

BAUDEZ

## **Le hasard et les causes rythmées**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 94 (1953), p. 169-187

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1953\\_\\_94\\_\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1953__94__169_0)

© Société de statistique de Paris, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

### III

## LE HASARD ET LES CAUSES RYTHMÉES (1)

---

**MONSIEUR LE PRÉSIDENT,  
MES CHERS COLLÈGUES,**

Je vais vous parler des Causes Rythmées.

La théorie nouvelle qui va vous être présentée rapidement — et que j'ai commencé d'exposer dans un premier ouvrage : « Le Hasard et les Causes Rythmées » (2) — pourra vous paraître ambitieuse : elle ne tend à rien moins qu'à donner une solution déterministe aux problèmes rencontrés dans l'étude des variables dites aléatoires. Nous nous proposons, en effet, d'expliquer par le *Rythme dans les Causes*, phénomène purement physique comme vous le

---

(1) Conférence faite à la *Société de Statistique*, le 18 mars 1952.

(2) DUNOD. Éd. 1952.

voyez, les distributions que rencontre la Statistique et qui sont attribuées jusqu'à présent au *Hasard*.

En premier lieu, nous montrerons que l'explication par le rythme est possible, et mettrons bien en évidence la différence essentielle entre le rythme et le hasard. Du même coup, nous serons amené à préciser ce que nous entendons par le « Rythme dans les Causes ».

En second lieu, nous donnerons une image mécanique permettant de bien apercevoir le mode de fonctionnement du rythme dans les causes, et indiquerons comment on peut ramener l'étude des causes rythmées à celle de causes périodiques.

Enfin, nous tenterons, par l'analyse de certains jeux d'une part, par l'examen de certains problèmes statistiques d'autre part, d'établir l'identité du principe du déterminisme et de la notion de rythme. De vrai, la notion de rythme apparaît clairement comme contenue dans le déterminisme si l'on tient compte de la limitation du nombre des causes possibles à la réalisation d'un effet donné.

Les justifications mathématiques seront momentanément laissées dans l'ombre.

Je voudrais d'abord, mes chers Collègues, vous demander votre indulgence. Une thèse comme celle-ci ne peut être justifiée qu'avec des faits : Tirer les conclusions de la théorie (elles sont nombreuses) les rapprocher et les comparer à la réalité serait la marche à suivre. Vous avez pu voir que nous devons limiter, faute de temps, cet exposé à un aperçu de la théorie, un aperçu également des raisons qui peuvent conduire à envisager les phénomènes de la Statistique autrement qu'au travers des lois de probabilité.

## I. — EXPLICATION PAR LE RYTHME DES FAITS DE STATISTIQUE DÉFINITION DU RYTHME

Une définition de ce que nous entendons par *causes rythmées* est contenue implicitement dans notre premier ouvrage sur le sujet. En particulier, nous avons traité de l'amenée des points avec des dés truqués. Nous avons supposé des dés truqués au moyen d'un lestage mobile. Une position déterminée de ce lestage rend nécessaire l'arrivée d'un point donné correspondant à la position ; la mobilité du lestage permet de faire varier le point amené : en admettant, avons-nous écrit, que le déplacement du lestage soit tel que les durées pendant lesquelles les six points possibles doivent nécessairement apparaître soient égales entre elles, quelle que soit la façon dont nous nous y prendrons pour obtenir le résultat, nous aurons une reproduction d'effets dépendant de causes rythmées d'une part et d'autre part évidemment semblables à ceux qu'amène le jeu de dés tel qu'il est pratiqué ordinairement. Si nous définissons par opération rythmée le déplacement du lestage, nous avons l'explication par le rythme de la loi d'arrivée des points, laquelle paraîtra aléatoire à qui ne connaît pas la loi du rythme.

Il est clair que l'hypothèse ainsi faite ne nécessite pas la périodicité dans l'apparition des causes : le phénomène à causes *rythmées* ne sera pas toujours un phénomène à *causes périodiques*.

Ainsi, si les durées pendant lesquelles le lestage rend nécessaire l'arrivée des points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont composées d'éléments

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots &= \lambda_1 \text{ pour le point 1} \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots &= \lambda_2 \text{ pour le point 2} \end{aligned}$$

etc..., tels que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots$

l'effet résultant sera l'effet d'un ensemble de *causes rythmées*.

Ajoutons une remarque : l'ordre dans la succession des apparitions des diverses causes pourra être bien déterminé, comme c'est le cas dans la plupart des phénomènes étudiés en Statistique dans lesquels les causes entrant en jeu ont un ordre d'apparition nécessaire; il pourra aussi être variable si des accidents divers qui n'ont pas d'effet direct sur le phénomène se produisent, s'il y a, par exemple, intervention d'un opérateur. Dans ce cas, ce dernier, soumis lui-même à la loi universelle du Rythme, s'il peut, par son action en retarder ou compliquer la manifestation, ne peut empêcher le rythme d'apparaître. Il faut noter d'ailleurs que l'opérateur est en général (jeu de hasard) incapable de prévoir l'influence de son action, une seule chose est certaine, nous le verrons: il est, répétons-le, lui-même soumis à la loi du rythme.

Ainsi donc, dans un cas comme dans l'autre, les effets constatés résultent de *causes rythmées*, l'intervention de l'homme, celle aussi d'accidents divers, tout en laissant au rythme sa puissance ordonnatrice nous mettra en présence d'un système de causes dont les manifestations au cours d'un grand nombre d'essais successifs n'auront comme seule particularité que de conserver une fréquence relative constante d'un essai à l'autre. Toutefois, et ceci est à la base de la théorie, les accidents qui interviennent soit par suite de l'action de l'homme soit par suite de causes qui n'ont proprement rien à voir avec le phénomène étudié, sont soumis eux aussi à la loi du rythme.

Nous allons examiner quelques cas dans lesquels nous verrons le rythme apparaître aussi bien dans les causes propres que dans les causes accidentelles. Les causes propres — « *causæ propriæ* » des philosophes — sont celles qui sont nécessaires à la production du phénomène. Les causes accidentelles sont celles qui retardent, accélèrent, permettent ou empêchent l'action des causes propres.

Par exemple, analysons la succession des événements élémentaires qui se produisent au cours d'un jeu de hasard aussi simple que le jeu de dés.

Une remarque préliminaire s'impose : on ne peut prétendre que le hasard s'introduit au cours du jeu, car dès que le lancé est effectué, le sort est fixé, *alea jacta est*; le hasard est, dans la théorie du hasard, le fait du joueur.

