

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

P. VENDRYÈS

R. MALTERRE

Théorie probabiliste de la foule

Journal de la société statistique de Paris, tome 91 (1950), p. 15-27

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1950__91__15_0

© Société de statistique de Paris, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

III

THÉORIE PROBABILISTE DE LA FOULE

La loi d'ensemble.

L'emploi en biologie des méthodes statistiques reste en général très formel. L'on soumet à des mesures certains groupes d'êtres vivants, et l'on vérifie que les paramètres mesurés s'adaptent, avec plus ou moins de divergence, aux formules statistiques.

En vérité, l'emploi de la probabilité en biologie, a un sens profond. Nous voulons le montrer sur un exemple précis, la foule. Pour cela, nous utiliserons ce principe fondamental : « Entre systèmes dépendants, les relations sont rationnelles; mais, entre systèmes indépendants, elles sont aléatoires. »

Par définition, l'ensemble d'un grand nombre d'individus indépendants les uns des autres est une *foule*.

L'indépendance des individus est la condition première pour que leur ensemble soit une foule. Elle peut correspondre à la simple absence de tout lien; par exemple à l'état gazeux parfait, les molécules sont séparées par un néant physique, et un gaz parfait doit à ce caractère négatif d'être une foule de molécules. Mais, lorsqu'un animal acquiert son autonomie par ses régulations physiologiques, il conquiert son indépendance sur le milieu extérieur; il dépense même de l'énergie pour cette conquête. Un animal, doué d'autonomie motrice, est donc activement indépendant. L'indépendance des molécules est passive, l'autonomie de l'animal est active; mais, de l'extérieur, le résultat général est le même.

Pour qu'un ensemble d'animaux soit une foule, il faut que les influences sociales soient, entre eux, nulles. Toute liaison sociale suppose que les animaux aient quelque attrait les uns pour les autres. Selon les espèces, cette action réciproque est plus ou moins intense. On peut concevoir, à l'image du gaz parfait, la *foule parfaite*, qui serait constituée d'êtres vivants rigoureusement indépendants les uns des autres.

Cette indépendance a une conséquence. Pour qu'une foule soit un *ensemble*, il faut que ses individus constitutifs soient compris dans une même région. Sinon, la liberté de mouvement dont ils disposent les disperserait. Voilà pourquoi de même qu'on enferme dans un récipient solide des molécules pour en faire un gaz, on doit contenir dans des limites définies une foule parfaite d'animaux.

Ainsi, pour que l'indépendance soit réalisée, la première condition est que les individus n'exercent aucune action les uns sur les autres. Mais une deuxième condition, négative elle aussi, est nécessaire. Les individus ne doivent subir, de la part du milieu extérieur, aucune influence directrice : l'espace moteur d'une foule doit être isotrope. Nous exprimerons cette condition en disant que la foule ne doit pas se trouver dans un *champ d'influence*. Nous décalquons à dessein cette expression sur celle de *champ de force* qu'utilise la physique. Le champ d'influence, tel que nous le définissons, a deux caractères : son action est *orientée*, et elle s'exerce *en commun* sur tous les systèmes qui y sont sensibles. Le concept de champ d'influence est donc plus compréhensif que celui de champ de force; celui-ci précise que l'influence exercée est de nature énergétique; par exemple, en tout point du champ électrostatique une densité d'énergie peut être définie. Mais, dans le cas des foules d'êtres vivants, l'influence peut être de nature variée, lumineuse, alimentaire, thermique. Une source de lumière est ainsi le centre d'un champ d'influence pour les animaux qui sont doués de phototropisme. Peut-être existe-t-il une loi qui règle, en fonction de la distance à la source lumineuse, l'intensité du phototropisme, de même que la loi de Coulomb règle, en fonction de la distance, l'intensité de la force électrique. Pour que l'espace moteur d'une foule d'animaux soit isotrope, il faut que le champ d'influence soit nul, ou encore que tout point du milieu ait le même potentiel d'influence.

Nous avons fait toutes les remarques précédentes pour rendre précise la définition de la *foule*.

Soit, alors, une foule d'animaux doués d'autonomie motrice. Nous voulons vérifier que, en accord avec le principe que nous avons rappelé, les relations de ces animaux sont aléatoires et que la théorie de la foule est probabiliste. D'une manière plus précise, nous avons voulu confirmer cette loi (1) : « la densité d'une foule tend, spontanément, perpétuellement et irréversiblement vers *l'homogénéité*. Et cette tendance est *aléatoire*. »

Il est immédiat que la théorie de la foule est d'essence probabiliste.

Soit A l'un quelconque des animaux, et soit V le volume total du milieu dans lequel il se trouve. Par définition même de l'autonomie, la trajectoire de A est indépendante des parois qui limitent le volume. Parti d'un point quel-

(1) P. VENDRYÈS, *Vie et Probabilité*.

conque, il *pourra*, en vertu de son autonomie, se trouver, au bout d'un temps relativement court, *en un point quelconque* de ce volume. La présence de A dans une région ν du volume V, à un instant t , est, invinciblement, une *question de probabilité*.

