Journal de la société statistique de Paris

R. Risser

Note relative aux surfaces de probabilités

Journal de la société statistique de Paris, tome 89 (1948), p. 381-409
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1948__89__381_0>

***

Note relative aux surfaces de probabilités.

Le statisticien anglais K. Pearson, dont les belles recherches ont donné un essor considérable au développement de la Statistique mathématique, étudiant le polygone obtenu en joignant les points du *graphique binomial*, a considéré la pente du côté $(x, x+1)$, soit $(Y_{x+1} - Y_x)$ et l'a rapproché de l'ordonnée moyenne Y_m; il a été conduit — après avoir pris comme variable $\xi = x + 1/2$ et posé —

$$-\left(np + \frac{p-q}{2}\right) + \xi = X\sigma, \text{ avec } \sigma = \sqrt{npq},$$

à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\sigma \Delta y}{y_m} = \frac{-x}{1 + 1/n + (q-p)\frac{x}{2\sigma}},$$

où Y a été remplacé par $\frac{y}{\sigma}$.

Cette équation correspond au cas où l'on remet dans l'urne, la boule tirée après chaque tirage.

Supposons n très grand, l'équidistance des abscisses devient très petite, et le polygone binomial dessine une courbe dont la pente est définie par l'équation ci-dessus; il s'ensuit que l'on a approximativement

$$(2) \qquad \frac{y'}{y} = -x.$$

Lorsque l'on ne remet pas les boules dans l'urne, mais utilisant toujours le graphique binomial, on aboutit à l'équation :

$$(3) \qquad \frac{\Delta Y}{2 Y_m} = \frac{A\left(Np + \frac{p-q}{2}\right) + N - \xi(A+2)}{A(Np + 1/2) - \xi[A(p-q) + 2N] + 2\xi^2},$$

où A représente le nombre total des boules de l'urne, N le nombre des tirages successifs, et où la composition de l'urne avant tout tirage en boules blanches et en boules noires est définie par (p, q), ξ étant liée au nombre x des boules extraites par la relation $\xi = x + 1/2$.

Grâce à ces résultats, K. Pearson a été alors amené à considérer l'équation différentielle du type suivant :

$$(4) \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{x + a_0}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2},$$

et à caractériser ainsi divers types de courbes de distribution, dont certaines résultent de l'application de critères du calcul des probabilités, et dont d'autres peuvent être considérées comme des courbes d'interpolation.

Rappelons à propos de l'équation (3) que si l'on fait $p = q$, et si l'on suppose A très grand et N également très grand, mais très inférieur à A, l'on constate que l'on trouve l'égalité approchée (2), qui correspond à la courbe normale symétrique.

On peut alors se demander si l'on peut étudier les distributions afférentes aux tirages non exhaustifs et aux tirages exhaustifs. en faisant appel à l'équation

$$\frac{y'}{y}=\frac{f(x+1)-f(x)}{2f(x)},$$

qui revient à supposer en première approximation, que la courbe de distribution est formée par de petits arcs de paraboles du second degré.

Cet essai nous a conduit alors à étudier les équations différentielles :

$$\frac{y'}{y}=\frac{x}{\mathfrak{T}_4(x)}, \text{ et } \frac{y'}{y}=\frac{a_0+x}{\mathfrak{T}_4(x)},$$

$\mathfrak{T}_4(x)$ étant un polynome du quatrième degré), et à mettre en évidence toutes les formes classiques de distribution dans le plan, retrouvées d'ailleurs ensuite par un processus absolument différent des précédents.

PREMIÈRE PARTIE

DE LA TRANSPOSITION DANS L'ESPACE DE LA MÉTHODE APPLIQUÉE AUX COURBES DE DISTRIBUTION

On est évidemment frappé par la représentation analytique donnée aux courbes de distribution, et celà grâce à une équation différentielle dont la forme la plus simple fait apparaître la courbe classique de Laplace-Gauss; n'y-a-t-il pas quelque chose d'analogue pour l'espace à trois dimensions — tel est le problème que l'on est amené à se poser : *Existe-t-il une équation aux dérivées partielles du second ordre caractérisant les surfaces de probabilités — ou du moins une certaine classe de ces surfaces; peut-on — en faisant appel à un processus analytique simple — les mettre en évidence.*

Si la méthode de K. Pearson peut être transposée facilement dans l'espace ordinaire et aussi dans l'espace à n dimensions, il ne faut pas perdre de vue les hypothèses qu'il y a lieu de faire, en étudiant les deux cas classiques de tirages; le premier correspondant au cas de remise des boules dans l'urne, le second, ou l'on ne remet pas les boules dans l'urne après tirage, les tirages étant effectués dans des urnes renfermant des boules de n couleurs différentes (n étant au moins égal à 3). A cette méthode il y a lieu de joindre celle résultant de l'emploi de la fonction caractéristique, comme on l'a fait systématiquement dans le plan.

Ce n'est qu'après cet exposé, que nous pourrons aborder le problème posé ci-dessus.

Rappelons tout d'abord que l'on démontre que $f''_{xy} = f''_{yx}$, en mettant sous deux formes différentes l'expression $U = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)$ puis en utilisant le théorème des accroissements finis, et en faisant tendre Δx et Δy vers zéro.

Alors que $\Delta^2_{xy}\, f\,(x,\,y)$ ne renferme que 2^2 éléments, $\Delta^n_{x,\,y,\,z,\,\ldots\ldots\,v}$ d'une fonction de n variables indépendantes $(x,\,y,\,z,\,u\,\ldots\ldots\,v)$ en compte 2^n.

Le premier problème qui appelle notre attention est celui de la probabilité d'extraction de x boules blanches, y boules noires et de z boules d'autres couleurs d'une urne, *en supposant que l'on remette les boules tirées après chaque tirage.*

Cette probabilité a pour valeur

$$(5) \qquad f\,(r,\,y,\,z) = \frac{N\,!}{x\,!\,y\,!\,z\,!}\,p_1^x\,p_2^y\,p_3^z,$$

N étant le nombre des boules tirées, p_1 *et* p_2 étant les probabilités respectives du tirage d'une boule blanche et d'une boule noire.

Il est évident qu'à l'apparition au cours de N tirages de $(x+1)$ boules blanches, de $(y+1)$ boules noires, correspond la sortie de $(z-2)$ boules d'autres couleurs, car l'on a extrait que N boules; il s'ensuit que l'on ne peut distinguer que les hypothèses suivantes :

	Sortie de $(x+1)$ boules blanches,	de $(y+1)$	boules noires,	de $(z-2)$	boules d'autres couleurs,		
	—	$(x+1)$	—	, de (y)	—	, de $(z-1)$	—
	—	(x)	—	, de $(y+1)$	—	, de $(z-1)$	—
et enfin,	—	(x)	—	, de (y)	—	, de (z)	—

A ces quatre associations de boules constituant l'ensemble G_1, nous devons rattacher celles afférentes aux groupes G_2 et G_3, que nous représentons schématiquement par des associations analogues aux précédentes en permutant simplement x en y, et y en z; seul le groupe G_1 doit attirer spécialement notre attention, car il nous conduit à la formation de

$$\Delta^2_{xy}\, f\,(x,\,y\ N - x - y),$$

alors que G_2 et G_3 nous permettent de calculer

$$\Delta^2_{yz} \text{ et } \Delta^2_{zx}.$$

Or si l'on se rappelle que le nombre des boules de couleurs autres que blanc et noir, dans le groupe G_1, est égal à $(N - x - y - 2)$ dans la première association, à $(N - x - y - 1)$ dans la deuxième et troisième combinaison, et enfin à $(N - x - y)$ dans la quatrième, on remarque immédiatement que l'on est conduit à faire intervenir les probabilités afférentes à :

$$f_1\,(x+1,\,y+1),\ f_2\,(x+1,\,y),\ f_1\,(x,\,y+1) \text{ et } f_1\,(x,\,y),$$

f_1 étant le résultat obtenu en remplaçant dans f, z par $(N - x - y)$, puis à introduire les différences

$$\Delta^1_x\,\Delta^1_y = [f_1\,(x+1,\,y+1) - f_1\,(x,\,y+1] - [f_1\,(x+1,\,y) - f_1(x,\,y)];$$

on se trouve alors en présence d'une différence seconde facile à étudier.

En effet, on constate que

$$f_1\,(x+1,\,y+1) = \frac{N\,!}{x\,!\,y\,!\,z\,!}\,p_1^x\,p_2^y\,p_3^z\,\frac{z\,(z-1)}{(x+1)\,(y+1)},$$

soit

$$(5) \qquad f_1\,(x+1,\,y+1) = f(x,y,z)\,\frac{z\,(z-1)}{(x+1)\,(y+1)}\,\frac{p_1\,p_2}{p_3^2}.$$

On verrait même que

$$(5)' \qquad f_1(x+1, y) = f(x, y, z)\,\frac{z}{x+1}\,\frac{p_1}{p_3},$$

$$(5)'' \qquad f_1(x, y+1) = f(x, y, z)\,\frac{z}{y+1}\,\frac{p_2}{p_3}.$$

Dans ces conditions, il y a lieu de rattacher au groupe G_1, le rapport $\frac{\Delta^2 f}{f(x, y, z)}$ qui a pour valeur :

$$(6) \quad \frac{\Delta^2 f}{f} = \frac{z[(z-1)\,p_1 p_2 - (y+1)\,p_1 p_3 - (x+1)\,(p_2 p_3)] + (x+1\,(y+1)\,p_3^2}{(x+1)\,(y+1)\,p_3^2}.$$

Si dans l'expression de $\frac{\Delta^2}{f}$, l'on remplace z par $(N - x - y)$,

x par $N\,p_1 + l_1$, y par $N\,p_2 + l_2$, et z par $N\,p_3 + l_3 = N\,p_3 - (l_1 + l_2)$,

avec $p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$, et $p_i + q_i = 1$, $(i = 1, 2, 3)$,

on trouve que le numérateur de $\frac{\Delta^2 f}{f}$

s'exprime ainsi qu'il suit :

$$(7) \quad l_1^2\,p_2 q_2 + l_1 l_2\,(p_1 p_2 + q_1 q_2) + l_2^2\,p_1 q_1 + (l_1 + l_2)\,q_1 q_2 - N\,p_1 p_2 p_3 + p_3^2;$$

quant au dénominateur, il a pour valeur :

$$N^2\,p_1 p_2 p_3^2 \left[1 + \frac{p_1 + p_2}{N\,p_1\,p_2} + \frac{1}{N^2\,p_1 p_2} + \frac{l_1 l_2}{N^2 p_1\,p_2} + \frac{l_1\,(N\,p_2 + 1)}{N^2\;p_1\,p_2} + \frac{l_2\,(N\,p_1 + 1)}{N^2\,p_1\,p_2}\right].$$

A la même unité de grandeur adoptée pour les échelles des x et des y nous substituons les grandeurs $\sigma_x = \sqrt{N\,p_1 q_1}$, et $\sigma_y = \sqrt{N\,p_1 q_2}$, comme nouvelles échelles; dans ces conditions, nous devons remplacer l_1 et l_2 par $\mathcal{X}\,\sqrt{N\;p_1\,q_1}$, et $\mathcal{Y}\,\sqrt{N\,p_2\,q_2}$, les grandeurs $\mathcal{X}\,\sqrt{N}$ et $\mathcal{Y}\,\sqrt{N}$ étant toutes deux d'un ordre égal à N^λ, λ étant compris entre 3/6 et 4/6.