Nous distinguerons dans le mouvement du dé une période préparatoire et une période d'achèvement.

La période d'achèvement commence quand le dé lancé et retombant a touché la table sur laquelle on joue.

La période préparatoire s'étend depuis le moment du lancé jusqu'à la période d'achèvement.

Au commencement de la période d'achèvement le dé a touché la table soit par un sommet, soit par une arête, soit par un plan; comme il y a dans un dé 6 sommets, 6 faces, 12 arêtes, il n'y aura donc au total que 24 façons pour le dé de toucher la table, soit 24 cas possibles.

Au moment où le dé touche la table, il est animé d'un mouvement décomposable en un mouvement de translation et un de rotation autour d'un axe instantané, chacun de ces mouvements ayant une vitesse bien déterminée; sa position initiale est d'autre part bien définie.

La gamme des vitesses en question peut être étendue, mais du point de vue qui nous occupe, il est certain qu'il existe tout un ensemble de valeurs de ces vitesses qui, associé à la position initiale ou à des positions voisines du dé amènera le même point, autrement dit, une variation infiniment petite des coordonnées du centre de gravité, par exemple, par rapport à un trièdre de référence quelconque dont le sommet est confondu avec le point de contact et une variation également extrêmement petite des vitesses ne changeront pas le point amené sauf dans des cas singuliers.

S'il nous était possible de dresser un tableau complet des données initiales qui commandent finalement le point amené, nous devrions les classer en six ensembles différents, étant entendu que lorsqu'au cours du jeu les données initiales appartiendront à un ensemble déterminé, le point amené sera le point correspondant à l'ensemble. Par raison de symétrie, les six ensembles seront semblables — *mutatis mutandis*.

Quant à la période préparatoire, elle ne fait que fournir les éléments de la période d'achèvement.

Cela étant, nous constatons que le rythme existe dans les causes propres : supposons que nous lançons le dé successivement à un mètre et à un mètre cinquante au-dessus de la table, supposons que lors de la vitesse nulle au sommet de l'ascension, les positions soient semblables, les mêmes phénomènes se produiront successivement, il y a donc rythme.

En outre, l'expérience nous apprend qu'au bout d'un temps suffisamment long, nous aurons vu apparaître en nombre égal les différents points possibles.

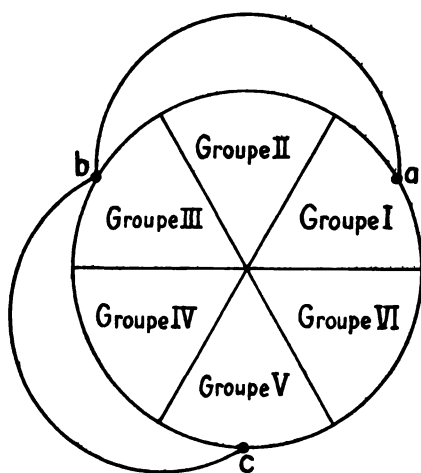
Si donc nous admettons d'une part, que chacun des points amené l'est en vertu de l'appartenance à un ensemble déterminé des données initiales à la période d'achèvement; d'autre part que le nombre des données initiales que nous serons amenés à ranger dans chaque ensemble est fini — ce que nous exprimions en disant qu'on ne peut lancer jusqu'au ciel des dés qui ne retomberaient pas — il est nécessaire que l'apparition des données initiales diverses se fasse à une fréquence égale pour l'une et pour l'autre. Rigoureusement les causes présenteront le caractère de causes rythmées et, puisque le sort est fixé dès le lancé, la conclusion nécessaire est que le joueur obéit à la loi du Rythme.

Examinons pour plus de précision la *répétition du même point dans la théorie* : Pour les mêmes raisons qui nous ont conduit à distribuer les systèmes de causes entraînant la venue d'un point donné en six ensembles identiques, nous devons admettre par raison de symétrie que le joueur fait succéder un système de causes d'un des six ensembles à un autre système appartenant au même ensemble ou à un ensemble différent, la succession se faisant suivant les lois du rythme, mais le système des causes étant différent d'un coup au suivant. Il s'ensuit que nous pourrions voir apparaître au cours du jeu, deux, trois, ...  $n$  fois le même point successivement, mais contrairement à ce qui est admis par la théorie des Probabilités, le nombre  $n$  demeure fini. Cela résulte de notre remarque sur le nombre fini des causes, et sur une autre constatation évidente,

il est impossible, même si nous le tentions, de répéter d'une fois à la suivante les mêmes conditions de jeu.

La théorie des Causes rythmées et celle des Probabilités présente donc une différence qui semble de peu d'importance au premier abord et qui est pourtant fondamentale. C'est en vertu de cette différence que la théorie nouvelle permet, comme nous l'avons pu voir, de justifier la règle de Gauss relative à la valeur la plus probable des grandeurs mesurées par une série d'observations, ainsi que la théorie de M. Paul Levy sur les erreurs d'observation; enfin, elle explique les règles de la composition des écarts aussi aisément que la théorie des Probabilités.

En définitive, nous avons été conduits à admettre que le rythme existe dans les causes propres en vertu de leur nature, ou bien est introduit dans celles-ci par les causes accidentelles. Les unes au moins (les causes propres) sont en nombre limité. Comme les causes propres ont une action nécessaire, déterminée dès le moment de leur apparition, il faut, pour expliquer le rythme dans les



effets, caractérisé par la fréquence relative constante d'un effet de valeur donnée, que les causes accidentelles, elles aussi, obéissent à la loi du rythme.

Si nous représentons sur un cercle les six groupes de causes propres, que nous avons trouvées à l'examen du jeu de dés, les résultats enregistrés au cours du jeu pourront être expliqués par le passage d'une série de causes *a* du groupe I à une série de causes *b* du groupe III, etc...

Les éléments d'arc *ab*, *bc*, étant égaux entre eux, ou ayant des valeurs dépendant de causes rythmées, de telle sorte que la fréquence de l'apparition d'un système de causes appartenant au groupe I, soit égale à la fréquence de l'apparition d'un système de causes appartenant au groupe II, etc...

Par ailleurs, le nombre des causes propres de chaque groupe est fini; s'il est égal à *n*, ce nombre *n* est également la limite maxima du nombre de coups successifs identiques qu'il est possible d'amener au cours du jeu, puisqu'à chaque coup joué on change nécessairement de système de causes, et puisque le changement a lieu suivant une loi qui fait intervenir l'un après l'autre tous les systèmes.

C'est en cette limitation du nombre des effets identiques successifs qu'il est possible d'enregistrer au cours du jeu, que se trouve la différence essentielle entre la théorie nouvelle proposée et la théorie des Probabilités.

