

P. GORRA

Le contrôle statistique des parités monétaires. Les nombres-indices géographiques des prix

Journal de la société statistique de Paris, tome 94 (1953), p. 243-260

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1953__94__243_0

© Société de statistique de Paris, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

V

LE CONTROLE STATISTIQUE DES PARITÉS MONÉTAIRES

Les nombres-indices géographiques des prix

INTRODUCTION

Le problème du contrôle statistique des parités monétaires peut se poser comme suit.

Dans quelle mesure précise, les parités monétaires officielles s'écartent-elles des parités monétaires réelles qui résultent des rapports des prix entre les divers pays?

Nous définirons la parité d'une monnaie comme la commune mesure, exprimée en or ou en toute autre unité internationale (1) qui la rattache aux autres monnaies.

(1) Conformément aux accords internationaux actuels où le lien avec l'or est soit direct (poids d'or fin) soit indirect (valeur or du dollar des États-Unis au 1^{er} juillet 1944). Voir article IV, section I de l'Agreement of the International Monetary Fund.

Le contrôle de la parité monétaire d'un pays exige que puisse être établi, pour une période donnée, un nombre-indice des prix de ce pays basé sur l'ensemble des prix des autres pays.

Ces divers éléments statistiques, les prix, se trouvant dans un cadre de comparaisons d'ordre géographique et non pas d'ordre chronologique, seront exprimés dans les unités monétaires de nombreux pays.

Pour les besoins des calculs, convenons d'ores et déjà de convertir toujours ces multiples unités de compte en l'unité monétaire d'un pays quelconque qui, dans les circonstances présentes du monde, sera pratiquement le dollar des États-Unis.

Nous effectuerons évidemment ces conversions aux taux de change officiels, de façon à ce que les résultats obtenus permettent le contrôle des parités officielles.

Si le nombre-indice « géographique » ainsi obtenu révèle que le niveau des prix du pays est, par exemple, double du niveau des prix des autres pays, nous pourrions dire que la valeur réelle de sa monnaie n'est que la moitié de sa valeur légale, autrement dit, que sa monnaie accuse une disparité, dont la proportion est, conformément aux notions courantes, enregistrée très simplement par l'inverse de ce nombre-indice des prix.

Ainsi, un nombre-indice géographique des prix égal à 1,25 (ou 125 si la base est 100) révèle une disparité de 0,80 (ou 80 si la base est 100) signifiant que la parité réelle de cette monnaie est de 20 % inférieure à sa parité officielle.

L'application du taux de disparité à la parité officielle donne la parité monétaire réelle ou valeur réelle de la monnaie.

A supposer ces valeurs réelles établies pour tous les pays, leurs rapports respectifs seraient les taux réels de change ou taux de change réels entre les monnaies des divers pays du monde.

Au cours de cette étude nous nous conformerons aux principes suivants :

- 1^o n'utiliser que des éléments statistiquement observables,
- 2^o exprimer le maximum d'information que donnent ces éléments,
- 3^o ne faire appel, autant que possible, qu'à des notions ayant une signification claire et concrète.

En l'espèce, les formules dont nous allons proposer l'emploi devront également satisfaire à une quatrième condition.

Elles devront en effet être réversibles, la comparaison des prix d'un pays A par rapport à un pays B devant conduire à un résultat inverse de celui qui serait obtenu par la comparaison des prix du pays B par rapport au pays A.

Nous examinerons successivement :

— la comparaison entre deux pays, qui se traduira par des nombres-indices de prix et autres notions que nous qualifierons de « binaires »,

— la comparaison entre un pays et l'ensemble des autres pays, qui nous permettra d'établir la valeur extérieure réelle d'une monnaie ainsi que des taux particuliers de change réel,

— la comparaison de tous les pays entre eux, qui nous conduira, sans accorder un rôle privilégié à un pays particulier, à la détermination générale des parités monétaires réelles (valeur internationale réelle d'une monnaie et taux généraux de change réel).

Section I. — Comparaison entre deux pays.

(Nombres-indices « binaires » de prix)

§-1. — NOMBRES-INDICES NON PONDÉRÉS

Dans une comparaison de prix entre deux pays A et B l'observation ne peut porter que sur les produits communs à ces deux pays.

Adoptons les notations suivantes pour désigner les prix dans les deux pays de ces g produits communs.

Pays	Prix des produits communs
A	$p_1^a \ p_2^a \ p_3^a \ \dots \ p_g^a$
B	$p_1^b \ p_2^b \ p_3^b \ \dots \ p_g^b$

Ces prix n'étant pas pondérés, nous avons deux procédés à notre disposition pour exprimer le rapport moyen des prix.

1° *Moyenne arithmétique des indices élémentaires (1) de chaque produit.*

Elle s'écrit, en prenant le pays B pour base :

$$I\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{g} S \left[\left(\frac{p_i^a}{p_i^b} \right) \right]$$

et en prenant le pays A pour base :

$$I\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{g} S \left[\left(\frac{p_i^b}{p_i^a} \right) \right].$$

On voit immédiatement que cette formule d'indice n'est pas réversible, $I\left(\frac{B}{A}\right)$ n'étant pas l'inverse de $I\left(\frac{A}{B}\right)$.

Cet indice simple n'étant pas réversible, *a fortiori* l'indice pondéré ne le serait pas.

Nous pouvons en conclure immédiatement que tout indice défini par la moyenne arithmétique doit être écarté dans les comparaisons d'ordre géographique.

2° *Moyenne géométrique des indices élémentaires de chaque produit.*

Elle s'écrit, si la base est le pays B :

$$I\left(\frac{A}{B}\right) = \left[\frac{p_1^a}{p_1^b} \cdot \frac{p_2^a}{p_2^b} \cdot \frac{p_3^a}{p_3^b} \cdot \dots \cdot \frac{p_g^a}{p_g^b} \right]^{\frac{1}{g}}$$

et si la base est le pays A :

$$I\left(\frac{B}{A}\right) = \left[\frac{p_1^b}{p_1^a} \cdot \frac{p_2^b}{p_2^a} \cdot \frac{p_3^b}{p_3^a} \cdot \dots \cdot \frac{p_g^b}{p_g^a} \right]^{\frac{1}{g}}.$$

(1) Nous désignerons de manière générale, au cours de cette étude, par indice élémentaire, le simple rapport de deux prix d'un même produit.