Avec les nouvelles échelles, il y a lieu de remplacer Δx et Δy par $\frac{1}{\sigma_x}$ et $\frac{1}{\sigma_y}$; si donc N est très grand, ce qui revient à supposer que le nombre des boules de chacune des couleurs (blanche, noire), ainsi que celui des boules de toutes autres couleurs sont très grands et de beaucoup supérieurs à N (p_1, p_2, p_3) étant toutes trois finies), les quantités $\Theta\;\Delta x$ et $\Theta'\;\Delta y$ figurant dans l'expression de $(f''_{xy}\,(x + \Theta\,\Delta x, y + \Theta'\,\Delta y))$ deviennent des quantités très petites.

Il résulte de la que

$$f''\left(\frac{x + \Theta\,\Delta\,x}{\sigma_x}, \frac{y + \Theta\,\Delta\,y}{\sigma_y}\right) = \Delta^2 f\,\sigma_x\,\sigma_y,$$

et à la limite

$$\frac{f''(x, y)}{f} = \frac{\Delta^2 f}{f}\,\sigma_x\,\sigma_y = \frac{\Delta^2 f}{f}\,N\,\sqrt{p_1\,q_1\,p_2\,q_2}.$$

Revenons maintenant à la valeur limite de f''_{xy}, en faisant intervenir les variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, nous remarquons que :

$$(8) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathcal{X} \partial \mathcal{Y}}}{f(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} =$$

$$\frac{N\sqrt{p_1q_1p_2q_2}\left\{ N p_1q_1p_2q_2(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2) + N\sqrt{p_1q_1p_2q_2}\,(p_1p_2+q_1q_2)\mathcal{X}\mathcal{Y} + \sqrt{N}\,q_1q_2\left[\mathcal{X}\sqrt{p_1q_1}+\mathcal{Y}\sqrt{p_2q_2}\right] - N p_1p_2p_3 + p_3^2 \right\}}{N^2 p_1p_2p_3^2\left[1+\dfrac{q_3}{N p_1 p_3}+\dfrac{1}{N^2 p_1 p_2}+\dfrac{1}{\sqrt{N}}\dfrac{(\mathcal{X} p_2\sqrt{p_1q_1}+\mathcal{Y} p_1\sqrt{p_2q_2})}{p_1p_2}+\dfrac{\mathcal{X}\mathcal{Y}}{N}\dfrac{\sqrt{p_1p_2q_1q_2}}{p_1p_2}+\dfrac{\mathcal{X}\sqrt{p_1q_1}+\mathcal{Y}\sqrt{p_2q_2}}{N^{3}/_{2}}\right]}$$

Si l'on fait croître N indéfiniment, on remarque qu'à la limite, le rapport:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathcal{X} \partial \mathcal{Y}}}{f(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$$

se réduit à :

$$(8)' \quad \sqrt{p_1q_1p_2q_2}\,\frac{\left[p_1q_1p_2q_2(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2)+\sqrt{p_1q_1p_2q_2}\,(p_1p_2+q_1q_2)\mathcal{X}\mathcal{Y}-p_1p_2p_3\right]}{p_1p_2p_3^2}.$$

Faisant état de ce que le faisceau des deux droites :

$$\alpha^2(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2)+\alpha\,\mathcal{X}\mathcal{Y}=o, \text{ ou } \alpha=\sqrt{p_1q_1p_2q_2},$$

peut s'écrire :

$$\alpha^2(\mathcal{Y}-r\mathcal{X})\left(\frac{r\mathcal{Y}-x}{z}\right)=o, \text{ avec } r=-\sqrt{\frac{p_1p_2}{q_1q_2}}$$

donne à l'expression de $\dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathcal{X} \partial \mathcal{Y}}}{f}$ dans l'hypothèse où N est extrêmement grand, la forme simple :

$$(8)'' \qquad \left(\frac{1}{(1-r^2)^2}\right)(\mathcal{Y}-r\mathcal{X})(\mathcal{X}-r\mathcal{Y}+\frac{r}{1-r^2}.$$

Si maintenant, nous considérons, la surface :

$$Z = k\,e^{-\frac{(X^2-2rXY+Y^2)}{2(1-r^2)}}$$

nous constatons après un calcul simple que :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \mathcal{X}\partial \mathcal{Y}}}{Z}=\frac{1}{(1-r^2)^2}(\mathcal{Y}-r\mathcal{X})(\mathcal{X}-r\mathcal{Y})+\frac{r}{1-r^2},$$

et nous retrouvons l'expression (8)' caractérisant la surface de probabilités afférente aux tirages non exhaustifs dans le cas de N infini.

Toutes les fois que le nombre des tirages n'est pas extrêmement grand, il y aura lieu de considérer l'équation (8) comme ne fournissant qu'une approximation, équation que l'on peut représenter symboliquement de la manière suivante :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \mathfrak{X} \partial \mathfrak{Y}}}{Z} = \frac{\Phi_2 (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}{\psi_2 (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})},$$ $\Phi_2 = o$ définissant une hyperbole et $\psi_2 = o$ un système de deux droites.

Remarquant que $\psi_2 (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = N^2 p_1 p_2 p^2_3 (1 + U)$, on peut mettre $\dfrac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \mathfrak{X} \ \partial \mathfrak{Y}}}{Z}$ sous la forme $\dfrac{\Phi_2}{N^2 r_1 p_2 p_3{}^2} \left[1 + \dfrac{H_1}{\sqrt{N}} + \dfrac{H_2}{N} + \dfrac{H_3}{N\sqrt{N}} + \ldots\ldots\right]$, H_1, H_2, H_3..... étant des fonctions de x et de y.

La méthode que nous venons d'exposer peut être généralisée facilement; en effet, si l'on suppose que l'on se trouve en présence d'une urne renfermant des boules de n couleurs différentes, et que l'on procède au tirage de ces boules, *en remettant chaque fois dans l'urne la boule tirée*, la probabilité P d'extraire en N tirages, x_i boules de couleur i, avec $i = (1, 2, 3,\ldots n)$ est égale à :

$$P = f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{N!}{(x_1)!(x_2)!\ldots(x_{n-1})!\,[N-(x_1+x_2\ldots+x_{n-1})]!}\, p_1^{x_1} p_{2}^{x_2} \ldots p_{n-1}^{x_{n-1}} p_n^{N-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})}$$

c'est ainsi qu'au groupe G_1, défini comme ci-dessus, on fait correspondre dans le cas où $n = 4$ pour $\dfrac{\Delta^3 f}{f}$ une expression de la forme,

$$\frac{\varphi_3 (X_1, X_2, X_3)}{X_1 X_2 X_3 p^3_4}, \text{ avec } X_1 = x + 1, \quad X_2 = y + 1, \quad X_3 = z + 1.$$

Remarque. — Au lieu de considérer une dérivée partielle d'ordre $(n - 1)$, il semble qu'il y a lieu de mettre en lumière une somme de dérivées partielles du second ordre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$, en adaptant à l'espace à n dimensions la méthode utilisée dans l'espace à trois dimensions; cette remarque se trouvera justifiée plus loin.

2e PROBLÈME. ON NE REMET PAS LES BOULES APRÈS CHAQUE TIRAGE.

Considérons une urne renfermant des boules en nombre A_1, portant le numéro 1, des boules en nombre A_2 portant le numéro 2, ... et enfin des boules en nombre A_k portant le numéro k; on procède à N tirages sans remettre la boule extraite à chaque tirage, et l'on demande la probabilité afférente à la sortie de N_i boules portant le n° i, avec $i = (1, 2,\ldots k)$. On sait que cette probabilité que nous désignerons par $P_{(N_1, N_2, \ldots\ldots N_k)}$ a pour valeur :

$$(12) \qquad \frac{C_{A_1}^{N_1} C_{A_2}^{N_2} \ldots\ldots C_{A_k}^{N_k}}{C_A^N} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (A_i!)}{\Pi \{ (N_i)!\,(A_i - N_i)! \}} \cdot \frac{N!\,(A - N)!}{A!}.$$

C'est à cette probabilité — dans le cas particulier où les boules sont de trois couleurs différentes — que nous allons appliquer une méthode analogue à celle utilisée ci-dessus, et mettre en évidence l'équation aux dérivées partielles caractéristique du deuxième mode de tirage.

