

P. THIONET

Sur la moyenne des intervalles séparant deux vendredis 13 consécutifs

Journal de la société statistique de Paris, tome 99 (1958), p. 284-293

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1958__99__284_0

© Société de statistique de Paris, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la moyenne des intervalles séparant deux vendredis 13 consécutifs

1. PRÉAMBULE

La présente note ne prétend pas poser de problème nouveau, ni résoudre aucun problème connu. Elle espère rester dans les limites de l'observation amusante qui pique la curiosité du lecteur moyen.

Elle touche pourtant à des questions arides et qui font encore l'objet de controverses passionnées; mais nous ne voyons pas l'intérêt de nous lancer à ce sujet dans un exposé qui demanderait des recherches pénibles et des réflexions prolongées.

Le point controversé, c'est la question de savoir si l'on peut parler de la probabilité d'un *événement isolé*. En parler, c'est-à-dire raisonner, calculer valablement sur elle (si on peut l'atteindre). Émile Borel pensait qu'on se privait à tort d'applications intéressantes du calcul des probabilités si l'on tenait à interdire à tous les événements isolés un accès aux probabilités (1). Il semble que ce soit là une vue assez large et saine : il faut juger chaque cas d'espèce, sans avoir trop d'idées préconçues.

Il arrive parfois qu'un événement isolé appartienne à une famille d'événements qui auraient pu se produire en ses lieux et places et même qu'on ne soit pas trop embarrassé pour distinguer dans cette famille tous les événements *également* possibles (pour des raisons de symétrie). La réalité n'est alors qu'une *réalisation* d'un certain processus stochastique. Le cas que nous allons considérer n'est qu'une espèce de processus en chaîne et d'ergodisme excessivement particulière.

Nous allons vite rassurer le lecteur que ce vocabulaire mathématique (récent) rebute. Nous nous occuperons de l'apparition d'un *vendredi 13* au calendrier. Ce n'est pas l'approche du nouvel an et l'arrivée des calendriers des P. T. T. qui nous ont poussé à regarder ces événements d'un œil nouveau; c'est la lecture de la communication de M. Nemchinov au Congrès de Bruxelles de l'Institut International de Statistique (septembre 1958). Nous avons

(1) D'après J. VILLE. *Étude critique de la Notion de Collectif* (1939), p. 139.

l'impression que l'éminent Académicien soviétique assimilait un peu vite les probabilités, l'absence de planification centrale et le capitalisme. Il nous a semblé que, dans certains cas, des événements *déterminés* avec une extrême rigueur mais par un calcul suffisamment compliqué, pouvaient présenter des caractères que des considérations probabilistes simples permettaient d'expliquer au moins en partie. Nous évoquerons d'abord (pour mémoire) des applications d'ordre arithmétique des probabilités. D'autres applications très connues de ce principe (M. F.onsagrive nous l'a rappelé) consistent à faire comme si les derniers chiffres ou les dernières décimales de nombres rigoureusement déterminés étaient des chiffres aléatoires d'égalité de probabilités 1/10. Mais le calendrier (grégorien) nous apporte des applications d'un tout autre genre.

2. LES RÉGULARITÉS STATISTIQUES OBSERVÉES.

Considérons l'apparition d'un *vendredi 13*, un certain mois d'une certaine année. On peut calculer (à l'aide d'un calendrier perpétuel ou par ses propres moyens) la date de tous les vendredis 13 passés (depuis l'avènement du calendrier grégorien) ou à venir. Ainsi l'apparition d'un *vendredi 13* n'a rien d'un événement aléatoire au sens propre du mot. Pourtant si l'on regarde la suite des mois où il y a un vendredi 13, sans savoir de quoi il s'agit, on pourrait croire ces mois tirés au sort :

janvier 1956	février 1959
avril 1956	mars 1959
juillet 1956	novembre 1959
septembre 1957	mai 1960
décembre 1957	janvier 1961
juin 1958	octobre 1961, etc...