Ces indices sont réversibles, leur produit, la racine $g^{\text{ième}}$ de 1 étant bien égal à l'unité, mais il n'est pas possible de donner une signification strictement concrète de ces formules qui satisfont pourtant aux exigences logiques du problème de l'ordre de grandeur des nombres-indices.

§-2. — NOMBRES-INDICES PONDÉRÉS

Adoptons les notations suivantes pour désigner les quantités, observées dans les deux pays, des g produits communs.

Pays	Quantités des produits communs
A	$q_1^a \ q_2^a \ q_3^a \ \dots \ q_g^a$
B	$q_1^b \ q_2^b \ q_3^b \ \dots \ q_g^b$

Ces quantités étant connues, nous pouvons exprimer les niveaux relatifs des prix entre ces deux pays par des rapports de valeurs.

En adoptant comme poids les quantités communes aux deux pays, c'est-à-dire les plus petites des quantités q_1^a et q_1^b , q_2^a et q_2^b etc., l'indice pondéré donnant le rapport des prix du pays A par rapport au pays B peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{p_1^a (< q_1^a, q_1^b) + p_2^a (< q_2^a, q_2^b) + \dots + p_g^a (< q_g^a, q_g^b)}{p_1^b (< q_1^a, q_1^b) + p_2^b (< q_2^a, q_2^b) + \dots + p_g^b (< q_g^a, q_g^b)}$$

que l'on peut exprimer plus simplement comme suit :

$$I \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{S [p^a (< q^a, q^b)]}{S [p^b (< q^a, q^b)]}$$

On voit immédiatement que cet indice est réversible car :

$$I \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{S [p^b (< q^a, q^b)]}{S [p^a (< q^a, q^b)]}$$

Cet indice a une signification particulièrement claire puisqu'il compare les valeurs, évaluées aux prix des deux pays, d'un même ensemble de produits, cet ensemble étant défini de façon telle qu'on n'est jamais amené à prendre en considération la quantité d'un produit qui dépasse la quantité existant dans l'un quelconque des deux pays.

Autrement dit, on n'utilise toujours que des éléments strictement observables, cet indice semblant bien, par ailleurs, enregistrer le maximum d'information qui puisse être extrait des observations puisque les poids adoptés ne pourraient être augmentés sans supposer l'existence d'une quantité supplémentaire dans le pays à plus petite quantité, ce qui serait empiéter sur la zone inobservable des éléments à notre disposition.

* * *

Ces divers indices binaires, pondérés ou non, fournissent des renseignements déjà précieux, mais d'intérêt évidemment limité, puisque restreint aux pays considérés deux à deux.

Si toutefois l'on a des raisons de croire que le niveau des prix d'un pays A est un niveau normal auquel les prix de tous les autres pays B, C, D... devraient bon gré mal gré s'ajuster, ou si l'on considère simplement que l'unité monétaire de ce pays constitue un excellent « étalon des valeurs » à l'aide duquel on peut mesurer utilement les monnaies des autres pays, l'ensemble des indices $I\left(\frac{B}{A}\right)$, $I\left(\frac{C}{A}\right)$, $I\left(\frac{D}{A}\right)$... nous permet déjà d'estimer les proportions (disparités binaires)

dont les valeurs officielles des monnaies des pays B, C, D... diffèrent de leurs valeurs réelles basées sur le niveau des prix du pays A (valeurs réelles binaires).

Ces estimations pourraient être dans certains cas pratiquement suffisantes mais ne sont théoriquement nullement satisfaisantes.

Il est aisé d'élaborer des notions plus perfectionnées qui conduisent à des résultats plus proches de la réalité.

Section II. — Comparaison entre un pays et l'ensemble des autres pays.

(Valeur extérieure réelle d'une monnaie et taux particuliers de change réel.)

Par un indice chronologique de prix, on peut suivre les variations de la valeur intérieure réelle d'une monnaie à travers le temps.

Par un indice géographique de prix, on peut établir la valeur extérieure réelle de cette monnaie à un moment quelconque (1).

A cet effet, la connaissance de l'indice binaire des prix ne suffit pas, le contrôle de la valeur de l'unité monétaire devant se faire par rapport à tous les pays présentant des éléments de comparaison avec le pays considéré.

§-1. — NOMBRES-INDICES NON PONDÉRÉS

Trois procédés se présentent pour établir l'indice des prix d'un pays A par rapport à l'ensemble des prix d'autres pays B, C, D...

Premier procédé. — Moyenne géométrique simple des indices binaires établis entre le pays A et chacun des autres pays.

Désignons par $p_1^a, p_2^a, p_3^a \dots p_n^a$ les prix dans le pays A des n produits communs à ce pays A et à l'un quelconque des autres pays B, C, D... (2).

Certains de ces n produits ne se retrouvent pas parmi les g produits communs à ce pays A et au pays B.

Comparée avec la liste des n prix du pays A, la liste des g prix du pays B présentera donc certains manques, certains « trous », g étant par définition plus petit que n .

De même, d'autres de ces n produits de A ne se retrouvent pas parmi les h produits communs à ce pays A et au pays C, et comparée à la liste des n prix

(1) On pourrait également suivre les variations de cette valeur extérieure à travers le temps. Elles ne différeraient des variations de la valeur intérieure que par les mouvements des prix étrangers.

(2) Autrement dit, tous les produits du pays A à l'exception de ceux qui sont strictement et exclusivement des produits « nationaux » que l'on ne retrouve pas dans les autres pays et qui ne sont pas exportés.

de A, la liste des h prix de C présentera également certains « trous » et ainsi de suite.