Dans le cas actuel :

$$f(x, y, z) = \frac{A_1!\, A_2!\, A_3!}{x!\,(A_1 - x)!\, y!\,(A_2 - y)!\, z!\,(A_3 - z)!}, \frac{N!\,(A - N)!}{A!},$$

avec $A = A_1 + A_2 + A_3$, et l'on remarque que $f(x + 1.\ y + 1, z - 2)$ que nous pouvons écrire $f_1(x + 1, y + 1)$, a pour valeur :

$$f_1(x + 1, y + 1) = f_1(x, y) \frac{(A_1 - x)(A_2 - y)(A_3 - z)}{(x + 1)(y + 1)(A_3 - z + 1)\, A_3 - z + 2)},$$

et l'on constate en définitive que $\frac{\Delta_2 f}{f}$ s'exprime ainsi qu'il suit :

$$(9)\quad \frac{\Delta_2 f}{f} = \frac{A_1 - x}{x + 1} \frac{A_2 - y}{y + 1} \cdot \frac{(z - 1)\, z}{(A_3 - z + 1)(A_3 - z + 2)} - \frac{A_1 - x}{x + 1} \cdot \frac{z}{A_3 - z + 1} - \frac{A_2 - y}{y + 1} \frac{z}{A_3 - z + 1},$$

soit encore :

$$(9)\quad \frac{\Delta_2 f}{f} = \frac{(A_1 - x)(A_2 - y)(z - 1)z - (A_1 - x)(y + 1)(A_3 - z + 2)z - (A_2 - y)(x + 1)(A_3 - z + 2) + \delta}{\delta}$$

avec :

$$\delta = (x + 1)\, y + 1)(A_3 - z + 1)(A_3 - z + 2).$$

Après avoir posé $x = p\,N + l_1$, $y = p_2\,N + l_2$, $z = p_3\,N + l_3$, avec $(l_1 + l_2 + l_3 = o)$, on remarque que le numérateur du second membre de (9)', ne contient que des termes en l_1, l_2, l_1^2, l_1, l_2 et l_2^2 et des termes constants; quant au dénominateur, il s'écrit :

$$C^{te} + A'\, l_1 + B'\, l_2 + (A''\, l_1^2 + 2\, B''\, l_1\, l_2 + C\, l_2^2) + D\, l_1^3 + E\, l_1^2\, l_2 + F\, l_1\, l_2^2 + G\, l_2^3 + l_1^3\, l_2 + 2\, l_1^2\, l_2^2 + l_1\, l_2^3.$$

Remplaçons maintenant l_1 et l_2 respectivement par :

$$\mathcal{X} \sqrt{\frac{N\,(A - N)\, p_1\, q_1}{A - 1}}, \quad \mathcal{Y} \sqrt{\frac{N\,(A - N)\, p_2\, q_2}{A - 1}},$$

et posons :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{N\,(A - N)\, p_1\, q_1}{A - 1}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{N\,(A - N)\, p_2\, q_2}{A - 1}},$$

puis supposons que les nombres A et N sont très grands, tout en prenant N de l'ordre de A_i avec $\lambda < 2/3$, et A_i étant le plus petit des nombres A_1, A_2, A_3; ceci étant, nous allons déterminer l'expression limite de $\frac{\Delta^2 f}{f}$.

1re hypothèse $\lambda = \frac{1}{2}$.

Si les nombres de boules A_1; A_2, A_3 sont très grands et si N est de l'ordre de $k\sqrt{A_3}$, avec $A_3 < A_2 < A_1$, on remarque que l'on substitue à la relation (9), l'équation :

$$\frac{\partial^2 f(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{Y}} \cdot \frac{1}{f} = \frac{\mathfrak{N}\, \sigma_x\, \sigma_y}{\delta}, \tag{10}$$

après avoir remplacé l_1 et l_2 respectivement par $\mathfrak{X}\sigma_x$ et $\mathfrak{Y}\sigma_y$.

Compte tenu du facteur $\sigma_x \sigma_y$, on voit facilement que le numérateur du second nombre de (10), se réduit à l'expression suivante, si l'on ne considère que les termes de l'ordre de A^3 :

$$\sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2} \cdot \frac{N(A-N)}{A-1}\Bigg[\mathfrak{X}^2 \frac{N(A-N)}{A-1} A^2 p_2 (p_3+p_1) p_1 q_1 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y} \frac{N(A-N)}{A-1} A^2(\gamma + p_1 p_2) \sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2}$$

$$+ \mathfrak{Y}^2 \frac{N(A-N)}{A-1} A^2 p_1 (p_3 + p_2) p_2 q_2 - N A^2 p_1 p_2 p_3\Bigg]$$

soit encore :

$$A^3 [H \mathfrak{X}^2 + L \mathfrak{X}\mathfrak{Y} + M Y^2 - T p_1 p_2 p_3];$$

comme au dénominateur, ne figure qu'un seul terme de l'ordre de A^3, qui n'est autre que $(p_1 p_2 p_3^2 A^2 N^2)$, il s'en suit que si A et N sont de très grands nombres avec 'N $= K' \sqrt{A}$ l'expression :

$$\frac{\partial^2 f.}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{Y}} \cdot \frac{1}{f} \text{ se réduit à } \frac{\varphi_2(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y})}{\text{constante}}.$$

L'équation aux dérivées partielles caractérisant cette espèce de tirages est d'un type analogue à celle afférente aux tirages, ou l'on remet les boules extraites.

2e *hypothèse.* — Le nombre des boules extraites est égal à $k\, A^{\frac{7+\mu}{12}}$ avec $o < \mu < 1$, k étant un nombre tel que $K\, A^{\frac{7+\mu}{12}} < A_3$; celà revient à dire que si les A_i et N sont tous de très grands nombres, l'ordre d'infinitude de N est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ par rapport à A.

Comme ci-dessus, seuls comptent au numérateur de l'expression de $\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{Y}}$ les termes en $\mathfrak{X}^2$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}^2$ et le terme constant dans lesquels apparaissent le multiplicateur $A^2 N^2$; au dénominateur de la même expression, le terme principal a pour valeur $A^2 N^2 p_1 p_2 p^2_3$, ou encore $p_1\ p_2\, p_3{}^2\, K^2\, A^{\frac{19+\mu}{6}}$, tous les autres termes x, y, x^2, xy, y^2 ..... $x^2 y$, $x^2 y^2$, xy^3, n'ayant pour coefficients que des termes $A^{\lambda'}$, où $\lambda' \leqslant \frac{19+\mu}{6}$.

Dans ces conditions, le phénomène est caractérisé par l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{X}\, \partial \mathfrak{Y}} = \frac{\varphi_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}{C^{te}}.$$

3e *hypothèse.* — Les nombres A_i n'étant pas très grands, et N tout en étant inférieur à A_3, est de l'ordre de A_3, c'est-à-dire pris égal à A/k', avec $k' > 3$.

En l'occurrence, il faut recourir à la formule :

$$\log (n!) = (n + {}^1/_2) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1 + \Theta}{12\, n},$$

qui donne une approximation aussi grande que la formule suivante :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12\, n} + \frac{1 + \eta}{288\, n^2}\right).$$

Revenons maintenant à l'hypothèse $A_1 > A_2 > A_3 > N$, et ne faisons intervenir dans l'expression de log P que les puissances de l_i inférieures à 5, nous trouvons en conservant les précédentes notations :

$$\log P = \log P_1 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + b_{20} l_1^2 + b_{11} l_1 l_2 + b_{02} l_2^2 + c_{30} l_1^3 +$$
$$c_{21} (l_1 + l_2) l_1 l_2 + c_{03} l_2^3 + d_{40} l_1^4 + d_{04} l_2^4 + d_{31} (4 l_1^3 l_2 + 6 l_1^2 l_2^2 + 4 l_1 l_2^3),$$

d'où l'on déduit :

$$P = P_0\, e^{\varphi_1 (l_1, l_2) + \varphi_2 (l_1, l_2) + \varphi_3 (l_1, l_2) + \varphi_4 (l_1, l_2)}$$

On trouve ainsi une forme différente de celle d'Edgeworth, aujourd'hui classique, qui correspond, il est vrai au cas d'une urne renfermant trois espèces de boules, auxquelles on rattache les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, *en remettant dans l'urne après chaque tirage la boule qui vient d'être tirée;* la différence s'explique donc fort bien puisque nous nous sommes placés dans le cas de non remise des boules dans l'urne.

Retour sur la fonction caractéristique et le schéma de Bernoulli.

Considérons une urne renfermant trois espèces de boules, des boules blanches, des boules noires et des boules d'autres couleurs, auxquelles on rattache les probabilités respectives p_1, p_2, p_3.

On a fait N extractions *après avoir remis dans l'urne la boule tirée après chaque tirage*, et soient m_1, m_2, m_3, les nombres respectifs des boules blanches, noires, et d'autres couleurs qui sont apparues.

La probabilité d'une telle éventualité a pour valeur :

$$\frac{N!}{m_1!\, m_2!\, m_3!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3};$$

quant à la fonction caractéristique qui est rattachée à l'extraction de m_1 boules blanches et de m_2 boules noires, elle est définie par l'expression :

$$\Sigma\, P\, e^{u_1 m_1 + u_2 m_2} = (p_1 e^{u_1} + p_2 e^{u_2} + p_3)^N,$$

comme l'on s'en rend compte en revenant à la somme $\Sigma\, p_{i/j}\, e^{u_i x_i + u_j y_j}$, qui pour une seule épreuve donne $p_1 e^{u_1} + p_2 e^{u_2} + p_3$, puisque l'on ne considère que les boules blanches et les boules noires.