Le probabiliste admet une suite indéfinie d'effets identiques. Les mathématiciens expriment ce fait en disant que la probabilité d'un écart aussi grand qu'on le désire devient une certitude si le nombre des essais croît indéfiniment. La formule lapidaire de Joseph Bertrand « le hasard n'a ni conscience ni mémoire » en est la traduction.

Il faut bien que la théorie des Probabilités présente quelque chose de choquant dans certaines de ses conclusions, puisque la thèse, pourtant absolument logique de la mise infinie dans le jeu dit « paradoxe de Saint-Pétersbourg », a été contestée, et que de nombreux efforts ont été faits pour introduire la notion correctrice d'espérance morale.

Évidemment, un déterminisme rigoureux est à la base de notre raisonnement, puisque nous présentons les phénomènes dans lesquels interviennent les variables dites aléatoires, comme déterminés par des causes propres qui produisent toujours les mêmes effets, et par des causes accidentelles qui ne font que retarder, accélérer, permettre ou empêcher l'action des causes propres, introduisant ainsi le rythme dans ces causes. Cette manière de voir ne devrait soulever aucune objection, car il est admis que les phénomènes naturels sont soumis au déterminisme; qu'il n'en soit plus de même dans les théories récentes de la mécanique ondulatoire, c'est une autre question que nous aborderons ultérieurement, avec la prudence qui s'impose.

Nous pouvons dire désormais ce que nous entendons par *Rythme dans les causes* :

C'est le principe en vertu duquel 1<sup>o</sup> les causes propres apparaissent dans un ordre et à une cadence nécessaire, cet ordre et cette cadence demeurant relativement constants au cours d'essais répétés; 2<sup>o</sup> des causes accidentelles peuvent intervenir qui accélèrent, retardent, permettent ou empêchent l'action des causes propres; mais ces accidents sont eux-mêmes les effets de causes propres à caractères bien définis et de causes accidentelles. On peut continuer ainsi, mais il est certain que toutes les fois qu'on passe du système des causes accidentelles relatives à un phénomène au système des causes accidentelles relatives à l'apparition des premières causes accidentelles elles-mêmes, on constate une réduction dans le nombre des causes, car elles deviennent de plus en plus générales. On finit donc par arriver à un système d'accidents qui ne dépend que de causes propres.

Remarquons que le rythme, comme nous venons de le définir, n'implique pas la périodicité dans les causes : les causes rythmées ne sont pas nécessairement périodiques. Même dans les cas simples, il y a au moins entre les phénomènes périodiques et les phénomènes à causes rythmées la différence qui existe entre le mouvement du cœur, rythmé et le mouvement du pendule, périodique.

Entre deux battements du cœur s'effectuent des mouvements divers : ouverture, fermeture des valvules, par exemple. Le cœur bat plus ou moins vite, mais la série des phénomènes qui correspond à une pulsation se reproduira dans un ordre toujours identique. Ces phénomènes seront plus ou moins rappro-

chés les uns des autres mais ils conserveront les uns par rapport aux autres la même position relative, ils seront rythmés.

Nous avons donc pu, à juste raison, parler de *cadence* et non de fréquence : la cadence des phénomènes à causes rythmées correspond exactement à la fréquence des phénomènes périodiques, de la même façon que le rythme correspond à la périodicité.

Ajoutons que dans certains cas particuliers, le phénomène à causes rythmées peut être un phénomène à causes périodiques.

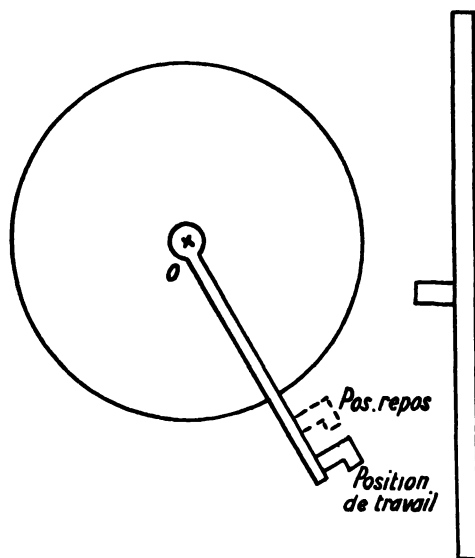
La traduction de la loi du rythme dans les causes est donc finalement l'apparition à fréquences constantes au cours d'un temps suffisamment long de toutes les causes qui peuvent être mises en jeu, et cela successivement quoique l'ordre d'apparition puisse être quelconque par l'effet des causes accidentelles.

## II. — IMAGE MÉCANIQUE DU FONCTIONNEMENT DU RYTHME DANS LES CAUSES.

Pour éclairer notre exposé, nous faisons appel, ainsi qu'on le fait souvent en Angleterre, à une image mécanique.

Nous chercherons donc à représenter par un appareil mécanique simple, l'action de ce que nous avons appelé un ensemble de causes rythmées.

Nous considérons un cercle mobile autour d'un axe perpendiculaire à son



plan et passant par son centre. Ce cercle sera entraîné dans un mouvement de rotation qui ne sera pas nécessairement uniforme.

Sur le cercle, des alidades mobiles se déplacent d'un mouvement uniforme, la vitesse de chacune d'elles étant différente : la vitesse correspond à la cadence des causes.

Ainsi le système des alidades a un mouvement composé du mouvement d'entraînement du cercle porteur et d'un mouvement relatif par rapport à ce cercle, la vitesse de ce dernier étant constante pour chacune d'elles.



Chacune des alidades porte à son extrémité extérieure au cercle un doigt escamotable qui peut, lorsqu'il est en position de travail, déplacer à son passage une butée solidaire d'une tige se mouvant dans un plan parallèle à celui du cercle. A sa position de repos, il est effacé et ne peut pas venir en prise avec la butée.

Le mouvement de toutes les tiges se fait parallèlement à une direction fixe. L'importance du déplacement de chacune d'elles est déterminée par la forme de la butée et est variable.

Chacune des tiges en se déplaçant provoque un déplacement égal d'une tige réceptrice parallèle aux autres qui enregistre ainsi le déplacement résultant des divers déplacements partiels.

Réduit à ces éléments, nous avons déjà un procédé mécanique figuratif de causes rythmées.

La cadence de l'apparition des causes peut varier si la vitesse d'entraînement varie.

La cadence relative demeure constante; elle est représentée par la vitesse relative des alidades par rapport au cercle.