Avec plus de précision, si rien ne l'attire en un point plutôt qu'en un autre, et s'il est parfaitement libre d'aller là où il veut, *la probabilité* qu'à un instant quelconque il se trouve en une région quelconque ν de V, est égale au rapport ν/V . Comme ν est quelconque, cette relation signifie que tous les points de V sont d'égale probabilité. Cette égalité des probabilités correspond exactement à l'isotropie du milieu extérieur.

Un deuxième animal A' aura *la même* probabilité que le premier, soit ν/V , de se trouver dans la région ν . Cette identité probabiliste résulte de ce qu'ils sont indépendants l'un de l'autre. En toute rigueur, cette indépendance n'est jamais parfaite, puisque la présence de l'un en un point précis est un obstacle physique à la présence de l'autre au même point. Pour que la probabilité que l'un des deux se trouve dans ν puisse être considérée comme égale à celle que l'autre s'y trouve aussi, il faut donc que leurs dimensions soient petites par rapport à celles de ν .

Ce raisonnement s'étend de proche en proche à la foule entière. Indépendants les uns des autres, les n animaux de la foule le sont aussi du milieu extérieur. Pour chacun d'eux, la probabilité élémentaire de se trouver, à un instant t , dans une région ν de V, est égale à ν/V .

Le problème se transcrit donc très exactement en langage probabiliste. Pour tout animal A, *l'événement* consiste à se trouver, à l'instant t , dans le volume V; cet événement comporte N *cas possibles* si l'on a divisé le volume V en N régions ν ; la *probabilité élémentaire* de chacun des cas possibles est donnée par le rapport des volumes des régions ν comparé à celui de V. Dans le cas où tous les ν seraient de volume égal, les probabilités élémentaires seraient égales.

Comme les n animaux sont indépendants les uns des autres, la foule représente n *répétitions*, indépendantes les unes des autres, d'un même événement.

Et on peut, alors, appliquer directement à la foule les théorèmes du Calcul des Probabilités.

Le nombre n des animaux représente leur densité totale dans le volume V. Désignons par k la densité des animaux dans la région ν . La *loi de Bernoulli* veut que la fréquence relative k/n tende vers la probabilité ν/V . Le rapport k/n du nombre des animaux tend à être proportionnel au rapport ν/V des volumes. Cette proportionnalité est une conséquence directe de l'isotropie du milieu.

Or, les dimensions de ν sont quelconques par rapport à celles de V, et la position de ν dans V est quelconque : le volume V est *homogène*. Et par conséquent, le rapport des densités k/n , qui est étroitement lié au rapport des volumes ν/V , *tend vers l'homogénéité*.

Une foule parfaite doit se répartir d'une manière homogène dans un milieu isotrope.

Une connaissance plus intime de la loi de Bernoulli fait comprendre que cette *tendance* vers l'homogénéité a un caractère très particulier.

Il ne s'agit pas d'une tendance nécessaire, analogue à la tendance rationnelle

d'une courbe vers son asymptote. L'homogénéité d'une foule est un devenir perpétuel; elle est la limite d'une évolution toujours mouvante; ce caractère fluctuant est en relation avec l'indépendance des animaux; il est propre à la loi de Bernoulli, et, puisqu'il appartient en propre à la théorie des probabilités, on peut le qualifier d'aléatoire. Et l'on dira que *la tendance vers l'homogénéité est aléatoire*.

C'est bien à l'aide des concepts probabilistes que Smoluchowski et Einstein ont fait la théorie des *fluctuations* de densité autour de l'homogénéité.

Le caractère aléatoire de ces fluctuations apparaît immédiatement. La densité d'une foule dans une région est mesurée par le nombre d'individus qui s'y trouvent. La foule occupe au total le volume V ; mais la mobilité de ses constituants fait qu'il y a une circulation continue d'individus entre une région ν et le reste du volume. Or, lorsqu'un individu pénètre dans la région, ou lorsqu'il en sort, cela n'a aucune influence sur la trajectoire des autres, puisqu'ils sont indépendants. Il en résulte que l'entrée ou la sortie simultanée de deux individus est une *coïncidence fortuite*. La densité de la région varie donc dans le temps selon les hasards des coïncidences; elle est une variable aléatoire.

Chacun des individus a la probabilité élémentaire ν/V de se trouver à un instant t dans la région ν . La probabilité que k individus, sur le nombre total n , se trouvent dans ν , est :

$$C_n^k \left(\frac{\nu}{V}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{V}\right)^{n-k}$$

De cette formule se déduit *la loi normale des écarts de Gauss-Laplace*.

La théorie de la foule est donc bien d'essence probabiliste.

Et c'est cela que nous nous sommes proposés de soumettre à l'expérience.

Deux faits devaient être confirmés : la tendance d'une foule vers l'homogénéité, et le caractère aléatoire de cette tendance. Pour cela, deux conditions devaient être réalisées : l'indépendance des animaux et l'isotropie de leur espace moteur.

Le principe de nos expériences fut de photographier, un grand nombre de fois, un ensemble d'animaux contenus dans un même récipient, puis d'analyser sur les clichés successifs la répartition de nos animaux.

