'idée de probabilité est nécessaire pour comprendre celle d'autonomie, mais celle d'autonomie est aussi nécessaire pour comprendre celle de probabilité.

L'aléatoire est inhérent à la condition humaine. Car l'homme est un être autonome.

Soit le cas du mathématicien. Le caractère déterminant des opérations qu'il utilise entre des êtres abstraits, ne rend pas obligatoirement déterministes les relations que ces êtres peuvent avoir entre eux.

Par exemple, soient deux sous-ensembles F et G d'un ensemble de référence R, avec leurs complémentaires respectifs H et J. Le mathématicien définit entre F, G, H et J, diverses opérations déterminantes qui ont pour résultats de nouveaux ensembles. Ce résultat pourra être, par exemple, la réunion de F et de G, ou de G et de H, ou l'intersection de H et de J, ou de G et de H. L'ensemble qui résulte de chacune de ces opérations est déterminé. Et pourtant, entre ces opérations, les relations sont aléatoires. En effet, les opérations possibles sont multiples et exclusives les unes des autres. Lorsque le mathématicien décide, par exemple, d'obtenir la réunion de F et de G, il décide, en même temps, de ne pas obtenir la réunion de F et de J, ni d'obtenir simultanément la réunion et l'intersection de F et de G. Il a la possibilité de choisir entre toutes ces opérations possibles pour aboutir au résultat déterminé qu'il désire.

De même, une calculatrice offre une multitude d'opérations possibles. Si elle était incapable d'effectuer d'autres opérations que la multiplication de 325 744 par 8 911, elle serait rendue inutilisable par sa rigidité déterministe. Elle doit, au contraire, avoir en elle assez d'aléatoire pour se prêter à tous les désirs de l'utilisateur, qui a le choix des problèmes et des programmes.

Cet aléatoire, qui risque de rester caché, est la condition nécessaire de toute pratique des mathématiques par le mathématicien qui se sert de son autonomie mentale.

Et on décèle facilement un tel aléatoire dans la vie pratique. Les installations de téléphonie automatique sont telles que le demandeur déclenche lui-même à distance toutes les opérations déterminantes qui le mettront en relation déterministe avec son correspondant.

Mais, avant d'effectuer une telle commande, le demandeur a dû choisir, parmi la multitude des combinaisons possibles que lui offre son cadran d'appel, la combinaison, exclusive de toutes les autres, qui lui permettra d'atteindre le correspondant qu'il a choisi. S'il demande Balzac 00-01, il ne demandera pas simultanément Gobelins 33-33. Des appareils de sélection sont mis en action dans les centraux téléphoniques par le demandeur lui-même. L'homme crée ses machines à son image. Il leur impose les conditions qui leur permettront de satisfaire aux exigences de sa propre autonomie.

Et il y a encore de l'aléatoire, et sous une autre forme, dans la présence même du correspondant au moment de l'appel du demandeur. Ce correspondant, étant autonome, a la liberté de ses mouvements. D'où l'aléatoire qui peut exister, sauf entente préalable, dans la coïncidence entre l'appel du demandeur et la présence du correspondant.

Et il y a encore de l'aléatoire et sous une autre forme, dans la transmission des informations entre les deux correspondants en communication. La théorie de l'information est profondément probabiliste, même si elle n'a pas encore relié cette probabilité à l'autonomie mentale des interlocuteurs.

Des manifestations de l'aléatoire dans la vie des hommes on pourrait multiplier les exemples, et dans les domaines les plus variés.

Le triomphe impérieux de la science déterministe a été la cause d'un malaise profond et douloureux. La science apparaissait à la fois comme toute puissante et fondamentalement déterministe. Or, l'homme désirait se connaître scientifiquement et il sentait que le déterminisme était incompatible avec sa liberté. L'interprétation probabiliste de l'autonomie rompt le dilemme dans lequel il se trouvait enfermé. Et l'homme en arrive à faire la science de lui-même, en tant qu'être autonome et individuel. La science rejoint alors l'humanisme.

En affirmant que les relations aléatoires doivent être traitées à parts égales avec les relations déterministes, on atteint les fondements mêmes de l'art de penser. Il y va du salut intellectuel de l'humanité de ne pas se contenter des seules relations déterministes.

Pierre VENDRYÈS

DISCUSSION

M. F. Milhand. — Je pense qu'il y a souvent une certaine ambiguïté dans la notion de probabilité.

On la considère comme une caractéristique d'un élément donné alors qu'il s'agit d'une relation entre deux ensembles.

Si je parle de la probabilité d'une taille donnée lorsque je prends un enfant au hasard dans une salle de classe déterminée, je considère non pas un tirage particulier qui donnera un enfant d'une certaine taille, et d'une seule, mais je décris une relation qui existe entre l'ensemble des tailles des élèves de cette classe et l'ensemble des tirages que je peux effectuer.

M. F. Rosenfeld. — Je me demande si dans la réalité économique ou physique il existe réellement des phénomènes dus au hasard, défini dans le sens du calcul des probabilités. Un agent économique ou un individu, agissent de manière bien déterminée et en vertu de mobiles bien déterminés; ce n'est qu'en raison de son ignorance quant aux mobiles et aux lois de comportement que l'observateur assimile certaines actions économiques à des lois du hasard et il se trouve que certaines de ces lois représentent bien le comportement moyen ou le comportement global d'un certain nombre d'agents économiques.

Il en est de même pour certains phénomènes physiques; si l'expérimentateur connaissait exactement toutes les données initiales et les lois de comportement dynamique d'un ensemble de molécules constituant une masse gazeuse, il pourrait théoriquement déterminer au moyen d'équations précises la position de l'état de chacune d'elles à n'importe quel moment. Il en est empêché par une part d'ignorance et par la complication et la lourdeur des calculs à effectuer. L'assimilation aux lois du hasard est un procédé commode pour surmonter ces difficultés, mais cela ne signifie pas que le phénomène est réellement régi par le hasard.

Entre les phénomènes dont on connaît les lois fonctionnelles de comportement et ceux qui peuvent être représentés par des lois probabilistes, il y a ce que M. Fourastié vient d'appeler la « gélatine », c'est-à-dire une matière dont l'étude relève à la fois des lois fonctionnelles et des phénomènes assimilés au hasard, la part de chaque discipline pouvant varier suivant les cas.

P. Vendryès. — Je tiens à remercier MM. Milhaud et Rosenfeld, et aussi MM. Barbut, Dugué, Fourastié, Guilbaud, dont les remarques critiques m'ont fait préciser plusieurs points de mon exposé.