En comptant les variables aléatoires à partir de leurs valeurs probables, on doit pour une seule épreuve introduire le multiplicateur $e^{-(p_1 u_1 + p_2 u_2)}$; il s'en suit que pour N épreuves, la fonction caractéristique est représentée par :

$$\varphi (u_1\, u_2) = e^{-N (p_1 u_1 + p_2 u_2)} (p_1 e^{u_1} + p_2 e^{u_2} + p_3)^N.$$

Le logarithme de la fonction caractéristique s'écrit alors, en remarquant que $p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$ et en posant :

$$\text{Log}\,\varphi(u_1, u_2) = -\text{N}(u_1 p_1 + u_2 p_2) + \text{N}\,\text{Log}\,[1 - p_1(e^{u_1} - 1) - p_2(e^{u_2} - 1)],$$
$$l_1 = m_1 - \text{N}\,p_1,\ l_2 = m_2 - \text{N}\,p_2,\ 1 - p_1 = q_1,\ 1 - p_2 = q_2,$$
$$\text{Log}\,\varphi = \psi(u_1, u_2) = \text{N}\,[(p_1 q_1 \frac{u_1^2}{2} + p_2 q_2 \frac{u_2^2}{2} - p_1 p_2 u_1 u_2) + \ldots$$

Si l'on rapporte les écarts aux grandeurs $\sqrt{\text{N}\,p_1 q_1}$, $\sqrt{\text{N}\,p_2 q_2}$, et si l'on substitue à u_1 et u_2 les quantités respectives :

$$\frac{u_1}{\sqrt{\text{N}\,p_1 q_1}},\ \frac{u_2}{\sqrt{\text{N}\,p_2 q_2}},$$

il s'en suit que le log. de φ avec la loi réduite a pour valeur :

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + 2\,r\,u_1 u_2) + \frac{1}{\sqrt{\text{N}}}\text{A}_3(u_1, u_2) + \frac{\text{A}_4(u_1 u_2)}{\text{N}} + \frac{\text{A}_5(u_1 u_2)}{\text{N}\sqrt{\text{N}}} + \ldots$$

Lorsque le nombre des tirages est assez grand, *on peut en première approximation* prendre pour fonction caractéristique de la probabilité

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2\,ruv)},\ \text{avec}\ r = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{(p_2 + p_3)(p_3 + p_1)}};$$

la première approximation de la loi de probabilité est alors définie par l'expression :

$$f(x_1, x_2) = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2\,ruv)}\, e^{(u x_1 + v x_2)}\, du\, dv,$$

$$f(x_1, x_2) = e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1 x_2)}$$

Si l'on ne s'en tient pas à la première approximation, *la fonction caractéristique réduite a* pour valeur :

$$e^{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2\,ruv)} + \frac{\text{A}_3(u, v)}{\sqrt{\text{N}}} + \frac{\text{A}_4(u, v)}{\text{N}} + \ldots,\ \text{soit encore}$$

$$\varpi(u, v) = e^{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2\,ruv)}\,[1 + \alpha_3(u\,v) + \alpha_4(u, v) + \ldots],$$
$$= \varphi_0(u, v)\,[1 + \alpha_3(u, v) + \alpha_4(u, v) + \ldots].$$

Substituons maintenant à f la fonction $f_0 = \dfrac{1}{2\,\pi\sqrt{1 - r^2}}\, e^{-\frac{(x^2 + y^2 - 2\,rxy)}{2(1 - r^2)}}$ et ses dérivées successives, et remarquons que :

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0}{\partial x}\, e^{ux + vy}\, dx\, dy = -u_0\,\varphi_0(u, v),$$

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{m+n} f_0}{\partial x^m\, \partial y^n}\, e^{ux + vy}\, dx\, dy = (-1)^{m+n}\, u^m\, v^n\, \varphi_0(u, v).$$

Au développement :

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 [1 + \lambda_{30} u^3 + \lambda_{21} u^2 v + \lambda_{12} u v^2 + \lambda_{03} v^3) + \ldots]$$

se rattache la fonction de probabilité :

$$(f(x, y) = f_0 (x_0, y_0) - \left[\lambda_{30} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3} + \lambda_{21} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^2 \partial y} + \lambda_{12} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x \partial y^2} + \lambda_{03} \frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}\right] + \ldots$$

Soit encore

$$f(x, y) = f_0 \{1 + \lambda_{30} [(x - ry)^3 - 3 (x - ry)] +$$
$$\lambda_{21} [(x - ry)^2 (y - rx) - y (1 + 2 r^2)] + \ldots\},$$

et l'on aboutit ainsi au développement d'Edgeworth.

DEUXIÈME PARTIE

La surface de Laplace-Gauss et les 4 nouveaux types de surfaces de probabilités ; l'équation aux dérivées partielles qui les caractérise.

A l'équation de la surface de Laplace-Gauss

$$(10) \qquad z = z_0 \, e^{-\frac{(ax^2 + 2b\, xy + cy^2)}{2}},$$

que nous avons rencontrée ci-dessus, nous rattachons les deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = -(ax + by),$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = -(bx + cy),$$

et enfin l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(11) \qquad \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (ax + by)(bx + cy) - b = \mathrm{H}(x, y),$$

qui n'est autre que l'équation de Moutard, c'est-à-dire une variante de l'équation célèbre de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial y} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = o, \; a, b, c, \text{ étant des fonctions de } (x, y).$$

Dans l'hypothèse où $b = o$, la probabilité $\mathrm{P} = z_0 \, e^{-\frac{(ax^2 + cy^2)}{2}}$, résulte de l'association de deux probabilités indépendantes ; l'équation de Moutard s'écrit :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{ac}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2],$$

et rentre dans le type le plus simple des équations dites du type harmonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z [\varphi (x + y) - \psi (x - y)].$$

A la surface de Laplace-Gauss, on peut rattacher les surfaces déduites de la surface d'Edgeworth, en nous bornant au développement

$$(12) \qquad z = z_0\, e^{-\Phi_2(x,y) - \Phi_3(x,y)}$$

où Φ_2 et Φ_3, sont des polynomes homogènes de degrés respectifs 2 et 3.

On remarque alors que :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\left[\Phi''_{2(x,y)} + \Phi''_{3(x,y)}\right] + \left[\Phi'_{2(x)} + \Phi'_{3(x)}\right]\left[\Phi'_{2(y)} + \Phi'_{3(y)}\right]$$

expression dans laquelle $\Phi'_{2(x)}$, et $\Phi''_{2(x,y)}$, désignent respectivement la dérivée première par rapport à x, et la dérivée seconde par rapport à x et y de $\Phi_2(x, y)$.

On constate donc que :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial z\,\partial y} = H_{(x,y)}$$

On fait apparaître facilement des types de distribution, se rattachant aux types de distribution de K. Pearson dans le plan ; en effet considérons la surface

$$(13) \qquad z = z_0\left[\frac{(x+a_1)^{\nu a_1}(a_2+x)^{\nu a_2}}{a_1^{\nu a_1}\,a_2^{\nu a_2}} + \frac{(y+b_1)^{\mu b_1}(b_2-y)^{\mu b_2}}{b_1^{\mu b_1}\,b_2^{\mu b_2}}\right]$$

pour laquelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = o,$$

puis le type de surface

$$(14) \qquad z = z_0\left[\frac{\varphi(x)}{a_1^{\nu a_1}\,b_3^{\nu a_2}}\cdot\frac{\Phi(y)}{b_1^{\mu b_1}\,b_2^{\mu b_2}}\right], \quad \text{avec} \begin{cases}\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{\nu a_1}(\alpha_2-x)^{\nu a_2}\\ \Phi(y) = (y-\beta_1)^{\mu b_1}(\beta_2-y)^{\mu b_2}\end{cases}$$

à laquelle correspond l'équation

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\mu\left[(b_1\beta_2 + b_2\beta_1) - y\,(b_1+b_2)\right]}{(y-\beta_1)(\beta_2-y)}\;\frac{\nu\left[(a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1) - x\,(a_1+a_2)\right]}{x-\alpha_1)(\alpha_2-x)}$$

On doit signaler à propos de ce type les cas particuliers afférents à :

$$\begin{matrix}\alpha_1 = -a_1, & \alpha_2 = a_2,\\ \beta_1 = -b_1, & \beta_2 = b_2,\end{matrix} \quad \text{avec } \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial z} = \frac{\mu\nu\,(a_1+a_2)(b_1+b_2)\,xy}{(x+a_1)(a_2-x)(y+b_1)(b_2-y)},$$

et celui encore plus simple pour lequel

$$a_1 = a_2 = a;\; b_1 = b_2 = b, \text{ avec}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial z\,\partial y} = 4\,\mu\nu\,\frac{a\,b\,x\,y}{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}.$$

A un autre type de distribution de K. Pearson, on peut associer la surface

$$(15) \qquad z = z_0\left|\frac{(x+a_1)^{\nu a_1}\,e^{-\gamma_1}}{a_1^{\nu a_1}} + \frac{(y+b_1)^{\mu b_1}(b_2-y)^{\mu b_2}}{b_1^{\mu b_1}\,b_2^{\mu b_2}} - 1\right|^h$$

pour $h = 1$, l'on a $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\;\partial y} = o$, et pour h différent de 1

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{h\,(h-1)\,\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x) + \varphi(y) - 1]^2} \quad \text{avec } \varphi(a) = \frac{(x+a_1)^{\nu a_1}\,e^{-\gamma x}}{a_1^{\nu a_1}}$$

$$\text{et} \qquad \psi(y) = \frac{(y-b_1)^{\mu b_1}(b_2-y)^{\mu b_2}}{b_1^{\mu b_1}\,b_2^{\mu b_2}}$$

Il est possible de généraliser les types (14) et (15), et d'en réaliser certains, qui ont aussi la propriété d'être caractérisés par l'équation aux dérivées partielles de Moutard

En effet si l'on considère la classe de surfaces :

$$(16) \qquad z = \varphi\,(a x + b y)\ \Phi\ (a' x + b' y), \quad \text{avec} \quad a b' - b a' \neq 0 ,$$

on remarque qu'on lui associe l'équation

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a b\,\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{(ab' + ba')\,\varphi'\,\psi'}{\varphi\,\psi} + a'\,b'\,\frac{\psi''}{\psi};$$

prenant maintenant

$$\varphi\,(u) = \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}, \qquad \text{avec} \quad u = a x + b y,$$

$$\psi\,(v) = \left(1 - \frac{v}{\mu}\right) \qquad \text{avec} \quad v = a' x + b' y,$$

α, β, γ, et μ étant des constantes, on trouve immédiatement que :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{a\,b\,\alpha\,(\alpha - 1)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2}\,z + (a\,b' + b\,a')\,\frac{\alpha\,\beta}{\lambda\,\mu}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)} + $$
$$+ \frac{a'\,b'\,\beta\,(\beta - 1)}{\mu^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^2}$$

soit :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{A\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^2 + B\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) + C\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2}{\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^2} = \frac{P_2\,(x_1 y)}{P_4\,(x_1 y)};$$

un changement d'axes transforme la surface (16) en $z = \varphi\,(u)\,\psi\,(v)$.