Nous pouvons donc exprimer par exemple sous la forme suivante l'ensemble intégral des éléments observables à notre disposition.

<u>Pays</u>	<u>Prix</u>	<u>Nombre de produits communs avec le pays A</u>
A	$p_1^a p_2^a p_3^a p_4^a \dots p_n^a$	—
B	$p_1^b p_2^b \dots p_4^b p_5^b \dots p_n^b$	g
C	$\dots p_2^c p_3^c \dots p_4^c \dots p_n^c$	h
D	$p_1^d \dots p_3^d p_4^d \dots \dots$	i
E	$p_1^e p_2^e p_3^e \dots p_5^e \dots p_n^e$	j
.....	

Désignons par $I\left(\frac{A}{B}\right)$, $I\left(\frac{A}{C}\right)$, $I\left(\frac{A}{D}\right)$..., les indices binaires des prix du pays A par rapport aux prix des autres pays B, C, D...

S'il y a m pays, y compris le pays A, le nombre de ces indices binaires est $m - 1$ et leur moyenne géométrique simple s'écrit :

$$\left[I\left(\frac{A}{B}\right) I\left(\frac{A}{C}\right) I\left(\frac{A}{D}\right) \dots \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Deuxième procédé. — *Moyenne géométrique simple des indices particuliers de chaque produit.*

Au lieu de comparer d'abord les prix des produits pour chaque couple de pays et de synthétiser ensuite les divers indices binaires ainsi obtenus, on peut suivre la marche inverse et comparer d'abord le prix de chaque produit du pays A à la moyenne des prix du même produit dans les autres pays et synthétiser ensuite ces indices particuliers à chaque produit.

Désignons ces indices particuliers par :

$$I_1\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right) \cdot I_2\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right) \dots I_n\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right)$$

Comme il y a n produits, la moyenne géométrique de ces indices particuliers s'écrit :

$$\left[I_1\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right) \cdot I_2\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right) \cdot I_3\left(\frac{A}{B, C, D, \dots}\right) \dots \right]^{\frac{1}{n}}$$

Troisième procédé. — *Moyenne géométrique simple de tous les indices élémentaires.*

Pour autant que l'ensemble de tous les indices élémentaires soit représentatif de la réalité, la moyenne géométrique de tous ces indices donne une solution du problème plus satisfaisante que les deux autres, puisqu'elle attribue la même importance à tous les éléments observés, alors que par le premier procédé on admet à égalité des indices binaires synthétisant respectivement deux ou trois de ces éléments ou une centaine d'entre eux, et que par le deuxième

procédé on donne la même importance à chaque produit quelle que soit sa diffusion géographique.

Cet indice dont la formule est simple pourrait être aisément retrouvé à partir de n'importe lequel des deux autres en introduisant dans leurs formules les poids nécessaires pour corriger l'arbitraire de leur élaboration.

Cet indice diffère des autres en ce qu'il réalise automatiquement une sorte de pondération numérique des produits, chaque produit étant compté autant de fois qu'il y a de pays dans lesquels son prix peut être observé.

Il renferme donc une plus grande quantité d'information et doit *a priori* être préféré.

2. — NOMBRES-INDICES PONDÉRÉS

Alors que pour les indices non pondérés nous ne pouvions retenir que des éléments synthétisés par la moyenne géométrique, nous pouvons maintenant également considérer des rapports de valeurs.

Deux procédés sont donc à notre disposition.

Premier procédé. — Moyenne géométrique pondérée des indices élémentaires.

Cet indice est le même que celui qui vient d'être défini (3^e procédé) avec cette différence que la pondération maintenant directe est moins grossière, plus proche de la réalité des observations.

Le poids choisi pour chaque indice élémentaire doit être représentatif de la valeur du produit pour l'un et pour l'autre des deux pays.

Ce pourrait être par exemple :

— soit la valeur déterminée en multipliant le prix moyen du produit dans les deux pays par la plus petite des deux quantités :

$$\sqrt{p^a p^b} (< q^a, q^b)$$

— soit la plus petite des valeurs de la production du produit dans les deux pays (*valeurs communes*) :

$$< p^a q^a, p^b q^b.$$

Cette dernière formule a une signification parfaitement claire et conduit à un système de poids constitué de telle sorte que l'importance donnée à chaque indice élémentaire de prix n'est jamais supérieure à la valeur de la production totale du produit dans n'importe lequel des deux pays.

Deuxième procédé. — Rapports de valeurs.

En nous reportant à la définition de l'indice binaire basé sur un rapport de valeurs (1) nous pouvons voir qu'il est aisé d'en généraliser la formule.

L'indice donnant le rapport des prix du pays A aux prix des pays B, C, D... s'écrirait :

$$I \left(\frac{A}{B, C, D..} \right) = \frac{S [p^a (< q^a, q^b)] + S [p^a (< q^a, q^c)] + S [p^a (< q^a, q^d)] + \dots}{S [p^b (< q^a, q^b)] + S [p^c (< q^a, q^c)] + S [p^d (< q^a, q^d)] + \dots}$$

(1) Page 246.

Il a une signification très simple exprimant le rapport des valeurs de l'ensemble global de toutes les quantités communes au pays A et à chacun des pays B, C, D... séparément.

* * *

Les diverses formules pondérées ou non au moyen desquelles on calcule l'indice extérieur des prix du pays A indiquent dans quelle proportion la définition légale de la monnaie du pays A sous-évalue ou sur-évalue sa valeur réelle résultant du niveau de ses prix (1) et fournissent donc avec cette fois-ci le plus grand degré de certitude, puisqu'elles utilisent tous les éléments observables, une estimation précise de la disparité extérieure de cette monnaie, et permettent de définir sa valeur extérieure réelle.

Si nous obtenons les mêmes indices extérieurs pour le pays B par rapport aux pays A, C, D, E... pour le pays C par rapport aux pays A, B, D, E... et ainsi de suite, les rapports entre elles des diverses valeurs extérieures réelles détermineront certains taux de change réel entre les divers pays du monde.