A la longue on voit apparaître la régularité statistique suivante :

L'intervalle (le nombre de mois écoulés) entre 2 mois consécutifs de cette suite est très aléatoire, mais leur moyenne sur un intervalle assez long (par exemple sur 5 ou 10 ans) est toujours voisin de 7 mois.

Par exemple entre : janvier 1956 à octobre 1961, il y a 11 intervalles :

5 ans, de janvier 1956 à janvier 1961	60 mois
plus : de janvier 1961 à octobre 1961	9 mois
	69 mois

$$69/11 = \boxed{6 \text{ mois } 3/11}$$

Alors on est conduit à raisonner comme suit :

Chaque mois il y a un jour qui porte le numéro 13. *A priori* il y a 1 chance sur 7 que ce jour soit un vendredi. La probabilité que le 13 du mois soit un vendredi 13 est 1/7.

Ainsi s'explique-t-on que, sur un intervalle de N années (donc 12 N mois) le nombre des vendredis 13 soit peu différent de 12 N/7 ou 1,714 N.

Mais les vendredis 13 successifs ne sont pas des *événements indépendants*.

Ce qui distingue encore foncièrement cette suite d'une série d'événements qui serait tirés au sort (avec 1 chance sur 7) de la façon habituelle (1), c'est qu'on ne rencontre *jamais* d'intervalles de 2, 4, 5, 7, 10, 12, 13 mois, ni aucun intervalle supérieur à 14 mois.

Cependant, avec des suites *séculaires* on trouverait de belles régularités statistiques en ce qui concerne la *fréquence* des intervalles de 1, 3, 6, 8, 9, 11 et 14 mois.

Nous verrons comment on peut déterminer une distribution *théorique* de ces fréquences. Voici en tous cas pour une période de 10 ans (janvier 1956-mai 1966) les répartitions théorique et réelle des intervalles (en mois) entre les événements considérés ici :

Intervalles	Mois	1	3	6	8	9	11	14
Distribution réelle	19	1	6	3	4	3	0	2
Distribution théorique	19	1,2	3,9	3,2	4,7	3,6	0,8	1,6

Il est intuitif que ces 2 distributions ont des ressemblances qu'on ne peut guère imputer à une simple coïncidence.

Avec 10 ans (au lieu de 5) on notera que l'intervalle moyen est un peu plus élevé $124/19 = 6$ mois $10/19$ au lieu de 6 mois $3/11$ et se rapproche donc de 7 mois.

3. LA PSEUDO-PÉRIODE DE 11 ANS.

Une autre observation assez troublante est l'apparition de certaines *répétitions* de séquences, après 6 ans et surtout après 11 ans. Les événements ont une légère tendance après 6 ans — une nette tendance après 11 ans — à paraître *cycliques*.

Le pseudo-cycle de six ans : En voici 2 exemples

(Janvier 1956)	Avril 1956	Juillet 1956	Sept. 1957	Déc. 1957	(Juin 1958)
(Oct. 1961)	Avril 1962	Juillet 1962	Sept. 1963	Déc. 1963	(Mars 1964)
	(Déc. 1963)	Mars 1964	Nov. 1964	Août 1965	(Mai 1966)
	(Février 1970)	Mars 1970	Nov. 1970	Août 1971	(Oct. 1972)

Le pseudo-cycle de onze ans :

Janvier		Sept.	Déc.	Juin	Février	Mars	Nov.
1956	(a)	1957	1957	1958	1959	1959	1959
1967	...	1968	1968	1969	1969	1969	1969
		Octobre	Avril	Juillet	Sept.	Déc.	
	(b)	1961	1962	1962	1963	1963	
	...	1972	1973	1973	1974	1974	
		Août	Mai	Janvier	Octobre		
	(c)	1965	1966	1967	1967		
	...	1976	1977	1978	1978		
		Juin	Février	Mars	Nov.	Août	
	(d)	1969	1970	1970	1970	1971	etc...
	...	1980	1981	1981	1981	1982	

(1) C'est-à-dire par extraction d'une boule noire hors d'une urne renfermant 1 boule noire et 6 blanches.

Il n'est guère contestable que ces coïncidences ne sont pas imputables au hasard banal.