Nous avons choisi comme sujets d'expérience des têtards de grenouille. Ces animaux sont petits, mobiles et faciles à photographier. Leur sociabilité est très réduite, et l'attraction sexuelle est, pour eux, nulle.

Nous avons fait un premier essai en mai 1948. Nous avons mis environ 150 têtards dans une cuve quadrangulaire, et nous avons pris 55 photographies avec un appareil à microfilmer, à des intervalles de temps inégaux de l'ordre d'une fraction de minute. Puis nous avons projeté les clichés les uns après les autres sur un même repère rectangulaire, dans lequel nous avons tracé 10 carrés égaux; et nous avons compté les têtards compris dans chaque carré. Au total nous avons dénombré 7.175 têtards.

Nous avons remarqué que les têtards ne se répandaient pas uniformément dans la cuve, mais avaient une tendance déplorable à se coller contre les bords et, en particulier, à s'agglutiner dans les coins. Ils sortaient des conditions du

problème. Nous avons cru parer à cet inconvénient, en éliminant tous ceux qui se collaient contre les parois et en comptant seulement ceux qui nageaient librement vers le centre de la cuve. Pour vaincre la paresse des têtards, qui se posaient sur le fond, nous avons brassé de temps en temps la cuve en cherchant à rendre irrégulier notre brassage.

Si la répartition s'était faite selon la loi d'homogénéité, nous aurions dû constater que, au total, le nombre des têtards dans chacun des 10 carrés différait peu du chiffre moyen 718. Or, nous avons constaté de grands écarts par rapport à ce chiffre :

1 ^{er} carré : 916, soit un écart + 198 2 ^e carré : 947, — + 229 3 ^e carré : 671, — — 47 4 ^e carré : 500, — — 218 5 ^e carré : 648, — — 70		6 ^e carré : 948, soit un écart + 230 7 ^e carré : 815, — + 97 8 ^e carré : 571, — — 147 9 ^e carré : 480, — — 238 10 ^e carré : 679, — — 39
--	--	--

Le plus petit écart, celui du 10^e carré, était déjà important, puisqu'il était de 39 têtards, soit 5,4 % par rapport à la valeur moyenne 718. Et le plus grand écart, celui du 9^e carré, était considérable : 238 têtards soit 33,1 % de la valeur moyenne.

La critique de nos résultats nous fit comprendre que nous avions très mal réalisé les conditions de l'expérience. Tous les écarts par excès ont eu lieu d'un côté et tous les écarts par défaut de l'autre. Cette hétérogénéité, aussi nettement globale, devait être la conséquence d'une même influence extérieure, soit une attraction générale vers ce que nous désignons par convention Ouest, soit une répulsion générale venant de l'Est. L'espace moteur de nos têtards *n'avait pas été isotrope*. Comme la cuve que nous avons utilisée était en verre transparent, nous avons incriminé une différence de luminosité, qui, réellement, existait.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
OUEST	+ 198	+ 229	— 47	— 218	— 70	EST
	+ 230	+ 97	— 147	— 238	— 39	
	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	

Manifestement, un tropisme très puissant avait attiré les têtards vers les faces latérales de la cuve et les avait fait se masser dans les angles. Ils s'étaient donc montrés bien peu autonomes par rapport au milieu extérieur. Et, enfin, nous-mêmes, en les brassant, nous n'avions pas respecté leur autonomie motrice.

Nous avons donc refait l'expérience en améliorant ses conditions. Nous avons pris une cuvette circulaire en porcelaine. Nous supprimions ainsi, à la fois, les angles et la transparence du contenant.

140 têtards furent mis dans la cuvette. 63 photographies furent prises à des intervalles de temps inégaux, mais plus longs que pour notre premier essai. Les clichés furent projetés sur un cercle qui avait été divisé en huit octants égaux. Le centre de l'image de la cuvette était chaque fois projeté au centre de notre cercle. Pour éviter la difficulté de repérer aux sommets des octants les têtards nous les avons empêchés de venir au centre de la cuvette en y mettant un objet

circulaire. Dans les huit octants, les conditions devaient être les mêmes. L'espace moteur devait être, circulairement, isotrope.

Au total, 8.262 têtards furent dénombrés. La valeur moyenne était donc pour chaque octant $8.262/8 = 1.033$.

Les résultats furent bien meilleurs que ceux du premier essai. Dans le sixième octant, le nombre total fut 1.031, soit un écart par défaut de 2, et un écart relatif de 0,19 %. L'écart maximum fut trouvé dans le deuxième octant, avec un excès de 117 têtards et un écart relatif de 11,3 %.

A une meilleure isotropie de l'espace avait donc correspondu une bien plus nette tendance vers l'homogénéité. L'écart maximum avait été ramené de 33,1 % à 11,3 %.