L'effet de chacune des causes a une importance figurée par le doigt lié à chacune des alidades dont la forme commande un déplacement plus ou moins important de la tige correspondante.

Il reste à faire intervenir les accidents, eux-mêmes soumis à la loi du rythme. Nous y arriverons en installant un deuxième système analogue au premier, mais dont la fonction sera de mettre en position de repos successivement les doigts de chacune des alidades, l'ordre de mise à la position de repos étant absolument quelconque, pourvu qu'il obéisse à la même loi, et le nombre des doigts escamotés à la fois pouvant être quelconque.

Nous avons ainsi réalisé un système mettant en jeu des causes rythmées :

Les causes du mouvement de la tige réceptrice sont les poussées exercées sur les diverses tiges particulières par les doigts des alidades — variables avec la forme du doigt mais constantes pour une même alidade quand elle entre en action — les causes peuvent aussi ne pas entrer en action si le doigt a été escamoté en position de repos par le mouvement du système relatif aux accidents; elles n'ont aucun caractère périodique puisque la vitesse du cercle entraîneur peut varier et puisque les doigts peuvent être escamotés, mais la cadence relative des poussées composantes demeure constante au cours du temps si le temps est assez long.

Nous avons finalement à enregistrer les résultats :

A des intervalles quelconques nous relevons les déplacements de la tige réceptrice et le fait d'enregistrer un déplacement ramène la tige à sa position d'origine.

Les déplacements ainsi observés sont, par le fait même, les effets de causes rythmées.

Il est évident que nous pouvons relever les déplacements de la tige réceptrice, chaque fois qu'il s'en produit un : dans ces conditions, le déplacement sera plus ou moins important suivant qu'il y aura une seule cause, c'est-à-dire une seule alidade en action, ou, au contraire, qu'il y en aura plusieurs ajoutant leurs effets. Nous pouvons aussi relever ces déplacements à intervalles réguliers

mais plus éloignés. Dans tous les cas, et sans avoir étudié autrement le fonctionnement du système, nous trouverons, pour représenter la distribution des déplacements, une courbe de Gauss. L'allure à laquelle nous ferons les relevés sera extrêmement importante pour la détermination des causes en jeu, de leur cadence, et de l'effet que chacune d'elles peut avoir sur le résultat final.

Ainsi donc, nous avons dorénavant précisé avec toute la netteté nécessaire le contenu de la notion de rythme dans les causes. Nous estimons, et c'est peut-être en cela que consiste notre hardiesse, que la sphère d'activité du principe est sans limites. Cela veut dire que les accidents dont nous avons parlé, que nous avons fait figurer dans notre schéma représentatif sont commandés par un dispositif analogue à celui qui détermine l'action des causes propres.

Ainsi, l'ordre se propage et se conserve en dépit d'une apparente complexité dans les phénomènes. C'est cette apparente complexité qui finit par donner à l'observateur l'illusion du hasard.

Il est à peine besoin de faire remarquer que le « probabiliste » le plus convaincu n'a jamais songé un instant à contester l'existence des causes et leur liaison nécessaire aux effets produits dans les phénomènes aléatoires, autrement dit, le principe du déterminisme le plus vigoureux n'est pas mis en cause.

*Comment on peut ramener l'étude des causes rythmées à celle des causes périodiques.* — Cette possibilité apparaît comme à peu près évidente, si l'on veut bien se reporter au schéma mécanique imaginé pour représenter l'action combinée de causes rythmées.

En effet, si d'abord nous faisons abstraction des accidents qui surviennent, il est clair qu'il n'y a de différence entre un phénomène à causes périodiques et un phénomène du type étudié que dans l'existence d'une vitesse d'entraînement (celle de la roue support) qui peut varier au cours du temps. En rendant cette vitesse d'entraînement constante, on ne modifie en aucune façon les rencontres diverses qui peuvent se produire en vertu de la vitesse relative des alidades; de plus, on est ainsi passé du système des causes rythmées à système de causes périodiques qui aura les mêmes effets que le premier.

En outre, si nous faisons entrer en ligne de compte les accidents, nous devons, pour représenter l'effet des causes accidentelles, avoir recours à un dispositif analogue à celui qui est relatif aux causes propres.

Nous pourrions ramener dans tous les cas les vitesses d'entraînement à zéro et aurons ainsi transformé la figuration du phénomène à causes rythmées en celle du phénomène correspondant à causes périodiques qui produira les mêmes effets.

Illustrons ce qui précède par un exemple :

Examinons une fois encore, en tenant compte de ce qui précède, le jeu qui a donné lieu au paradoxe de Saint-Pétersbourg. Nous allons voir à ce propos comment interviennent les causes propres, comment les causes accidentelles.

Nous constaterons :

- a) que nous trouvons sans difficulté le rythme dans les causes propres,
- b) que les causes accidentelles qui dépendent de la volonté du joueur peuvent également être considérées comme rythmées,
- c) que le schéma mécanique imaginé pour la représentation des effets dans

un phénomène à causes rythmées peut être facilement adapté à la représentation du jeu,

d) enfin, que des limitations s'introduisent nécessairement dans le nombre des coups successifs observés amenant un même effet.

Tout d'abord, comment classer les causes à intervenir en causes propres et causes accidentelles?

Les causes propres sont celles qui interviennent une fois la pièce lancée. On sait qu'il s'agit d'un simple jeu de pile ou face, assorti de conditions particulières que tout le monde connaît.

Les causes accidentelles sont celles qui interviennent au moment du lancé quand le joueur envoie la pièce en l'air avec plus ou moins de force, lui imprimant une vitesse de translation et une vitesse de rotation plus ou moins grandes. La volonté du joueur intervient à ce propos, c'est lui qui introduit les accidents dans le jeu.

a) Ce que nous avons écrit à propos du jeu de dés peut être répété presque mot pour mot : une pièce de monnaie n'étant autre chose qu'un dé aplati et arrondi.

Les causes propres interviennent pendant les périodes que nous avons dénommées période préparatoire et période d'achèvement; remarquons d'abord que l'ordre de présentation est immuable.