Toutefois, chacun de ces indices étant calculé séparément, aucun d'eux ne tient compte des valeurs réelles des monnaies des autres pays. Nous appellerons donc taux « particuliers » de change réel les taux réels de change qu'ils ont permis de définir.

Les solutions qu'ils donnent au problème des parités monétaires ne constituent encore qu'une première approximation, qui pourrait d'ailleurs être immédiatement améliorée par la méthode des approximations successives, en appliquant, pour la conversion des prix en une unité de compte commune, non plus les taux de change officiels, mais ces taux particuliers ainsi définis.

Nous allons voir cependant que l'on peut obtenir directement des taux réels de change tenant compte des interactions réciproques des prix de tous les pays entre eux.

Section. III. — Comparaison de tous les pays entre eux.

(Valeurs internationales des monnaies ou parités monétaires réelles et taux généraux de change réel.)

Le problème que nous allons maintenant tenter de résoudre est le problème le plus général que pose le contrôle statistique des parités monétaires.

Il peut s'énoncer comme suit : « Quels devraient être les taux de change entre les divers pays du monde pour que les prix aient le même niveau moyen dans tous les pays? »

Le fait que la comparaison a lieu entre tous les pays indistinctement n'entraîne évidemment pas que l'on doive retenir, comme seuls éléments observables, les éléments communs à tous les pays. Cette manière de procéder appauvrirait les observations en les amputant d'une part considérable de la quantité

(1) Rappelons que dans toutes ces opérations, les prix sont exprimés en une unité monétaire commune, d'ailleurs quelconque, la conversion des autres unités monétaires en cette unité de compte commune ayant toujours été faite aux taux de change officiels.

d'information qu'elles contiennent, puisqu'on éliminerait de la comparaison entre le pays A et le pays B, par exemple, des éléments communs à ces deux pays, mais inobservés dans l'un quelconque des autres pays C, D...

Le maximum d'information est donc obtenu en continuant à comparer les pays deux à deux.

§ 1. — NOMBRES-INDICES NON PONDÉRÉS

A. — Taux généraux de change réel.

Posons le problème d'abord sous sa forme la plus simple et proposons-nous de déterminer des taux généraux de change réel en partant de l'ensemble de tous les indices binaires de prix relatifs à chaque couple de pays.

Ces données peuvent être représentées dans le tableau à double entrée suivant :

Pays	A	B	C	D
A	—	$I \left(\frac{B}{A} \right)$	$I \left(\frac{C}{A} \right)$	$I \left(\frac{D}{A} \right) \dots$
B	$I \left(\frac{A}{B} \right)$	—	$I \left(\frac{C}{B} \right)$	$I \left(\frac{D}{B} \right) \dots$
C	$I \left(\frac{A}{C} \right)$	$I \left(\frac{B}{C} \right)$	—	$I \left(\frac{D}{C} \right) \dots$
D	$I \left(\frac{A}{D} \right)$	$I \left(\frac{B}{D} \right)$	$I \left(\frac{C}{D} \right)$	— \dots
.....				

Par suite de la condition de réversibilité, les indices situés dans les cases de ce tableau se trouvant au-dessous des cases vides diagonales sont les inverses des indices situés aux emplacements symétriques dans le triangle supérieur.

Désignons par $x, y, z, t...$ les nombres-indices inconnus qui représentent le niveau moyen des prix des pays A, B, C, D... par rapport au niveau moyen des prix mondiaux et formons la moyenne géométrique des indices binaires relatifs à un pays donné, la conversion de tous les prix en une unité monétaire commune étant maintenant effectuée en corrigeant les taux de change officiels dans les proportions imposées par les rapports mêmes de ces nombres-indices encore inconnus.

Autrement dit, la moyenne géométrique simple des indices binaires relatifs au pays A par exemple s'écrirait maintenant :

$$\left[I \left(\frac{A}{B} \right) \frac{y}{x} I \left(\frac{A}{C} \right) \frac{z}{x} I \left(\frac{A}{D} \right) \frac{t}{x} \dots \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

La condition principale de notre problème à savoir, comme nous l'avons dit, que le niveau moyen des prix doit être le même dans tous les pays, s'exprimerait en déterminant les inconnues $x, y, z, t...$ de façon telle que tous les indices ayant la forme précédente soient égaux à l'unité, condition qui équivaut

simplement à éгалer à l'unité les quantités sous le radical. Ces inconnues doivent donc satisfaire au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 x^{m-1} &= I\left(\frac{A}{B}\right) y \cdot I\left(\frac{A}{C}\right) z \cdot I\left(\frac{A}{D}\right) t \dots \\
 y^{m-1} &= I\left(\frac{B}{A}\right) x \cdot I\left(\frac{B}{C}\right) z \cdot I\left(\frac{B}{D}\right) t \dots \\
 z^{m-1} &= I\left(\frac{C}{A}\right) x \cdot I\left(\frac{C}{B}\right) y \cdot I\left(\frac{C}{D}\right) t \dots \\
 t^{m-1} &= I\left(\frac{D}{A}\right) x \cdot I\left(\frac{D}{B}\right) y \cdot I\left(\frac{D}{C}\right) z \dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ce système de m équations à m inconnues est indéterminé, l'une quelconque de ces équations pouvant être, à cause de la réversibilité des indices, obtenue par le produit des $m - 1$ autres.

Le système a donc un degré de liberté et admet théoriquement une infinité de solutions proportionnelles entre elles, dont l'expression facile à obtenir est :

$$\frac{x^m}{I\left(\frac{A}{B}\right) I\left(\frac{A}{C}\right) I\left(\frac{A}{D}\right) \dots} = \frac{y^m}{I\left(\frac{B}{A}\right) I\left(\frac{B}{C}\right) I\left(\frac{B}{D}\right) \dots} = \frac{z^m}{I\left(\frac{C}{A}\right) I\left(\frac{C}{B}\right) I\left(\frac{C}{D}\right) \dots} = \dots$$

Ces équations déterminent sans ambiguïté les rapports de toutes les inconnues entre elles. Les indices constitués par ces rapports sont les proportions dont les taux officiels de change devraient être modifiés pour devenir des taux réels de change satisfaisant au problème posé.