A ce propos, nous remarquons que l'on aurait pu aussi facilement introduire $z = \varphi\,(U)\ \Phi\ (V)$, avec $U = ax + by + c$, $V = a'x + b'y + c'$.

Il est vrai qu'une telle surface (15) ne pourra représenter une surface de distribution statistique que si $\iint z\,dx\,dy = 1$,
le champ étant limité par des faisceaux de droites. Les sections par $u = C_1$ et $y = C_2$ (C_1 et C_2 étant des constantes) donnent des courbes de l'un des types de K. Pearson

L'introduction du système plus général

$$(17) \qquad z = z_0\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}\left(1 - \frac{v}{\mu}\right)^{\beta} e^{-\gamma w},$$

avec $u = ax + by$, $v = a'x + b'y$, $w = a''x + b''y$, met en évidence pour les sections $u = C_1$, $v = C_2$, $w = C_3$ des courbes qui ont été également étudiées par K. Pearson.

L'équation aux dérivées partielles caractérisant les surfaces (17) est la suivante :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{A}{(1 - u/\lambda)^2} + \frac{B}{(1 - v/\mu)^2} + \frac{C}{\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)(1 - v/\mu)} + \frac{D}{1 - \frac{u}{\lambda}} + \frac{E}{1 - v/\mu} + F,$$

ou A, B, C, D, E, F sont des constantes; elle s'écrit encore :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{P_2(z_1 y)}{P_4(x_1 y)} + F, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{Q_4(x,y)}{P_4(x,y)}$$

On peut encore grâce à un changement d'axes dans le plan $z = o$, ramener la forme (17) à la suivante

$$(17)' \qquad z = z_1\, X^{\alpha}\, e^{-\gamma Y}\left[1 - \frac{(h_1 X + k_2 Y + h_3)}{\mu}\right]^{\beta}.$$

Types dérivées du paraboloïde elliptique

A la surface

$$(18) \qquad z = z_0\left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^m - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^n\right]^h$$

qui a pour section dans le plan $z = o$, la courbe $1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^m - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^n = o$, correspond l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{4\,mnh\,(h-1)\,x^{2m-1}\,y^{2n-1}}{a^{2m}\,b^{2n}\left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^m - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^n\right]^2}.$$

On peut lui rattacher les deux types simples, afférents le premier aux hypothèses $m = n = 1$, h entier ou fractionnaire :

$$z = z_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^b, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{4\,h\,(h-1)\,n\,y}{a^2\,b^2\,[1 - \frac{n^2}{a^2} - y^2/b^2]^2}$$

et $m = n = 1$, $h = 1$, qui fait apparaître le paraboloïde elliptique.

On peut également considérer la surface.

$$(19) \qquad z = z_0\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2\,\rho\,x\,y}{a\,b}\right]^h,$$

à laquelle correspond l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2\,h\,\rho\,\Delta + 4\,h\,(h-1)\left(\frac{x}{a^2} - \frac{\rho\,y}{a\,b}\right)\left(\frac{y}{b^2} - \frac{\rho x}{ab}\right)}{a\,b\,\Delta^2},$$

$$\text{avec} \qquad \Delta = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2\,\rho\,xy}{ab},$$

qui après réduction s'écrit :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2\,h}{ab\,\Delta^2}\left\{(2\,h-1)\left(\frac{\rho\,x^2}{a^2} + \frac{\rho\,y^2}{b^2}\right) - 2xy\,[h + (h-1)\,(1+\rho^2)] - \rho\right\} = -2\,h\,\frac{\mathfrak{N}(x,y)}{a\,b\,\Delta^2}.$$

Suivant que

$$\left\{h + (h-1)\,(1+\rho^2)\right\}^2 - (2\,h-1)^2\,\rho^2$$

est positif ou négatif, $\mathfrak{N} = o$ représente une hyperbole ou une ellipse; quant à l'équation $\Delta = o$, elle définit une ellipse lorsque $\rho \mid < 1$

L'introduction de ces derniers types (18) et (19), se rattache au développement en série des expresssions :

$$z = z_0 \, e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^m - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^n}$$

$$z = z_0 \, e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\rho \frac{xy}{ab}\right)}$$

La détermination de la surface (18) exige le calcul des constantes a, b, m n, et par suite l'intervention des moments $\mathcal{M}_{0/0}$, $\mathcal{M}_{1/0}$, $\mathcal{M}_{0/1}$, $\mathcal{M}_{2/0}$, $\mathcal{M}_{1/1}$, $\mathcal{M}_{0/2}$, et celle des constantes de la surface (19) nécessite la connaissance de cinq moments.

Observation. — Partant de l'expression de la probabilité de tirage de x boules blanches, y boules noires après m tirages d'une urne renfermant trois espèces de boules, en supposant soit que l'on remette dans l'urne les boules extraites, soit qu'on ne les remette pas, nous sommes passé de $\Delta_2 f$ à $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$, après avoir bien spécifié les conditions de passage.

Si maintenant l'on procède au tirage de m boules d'une urne renfermant des boules de n couleurs différentes, on constate que l'emploi de la fonction caractéristique, dans le cas où les boules extraites sont remises dans l'urne conduit pour la surface de probabilités à l'expression

$$z = z_0 \, e^{-\Phi(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)}, \quad \text{avec} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, x_i^2 + 2 \sum_{j \neq i} b_{ij} \, x_i \, x_j,$$

si l'on se borne à une première approximation, qui est d'ailleurs valable si le nombre m des boules extraites est très grand, et si le nombre des boules contenues dans l'urne, est lui-même très grand par rapport à m, l'équation de Moutard s'écrit :

$$\frac{1}{z} \Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} = 4 \, \Sigma \, [a_{ii} \, x_i + \sum_j b_{ij} \, x_j] \, [a_{jj} \, x_j + \Sigma \, b_{ij} \, x_i] - 2 \, \Sigma \, b_{ij},$$

soit :

$$\frac{1}{z} \Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} = \psi_2 \, (x_1, x_2, \ldots x_n),$$

ψ_2 n'étant autre qu'une forme quadratique.

TROISIÈME PARTIE

D'un certain mode de recherche des surfaces de probabilités

Par un procédé intuitif, nous avons mis en lumière une série de surfaces de probabilités, dont certaines peuvent être considérées comme interpolant les surfaces de distribution; nous allons tenter maintenant de retrouver par un processus analytique simple, toutes celles que nous venons de signaler.

Rappelons tout d'abord que toute courbe de distribution statistique est comprise entre les points $x = \alpha$, et $x = \beta$, ces points peuvent être tous deux à distance finie, l'un à distance finie et l'autre à l'infini, et enfin des deux points, l'un est a $-\infty$ l'autre à $+\infty$; de plus la méthode de discussion permet de mettre en évidence la symétrie et la dissymétrie.

Si l'on se place dans un domaine à trois dimensions, c'est-à-dire si l'on veut faire apparaître des surfaces de distribution statistique, il faut substituer à la portion finie ou infinie de l'axe des x dans le plan $z = o$, une courbe sur laquelle la densité de probabilité est nulle.

La courbe peut, il est vrai, être remplacée par un contour polygonal convexe, symétrique ou non par rapport à des droites parallèles aux axes ou des bissectrices du système des axes cx, oy.

On peut enfin supposer que la surface s'étend à l'infini dans toutes les directions du plan des $x\,y$, comme cela se passe pour la surface de Laplace-Gauss et toutes celles qui en dérivent.

Ce simple exposé nous conduit naturellement à substituer à l'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{F}\,(x),$$

les équations aux dérivées partielles

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f\,(x, y)}{\varphi\,(x, y)}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g\,(x, y)}{\varphi\,(x, y)}. \tag{21}$$

La dérivation de ces équations respectivement par rapport à d et y nous donne :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right),$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{\varphi}\right).$$

relations d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) + \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{\varphi}\right) + \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{H}\,(x, y),$$

et par suite :

$$\left\{\begin{array}{ll} (22) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{\varphi}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{g}{\varphi}\right), \\ (23) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{\varphi}\right) + \dfrac{fg}{\varphi^2} = \mathrm{H}\,(x, y). \end{array}\right.$$

Si donc l'on se donne les fonctions f et φ ainsi que la fonction $\mathrm{H}\,(x\,y)$ caractérisant l'équation de Moutard, la fonction $g\,(x, y)$ sera égale à :

$$g = \frac{\mathrm{H}\,(x, y)\,[\varphi\,(x, y)]^2}{f} - (f'_y\,\varphi - \varphi'_y\,f);$$

de plus les fonctions f, φ et g doivent être telles que :

$$f'_y\,\varphi - \varphi'_y\,f) - (g'_x\,\varphi - \varphi'_x\,g) \equiv o.$$

1er cas particulier : **$f(x, y)$ *et* $\varphi(x, y)$ se réduisent à des constantes**

De l'équation $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = - m^2$, l'on déduit immédiatement

$$\log z = - m^2 x + k(y), \quad \text{et par suite} \quad z = e^{-m^2 x + k(y)}$$

Or parmi les fonctions les plus simples K (y) que l'on peut introduire pour que z représente une surface de probabilités, on doit considérer soit $- n_i^2 \left| y \right|$, soit la somme $\sum_{i=1}^{p} e^{-n_i^2 |y^{2i+1}|}$ ou encore $\sum_{i=1}^{p} e^{-n_i^2 y^{2i}}$, il en est qu'une seule répondant à la question, si l'on suppose que l'équation de Moutard est définie par

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = m^2 n^2$$

En effet, rattachons à cette dernière, l'équation $\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - m^2$, pour laquelle $f(x, y) = - m^2$, et $\varphi(x, y) = 1$.