Les causes propres à la période préparatoire aboutissent nécessairement à une position donnée de la pièce au moment de son contact avec la table sur laquelle on joue, et à une vitesse déterminée au moment du contact. En ce qui concerne la position de la pièce à ce moment, ou bien le contact s'établit par un point du cercle de l'une des faces — ou plus exactement par un petit élément du cercle —, ou par une droite du cylindre aplati qu'est la pièce — ou plus exactement par un petit élément de la surface de ce cylindre —, ou enfin, par une face. Si les pièces étaient des cylindres parfaits, si la table était aussi un plan parfait, si, enfin, il n'y avait pas de déformation élastique possible, il y aurait une infinité de manières pour la pièce d'entrer en contact avec la table; mais ces conditions ne sont jamais réalisées : il s'ensuit qu'il n'y a qu'un nombre fini de positions différentes de la pièce au début de la période d'achèvement. De façon analogue, les vitesses au moment du contact sont comprises entre des limites bien définies et il est évident qu'une différence entre les vitesses imprimées assez grande est nécessaire pour que, les conditions de position à l'origine de la période d'achèvement étant identiques, l'effet résultant final soit différent, pour que pile soit amené au lieu de face par exemple.

Ces conditions impliquent le rythme dans les causes propres; si la pièce était lancée exactement de la même manière, il y aurait reproduction intégrale aussi bien dans l'ordre que dans la nature des causes à intervenir. Supposons, au contraire, que lors de deux lancés successifs, nous envoyons la pièce à 2 m 50 au-dessus de la table, puis à 2 mètres, et supposons en outre qu'au sommet de l'ascension les positions prises par la pièce soient identiques, les mêmes causes vont intervenir dans les deux cas, mais elles seront décalées les unes par rapport aux autres, il y aura rythme.

b) Les causes accidentelles, c'est-à-dire les actions exercées par le joueur

en lançant la pièce plus ou moins haut, en lui imprimant une vitesse plus ou moins grande, obéissent à la même loi, puisque les résultats constatés expérimentalement sont l'apparition en nombre égal des coups pile et des coups face, au bout d'un temps qui n'est pas extrêmement long, — puisque, d'autre part, nous avons remarqué que le point est fixé à partir du moment où le lancé est effectué. Enfin, cette loi du rythme, à laquelle le joueur est soumis, explique la limitation du nombre des arrivées successives du même point; de vrai, tout se passe comme si le joueur, d'un coup au coup suivant, passait d'un système de causes donné à un système de causes différent. Dans ces conditions, le nombre maximum des coups semblables possibles successifs est égal au nombre des causes propres de chacune des séries et par conséquent limité.

Par suite, tous ceux qui estiment nécessaire de corriger par la théorie de l'espérance morale ce que la théorie de l'espérance mathématique présente de déconcertant devraient nous donner raison.

c) Reprenons notre schéma mécanique. Imaginons que nous avons classé les causes propres, en nous servant des positions de la pièce à la fin de la période de préparation et des vitesses au même moment; deux causes étant différentes quand, à la même position de la pièce, correspondent des modifications dans les vitesses assez grandes pour entraîner un résultat différent. D'après ce que nous venons de voir, nous en aurons un nombre fini. Quand nous aurons terminé notre classement, nous serons en présence de deux groupes d'importance égale par raison de symétrie. Utilisons deux des alidades de notre système pour figurer un ensemble de causes propres : la première alidade correspondant à un système de causes intervenant en période préparatoire, c'est-à-dire dont l'effet est de donner à la pièce une position et une vitesse particulière au moment du contact. La deuxième alidade correspondra au système de causes intervenant pendant la période d'achèvement. Chaque ensemble de deux alidades nous fournira le moyen de composer les effets des causes propres à chacune des périodes en un effet résultant choisi, par exemple, égal à 1 pour pile et à 2 pour face. Nous aurons autant de systèmes de deux alidades qu'il y a d'unités dans chacun des groupes de causes que nous avons à envisager, et le mouvement des deux alidades sera déterminé par la nécessité de superposer les effets de la deuxième à ceux de la première au bout du temps nécessaire pour effectuer une opération.

Restent à figurer les causes accidentelles. Elles interviendront en suivant les lois du rythme : mécaniquement, nous escamoterons tous les doigts des alidades sauf ceux qui correspondent au système des causes réellement mis en œuvre.

Le joueur, à chaque coup, sans trop le savoir, passe d'un système de causes à un autre et, en même temps, supprime la possibilité de l'intervention de tout autre système.

Comme l'expérience nous apprend que le joueur amène pile et face un nombre égal de fois assez rapidement, cela revient à dire qu'il est soumis lui-même à la loi du rythme; car s'il n'est pas difficile d'admettre que notre joueur ne peut répéter d'un coup à l'autre un geste identique avec une pièce prenant au départ la même position, il est néanmoins nécessaire de constater que tout se

passé comme si le joueur choisissait dans les deux groupes de causes possibles, celles qui conviennent pour que les résultats pile et les résultats face soient en nombre égal.

d) Cela étant, l'effet résultant provient de causes propres et de causes accidentelles, qui, rythmées les unes et les autres, donneront au résultat enregistré un caractère analogue à celui des événements aléatoires, et, en même temps, une limitation à la succession du même point. C'est ce qui arrivera, dans notre schéma représentatif, même avec les roues d'entraînement immobilisées, les mouvements devenant périodiques, et la période du mouvement composé pratiquement infini.

Pour mettre en défaut l'argumentation qui vient d'être exposée, il faudrait montrer qu'il peut exister des séries innombrables de coups amenant à la suite toujours le même joint : les probabilistes pensent qu'il en est ainsi. Pourtant, même Joseph Bertrand, un des plus brillants entre eux, déclare qu'il ne s'agirait pas de risquer 100 francs à ce jeu.

C'est pourquoi nous avons écrit que la vérification de la théorie des causes rythmées serait trouvée dans l'existence d'une limite au nombre de coups de même espèce successifs au cours du jeu tel qu'il a été imaginé. Cette vérification est, nous le reconnaissons, très difficile. Une autre, plus facile, résulterait de la non-concordance des écarts prévus par la théorie des Probabilités avec les écarts réels trouvés à l'expérience; mais la vérification la plus simple consisterait en un développement des conséquences de la théorie des Causes Rythmées et de ses applications possibles.

Étant données les précédentes explications, il est clair qu'on peut passer du phénomène à causes rythmées au phénomène à causes périodiques, en immobilisant les roues d'entraînement; on ne fait varier ainsi ni l'ordre de présentation des causes, ni celui des escamotages, on n'en fait varier que la cadence. Le phénomène à causes rythmées peut donc très simplement se ramener, schématiquement, à un phénomène à causes périodiques.

### III. — COMMENT LE RYTHME S'INTRODUIT DANS LES PHÉNOMÈNES ÉTUDIÉS PAR LA STATISTIQUE

Nous pouvons expliquer d'un mot comment le rythme s'introduit dans les phénomènes étudiés par la Statistique :

Le déterminisme qui régit tous ces phénomènes se manifeste au moyen du rythme.