Par opposition aux taux particuliers de change réel précédemment définis qui faisaient jouer un rôle privilégié à un pays donné, nous les appellerons taux généraux de change réel.

B. — Valeurs internationales des monnaies ou parités monétaires réelles.

L'ensemble des solutions que l'on obtiendrait pour x, y, z, t, \dots en égalant à l'unité les rapports les définissant qui viennent d'être établis a une signification extrêmement intéressante.

Ces solutions s'écrivent en effet :

$$\begin{aligned}
 x &= \left[I\left(\frac{A}{B}\right) I\left(\frac{A}{C}\right) I\left(\frac{A}{D}\right) \dots \right]^{\frac{1}{m}} \\
 y &= \left[I\left(\frac{B}{A}\right) I\left(\frac{B}{C}\right) I\left(\frac{B}{D}\right) \dots \right]^{\frac{1}{m}} \\
 z &= \left[I\left(\frac{C}{A}\right) I\left(\frac{C}{B}\right) I\left(\frac{C}{D}\right) \dots \right]^{\frac{1}{m}} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ces formes peuvent être considérées comme les moyennes géométriques de m indices, à savoir les $m - 1$ indices binaires exprimant les rapports des prix

entre le pays considéré et les autres pays et l'indice toujours égal à l'unité relatif à ce pays par rapport à lui-même (cases diagonales du tableau à double entrée).

Autrement dit, les niveaux moyens des prix de chaque pays sont maintenant définis non plus par rapport aux seuls prix extérieurs à ce pays, mais par rapport à l'ensemble des prix mondiaux, ensemble englobant cette fois les prix mêmes du pays considéré.

Les inverses de ces indices moyens que nous appellerons indices internationaux des prix des pays A, B, C... sont donc des évaluations des disparités des monnaies basées sur une notion plus large que celle qui nous a permis de définir la disparité extérieure d'une monnaie. Nous conviendrons de les appeler disparités internationales.

Leur application aux parités officielles nous donne les valeurs internationales des monnaies que nous appellerons plus simplement les parités monétaires réelles.

Leur sens apparaît encore plus clairement en remarquant que la moyenne géométrique de toutes ces disparités internationales est égale à l'unité. Autrement dit, l'adoption des parités monétaires réelles qu'elles définissent laisserait inchangé le niveau moyen des prix mondiaux. Toute autre détermination de ces parités réelles correspondrait à une inflation ou à une déflation à l'échelle mondiale, l'amplitude de cette inflation ou déflation étant fournie très simplement par la moyenne géométrique de ces autres parités choisies (1).

§ 2. — NOMBRES-INDICES PONDÉRÉS

Deux procédés peuvent être employés :

Premier procédé. — Moyenne géométrique pondérée des indices binaires.

Convenons de donner à chaque indice binaire un poids représentant la somme des valeurs communes (2) relatives à chacun des indices élémentaires constituant cet indice binaire.

Désignons ces poids par une notation que nous formerons tout simplement par des parenthèses à l'intérieur desquelles seront inscrites les lettres représentant les deux pays considérés.

Ainsi (CD) par exemple symbolisera le poids, c'est-à-dire le total des valeurs communes, relatif aux pays C et D.

La moyenne géométrique pondérée des indices binaires concernant le pays A s'écrirait avec ces notations :

$$\left[I \left(\frac{A}{B} \right)^{(A B)} I \left(\frac{A}{C} \right)^{(A C)} I \left(\frac{A}{D} \right)^{(A D)} \dots \right]^{\frac{1}{(A B) + (A C) + (A D) + \dots}}$$

En désignant comme précédemment par x, y, z, t, \dots les nombres-indices recherchés, cette formule s'écrirait pour satisfaire à la condition posée :

$$\left[I \left(\frac{A}{B} \right) \frac{y}{x} \right]^{(A B)} \left[I \left(\frac{A}{C} \right) \frac{z}{x} \right]^{(A C)} \left[I \left(\frac{A}{D} \right) \frac{t}{x} \right]^{(A D)} \dots = 1$$

(1) A remarquer toutefois que cette autre détermination, à supposer qu'elle soit adoptée au même moment dans tous les pays, se traduirait en fait par une modification du poids d'or fin contenu dans les unités monétaires des divers pays, autrement dit par une simple appréciation ou dépréciation du prix de ce métal, l'inflation ou la déflation étant dans ce cas purement nominales.

(2) Voir page 249.

En prenant les logarithmes, on obtient une équation linéaire, laquelle peut s'écrire, ainsi que les équations similaires concernant les pays B, C, D..., sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [(AB)+(AC)+(AD)+\dots] \log x &= (AB) \log y + (AC) \log z + (AD) \log t + \dots + K_A \\ [(AB)+(BC)+(BD)+\dots] \log y &= (AB) \log x + (BC) \log z + (BD) \log t + \dots + K_B \\ [(AC)+(BC)+(CD)+\dots] \log z &= (AC) \log x + (BC) \log y + (CD) \log t + \dots + K_C \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

les quantités K_A, K_B, K_C, \dots , étant des constantes d'expression connue.

Ce système de m équations linéaires à m inconnues étant indéterminé, une des équations résultant de la somme des autres, les solutions peuvent se présenter sous forme d'un système de nombres proportionnels.

Il est donc possible de déterminer sans ambiguïté les rapports des inconnues x, y, z, t, \dots entre elles et d'obtenir en conséquence les taux généraux de change réel en laissant ces inconnues elles-mêmes encore indéterminées.