Dans ces conditions :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = o \qquad \text{et} \qquad \frac{g}{\varphi} = - n^2$$

d'où :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = - n^2,$$

et par suite :

$$d(\log z) = - m^2 \, dx - n^2 \, dy, \; z = k \, e^{-(m^2 x + n^2 y)}$$

x et y étant pris en valeur absolue

On se trouve ainsi en présence d'un type de surface $Z = K \, e^{-m^2 |x| - n^2 |y|}$, qui correspond dans l'espace au premier type de distribution de Laplace — dans le plan.

2e cas :

$$\underline{f(x, y) = m x, \qquad\qquad \varphi = \text{constante}}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = - m x$$

$$\frac{f}{\varphi} = - m x, \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = o.$$

De l'équation différentielle précédente, on déduit :

$$z = e^{-\frac{m x^2}{2} + h(y)}$$

En représentant $h(y)$ par $(ay + by^2)$, on retrouve immédiatement

$$z = e^{-\frac{m x^2}{2} + b\left(y + \frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{a^2}{4b}} = A \, e^{-\frac{m x^2}{2} + b Y^2} \text{ en posant } Y = y + \frac{a}{2b};$$

Si $m > c$ et $b < o$, on se trouve en présence d'une surface du type laplacien.

Si l'on rattache à l'équation $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = mnx\,(y + \alpha)$, l'équation aux dérivées partielles $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = -m^x$, pour laquelle $f = -mx$, $\varphi = 1$, on voit que $\frac{y}{\varphi} = -n\,(y+\alpha)$; dans ces conditions :

$$d \operatorname{Log} z = - mx\, dx - n\,(y + \alpha)\, dy, \quad \text{d'où} \quad z = \mathrm{K}\, e^{-\left[m\frac{x^2}{2} + \frac{(y+\alpha)^2}{2}\right]}$$

Si m et n sont tous deux négatifs, on se trouve bien en présence d'une surface de distribution de Laplace

3e cas :

$$\frac{(f\, x, y) = a\,x + b\,y + d, \quad \varphi\,(x, y) = 1}{\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = a\,x + b\,y + d,}$$

d'où :

$$\operatorname{Log} z = \frac{a\,x^2}{z} + b\,x\,y + d\,x + k\,(y),$$

et choisissons pour $k\,(y)$ la fonction la plus simple du second ordre

$$k\,(y) = \frac{c\,y^2}{2} + ey + \frac{h}{2}, \; c, e \text{ et } h$$

étant des constantes comme a, b, et d, on constate que :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}\, e^{\frac{a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + 2\,d\,x + 2\,e\,y + h}{2}},$$

qui se ramène à

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}\, e^{\frac{a\,(x = x_0) + 2\,b\,(x - x_0)\,y - y_0) + c\,(y - y_0)^2 + h'}{2}}.$$

Si les constantes a, b, c et h' que l'on peut déterminer en fonction des moments sont telles que la fonction

$$a\,(x - x_0)^2 + 2\,b\,(x - x_0)\,(y - y_0) + c\,(y - y_0)^2 + h'$$

soit constamment négative, on retrouve la surface de distribution de Laplace-Gauss.

On peut généraliser en donnant à la première équation aux dérivées partielles la forme suivante :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = a\,x + b\,y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

et à laquelle on associe

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = b\,x + e\,y + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

la fonction $z\,(x, y)$ est telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$$

ou encore :

$$(24)\quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{H}(x,y) = b + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + \left(a x + b y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\left(b x + c y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

Si l'on introduit la fonction $\dfrac{ax^2 + 2\,bxy + cy^2}{2} = \chi\,(x, y)$, on remarque que

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

et aussi que :

$$b + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y},$$

l'équation (24) s'écrit :

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mathrm{H}\,(x, y),$$

soit :

$$(25')\qquad \mathrm{S}_1 + p_1 q_1 = \mathrm{H}\,(x, y), \quad \mathrm{S}_1, p_1, q_1$$

désignant respectivement $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}$ et les dérivées premières de $\Phi\,(x, y)$

Il résulte de là qu'à toute solution de (25)', correspond une fonction $\varphi\,(x, y)$

4e cas : $f\,(x\,y) = mx + ny,\ \varphi\,(x, y) = 1 - (\mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}\,xy + \mathrm{C}\,y^2)$.

Soit :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{m x + n y}{1 - (\mathrm{A}\,x^2 + 2\,\mathrm{B}\,x y + \mathrm{C}\,y^2)}$$

à laquelle nous rattachons :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{m' x + n' y}{1 - (\mathrm{A}\,x^2 + 2\,\mathrm{B}\,x y + \mathrm{C}\,y^2)},$$

ces deux équations aux dérivées partielles caractérisent une surface de probabilités dont la section par le plan $\mathrm{Z} = o$ est définie par la conique :

$$\mathrm{A}\,x^2 + 2\,\mathrm{B}\,x y + \mathrm{C}\,y^2 = 1.$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

on constate immédiatement que l'on a :

$$(n - m')\,\delta + 2\,(m\,x + n\,y)\,(\mathrm{B}\,x + \mathrm{C}\,y) - 2\,(m'\,x + n'\,y)\,(\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y) \equiv o,$$

avec $\qquad \delta = 1 - (\mathrm{A}\,x^2 + 2\,\mathrm{B}\,x\,y + \mathrm{C}\,y^2).$

Il s'en suit les équations de conditions :

$$\begin{aligned} n - m' &= o \\ -\,\mathrm{A}\,(n - m') - 2\,m\,\mathrm{B} - 2\,m'\,\mathrm{A} &= o \\ -\,\mathrm{B}\,(n - m') + n\,\mathrm{B} + m\,\mathrm{C} - n'\,\mathrm{A} - m'\,\mathrm{B} &= o \\ -\,\mathrm{C}\,(n - m') + 2\,n\,\mathrm{C} - 2\,n'\,\mathrm{B}) &= o \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$m' = n, \; m' \mathrm{A} = n \mathrm{B}, \; n' \mathrm{A} + m' \mathrm{B} = n \mathrm{B} + m \mathrm{C}, \; n' \mathrm{B} = n \mathrm{C},$$
$$m' = \frac{m \mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \; n' = \frac{n \mathrm{C}}{\mathrm{B}},$$

et par suite :

$$m' \mathrm{B} + n' \mathrm{A} = \frac{m \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} + \frac{n \mathrm{A} \mathrm{C}}{\mathrm{B}} = n \mathrm{B} + m \mathrm{C}$$

et enfin $\frac{m}{\mathrm{A}} = \frac{n}{\mathrm{B}}$, en supposant $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} \neq o$.

Il résulte de là que :

$$m = \mathrm{A} \rho, \quad n = \mathrm{B} \rho, \quad m' = \mathrm{B} \rho, \quad n' = \mathrm{C} \rho,$$

et enfin que :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\rho (\mathrm{A} x + \mathrm{B} y)}{1 - (\mathrm{A} x^2 + 2 \mathrm{B} x y + \mathrm{C} y^2)}, \; \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\rho (\mathrm{B} x + \mathrm{C} y)}{1 - (\mathrm{A} x^2 + 2 \mathrm{B} x y + \mathrm{C} y^2)}$$

L'équation de la surface qui se déduit facilement des équations précédentes est définie par : $\mathrm{Z} = \mathrm{K}\, \delta^{-\rho}$, elle ne répond à la question que pour des valeurs de ρ négatives $\rho = - l^2$ et que si $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} < o$.

Remarque : on a supposé dans ce qui précède que le centre de la conique coïncide avec la projection du sommet de la surface, qui correspond à $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = o$.

Il s'ensuit que l'on ne peut introduire le système :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{m x + n y + p}{\mathrm{F} - (\mathrm{A} x^2 + 2 \mathrm{B} x y + \mathrm{C} y^2 + 2 \mathrm{D} x + 2 \mathrm{E} y)},$$
$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{m' x + n' y + p'}{\mathrm{F} - (\mathrm{A} x^2 + 2 \mathrm{B} x y + \mathrm{C} y^2 + 2 \mathrm{D} x + 2 \mathrm{E} y)},$$

que si les conditions :

$$m x + n y + p = - \rho (\mathrm{A} x + \mathrm{B} y + \mathrm{D}),$$
$$m' x + n' y + p' = - \rho (\mathrm{B} x + \mathrm{C} y + \mathrm{E}),$$

sont réalisées; il suffit pour s'en rendre compte de rappeler que les équations :

$$\mathrm{A} x_0 + \mathrm{B} y_0 + \mathrm{D} = o, \quad \mathrm{B} x_0 + \mathrm{C} y_0 + \mathrm{E} = o$$

définissent les coordonnées du centre de la conique.

Nous allons maintenant montrer qu'en partant de l'équation :

$$(26) \quad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \rho \frac{[- 2 \mathrm{B} \delta + 4 (\mathrm{A} x + \mathrm{B} y)(\mathrm{B} x + \mathrm{C} y)(\rho - 1)]}{\delta^2} = \mathrm{H}(x, y),$$

avec :

$$\delta = 1 - (\mathrm{A} x^2 + 2 \mathrm{B} x y + \mathrm{C} y^2),$$

l'on peut trouver une intégrale particulière de l'équation (26), en faisant état d'une méthode signalée ci-dessus.

En effet posons :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{m x + n y}{\delta} = f/\delta,$$

et rattachons à cette équation sa complémentaire :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g}{\delta}.$$

en tenant compte de la condition :

$$\frac{g}{\delta} = \frac{H}{f/\delta} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}(f/\delta)}{f/\delta}$$

qui s'écrit ainsi qu'il suit, après avoir remplacé H (x, y) par son expression tirée de (26)

$$g = \rho\,\frac{[\delta\delta''_{xy} + (\rho - 1)\,\delta'_x\,\delta'_y]}{m\,x + n\,y} - \frac{n\,\delta - (m\,x + n\,y)\,\delta'_y}{m\,x + n\,y},$$

$$g = \frac{(\rho\,\delta''_{xy} - n)\,\delta + \rho\,(\rho - 1)\,\partial'_x\,\partial'_y}{m\,x + n\,y} + \partial'_y. \tag{27}$$

L'examen de l'équation précédente montre que $g\,(x, y)$ ne peut être une expression linéaire homogène comme l'est d'ailleurs $f\,(x, y)$ que si $\rho\,\delta''_{xy} - n = o$, et que si $\delta'_x\,\delta'_y$ est divisible (par $mx + ny$).