Mais ce résultat ne nous a pas encore satisfaits. En étudiant la répartition des écarts nous avons, comme la première fois, constaté que les écarts par excès étaient tous situés du même côté de l'un des diamètres de la cuvette, et les écarts par défaut tous de l'autre. Il fallait donc penser que, pour la deuxième expérience aussi, une même cause attractive avait dû faire sentir son effet vers le côté que nous nommerons Gauche. L'isotropie du milieu n'était pas encore parfaite. Nous avons incriminé une différence d'éclairement, qui était encore réelle par-dessus le bord de la cuvette, et la présence de l'opérateur.

Nous avons cependant essayé de voir si la tendance vers l'homogénéité avait

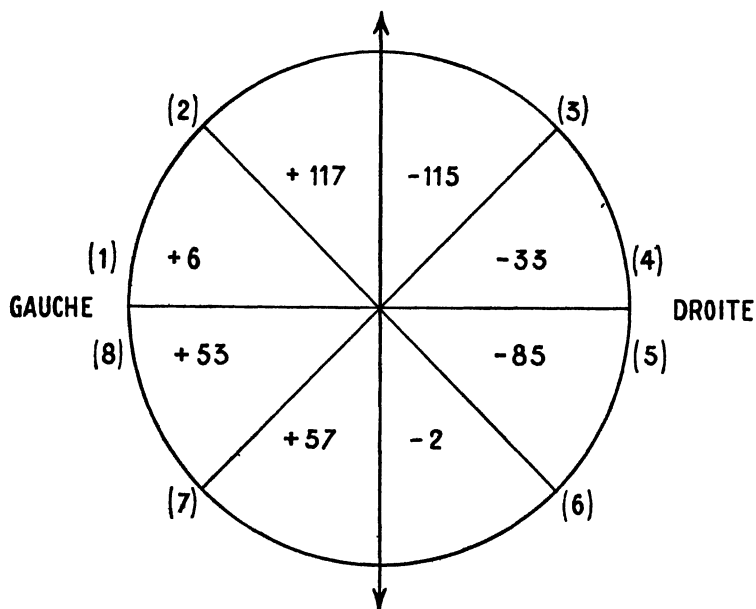


Fig. 1.

eu un caractère *aléatoire*, en étudiant la fréquence des écarts autour de la valeur moyenne. Nous avons choisi le sixième octant, celui pour lequel le total 1.031 fut presque égal à la valeur moyenne 1.033. Nous ne pouvions d'ailleurs n'avoir qu'une approximation, puisque nous ne tenions pas compte, dans le calcul de la valeur moyenne, du fait que, dans la numération des têtards sur les divers clichés, nous n'avions pas cherché systématiquement à retrouver le nombre total des têtards présents dans la cuvette. Nous avons pris arbitrairement comme valeur

moyenne le quotient de 1.031 par 63, nombre des clichés. Autour de ce chiffre moyen, 16,3, il y eut, d'un cliché à l'autre, des écarts de densité. Si la tendance avait été nettement aléatoire, nous aurions dû voir les fréquences dessiner une courbe en cloche. En fait, au lieu de se grouper autour d'une valeur moyenne, les fréquences s'étalèrent sur l'abscisse des écarts et se groupèrent

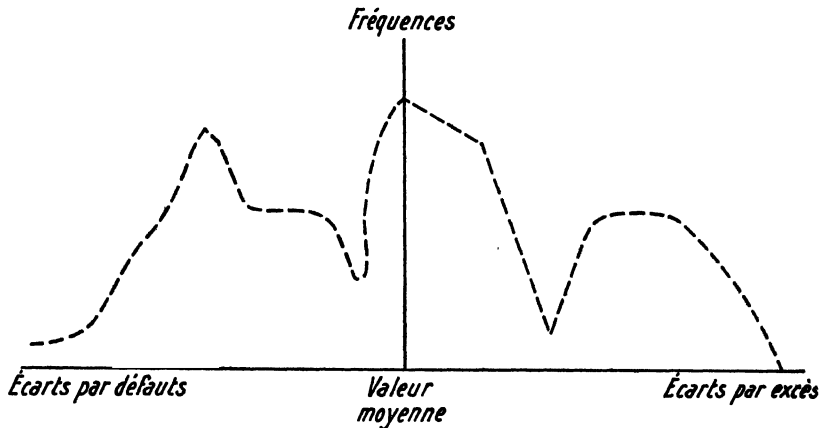


Fig. 2.

plutôt autour de trois maxima, l'un central, les deux autres latéraux. Une cause de déplacement par groupes avait dû se faire sentir.

Tout en le faisant plus rarement et plus doucement que pendant notre premier essai, nous avons encore dû brasser quelques fois le contenu de la cuvette.

En avril 1949, nous avons donc repris une troisième fois l'expérience, en nous efforçant de réaliser les meilleures conditions que nous pouvions.

Nous n'avions plus l'espoir de voir des têtards se mouvoir en pleine indépendance. Mais, pour compenser, autant que possible, la légère influence qu'ils exercent les uns sur les autres, nous avons pris nos clichés à des intervalles de temps qui nous semblèrent assez longs pour que les petits rassemblements d'animaux, qui ne doivent pas persister très longtemps, aient le temps de se dissocier, et pour que les animaux paresseux aient le temps de se reposer, ce qui nous permettait d'éviter tout brassage. Les clichés furent pris environ toutes les deux minutes. L'expérience s'est prolongée pendant neuf heures, coupée par un arrêt d'une heure et demie. Pendant sept heures et demie, nous avons pris plus de 200 clichés. Pour différentes raisons, nous avons dû en éliminer un certain nombre. Finalement, nous avons examiné 150 clichés.