Pour les définir, nous devons nous poser une condition supplémentaire qui pourrait être :

— soit (invariabilité simple des prix mondiaux)-

$$x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot \dots = 1 \text{ équivalant à } \sqrt[m]{x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot \dots} = 1$$

signifiant que le niveau moyen des prix mondiaux, exprimé par la moyenne géométrique simple des prix des divers pays, doit rester invariable,

— soit (invariabilité pondérée des prix mondiaux),

$$\begin{array}{ccccccc} (AB)+(AC)+(AD)+\dots & (AB)+(BC)+(BD)+\dots & (AC)+(BC)+(CD)+\dots & & & & \\ \cdot x & \cdot y & \cdot z & & & & \dots = 1 \end{array}$$

ayant la même signification générale, à cette différence près que la moyenne géométrique est maintenant pondérée, les poids étant définis comme la somme de toutes les valeurs communes au pays considéré et à chacun des autres pays séparément.

L'une comme l'autre de ces conditions conduit à un seul ensemble de solutions par application des règles classiques de la théorie des déterminants.

De ces solutions qui sont les nombres-indices internationaux des prix des pays A, B, C... on déduit aisément les disparités internationales des monnaies de ces pays et leurs parités monétaires réelles.

Deuxième procédé. — Rapports de valeurs.

Simplifions la notation admise jusqu'à présent pour désigner la plus petite de deux quantités et désignons-la par $q_{<ab}$ au lieu de $< q_a, q_b$.

La formule donnant le rapport des prix du pays A aux prix des pays B, C, D (1) s'écrit alors :

$$I \left(\frac{A}{B, C, D, \dots} \right) = \frac{S (p^a q_{<ab}) + S (p^a q_{<ac}) + S (p^a q_{<ad}) + \dots}{S (p^b q_{<ab}) + S (p^c q_{<ac}) + S (p^d q_{<ad}) + \dots}$$

(1) Voir page 252.

En désignant comme précédemment par x, y, z, t, \dots les nombres-indices internationaux des pays A, B, C, D... recherchés cette formule s'écrirait pour satisfaire à la condition posée :

$$\frac{S(p^a q_{<ab}) + S(p^a q_{<ac}) + S(p^a q_{<ad}) + \dots}{x} = \frac{S(p^b q_{<ab})}{y} + \frac{S(p^c q_{<ac})}{z} + \frac{S(p^d q_{<ad})}{t} + \dots$$

Il est facile de voir que l'application de la même condition aux formules exprimant les indices internationaux des prix de B, de C, de D... nous donne un système de m équations linéaires et homogènes par rapport à de nouvelles variables x', y', z', t', \dots définies par les transformations $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}, z' = \frac{1}{z}$

$$t' = \frac{1}{t} \dots$$

Ces équations sont :

$$\begin{aligned} x' [S(p^a q_{<ab}) + S(p^a q_{<ac}) + \dots] &= y' S(p^b q_{<ab}) + z' S(p^c q_{<ac}) + \dots \\ y' [S(p^b q_{<ab}) + S(p^b q_{<bc}) + \dots] &= x' S(p^a q_{<ab}) + z' S(p^c q_{<bc}) + \dots \\ z' [S(p^c q_{<ac}) + S(p^c q_{<bc}) + \dots] &= x' S(p^a q_{<ac}) + y' S(p^b q_{<bc}) + \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ce système est compatible, la somme de toutes ces équations étant toujours vérifiée quelles que soient les valeurs prises par x', y', z', t', \dots

Il a donc un degré de liberté comme il se doit et du fait de son homogénéité peut se mettre très facilement sous forme d'un système de nombres proportionnels qui définiraient sans ambiguïté les taux généraux de change réel.

Les disparités internationales des monnaies seraient obtenues en écrivant comme précédemment que la moyenne géométrique simple ou pondérée des prix de tous les pays doit être égale à l'unité.

Les parités monétaires réelles déterminées à partir de ces disparités internationales des monnaies sont les solutions théoriquement les plus satisfaisantes que l'on puisse donner au problème général du contrôle statistique des parités monétaires.

Ces disparités internationales des monnaies expriment avec précision, sous forme d'un seul nombre-indice pour chaque pays, le degré de dévaluation ou de revaluation que le niveau des prix assigne à la valeur officielle de la monnaie (1).

CONCLUSION

De même que les nombres-indices chronologiques des prix permettent de prendre la température interne d'une monnaie malade, les nombres-indices géographiques permettent de prendre sa température externe, laquelle, comme pour le corps humain, ne diffère de l'autre que par l'action des agents extérieurs :

Les méthodes qui conduisent à leur élaboration sont tout à fait générales et susceptibles d'applications diverses.

(1) Il ne s'ensuit évidemment pas que la nouvelle parité monétaire doive être automatiquement fixée en base de cette seule considération du niveau des prix sans égard aux considérations d'ordre politique.

On peut remarquer qu'elles permettent assez curieusement d'établir le niveau relatif des prix de deux pays qui n'ont entre eux aucun produit commun ou de trop rares produits communs pour que la comparaison directe soit possible.

Le rapport des prix entre ces deux pays peut, en effet, être exclusivement basé sur les prix de produits que ces deux pays ont en commun avec des tiers pays seulement.

Il suffit qu'un pays ait quelques produits communs avec n'importe lesquels des autres pays pour qu'on puisse estimer la valeur réelle de sa monnaie, la précision de cette estimation étant évidemment d'autant plus grande que le nombre de ces produits communs est plus élevé.

En combinant indices chronologiques et indices géographiques on peut obtenir rétrospectivement des renseignements comparatifs relatifs à une période au cours de laquelle les comparaisons directes étaient impossibles.

Si, par exemple, on a suivi à l'aide de nombres-indices l'évolution des prix de deux pays qui n'avaient autrefois que de rares produits communs et si l'extension des progrès industriels, la diffusion des plantes cultivées, l'expansion du commerce international, ont donné par la suite à ces deux pays un nombre de produits communs suffisamment important pour permettre l'établissement d'un indice géographique de leurs prix respectifs, on peut aisément en déduire quel était à l'origine le rapport réel de leurs monnaies.