En résumé : La suite des événements considérés présente :

Des régularités statistiques que l'on explique par une loi de probabilité très simple;

Des régularités statistiques qu'il reste à expliquer;

Une tendance à former des cycles (imparfaits) qu'il faudrait aussi expliquer.

4. L'EXPLICATION CAUSALE.

a) Lorsqu'on envisage les 2 siècles s'écoulant de 1901 à 2099, avec l'année bissextile tous les 4 ans, l'apparition d'un *vendredi 13* est un phénomène strictement *périodique*, dont la période est de 28 ans.

En effet : On sait que l'année de 365 jours est formée de 52 semaines de 7 jours *plus un jour*; l'année bissextile, elle, comprend 2 jours en excédent des 52 semaines. Si le 13 février 1959 est un vendredi, le 13 février 1960 est forcément un samedi, et le 13 février 1958 un jeudi.

S'il n'y avait pas d'années bissextiles, on retrouverait un vendredi 13 février en $1959 + 7 = 1966$. Autrement dit : les événements admettraient *une période de 7 ans*.

Comme les années bissextiles sont elles-mêmes un phénomène dont la période est 4 ans (dans les xx^e et xxi^e siècles) et comme 4 et 7 sont des nombres premiers, les *vendredis 13* ne se reproduisent qu'au bout de

$$7 \times 4 = 28 \text{ ans.}$$

b) Mais les 28 ans ou $(7 \times 4 \times 12)$ mois forment 48 fois 7 mois. *En 28 ans* on rencontre 48 *vendredis 13*; et la moyenne des intervalles est rigoureusement de 7 mois.

On trouve ainsi l'explication causale du phénomène :

« *intervalle moyen voisin de 7 mois* »

dont on avait donné au paragraphe 1 une explication probabiliste.

Ajoutons que ces 48 événements sont répartis à raison de 4 en janvier, 4 en février, ... 4 en décembre, et pour chaque mois de l'année, on trouve associées :

- une année bissextile B;
- une année suivant une bissextile (soit C);
- une année paire non bissextile (soit D);
- une année précédant une bissextile (soit A).

Bien entendu on peut l'observer sur la liste des 48 vendredis 13 (en Annexe) de janvier 1956 à janvier $1956 + 28 = 1984$. Et on peut également comprendre pourquoi ceci se produit, en démontant le mécanisme du calendrier perpétuel.

Écrivons la suite des jours *supplémentaires* de chaque mois (pour parler comme les grands ancêtres) et cumulons-les (B = année bissextile).

Mois.	J	F	M	A	M'	J'	J'	A'	S	O	N	D	J	F	M
Jours.	3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	0	3
		(ou 1)												ou 1	
Jours cumulés	B 3	4	7	9	12	14	17	20	22	25	27	30	33	33	36

Écrivons les multiples de 7 :

0 7 14 21 28 35

Nous en déduisons que si *janvier* est doté d'un vendredi 13, on en trouvera un autre :

- en octobre de la même année si celle-ci n'est pas bissextile;
- dès avril de la même année si celle-ci est bissextile.

En procédant de même pour les autres mois, on obtient les 2 tables ou matrices suivantes, permettant de calculer la *suite des vendredis 13* si l'on en connaît déjà un. Le *connaître* signifie qu'on sait :

- 1) de quel *mois* M il s'agit;
- 2) si son *année* (n) est bissextile B ou d'un type CDA défini plus haut.

La table 1 permet de descendre le cours du temps et la table 2 de le remonter.

Remarques :

- 1) Ces tables permettent aussi de franchir les années-bornes 1900 et 2100 (qui ne sont pas bissextiles) (en lisant \bar{B} qui signifie : non bissextile).
- 2) Le vendredi 13 qui suit (M, n) peut tomber la même année n ou la suivante (n + 1).