Tenant compte de ces deux conditions, l'on en déduit tout d'abord :

$$n = -2\,\rho\,B,$$

et le reste de la division devant être nul, il faut que :

$$-\frac{n}{m}\left[B^2 + A\,C - \frac{n\,A\,B}{m}\right] + B\,C = o,$$

ou encore :

$$\frac{2\,\rho\,B}{m}\left[B^2 + A\,C + 2\,\rho\,\frac{B^2\,A}{m}\right] + B\,C = o,$$

équation qui est satisfaite pour :

$$m_1 = -2\,\rho\,A, \quad \text{et} \quad m_2 = -2\,\rho\,\frac{B^2}{C}$$

seule la solution m_1 est acceptable.

A cette solution correspond :

$f\,(x, y) = -2\rho\,(A\,x + By)$; quant à l'expression de $g\,(x, y)$, on l'obtient en faisant état de la relation (27) qui donne :

$$g = m'\,x + n'\,y = -2\,\rho\,(B\,x + C\,y) = -\delta'_y.$$

Observation :

On doit remarquer que si la constante B est nulle, on peut associer à :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{m\,x + m'}{F - (A\,x^2 + C\,y^2 + 2\,\partial\,x + 2\,E\,y)},$$

la deuxième équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{n\,y + n'}{F - (A\,x^2 + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y)},$$

à condition de prendre :

$$m = A\rho, \quad n = C\rho, \quad m' = D\rho, \quad n' = E\rho,$$

et l'on se trouve en présence de la surface :

$$Z = K\,[F - (A\,x^2 + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y)] - \rho/2.$$

Si l'on prend pour ρ une valeur négative, l'on voit apparaître les surfaces

$$Z = K \left\{ F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - A\,X^2 - C\,Y^2 \right\} l^2, \quad \text{avec} \quad X = x + \frac{D}{A}, \; Y = y + \frac{E}{C};$$

pour $l = 1$, A et C $< o$ la surface de probabilités est un paraboloïde elliptique tournant sa concavité vers le bas, toutes les fois que

$$F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} > o.$$

Pour la même valeur de $l = 1$, si A et C sont tous deux $> o$ le paraboloïde est concave vers le haut, et si le sommet est au dessus de $x\,o\,y$, c'est-à-dire si $F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} > o$, on voit que les sections passant par oz sont des paraboles et rentrent dans le groupe des courbes en U.

$$\text{Si} \quad F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} < o,$$

le sommet est en dessous de $z = o$, et les sections sont des courbes monotomes.

Il est évident que la hauteur h de la section limitant la surface à la partie supérieure doit être finie, pour que le volume soit fini.

Jusqu'ici, nous n'avons introduit que des coniques comme sections des surfaces de probabilités par le plan $z = o$; nous allons faire intervenir des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.

Nous introduisons les équations aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\nu\,(a_1 + a_2)\,x}{(x + a_1)\,(a_2 - x)},$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\mu\,(b_1 + b_2)\,y}{(y + b_1)\,(b_2 - y)},$$

dont on obtient une intégrale particulière en remarquant que :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

représentent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial x}(L\,z), \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}(L\,z);$$

Cette intégrale qui a pour valeur :

$$z = z_0 \left[\frac{(x + a_1)^{\nu a_1}\,(a_2 - x)^{\nu a_2}}{a_1^{\nu a_1}\;a_2^{\nu a_2}} \, \frac{(y + b_1)^{\mu b_1}\,(b_2 - y)^{\mu b_2}}{b_1^{\mu b_1}\;b_2^{\mu b_2}} \right.$$

est une surface de probabilité, dont les sections par les plans $y = o$ et $x = o$ sont définies respectivement par les courbes :

$$Z = z_0 (x + a_1)^{\nu a_1} (a_2 - x)^{\nu a_2}$$
$$Z = z_0 (y + b_1)^{\mu b_1} (b_2 - y)^{\mu b_2}$$

qui sont d'un type classique mis en lumière par K. Pearson.

On détermine la valeur de la constante en écrivant que :

$\int z \, \partial x \, \partial y = 1$, l'aire C étant limitée par les droites :

$$x + a_1 = o, \quad a_2 - x = o, \quad y + b_1 = o, \quad b_2 - y = o.$$

On conçoit facilement qu'au système de droites :

$$a x + b y + c_1 = o, \qquad a' z + b' y + c'_1 = o,$$
$$a x + b y + c_2 = o, \qquad a' x + b' y + c'_2 = o,$$

telles que $a\, b' - b\, a' \neq o$, on peut à la suite d'un changement d'axes dans le plan des $x\, y$, leur substituer :

$$X = -\alpha_1, \qquad X = \alpha_2,$$
$$Y = -\beta_1, \qquad Y = \beta_2,$$

et l'on fait alors apparaître un type de surface calqué sur le précédent. On peut également supposer que l'un des points d'intersection $x = a_2$ soit transporté à l'infini, et l'on se trouve en présence d'une surface du type :

$$z = z_0 \left[\frac{(x + a_1)^{\nu a_1} e^{-\gamma x}}{a_1^{\nu a_1}} - \frac{(y + b_1)^{\mu b_1} (b_2 - y)^{\mu b_2}}{b_1^{\mu b_1}\, b_2^{\mu b_2}} \right]$$

Nous avons eu l'occasion dans ce qui précède, d'invoquer des types de surfaces :

$$z = z_0\, \varphi(x)\, \Phi(y),$$
$$z = z_0 [\varphi(x)\, \Phi(y)]^h,$$
$$z = z_0 [\varphi(x)\, \Phi(y) - 1]^k.$$

Nous allons revenir pour un instant sur l'équation de Moutard, définie par :

$$(29) \quad \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\mu [(b_1 \beta_2 + b_2 \beta_1) - y (b_1 + b_2)]}{(y - \beta_1)(\beta_2 - y)} \cdot \frac{\nu [(a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1) - x (a_1 + a_2)]}{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)}$$

et en trouver une intégrale particulière.

On peut à cet effet rechercher si le produit :

$$(30) \qquad A [(x - \alpha_1)^{m1} (\alpha_2 - x)^{m2}] [(y - \beta_1)^{n1} (\beta_2 - y)^{n2}]$$

satisfait à l'équation (29).

Un calcul simple nous conduit à la valeur suivante pour $\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, que l'on compare à la valeur H (x, y) fournie par l'équation (29)

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \left[\frac{m_1}{x - \alpha_1} - \frac{m_2}{\alpha_2 - x} \right] \left[\frac{n_1}{y - \beta_1} - \frac{n_2}{\beta_2 - y} \right],$$

soit encore :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{[(m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1) - x (m_1 + m_2)]\, [(n_1 \beta_2 + n_2 \beta_1) - y (n_1 + n_2)]}{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)(y - \beta_1)(\beta_2 - y)}$$

Par identification, on aboutit aux relations :

$$m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 - x (m_1 + m_2) = \nu [(a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1) - x (a_1 + a_2)];$$

et par suite à :

$$m_1 \alpha_2 = \nu a_1 \alpha_2, \quad m_1 = \nu a_1, \quad m_2 = \nu a_2, \quad \text{et} \quad m_1 + m_2 = \nu (a_1 + a_2).$$
$$m_2 \alpha_1 = \nu a_2 \alpha_1.$$

On trouverait par un procédé analogue les valeurs de n_1 et de n_2 et l'on a pour solution particulière :

$$z = \mathrm{A} [(x - \alpha_1)^{\nu a_1} (\alpha_2 - x)^{\nu a_2}] [(y - \beta_1)^{\mu b_1} (\beta_2 - y)^{\mu b_2}].$$

qui répond à la question à la condition de calculer A au moyen de la relation afférente au moment d'ordre O :

$$\int_{(\mathrm{C})} z \, d x \, d y = 1,$$

l'aire rectangulaire (C) étant définie au moyen du système des droites

$$x = \alpha_1, \quad x = \alpha_2, \quad y = \beta_1, \quad y = \beta_2$$

On peut encore appliquer à l'équation (29), la méthode exposée aux pages (13) et (14) en faisant remarquer que $\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$ s'écrit :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\mathrm{P}_1 (x)}{(x - \alpha_1) (\alpha_2 - x)} \cdot \frac{\mathrm{Q}_1 (y)}{(y - \beta_1) (\beta_2 - y)},$$

et en introduisant l'équation :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f (x, y)}{\delta (x, y)} = \frac{m x + n}{(x - \alpha_1) (\alpha_2 - x)}$$

qui est telle que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{\partial}\right) = o$; il s'ensuit que :

$$\frac{g (x, y)}{\partial (x, y)} = \frac{\mathrm{H}}{f/\delta}, \text{ avec } \mathrm{H} = \frac{\mu (\mathrm{A} - \mathrm{B}y)}{(y - \beta_1) (\beta_2 - y)} \cdot \frac{\nu (\mathrm{C} - \mathrm{D}x)}{x - \alpha_1) (\eta_2 - x)}$$

d'où :

$$\frac{g}{\delta} = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B}\, y) (\mathrm{C} - \mathrm{D}\, x) \mu \nu}{(x - \alpha_1) (\alpha_2 - x) (y - \beta_1) (\beta_2 - y)} \cdot \frac{(x - \alpha_1) (\alpha_2 - x)}{m x + n}.$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{\delta}\right) = \frac{\partial}{d y} \left(f/\delta\right) = o$$

il faut que :

$$\mathrm{C} - \mathrm{D}x = mx + n$$

et par suite

$$\nu [(a_1 x_2 + a_2 \alpha_1) - x (a_1 + a_2)] = mx + n$$

On tire de la par identification :

$$m = - \nu (a_1 + a_2), \; n = \nu (a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1)$$

comme d'autre part :

$$\frac{mx + n}{(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)}$$

est équivalente à :

$$\left(-\frac{M}{x - \alpha_1} - \frac{N}{x - \alpha_2}\right)$$

il s'ensuit que :

$$M = -\nu a_1, \quad \text{et} \quad N = -\nu a_2;$$

il résulte de là :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\nu a_1}{x - \alpha_1} - \frac{\nu a_2}{\alpha_2 - x},$$

et l'on trouverait en suivant une voie analogue à celle qui vient d'être exposée :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mu b_1}{y - \beta_1} - \frac{\mu b_2}{\beta_2 - y},$$

et enfin :