Si nous ne pouvions rendre parfaite l'indépendance de nos têtards, nous avons voulu améliorer encore les conditions d'isotropie. Nous avons choisi un cristalliseur circulaire, à fond plat, en verre translucide et bleuté; comme il était peu profond, nous diminuions les inconvénients qui, résultant de la superposition des têtards, avaient beaucoup gêné nos précédentes numérations. Sous le cristalliseur, nous avons placé une planche circulaire, qui avait été peinte en blanc de manière à faire ressortir les silhouettes des têtards.

Pour éviter toute différence dans le champ lumineux, nous avons placé le

cristallisoir au fond d'un chaudron qui formait écran circulaire. La face interne du chaudron avait été peinte, d'une manière égale, en vert foncé. Un peu avant de prendre les clichés, nous allumions simultanément quatre lampes, qui étaient

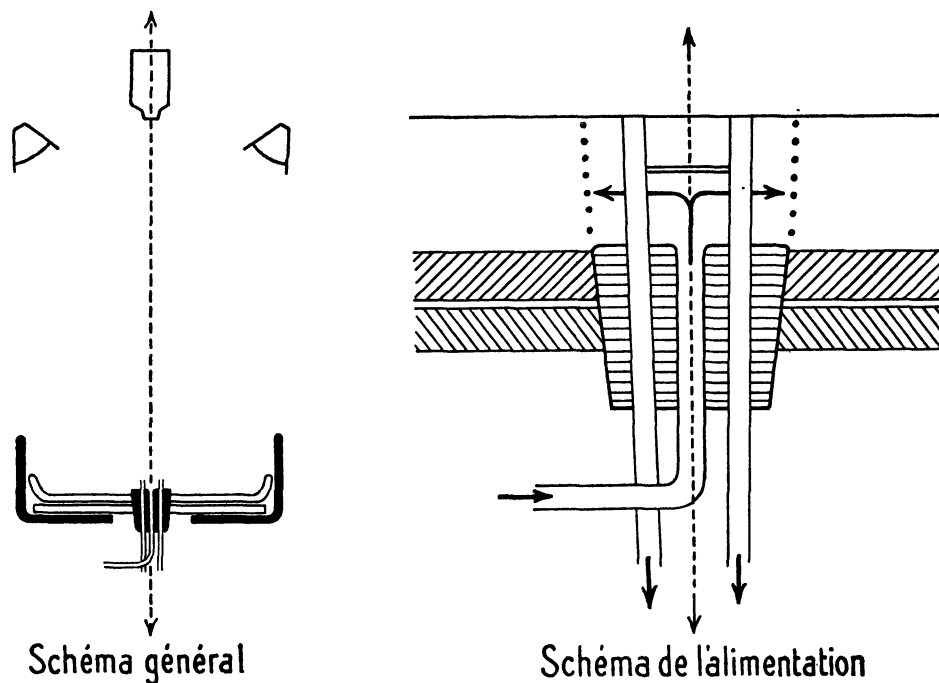


Fig. 8.

disposées, comme pour les précédents essais, de part et d'autre de l'appareil photographique. Enfin, tout le champ expérimental avait été tendu de drap couleur crème, et il avait été isolé du jour extérieur par une tenture noire. L'opérateur lui-même restait en dehors du champ d'expérience.

L'isotropie lumineuse ainsi obtenue, nous avons voulu réaliser l'isotropie physicochimique et alimentaire. Comme l'expérience devait durer longtemps, et comme le faible volume d'eau risquait d'être échauffé par la lumière photographique, nous avons fabriqué un système circulatoire. L'eau était amenée par le fond du cristallisoir; pour assurer l'isotropie alimentaire, l'orifice d'arrivée était au centre même. L'écoulement se faisait par quatre tubes de verre, disposés en carré autour du centre; leur hauteur au-dessus du fond fixait le niveau de l'eau. Par un petit disque circulaire, placé au-dessus de l'orifice d'arrivée, nous obligeons l'eau à diffuser dans le cristallisoir. Une petite barrière circulaire empêchait les têtards de pénétrer dans ce système d'alimentation. L'eau entrait sous pression réduite, pour éviter les remous. Elle était constituée aux deux tiers d'eau fraîche du robinet, et pour un tiers d'eau d'étang décantée.

Nous avons bien créé un champ d'influence alimentaire. Mais, puisque les sommets de nos octants devaient être situés au centre même de ce champ, nous annulions tout effet d'orientation de son influence. L'espace moteur des têtards était, circulairement, isotrope.