TABLE 1

Année	C-D ou \bar{B}		B	A
	n	n + 1	n B	(n + 1) B
Janvier	Octobre		Avril	
Février	Mars		Août	
Mars	Novembre			
Avril	Juillet			
Mal		Janvier		—
Juin		Février		—
Juillet		Septembre		Juin
Août		Mal		Octobre
Septembre	Décembre		—	—
Octobre		Avril		Septembre
Novembre		Août		Mal
Décembre		Juin		Mars

TABLE 2

Année	A-D ou B̄		B	C
	n	n - 1	n B	(n - 1) B
Janvier		Mai		—
Février		Juin		—
Mars	Février			Décembre
Avril		Octobre	Janvier	
Mai		Août		Novembre
Juin		Décembre		Juillet
Juillet	Avril		—	
Août		Novembre	Février	
Septembre		Juillet		Octobre
Octobre	Janvier			Août
Novembre	Mars			
Décembre	Septembre			

Les intervalles entre 2 événements auraient alors les distributions théoriques ci-dessous s'il n'y avait pas d'années bissextiles ou s'il n'y avait que des années bissextiles. En pondérant par 3 et 1 respectivement on en déduit la distribution théorique d'ensemble — qui coïncide rigoureusement avec la distribution des 48 intervalles allant de janvier 1956 à janvier 1984.

Distributions théoriques des intervalles (d'après la matrice)

Année :	Mois :	1	3	6	8	9	11	14
		Non bissextile	12	1	2	2	3	3
Bissextile	12	0	4	2	3	0	2	1
Ensemble	48	3	10	8	12	9	2	4

Explication (causale) de la pseudo-période de 11 ans.

On a 132 mois en 11 ans et on remarque que $133 = 7 \times 19$; on est donc très près d'avoir un nombre de mois divisible par 12 (donc par 4) et par 7 à la fois.

D'autre part, en 11 ans il y a 2 ou 3 années bissextiles, plus souvent 3; les jours en supplément des 52 semaines s'accroissent :

$$11 + 3 = 14 = 7 + 2$$

donc avec 3 années bissextiles dans la période, on a un nombre exact de semaines et une *périodicité véritable*, qui s'évanouit dès qu'on n'englobe que 2 années bissextiles. Le cycle existe donc par exemple si l'on considère un intervalle de 11 ans recouvrant les 3 années.

1960 - 1964 - 1968

disons de 1958 à 1969
 1959 à 1970
 début 1960 à début 1971

Mais fin 1971 ne reproduit pas fin 1960. C'est le 29 février 1960 et non le 31 décembre 1959 qui marque la rupture d'une séquence.

Remarque 1 : Les ruptures qui se produisent réellement durent 20 ou 23 mois.

$$\begin{aligned} 20 \text{ mois} &= 9 + 11 = 3 + 3 + 14 = 11 + 3 + 6 = 6 + 8 + 6 \\ 23 \text{ mois} &= 9 + 14 = 6 + 8 + 9 \end{aligned}$$

Des recherches de détail montrent que (tout compte fait) il ne peut se produire d'autres ruptures de cycle que celles-ci.

Rupture de 23 mois	6 + 8 + 9	mois en	1959-1961	désignée au n° 3
	9 + 14	—	1970-1972	par (b)
Rupture de 20 mois	3 + 3 + 14	—	1956-1957	désignée au n° 3
	9 + 11	—	1967-1968	par (a)
Rupture de 20 mois	3 + 8 + 9	—	1964-1965	désignée au n° 3
	6 + 8 + 6	—	1975-1976	par (c)
Rupture de 20 mois	11 + 3 + 6	—	1967-1969	désignée au n° 3
	6 + 3 + 11	—	1978-1980	par (d)

Remarque 2 : Il existe pareillement des pseudo-cycles de 17 ans.

$$11 + 17 = 28$$

5. RETOUR SUR L'EXPLICATION PARTIELLE PROBABILISTE.

Faisons encore quelques remarques.