Inversement en cas de séparation de deux pays qui étaient précédemment politiquement et économiquement unis (Suède et Norvège par exemple) il serait possible de comparer les évolutions respectives de leurs prix après leur séparation.

Les indices géographiques permettent de « raccrocher » l'une à l'autre deux continuités d'évolution enregistrées par les indices chronologiques.

On pourrait se demander s'il ne serait pas nécessaire de vérifier le caractère représentatif des indices géographiques par des comparaisons effectuées à l'intérieur de chaque pays entre les indices chronologiques des produits communs retenus dans l'élaboration de ces indices géographiques et les indices généraux de tous les prix du pays.

L'ensemble des produits communs renfermant vraisemblablement une forte proportion de produits importés ou exportés, il est probable que les deux séries enregistreront des variations présentant évidemment une ressemblance mais n'étant pas strictement parallèles.

Il suffit, pour écarter cette objection, de considérer la situation dans toute sa généralité et de penser que les produits d'un pays qui ne se retrouvent dans aucun autre pays, qui sont donc spécifiquement propres à ce pays sont internationalement inobservables. Ils occupent dans le cadre de l'économie internationale la même place qu'occupent les produits de l'économie domestique dans le cadre de l'économie nationale. Ils sont, du point de vue qui nous occupe, « invisibles ».

Il serait donc illégitime de s'en servir pour vérifier des indices spécialement construits dans le but de comparaisons internationales, indices qui, condensant le maximum d'information inclus dans les observations, se suffisent pleinement à eux-mêmes.

Annexe A

QUESTIONS PRATIQUES

La détermination des parités monétaires réelles par le procédé des rapports de valeurs ne semble pas pouvoir être pratiquement réalisée, en l'état actuel de la documentation statistique internationale.

Il est, par contre, relativement aisé d'établir les rapports de prix qu'exige l'application de l'autre procédé général, celui des moyennes géométriques d'indices élémentaires.

L'unité de compte commune en laquelle seront convertis les prix de tous les pays serait évidemment le dollar des États-Unis.

Les rapports élémentaires de prix seront obtenus en confrontant les prix des produits enregistrés à la même époque par le Département de la Statistique Nationale d'un premier pays avec les prix des mêmes produits qui auraient pu être enregistrés par les Départements Statistiques des autres pays considérés.

Les mêmes comparaisons effectuées à partir d'un second, d'un troisième pays et ainsi de suite permettront de rassembler finalement l'ensemble des indices élémentaires recherchés.

Ces indices élémentaires de prix obtenus, leur groupement en indices binaires, puis en indices plus généraux pose trois fois la question de la pondération :

1^o le groupement des indices élémentaires en indices binaires sera fait par de simples moyennes géométriques non pondérées, toute tentative de pondération étant prématurée, les indices nationaux eux-mêmes n'étant généralement pas pondérés dans la plupart des pays;

2^o on peut par contre tenir compte des importances respectives de chaque pays, ou plutôt de chaque couple de pays, en pondérant les indices binaires groupés pour obtenir des taux réels de change.

Les poids théoriques (sommes des valeurs communes relatives aux indices élémentaires) ne peuvent pratiquement pas être connus, mais il est facile de les remplacer par de convenables estimations en choisissant comme poids, pour chaque couple de pays, des combinaisons des grandeurs représentant :

- soit le revenu national du pays,
- soit le commerce extérieur du pays (somme des valeurs des importations et des exportations),
- soit le quota de chaque pays au Fonds Monétaire International,
- soit toute autre grandeur synthétisant l'importance économique du pays (1);

3^o enfin, lorsqu'il s'agira d'utiliser le degré de liberté que laisse la détermination des taux généraux de change réel pour obtenir finalement les valeurs internationales des monnaies, la condition d'invariabilité des prix mondiaux qui permet de les définir conduira à des résultats à peu près semblables, que cette condition soit exprimée par la moyenne géométrique simple ou pondérée.

(1) Voir Colin CLARK. *The conditions of economic progress*, Macmillan, 1940.

Annexe B

**APPLICATION AU CONTROLE DES PARITÉS MONÉTAIRES DE LA FRANCE,
DE L'ANGLETERRE, DES PAYS-BAS ET DE LA SUÈDE AU DÉBUT DE 1936**

Pour montrer les différences qui peuvent pratiquement exister entre les résultats obtenus à partir des diverses formules données dans l'exposé général, nous utiliserons les éléments d'une enquête menée durant le premier semestre de 1936 sous la direction de Ch. Rist par l'Institut Scientifique de Recherches Economiques et Sociales de Paris.

Le but de cette enquête était « de rassembler un certain nombre de données comparatives sur le niveau des prix en France et dans les principaux pays d'Europe » (1).

Pour les besoins de la présente application, nous retiendrons seulement les prix relevés dans quatre pays : la France, les Pays-Bas, l'Angleterre et la Suède.

Ces prix ont été publiés en francs français après conversion à des taux de change arrondis, mais les corrections nécessaires pour obtenir des données basées sur les taux de change officiels exacts ont été effectuées dans les calculs ci-après.

Ces prix concernent tant des produits agricoles et denrées alimentaires que des produits industriels (2). Pour certains produits, plusieurs cotes ont été retenues. Au total, le nombre des cotes enregistrées a été le suivant :

Pour la France	279 cotes
Pour les Pays-Bas.	171 —
Pour l'Angleterre.	178 —
Pour la Suède.	151 —

Les nombres de cotes de produits communs sont :

Entre la France et les Pays-Bas.	165 cotes communes
— la France et l'Angleterre	165 —
— la France et la Suède.	142 —
— les Pays-Bas et l'Angleterre.	92 —
— les Pays-Bas et la Suède	100 —
— l'Angleterre et la Suède	102 —

Nous déterminerons d'abord tous les indices binaires que l'on peut former avec ces quatre pays et, lorsqu'il s'agira de les synthétiser en indices plus généraux suivant une formule pondérée, nous adopterons toujours comme poids pour chaque indice binaire le nombre des cotes communes ci-dessus indiqué du couple de pays qu'il concerne.