Le corps de chaque têtard couvrait, en moyenne, une surface de 65 mm²,

produit de 10 mm de longueur par 6,5 mm de largeur; la queue est longue de 15 mm. Le cristalliseur avait 145 mm de rayon; en son centre, le système d'alimentation, région interdite, avait 15 mm de rayon. La surface utilisable par les têtards était d'environ 65.000 mm². Nous avons fait l'expérience avec exactement 80 têtards. Ils étaient donc très à l'aise, puisque pour couvrir toute la surface utilisable, il aurait fallu en mettre dix fois plus.

Les clichés furent projetés sur un plan où quatre droites, à 45° l'une de l'autre, délimitaient huit octants. Nous nous sommes appliqués à retrouver sur chaque projection les 80 têtards; nous faisons une première numération dans chaque octant, puis nous recherchions avec soin les quelques unités qui, en général, nous manquaient. Nous les cherchions surtout dans les amas; et ainsi, loin d'influer sur la numération dans un sens favorable à notre thèse, nous favorisâmes plutôt l'hétérogénéité.

Nous avons d'abord cherché s'il y avait eu *tendance vers l'homogénéité* de la densité.

A la fin de nos 150 examens, nous avons numéré $150 \times 80 = 12.000$ têtards. La valeur moyenne, pour chaque octant, était $12.000/8 = 1.500$. Voici les chiffres que nous avons trouvés :

OCTANT	1	2	3	4	5	6	7	8
Total des 150 examens	1.577	1.482	1.519	1.572	1.484	1.487	1.487	1.512
Écarts absolus	+ 77	— 68	+ 19	+ 72	— 16	— 33	— 63	+ 12
Écarts %	5,13	4,53	1,26	4,8	1,06	2,2	4,2	0,8

L'écart maximum, rapporté au chiffre de la valeur moyenne, fut donc de 5,13 %. Il était de moitié moins grand que celui de notre deuxième expérience, et il était inférieur à l'écart minimum de notre premier essai. Au fur et à mesure que les conditions d'isotropie avaient été mieux réalisées, l'écart maximum avait donc diminué de 33,1 % à 11,3 % et enfin à 5,13 %, et la tendance vers l'homogénéité s'était plus affirmée.

En examinant la répartition des écarts de 50 en 50 épreuves, nous nous sommes assurés qu'il n'y avait pas eu de région privilégiée pendant la durée totale de l'expérience. Les excès et les défauts de densité étaient irrégulièrement et inconstamment partagés entre les divers octants.

La tendance vers l'homogénéité fut d'autant plus nette que les examens furent plus nombreux. Au bout de 50 examens, l'écart maximum fut trouvé dans le 4^e octant, avec 572 unités, soit 14,5 % en excès; du 51^e au 100^e, dans le 5^e octant, avec 446 têtards, soit 10,8 % en défaut; et du 101^e au 150^e dans le 5^e octant, avec 537 unités, soit 7,4 % en excès.

La plus grande rigueur de notre troisième expérience nous a permis d'analyser le caractère *aléatoire* de la tendance vers l'homogénéité.

Pour étudier les fluctuations de la densité, nous avons d'abord fait un premier calcul en associant en un seul quadrant les deux octants voisins 7 et 8.

Chacun des têtards avait donc, en tant que probabilité élémentaire, une chance

sur quatre de se trouver, à un instant quelconque, dans ce quadrant, et trois chances sur quatre d'être dans le reste du cristallisoir. La valeur moyenne de la densité dans ce quadrant était, pour chacun des examens, égale à $80/4 = 20$. Nous avons calculé la probabilité des divers écarts h autour de cette valeur moyenne à l'aide des tables qui donnent les valeurs de la fonction $\Theta(\lambda)$, où λ est l'écart réduit, égal à $h/\sqrt{2npq}$. Dans notre expérience, nous avons : $n = 80$, $p = 1/4$, et $q = 3/4$. λ était donc égal à $h/5,48$.

Nous reportons sur une même figure la courbe des valeurs théoriques, en trait plein, et la courbe des valeurs expérimentales en pointillé. Les chiffres expéri-

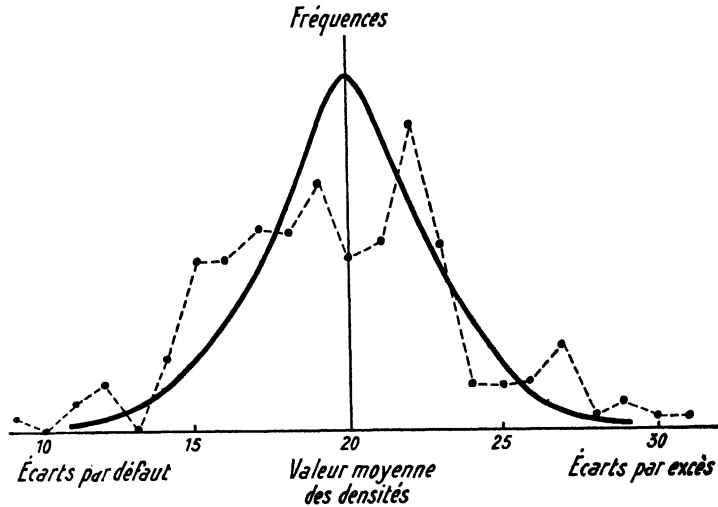


Fig. 4.

mentaux sont ceux des fréquences des divers écarts autour de la valeur moyenne 20, qui correspond à l'homogénéité parfaite.