Dire, en effet, qu'un phénomène est un effet résultant de causes bien définies, signifie simplement, du point de vue déterministe, que si les mêmes causes sont mises en jeu à nouveau — elles sont souvent nombreuses et leur ordre d'apparition est bien réglé — elles se succéderont toujours de la même façon et au même rythme. Seule la cadence pourra varier. Par exemple, si nous considérons la croissance des plantes à partir de la germination, il y aura nécessairement d'abord une radicule et une tige qui sortiront de la graine, puis il y aura croissance de la tige et développement concomitant du réseau des racines et des radicelles, puis apparition d'une première feuille, etc... Tous ces phénomènes se déroulent dans un ordre connu; or, si nous étudions, par

exemple, le développement de la plante sous le rapport de sa taille à un moment donné, chacun d'eux a évidemment son influence sur la variable étudiée, donc, peut en être considéré comme une cause propre, et nous venons de voir qu'il y a un rythme dans ces causes propres.

En outre des causes propres, ainsi que dans les cas déjà étudiés aux paragraphes précédents, il peut y avoir des causes accidentelles qui ont une importance souvent considérable, quoique indirecte, sur le développement de la plante. Par exemple, la graine peut tomber sur un caillou qui oblige les racines à le contourner, — le degré d'humidité du sol au point précis où se trouve la semence peut être plus ou moins favorable à sa germination, ainsi que la constitution chimique de ce sol, etc...

Cependant, il est aisé de voir que ces causes accidentelles sont encore soumises à la loi du Rythme : ainsi, la distribution de l'humidité dans le sol dépend de causes qui la répartissent suivant une loi apparentée à celle de Gauss, donc parfaitement attribuable à des causes rythmées, — celle d'engrais répandu à la main par le cultivateur est en dépendance étroite avec son pas et son geste de semeur, tous deux rythmés. Nous pourrions citer bien d'autres exemples. Signalons, en passant, un cas intéressant du même ordre qui a été étudié : on a trouvé que les cailloux étaient répartis dans le lit des torrents suivants la loi de Gauss. Nous ajoutons que, d'après la théorie du hasard, rien ne devrait s'opposer à ce qu'il y ait par places, dans les torrents, d'énormes amoncellements de cailloux, ce qui est contraire à la réalité.

L'allure absolument universelle des courbes de distribution dans les cas les plus divers, qui s'apparentent toujours de façon plus ou moins étroite à la courbe de Gauss, légitime notre théorie : le Rythme régit également les causes accidentelles.

Le hasard, tel qu'il a été imaginé par l'homme, pourrait expliquer ces distributions, mais non les limitations des effets produits, car il ne connaît pas de limites, et l'étude des phénomènes rencontre toujours des limites. La théorie des Causes rythmées explique à la fois des distributions constatées et des limitations des effets.

Notre conclusion sera donc : le Rythme existe partout. Nous l'avons en nous dans notre sang, qui circule à coups rythmés. La nature, dans ses plus petits éléments connus jusqu'ici, le fait intervenir à chaque moment, car s'il y a des périodes dans le mouvement des électrons, les physiciens imaginent aussi des précessions. Ce ne sont pas des périodes qui demeurent finalement devant l'examineur attentif, mais des rapports constants entre les durées de mouvements s'effectuant dans des conditions données : ce sont des *rythmes*. Dès lors, il n'y a pas à s'étonner de voir ces rythmes produire des effets; de vrai, ce sont ceux qu'on a l'habitude d'attribuer au hasard.

Il résulte de cet exposé que l'auteur de la théorie des Causes Rythmées est résolument déterministe. Il lui reste maintenant à exprimer les remarques que lui suggèrent les théories de l'indétermination.

## DISCUSSION

**M. J. PRÉVOT.** — Si j'ai bien compris l'exposé qui vient de nous être fait, les rythmes qui caractériseraient en principe certains phénomènes qui semblent seulement ressortir du hasard auraient pour origine le fait que le nombre des causes différentes des phénomènes est un nombre fini.

Le conférencier, dans l'exemple du dé, nous a indiqué que le dé pouvait tomber soit sur une des six faces, soit sur une des 12 arêtes, soit sur un des 8 sommets, et qu'on se trouvait ainsi en présence d'un nombre fini de causes différentes de la position finale du dé.

Mais si l'on considère le cas de la chute sur un sommet par exemple, il semble bien que les différentes positions que peut avoir le dé au moment de l'impact peuvent avoir des effets différents sur la position finale, du fait des rebonds différents qu'elles déterminent. Ces différentes positions sont en nombre deux fois infini en principe, car la position du dé peut être définie :

1° Par l'angle de la diagonale du cube aboutissant au sommet d'impact avec le plan de la table, angle variant de façon continue d'un angle dont la tangente est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  à  $\frac{\pi}{2}$ ;

2° Par l'azimut du dé autour de cette diagonale variant dans des conditions différentes selon la valeur du précédent paramètre mais également d'une façon continue donc donnant lieu à une autre infinité de positions.

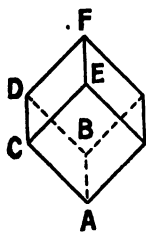
Peut-on considérer que cette double infinité de positions, combinée avec le nombre infini de valeurs de la force vive du dé au moment de l'impact, ne donnent lieu qu'à un nombre fini de causes différentes de la position finale du dé?

**M. BAUDEZ.** — Le nombre des causes qui entrent en jeu dans un phénomène dit aléatoire est fini.

Cela peut être expliqué par le fait qu'à deux positions voisines au moment du contact d'un dé avec la table par un sommet par exemple, ne correspond en général qu'une même amenée, pourvu que les vitesses à ce moment soient également comprises dans un intervalle restreint.

Si l'on prend pour un système de causes unique tout un ensemble de systèmes de causes voisins, qui ne peuvent amener que le même point, on aura un nombre fini d'ensembles de causes.

Autre exemple : Le dé touche par un côté, sa vitesse autour du côté est donnée, elle est telle qu'elle imprime au dé un mouvement qui le fait passer de l'arête AB à l'arête CD. Il faudrait faire varier notablement la vitesse pour que EF soit amené.



**M. AMY.** — Je signale à M. Baudez une expérience faisant intervenir le hasard et utilisant un très grand nombre d'expériences. Il s'agit du montage expérimental qui consiste à jeter un anneau sur un réseau de lignes parallèles et à compter les points d'intersection. En recommençant l'expérience un grand nombre de fois, on démontre que le nombre moyen d'intersection

est lié au nombre  $\pi$ . Cette expérience a été montrée au Palais de la Découverte, lors de l'exposition de 1937. On invitait les visiteurs à lancer l'anneau et un dispositif automatique décomptait les points d'intersection et donnait à chaque instant la valeur approchée de  $\pi$  correspondante. Le jet de l'anneau a ainsi été effectué des milliers de fois, il se continue toujours, et la valeur de  $\pi$  obtenue ne s'écarte de la valeur réelle que d'une quantité inférieure à celle fixée par la théorie pratique.