I. — Indices binaires.

Les indices binaires de ces quatre pays deux à deux, définis par les moyennes géométriques simples des indices élémentaires, sont aisés à calculer.

Reproduits dans le tableau suivant ils indiquent, d'après les taux officiels

(1) La méthode de l'enquête a été exposée dans l'introduction de la Brochure « Ecarts de prix : France-Étranger » — Paris 1936 — où l'Institut a publié les premiers résultats obtenus.

(2) Nous ne prendrons pas en considération les quelques « services » dont les prix ont été également relevés par l'Institut.

de change, le niveau relatif des prix des pays portés en haut du tableau par rapport aux prix des pays portés à gauche du tableau.

Tableau des indices binaires.

PAYS	FRANCE	PAYS-BAS	ANGLETERRE	SUÈDE
France	100	94,33	87,59	90,27
Pays-Bas	106,01	100	92,48	99,88
Angleterre	114,17	108,13	100	110,91
Suède.	110,78	100,12	90,16	100

Les moyennes d'indices binaires d'une même colonne seraient des nombres-indices moyens de prix du pays considéré.

Les moyennes, inverses des précédentes, d'indices binaires d'une même rangée seraient les disparités monétaires, telles que nous les avons définies.

II. — Disparités monétaires.

Les nombres-indices de prix calculés suivant les diverses formules basées sur la moyenne géométrique des indices-binaires nous donnent, par leurs inverses, les disparités monétaires reproduites dans le tableau de la page ci-après :

Tableau des disparités monétaires

QUATRE PAYS	FRANCE	PAYS-BAS	ANGLETERRE	SUÈDE
Disparités binaires :				
Base : Suède - 100.	90,27	99,88	110,91	100
Disparités extérieures :				
Moyenne des indices binaires	90,69	99,30	111,05	100
Moyenne des indices élémentaires	90,71	100,65	111,67	101,20
Disparités internationales :				
Moyenne simple des indices binaires	92,93	99,48	108,17	100
Moyenne pondérée des indices binaires et invariabilité simple des prix mondiaux (1)	93,02	99,35	107,92	100,27
Moyenne pondérée des indices binaires et invariabilité pondérée des prix mondiaux (2)	93,52	99,88	108,50	100,80

La signification de ces disparités est tout à fait claire.

Elles indiquent :

1° que la parité réelle du franc français au début de 1936 était incontestablement inférieure à sa parité officielle;

2° que les parités réelles du florin des Pays-Bas et de la Couronne suédoise différaient peu de leurs parités officielles;

(1) Voir page 254.

(2) Pour l'invariabilité pondérée des prix mondiaux, il a été choisi comme poids pour chaque pays le total de ses cotes communes avec les trois autres pays, à savoir : France 472 cotes, Pays-Bas 357 cotes, Angleterre 359, Suède 3/4. Le total de 1.532 cotes est évidemment le double du total de toutes les cotes communes.

3^o que la parité réelle de la livre sterling était supérieure à sa parité officielle, la position de cette devise étant donc particulièrement forte à ce moment.

De façon plus précise, en admettant que les prix moyens des Pays-Bas, de l'Angleterre et de la Suède étaient représentatifs des prix mondiaux, la disparité extérieure du franc français nous indique que la valeur extérieure réelle de cette devise était de 9,30 % environ au-dessous de sa valeur officielle.

La loi monétaire du 1^{er} octobre 1936 qui a fixé au franc français de nouvelles limites faisant ressortir une dévaluation comprise entre 25,19 % et 34,35 % a donc pour cette proportion de 9,30 % redressé une disparité de prix antérieure aux mesures sociales de l'été 1936 et pour le solde seulement ajusté la parité du franc à la nouvelle situation économique du pays.

En nous basant sur la disparité internationale du franc (moyenne pondérée des indices binaires et invariabilité simple des prix mondiaux) on obtiendrait une valeur internationale réelle du franc de 7 % seulement inférieure à sa valeur officielle, ce qui représente une différence sensible avec la proportion de 9,30 % déterminée par la disparité extérieure.

Ces deux notions conduisent en effet à des résultats assez dissemblables quand le nombre de pays considérés est petit. La meilleure estimation de la vraie valeur internationale est dans ce cas plus proche de la valeur extérieure que de ladite valeur internationale établie à partir d'une base trop étroite.

Sans être très importantes les différences entre les valeurs déterminées à partir de moyennes pondérées d'une part et de moyennes simples d'autre part peuvent tout de même parfois dépasser 1 %, renforçant ainsi la nécessité de pondérer, toutes les fois qu'il se peut.

L'ensemble de ces résultats confirme en les précisant les indications fournies par la théorie. Quoi qu'il en soit, les formules données, basées sur des éléments observables peuvent être appliquées, en toutes circonstances, sans difficultés pratiques.

P. GORRA.

DISCUSSION

M. BACHET. — Je regrette de ne pas avoir vu le but des indices calculés. On doit se demander si tel procédé de calcul est bon. Mais bon pour quoi? A défaut de réponse à cette question, on ne peut formuler aucun jugement de valeur sur une des règles de calcul proposées. Avec des nombres disposés en carré on peut imaginer bien des règles de calcul. Il y en a une qui consiste à calculer un déterminant. Elle ne se justifie que comme instrument mathématique pour résoudre un système d'équations linéaires.

En présence de deux pays dont les échanges commerciaux sont déséquilibrés on peut se demander de combien il faudrait baisser, en pourcentage, les prix de l'un pour que, au change supposé donné, se rétablisse l'équilibre des balances commerciales. L'indice ainsi défini ne met en jeu que les quantités des biens exportés et importés.

Par contre, si l'on se demande quel est le niveau relatif des prix pour le touriste venant dans un pays étranger, ce sont les quantités de biens qu'il consomme qu'il faut introduire. Il s'agit alors d'un autre indice et le procédé de calcul à conseiller devra être différent.