a) On aurait pu dire *a priori* qu'il y a à peu près 30 jours dans le mois, donc 1 chance sur 30 qu'un jour pris au hasard soit le 13. Si je considère qu'il y a (à peu près) 52 vendredis dans l'année, le nombre moyen annuel de vendredis 13 doit être (à peu près) :

$$\frac{52}{30} = 1,73 \text{ (au lieu de } 1,714\text{).}$$

C'eut été maladroit, mais tout aussi *probabiliste* que le raisonnement d'une chance sur 7. Et même nous pourrions hésiter avant d'oser dire que le nombre moyen annuel de vendredis 13 est $12/7$, si nous ne sommes pas très sûrs que le mois de février (avec ses 28 jours) doit compter autant que les autres mois.

b) Il n'est pas évident que l'argument « probabiliste » (sur lequel on s'est fondé — au paragraphe 2 — pour affirmer que l'intervalle moyen est de 7 mois) vaudrait encore quelque chose avec un calendrier organisé autrement. Quand nous disons que le 13 du mois n'a aucune raison de tomber un vendredi plus souvent qu'un lundi, nous faisons appel en fait à notre expérience passée, qui se limite au calendrier grégorien; si nous avons quelque expérience du calendrier républicain, nous serions peut-être moins catégorique (le 13 du mois était toujours le 3^e jour de la 2^e décade, en somme un mercredi). Sans aller jusqu'à bouleverser totalement le calendrier, on pourrait s'amuser à supposer que chaque trimestre a exactement 13 semaines (mois de 31, 30, 30 jours) plus 1 ou 2 jours supplémentaires au dernier trimestre (31, 30, 31 ou 32 jours). On verrait alors les *vendredis 13* arriver quatre par quatre, puis disparaître, etc.

c) Ceci revient à dire que, sans avoir pénétré dans les dédales de la fabrication des événements que nous considérons, nous en savions assez déjà pour être convaincu de l'existence *d'une symétrie* (entre les 7 jours de la semaine);

comme l'observe Ville (pp. 7-8) c'est une telle symétrie qui permet d'appliquer la définition de la probabilité de Laplace (sans que ce soit un cercle vicieux d'y faire figurer des événements également possibles, c'est-à-dire également probables).

d) D'ailleurs, lorsqu'on franchit l'une des 2 bornes 1900-2100, il faut modifier un peu nos concepts : Entre 1896 à 1904, s'intercalent 7 années sans aucun 29 février, donc un cycle complet de 7 ans, qui, bien entendu, ne modifie en rien la valeur de l'intervalle moyen entre deux vendredis 13.

e) On peut imaginer une variable X_t égale à 1 si le 13 du mois est un vendredi et à 0 si ce n'est pas un vendredi, t désignant le temps ou plutôt tout élément de l'ensemble infini des mois et des années qui se succèdent :

$$t = (M, n)$$

A la chaîne des vendredis 13 correspond une sorte de « collectif », une suite de 0 et de 1 (infinie d'ailleurs dans les 2 sens).

f) Nous ne connaissons encore *qu'une seule chaîne*, celle (qui est donnée en annexe 1 et) qui par exemple présente :

$$X_t = 1 \text{ pour } (M, n) = \text{janvier 1956}$$

Rien ne nous empêche d'en imaginer d'autres. Par exemple :

$$X_t = 1 \text{ pour } (M, n) = \text{février 1956}$$

Nous avons donc :

$$M = \text{février}; n = B$$

Mais nous nous apercevons que, dans la chaîne des vendredis 13 réels, il en existe déjà un qui présente les 2 mêmes caractères; c'est :

février 1976 (voir les tableaux, Annexes 2 et 4).

Ainsi il est inutile de recalculer la nouvelle chaîne : elle est identique à la chaîne-réalisation, translatée de 20 ans.

Ceci est général. Toutes les chaînes qu'on peut ainsi imaginer, pourvu qu'on reste à l'intérieur de l'intervalle 1900-2100, se déduisent de notre chaîne-réelle par translation.

Ceci suppose bien entendu qu'on conserve le calendrier, et la variable :

$$X = 1$$

correspond cette fois à l'événement : *Lundi 13*, qui ne diffère du *vendredi 13* que par son contenu émotionnel.

g) On imagine donc un double tirage au sort (Annexe 2) où :

- M a une chance sur 12 d'occuper chaque ligne du tableau;
- n a une chance sur 4 d'être ABC ou D (*du moins tant qu'on reste au xx^e siècle ou au xix^e*).