M. BAUDEZ. — Les formules auxquelles conduit la théorie des Causes rythmées sont pour les moyennes exactement celles de la théorie des Probabilités. La seule différence entre les deux théories est que l'une limite les écarts possibles autour de la moyenne, l'autre (la théorie des Probabilités) n'indique aucune limite à ces écarts.

L'expérience du lancé d'un anneau sur un réseau de lignes parallèles ne contredit donc en aucune façon la théorie proposée.

M. Maurice DUMAS. — Je n'ai pu intervenir à la fin de la conférence du 18 mars; je désirais cependant relever quelques points avancés, si j'ai bien compris, par M. Baudez, bien que ces points n'étaient sans doute qu'accessoires par rapport à l'intérêt considérable de la conférence et du livre dont elle rendait compte.

Je considère les probabilités comme un sujet de divertissement des mathématiciens; lorsque je fais des calculs de probabilité, je ne suis ni un déterministe, ni le contraire d'un déterministe: je tiens la place d'un mathématicien, et c'est tout.

Lorsque je fais de la statistique, j'ai recours au calcul des probabilités; j'ai recours à lui par ignorance ou par commodité, mais pas du tout parce que je considère que le hasard peut être une cause des événements dont je m'occupe. Mon sentiment est bien que le point du dé est déjà déterminé au moment où la main a cessé de lui appliquer certaines vitesses, et je me figure même que je pourrais calculer ce point à partir de certaines données comme les vitesses imprimées au dé, l'état de l'air ambiant, la rugosité de la surface qui sera touchée, etc... En cela, je suis donc déterministe.

Je me suis mis en cause parce que certains, comme, je crois, M. Baudez (si je me trompe en cela, il n'y a aucun intérêt à faire état de mon opinion) agissent comme si dans l'expression, par exemple, de « nombres au hasard », il y avait la notion que le hasard est la cause des nombres: mon opinion est que l'on peut être déterministe et se servir des probabilités, soit comme mathématicien, soit comme statisticien.

M. BAUDEZ. — Je suis absolument d'accord avec M. Dumas: il n'y a pas de hasard. Le calcul des Probabilités donne une approximation des résultats qu'on peut observer dans l'étude des phénomènes statistiques. La théorie du Rythme en donne une autre approximation qui est meilleure, toujours pour la raison qu'elle explique la limitation des écarts. C'est la théorie du Rythme qui peut expliquer, par exemple, la constatation faite par M. Borel de l'existence d'écarts extrêmement faibles dans la distribution des chiffres dont l'ensemble donne l'expression de certains nombres irrationnels.

M. FRÉCHET. — N'ayant pu assister à la conférence sur les Causes rythmées,



j'ai présenté par écrit des réflexions que m'a suggérées le texte de cette communication.

Certaines affirmations m'en paraissent contestables : « ...les courbes de distribution, dans les cas les plus divers, qui s'apparentent toujours de façon plus ou moins étroite à la courbe de Gauss... »

De même, s'agissant des données initiales dans le lancement d'un dé, il est dit que leur nombre est fini. Que veut dire ici, fini? L'infini est une notion mathématique très utile dans la théorie *axiomatique* des Probabilités. Mais tout ce qui nous est accessible est fini. Il faut donc comprendre que le nombre des données initiales n'est pas très grand. Si l'on songe à la complexité des gestes du joueur lançant le dé, il est permis d'en douter.

L'auteur distribue les causes en 6 ensembles, chaque ensemble conduisant à l'amenée d'un point déterminé. Si l'on se place au point de vue déterministe, cela est permis. Comment l'auteur en conclut-il que le nombre d'apparitions successives du même point dans une suite infinie d'épreuves est nécessairement fini? Je n'arrive pas à comprendre le raisonnement qu'il invoque. Dans ce raisonnement figure par exemple « le nombre fini des causes » alors qu'il s'agissait seulement du nombre fini (à savoir 6) d'*ensembles* de causes. L'auteur s'appuie alors sur ce fait qu'« il est impossible, même si nous le sentions, de répéter d'une fois à la suivante les mêmes conditions de jeu ». Or, pour amener deux fois de suite le même point, il n'est pas nécessaire que les conditions de jeu soient les mêmes, il suffit qu'elles appartiennent au même ensemble de causes parmi les 6 ensembles. On pourrait poursuivre la discussion sur d'autres points.

Mais l'objection essentielle est la suivante.

Les mathématiciens ne sont pas d'accord sur l'interprétation concrète de la probabilité. Mais ils sont d'accord sur la théorie axiomatique des probabilités.

C'est donc celle-là que le conférencier cherche à éliminer. Il lui faut substituer à une théorie cohérente une théorie cohérente.

Or on cherche en vain celle-ci. Il y a des exemples. Les exemples sont très utiles pour aider à faire comprendre une théorie; ils ne sauraient la remplacer.

Une règle élémentaire de raisonnement consiste à préciser ce dont on parle. On donne une définition soit constructive, soit descriptive.

Or toute la théorie de l'auteur repose sur la notion de cause rythmée et on est surpris de le voir raisonner sur cette notion *avant* de la définir. Dès la deuxième page, on lit : « Ainsi donc, dans un cas comme dans l'autre, les effets constatés résultent de causes rythmées. »

A la troisième page : « cela étant, nous constatons que le rythme existe dans les causes propres. »

A la quatrième page : « nous avons été conduit à admettre que le rythme existe dans les causes propres... »

Enfin, vient à la cinquième page la définition sous-entendue jusque-là (car on ne peut considérer comme donnant une définition générale, la phrase de la deuxième page : « Si nous définissons par opération rythmée, le déplacement du lestage »).

Nous lisons donc en cinquième page : « Nous pouvons dire désormais ce

que nous entendons par *Rythme dans les causes* : C'est le principe en vertu duquel : 1° les causes propres apparaissent dans un ordre et à une cadence nécessaire, cet ordre et cette cadence demeurant relativement constants au cours d'épreuves répétées; 2° des causes accidentelles... »

Mais que veut dire cadence? L'explication qui suit à la sixième page consiste en une analogie qui nous laisse dans le vague. Et d'ailleurs, la citation faite plus haut est troublante, car on nous annonce une définition et on nous donne un principe.