La courbe des fréquences, en pointillé, a bien pour tracé idéal celle des probabilités, en trait continu. La parenté des deux courbes serait tout à fait frappante s'il y avait eu un peu moins souvent 22 têtards dans le quadrant, et un peu plus souvent 20 et 21. Ce décalage de densité a enlevé au profil de la courbe expérimentale la symétrie de la courbe théorique. Dans la réalité, deux écarts furent favorisés, l'écart + 2 et l'écart - 5, aux dépens de la valeur moyenne et des écarts + 1 et - 1. Mais le fait essentiel, celui que nous voulions vérifier, est bien réel : les fréquences des densités se groupent en un massif unique, autour de la valeur moyenne, et, si ce massif a une forme plus tassée que le contour idéal, il a nettement pour limites des écarts peu étendus : + 4 d'un côté, et - 6 de l'autre.

Cette vérification du caractère aléatoire de la tendance vers l'homogénéité a pour nous une telle importance que nous avons voulu examiner nos résultats, non plus sur un quadrant, mais sur la totalité de nos octants. En effet, il faut s'attendre à voir apparaître d'autant mieux les caractères aléatoires d'événements que ces événements sont plus nombreux. Or, nous avons eu à examiner $150 \times 8 = 1.200$ octants. Ce nombre est suffisamment grand pour que la nature aléatoire des événements commence à se manifester nettement.

Nous avons donc reporté sur un même graphique la fréquence des densités dans les divers octants, sur les 150 clichés.

Pour établir la courbe théorique, nous avons utilisé les tables de la fonction $\Phi(\lambda)$. Le nombre n des têtards était toujours 80. Chacun d'eux avait une probabilité élémentaire $p = 1/8$ de se trouver dans l'un quelconque des octants; donc une probabilité $q = 7/8$ de se trouver dans le reste du cristalliseur. La valeur moyenne des densités dans chaque octant était égale à $80/8 = 10$. Autour de cette valeur, des écarts par défaut et des écarts par excès devaient avoir lieu. Si les fluctuations de densité avaient bien un caractère aléatoire, les fréquences de ces écarts h devaient se grouper sous le contour d'une courbe en cloche. Nous avons obtenu les valeurs de la courbe en cloche théorique par les tables; nous avons $\lambda = h/\sqrt{2npq} = h/4,18$.

Nous avons calculé ainsi les fréquences théoriques des diverses densités rapportées à 1.200 examens. Le tableau suivant compare les nombres constatés dans notre expérience aux nombres calculés :

Densités	Fréquences calculées	Fréquences trouvées	Comparaison
0	0,25	1	
1	0,7	1	
2	1,7	4	
3	5	9	
4	12	23	
5	25	39	Excès réel
6	45	76	
7	77	82	
8	125	140	
9	182	157	
10	250	181	
11	182	149	
12	125	107	Insuffisance réelle
13	77	70	
14	45	60	
15	25	44	
16	12	25	
17	5	18	
18	1,7	6	
19	0,7	5	Excès réel
20	0,25	4	

Les deux courbes ont la même allure générale. Pour que leur comparaison prenne toute sa valeur, il faut imaginer ce que serait la courbe expérimentale si la densité des têtards dans le cristalliseur avait été soit très hétérogène soit fixement homogène. C'est la seule manière de constater que, effectivement il y a eu tendance vers l'homogénéité et que cette tendance a eu des caractères aléatoires.

Si la densité avait été hétérogène, donc si les têtards s'étaient massés dans une région et n'avaient effectué leurs déplacements que par groupes serrés, les densités extrêmes, 20, 19, 18, 2, 1, 0, auraient été d'une grande fréquence et les densités moyennes, 8, 9, 10, 11 et 12, d'une grande rareté. Au lieu d'avoir un sommet médian, la courbe aurait eu deux sommets extrêmes, entre lesquels il y aurait eu une profonde dépression. Que la courbe réelle ait la forme d'une montagne pointue est l'indice certain que la densité a tendu vers l'homogénéité.

Si la densité avait été rigoureusement homogène, et si cette homogénéité

était restée figée pendant toute la durée de l'expérience, il n'y aurait eu que des densités 9, 10 et 11, et les fréquences des autres densités auraient été nulles. La courbe réelle, au lieu d'avoir la forme d'une montagne, aurait eu celle d'un mât vertical. C'est parce que l'homogénéité n'a été, comme nous le supposions, que la limite d'une tendance, qu'il y a eu des écarts de densités.