Supposons que (M, n) soit doté d'un vendredi 13, nous avons la possibilité (théorique et pratique) de calculer la suite des vendredis 13 *de la même chaîne*.

Nous avons donc tiré au sort toute *une chaîne de vendredis 13* (ou, plus généralement, de $X = 1$).

La *loi de probabilité* précédente de X était *invariable* dans le temps. Ce n'est plus vrai si l'on tient compte des années 1900 et 2100; on peut presque parler alors de processus stochastique (combinaison de 2 lois de probabilité dont une ne joue que tous les 100 ou 200 ans).

Pour avril 1900, avril 1928, avril 1956, *on a* $X = 1$.

Pour janvier 1928 et 1956 aussi; non pour *janvier 1900*.

La table 2 nous renvoie d'avril 1900 à *octobre 1899*, c'est-à-dire :

$$M = \text{octobre}, \quad n = A \quad (\text{c'est-à-dire } n - 3 = B)$$

A l'Annexe (2 et 1) nous retrouvons *octobre 1967*. Il suffira de translater de 68 ans en arrière, le début de l'Annexe 1 (96 ans pour la fin de l'Annexe) pour trouver la *réalisation* du processus, et ainsi de suite.

En résumé : Des translations convenables de la chaîne périodique de l'Annexe 1 nous fournissent les prolongements de la chaîne avant 1901 et après 2099.

Annexe 1 : Données

Mois possédant un vendredi 13

	Intervalles (mois)
B Janvier 1956	3
Avril 1956	3
Juillet 1956	3
C Septembre 1957	14
Décembre 1957	3
D Juin 1958	6
A Février 1959	8
Mars 1959	1
Novembre 1959	8
B Mai 1960	6
C Janvier 1961	8
Octobre 1961	9
D Avril 1962	6
Juillet 1962	3
A Septembre 1963	14
Décembre 1963	3
B Mars 1964	3
Novembre 1964	8
C Août 1965	9
D Mai 1966	9
A Janvier 1967	8
Octobre 1967	9
B Septembre 1968	11
Décembre 1968	3
C Juin 1969	6
D Février 1970	8
Mars 1970	1
Novembre 1970	8
A Août 1971	9
B Octobre 1972	14
C Avril 1973	6
Juillet 1973	3
D Septembre 1974	14
Décembre 1974	3
A Juin 1975	6
B Février 1976	8
Août 1976	6

Mois possédant un vendredi 13 (suite)

	<i>Intervalles (mois)</i>
C Mai 1977	9
D Janvier 1978	8
Octobre 1978	9
A Avril 1979	6
Juillet 1979	3
B Juin 1980	11
C Février 1981	8
Mars 1981	1
Novembre 1981	8
D Août 1982	9
A Mai 1983	9
B Janvier 1984	8
Avril 1984	3
1956 + 28 = 1984	

<i>Mois</i>	<i>Distribution</i>
—	—
14	4
11	2
9	9
8	12
6	8
3	10
1	3
	<hr/>
	48
	<hr/>
	334

Moyenne : 7,0

Annexe 2

*Répartition des 48 vendredis 13 des 28 années
par mois et par type d'année*

Janvier	B	C	A	D
Février	A	D	B	C
Mars	A	B	D	C
Avril	B	D	C	A
Mai	B	D	C	A
Juin	D	C	A	B
Juillet	B	D	C	A
Août	C	A	B	D
Septembre	C	A	B	D
Octobre	C	A	B	D
Novembre	A	B	D	C
Décembre	C	A	B	D
B	4	2	5	1
C	4	2	3	3
D	1	4	2	5
A	3	4	2	3

Année :

- A : avant bissextile
- B : bissextile
- C : après bissextile
- D : paire non bissextile

Cette répartition rappelle bien entendu certains « plans d'expérience »; et on pourrait par exemple chercher pourquoi certaines permutations de A B C D n'apparaissent pas, etc...

P. THIONET.