Si, cependant, il s'agissait d'une définition, ce n'était que la première, car, à la fin, l'auteur écrit : « Ce ne sont pas des périodes qui demeurent finalement devant l'examineur attentif, mais des rapports constants entre les durées de mouvement s'effectuant dans des conditions données : ce sont des rythmes. » Rapports constants entre les durées de mouvement..., nous ne voyons rien d'aussi précis dans la première définition.

En résumé, il n'est pas impossible que nous soyons en présence d'une idée juste et intéressante. Mais nous nous trouvons devant une ébauche de théorie, exprimée dans un langage si imprécis, dans un ordre si peu cohérent qu'il est actuellement impossible de se prononcer dans un sens ou dans l'autre.

On pourrait penser que cela est dû au cadre étroit d'une conférence qui ne peut donner que les grandes lignes d'un sujet. Mais des objections analogues et d'autres encore s'appliquent au texte plus développé de l'ouvrage de M. Baudez.

M. BAUDEZ. — 1° « Les courbes de distribution dans les cas les plus divers s'apparentent toujours de façon plus ou moins étroite à la courbe de Gauss. »

Dans l'ouvrage *Le Hasard et les Causes rythmées*, nous avons établi que ce qu'on peut appeler l'équation différentielle du polygone binomial ou des fonctions de fréquence de Pearson, est obtenue en évaluant la pente de la droite du polygone joignant deux points consécutifs de la courbe de fréquence, et que suivant la méthode employée pour choisir deux points consécutifs, on passe avec facilité de l'équation qui conduit à la formule de Gauss à celle qui conduit aux formes de Pearson. Il semble donc qu'on peut admettre la parenté de ces courbes de distribution.

2° « Les données initiales, dans le lancement d'un dé, sont en nombre fini... Il nous faut comprendre que le nombre des données initiales n'est pas très grand. Si l'on songe à la complexité des gestes du joueur lançant le dé, il est permis d'en douter. »

L'explication est donnée dans le texte même : une variation petite des coordonnées du centre de gravité, et une variation petite également de la vitesse n'entraînant pas de modification dans le point obtenu, permettent de compter pour un seul système de causes tout un ensemble de systèmes de causes peu différents les uns des autres.

3° « Le nombre des apparitions successives d'un même point est fini. »

Le nombre des apparitions successives du même point nécessite la mise en œuvre successive de systèmes de causes appartenant au même ensemble. Il n'y a qu'un nombre fini de ces ensembles, et on passe nécessairement d'un système à l'autre à chaque coup joué; d'où la conclusion.

4° « La définition des « Causes Rythmées » n'est pas donnée. »

Bien qu'elle n'ait pas une allure mathématique (qu'il n'est pas difficile de lui ajouter, nous allons le voir), nous avons donné une définition des Causes rythmées dans notre exposé. A vrai dire, nous ne cherchions pas à définir mathématiquement les Causes rythmées, mais plutôt à exposer la façon de comprendre comment le Rythme s'introduit dans les Causes. « Sur un sujet mal défini, on peut raisonner sans équivoque » (J. Bertrand). Cependant, voici une définition rigoureuse.

Partant de la propriété connue d'une somme de fonctions circulaires d'arcs en progression arithmétique

$$\cos \alpha + \cos 2 \alpha + \dots + \cos n \alpha = \frac{\cos n \alpha - \cos (n + 1) \alpha + \cos \alpha - 1}{2 (1 - \cos \alpha)}$$

$\sin \alpha = 2 \omega \sum_{k=1}^{k=n} \cos k \alpha = 0$  sauf le cas où  $\alpha = 2K \pi$ . La somme est alors  $n$ .

Cela étant, considérons un ensemble d'expressions

$$a_{\lambda} \left[ \cos 2 \pi \frac{f(t)}{T_{\lambda}} + \cos 4 \pi \frac{f(t)}{T_{\lambda}} + \dots \right]$$

$f(t)$  étant une fonction continue croissante du temps, la dérivée seconde de la fonction étant de signe quelconque.

$f(t)$  figure dans toutes les expressions du même genre qui se différencient par  $a_{\lambda}$  et  $T_{\lambda}$ .

Supposons que chaque expression représente l'effet d'une cause bien déterminée : ces causes seront caractérisées par le fait que leurs fréquences relatives au cours du temps seront constantes, ainsi que leurs effets — dont nous supposons qu'ils peuvent s'ajouter.

Enfin, imaginons que l'observation soit conduite de telle sorte que les effets composés ou résultants soient mesurés à des intervalles définis par  $f(t) = T_0$ , et pour simplifier que la première observation ait lieu pour  $f(t) = T_0$ , la deuxième pour  $f(t) = 2 T_0$ , etc.

Soit  $\tau$  le p. g. c. d. des  $T_{\lambda}$  et  $T_0$  : ces nombres peuvent être mis sous la forme  $T = \beta \tau$ , les  $\beta$  sont des nombres entiers.

On pourra représenter l'effet d'une cause J quelconque par

$$a_{\lambda} \left[ \cos \frac{2 \pi f(t)}{\beta_{\lambda} \tau} + \cos \frac{4 \pi f(t)}{\beta_{\lambda} \tau} + \dots + \cos \beta_{\lambda} \frac{2 \pi f(t)}{\beta_{\lambda} \tau} \right]$$

$f(t)$  pouvant prendre successivement les valeurs  $\beta_0 \tau, 2\beta_0 \tau, \dots$

L'effet de la cause sera nul pour toute valeur de la fonction  $f(t)$  non multiple de  $\beta_{\lambda} \tau$ . Il sera au contraire  $= \beta_{\lambda} a_{\lambda}$  pour toutes les valeurs de  $f(t) = k \times \beta_{\lambda} \tau$ .

L'observateur devra prendre quelques précautions pour que l'effet de toutes les causes entrant en jeu puisse être observé : par exemple, les observations pourront être assez rapprochées pour que  $\beta_0$  soit le plus petit des nombres  $\beta$ .

Les causes rythmées sont des causes dont les effets peuvent être représentés par des formules du type ci-dessus.

La composition des effets peut être effectuée comme indiqué dans notre

ouvrage. Cette étude y a été faite assez complètement pour qu'on puisse peut-être dire que même la définition mathématique des Causes Rythmées y est implicitement contenue.

Si l'on prend comme variable auxiliaire la fonction  $f(t)$ , l'étude devient celle de fonctions périodiques, mais les effets des causes rythmées ne sont pas *nécessairement* des fonctions périodiques *du temps*.

---