Le tracé en trait plein indique le profil idéal qu'aurait dû avoir la courbe expé-

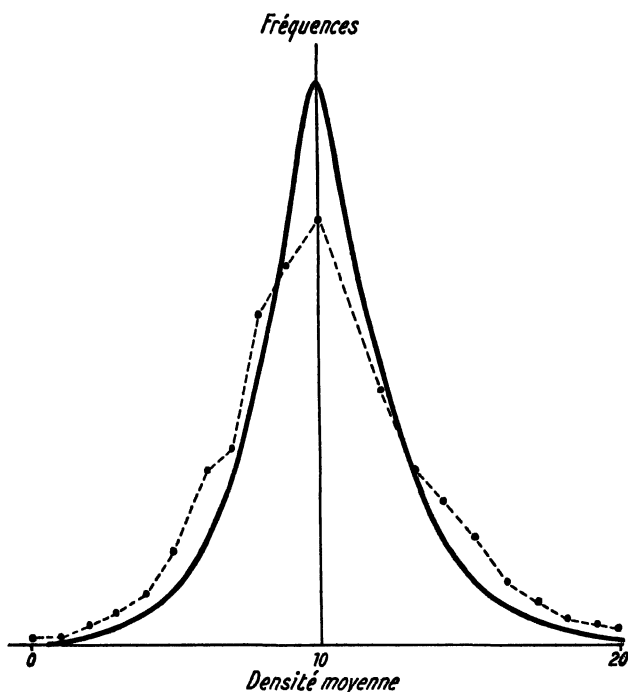


Fig. 5.

rimentale si la tendance vers l'homogénéité avait été parfaitement aléatoire. Un peu moins aiguë que la courbe idéale, la courbe réelle prouve, par son léger affaissement, que la tendance n'a pas été, en réalité, parfaitement aléatoire.

La raison de cette imperfection doit être attribuée à l'influence que les têtards exercent les uns sur les autres. Dans leurs déplacements, en effet, ils ne sont pas parfaitement indépendants les uns des autres. La direction de leurs trajectoires est indiquée sur les clichés par l'orientation de leurs queues; or, manifestement, ces trajectoires ont été assez souvent convergentes, et parfois parallèles. Les déplacements ont dû, de temps à autre, se faire par petits groupes; cela explique que, dans un même octant, les variations de densité aient eu parfois une grande amplitude. Par exemple, du 113^e au 125^e cliché, les nombres de têtards furent successivement dans le huitième octant : 14, 8, 0, 10, 12, 11, 20, 9, 11, 13, 6, 9, 9. Pendant la demi-heure, au cours de laquelle ces clichés ont été pris, les têtards ont certainement été animés d'une grande activité d'ensemble. Aussi, du 115^e au 125^e cliché, on compte dans l'ensemble des octants : 3 écarts |10|, 1 écart |9|, 1 écart |7|, et 3 écarts |6|, par rapport à la valeur moyenne 10. A titre de comparaison, on compte, du 21^e au 31^e cliché : 1 écart |7| et 1 écart |6| seulement.

*

Les conclusions de notre étude expérimentale nous semblent donc très nettes : la densité d'une foule de têtards tend vers l'homogénéité; et il ne s'en faut que d'un peu de dépendance des têtards que cette tendance soit parfaitement aléatoire.

Nous ferons encore remarquer que l'homogénéité n'est bien qu'un devenir perpétuel, et qu'elle n'est jamais définitivement acquise. Par exemple, sur le 22^e cliché, nous avons compté dans les huit octants : 10, 10, 11, 11, 10, 10, 8 et 10 têtards, indice d'une répartition très proche de l'homogénéité parfaite. Or, dès le 23^e cliché, l'homogénéité était rompue : 11, 11, 13, 16, 9, 6, 8, et 6. Et il fallut attendre le 40^e pour retrouver une répartition homogène : 9, 10, 11, 10, 10, 9, 12 et 9.

En conclusion, la densité d'une foule, en milieu isotrope, tend vers l'homogénéité. Et cette tendance est aléatoire.

Cette conclusion a un triple intérêt.

Elle confirme, par l'expérience, l'interprétation probabiliste de l'autonomie physiologique. Elle a donc une grande importance pour la biologie théorique.

Elle confirme qu'il y a bien un lien direct entre le caractère aléatoire des relations de systèmes distincts et leur indépendance. Et cela a une grande importance, non seulement en philosophie des sciences, mais encore en biologie, parce que cela donne un sens à l'emploi des notions probabilistes dans cette science.

Et enfin, elle prouve que, quelle que soit leur échelle, des systèmes peuvent avoir entre eux des relations aléatoires. L'emploi des notions probabilistes pour faire la théorie d'une foule de têtards n'est en effet pas dû à ce que leurs dimensions sont celles de la microphysique, échelle des relations d'incertitude d'Heisenberg, ou à ce que l'homme ne peut en percevoir qu'un très grand nombre, comme c'est le cas des molécules d'un gaz. Il a suffi de 80 têtards, parfaitement visibles, pour analyser le caractère aléatoire de leur foule. Si les physiciens pouvaient voir les molécules d'un gaz aussi facilement que les biologistes peuvent voir des têtards, ils constateraient des fluctuations de densité tout à fait comparables à celles que nous venons de rapporter. Pour une fois, les biologistes ont un avantage expérimental sur les physiciens.

P. VENDRYÈS, R. MALTERRE.

Le texte de la discussion relative à cette communication paraîtra dans le prochain numéro du Journal. (N. D. L. R.)