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\, \{(x - \alpha_1)^{\nu a_1} (\alpha_2 - x)^{\nu a_2} (y - \beta_1)^{\mu b_1} (\beta_2 - y)^{\mu b_2}\} + \text{Log}\, K,$$

d'où :

$$Z = K (x - \alpha_1)^{\nu a_1} (\alpha_2 - x)^{\nu a_2} (y - \beta_1)^{\mu b_1} (\beta_2 - y)^{\mu b_2},$$

la constante K étant évaluée par le procédé classique qui fait intervenir le moment d'ordre zéro.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, on a supposé que l'on connaissait les fonctions f et φ, et l'on déterminait la fonction g; on a pu ainsi mettre en évidence certains types de surfaces de probabilités que nous avions décelé par intuition.

On peut se proposer deux problèmes un peu différents; le premier suppose la connaissance des fonctions f et g et par suite se ramène à la recherche de la fonction φ, le second consiste encore dans la connaissance des fonctions f et g, mais alors les équations aux dérivées partielles sont alors les suivantes :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}, \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g(x, y)}{\varphi(x, y)}.$$

Considérons tout d'abord le premier, relatif au système :

$$(1)' \qquad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f}{\varphi}, \quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g}{\varphi},$$

pour lequel nous avons les relations suivantes :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) + \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) + \frac{fg}{\varphi^2},$$

soit encore :

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = H(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{\varphi}\right) + \frac{fg}{\varphi^2},$$

relations d'où l'on déduit :

$$(2)' \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) + \frac{fg}{\varphi^2} = \mathrm{H}\,(x,\,y),$$

$$(3)' \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{\varphi}\right).$$

Or si l'on pose $\frac{f}{\varphi} = \mathrm{M}$, on voit tout de suite que :

$$\frac{g}{\varphi} = \frac{\mathrm{H}\,(x,y)}{f/\varphi} - \frac{1}{f/\varphi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right),$$

ou encore :

$$\frac{g}{\varphi} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}} - \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}, \text{ soit enfin } (4)' \ \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \frac{\mathrm{M}g}{f} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}} = o.$$

On est donc ramené à l'équation :

$$(4)'' \qquad \frac{\partial\,\mathrm{M}\,(x,\,y)}{\partial y} + [\mathrm{M}\,(x,\,y)]^2\,\frac{g\,(x,\,y)}{f\,(x,\,y)} - \mathrm{H}\,(x,\,y) = o$$

que l'on étudie en recourant à la méthode de Lagrange Charpit.

Passons maintenant au système plus complexe :

$$(5)' \qquad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f}{\varphi}\,,\ \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g}{\psi},$$

qui conduit aux relations :

$$(6)' \qquad \begin{cases} \dfrac{fg}{\varphi\psi} = \mathrm{H} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{\varphi}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{\varphi}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{g}{\psi}\right). \end{cases}$$

Si maintenant l'on pose

$$\frac{f}{\varphi} = \mathrm{M}_1\,(x,y), \quad \frac{g}{\psi} = \mathrm{N}_1\,(x,\,y),$$

on trouve en utilisant la première des équations (6)

$$(7)' \qquad \frac{g}{\psi} = \frac{\mathrm{H}}{f/\varphi} - \frac{1}{f/\varphi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\varphi}\right),$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{M}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}_1} - \frac{1}{\mathrm{M}_1}\frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y}\right], \quad \text{ou encore}$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y} = \frac{\mathrm{M}_1\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \mathrm{H}\dfrac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial x}}{\mathrm{M}_1^2} + \frac{1}{\mathrm{M}_1^2}\frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{M}_1}\frac{\partial^2 \mathrm{M}_1}{\partial y\,\partial x}.$$

Cette dernière équation s'écrit :

$$(8)' \ \frac{\partial^2\,\mathrm{M}_1}{\partial x\,xy} - \frac{1}{\mathrm{M}_1}\frac{\partial\,\mathrm{M}_1}{\partial x}\frac{\partial\,\mathrm{M}_1}{\partial y} + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}_1}\frac{\partial\,\mathrm{M}_1}{\partial x} + \mathrm{M}_1\frac{\partial\,\mathrm{M}_1}{\partial y} - \frac{\partial\,\mathrm{H}}{\partial x} = o.$$

La résolution de cette équation (8)', qui est d'un type plus complexe que l'équation de Laplace, nous donne une intégrale particulière, grâce à laquelle on déduit la fonction $\varphi(x, y)$; on passe ensuite à celle de Φ, sachant que $N_1 = \int \frac{\partial M_1}{\partial y} dn$.

Le paraboloïde hyperbolique considéré comme surface de probabilité.

Dans des études antérieures, nous avions considéré une série d'erreurs $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$, $(Z_1, Z_2 \ldots Z_n)$. suivant respectivement les lois simples $\frac{1}{2a} d X_i$, $\frac{1}{2b} d Y_j$, $\frac{1}{2c} d Z_l$, ..., et supposé que les X_i, Y_j, Z_l ....., étaient indépendantes, et nous nous étions proposé de chercher quelle était la loi représentative pour que Σx_i, fut comprise entre $(n-2p)\, a$, et $(n-2p+2)\, a$, que Σy_j fut comprise entre $(n'-2p')\, b$, et $(n'-2p'+2)\, b$.

En vertu de l'indépendance des systèmes d'erreurs X_i, Y_j, Z_l,... et des erreurs, X_l Y_j, Z_l... entre elles, on trouve que la probabilité cherchée s'exprime au moyen du produit de polynomes de degrés respectifs $(n-1)$, $(n'-1)$ $(n''-1)$... dont le premier est défini par l'expression :

$$\frac{1}{(n-1)!\,(2a)^n} \left\{ (na - X)^{n-1} + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i C_n^i \left[(n-2i)\, a - X^{n-1}\right] \right\},$$

et dont les autres ont une signification analogue.

A la droite A' A'' parallèle à Ox, telle que $OA = \frac{1}{2a}$, représentant la loi de probabilité dans le cas d'une seule erreur, fait place dans le cas de deux erreurs assujetties à la même loi $\left(\frac{1}{2a} dx_1, \frac{1}{2a} dx_2\right)$ un système de deux droites symétriques AB et AB'.

En effet, la probabilité pour que l'erreur relative à $(x_1 + x_2)$ soit comprise entre α et $\alpha + d\alpha$, en remarquant que cette erreur peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(-2a, +2a)$ extrémités comprises, est définie par la droite AB dont l'équation $Y_1 = \frac{2a - \alpha}{4a^2}$, pour $\alpha > o$; la loi de dispersion correspondant à $\alpha < o$, est représentée par la droite AB', symétrique de AB par rapport à oA

$$Y_{(-1)} = \frac{2a + \alpha}{4a^2}.$$

Si nous remplaçons $2a$ par a_1 (a_1 étant l'écart limite qui ne devra jamais être dépassé), on voit que la densité de probabilité est caractérisée par l'équation $Y_1 = \frac{a_1 - x}{a_1^2}$, et la probabilité d'avoir un écart compris entre $-x$ et $+x$ a pour valeur

$$P_1 = \frac{2x}{a_1} - \frac{x^2}{a_1^2}.$$

Le centre de gravité de l'aise AOB a pour abscisse :

$$E_m = \frac{\int_o^{a_1} \frac{x(a_1 - x)}{a_1^2} dx}{\int_o^{a_1} \frac{a_1 - x}{a_1^2} dx} = \frac{a_1}{3}.$$

Or, si l'on assimile les observations à un ensemble de coups de canon, dont on évaluerait les dérivations par rappòrt au point moyen du tir ou par rapport au centre de la cible (dérivations obéissant à la loi précédemment invoquée, on remplace ainsi la courbe de dispersion réelle par le système de deux droites AB, AB'.

En fixant à O B la valeur de trois écarts moyens, on se trouve dans des conditions analogues à celles d'un tir et l'on peut dire que la probabilité de dépasser un tel écart est négligeable en première approximation.

Rappelons maintenant que si des observations suivent la loi de Laplace-Gauss, l'écart probable ε est rattaché à l'écart moyen E_m et à l'écart quadratique E_q par les relations :

$$\varepsilon = o,\ 8453\ E_m, \qquad {}^q\varepsilon = o,\ 6745\ E_q.$$

D'autre part, l'on sait également que les observations régies par la dite loi sont telles que 993 observations pour 1.000, sont réparties dans une bande de 4 ε, tant au-dessous qu'au-dessus de la moyenne arithmétique des résultats des observations.

A trois écarts E_q, on fait correspondre tant au-dessus qu'au-dessous de la moyenne une bande de 4,44 ε qui comprend à très peu près la totalité des observations, alors qu'a 3 E_m, ne se rattache qu'une double bande de 3,55 ε, qui peut être considérée comme ne renfermant que 98% des observations.

Il résulte de cette remarque que l'on a intérêt à prendre $a_1 = 3\ E_q$.

Si maintenant, nous supposons les observations assujetties à deux systèmes d'erreurs x et y, ayant respectivement pour loi de probabilité Y_1 et Y_2

$Y_1 = \frac{a_1 - x}{a_1^2}$, $Y_2 = \frac{b_1 - y}{b_1^2}$, les Y_2 étant indépendants des Y_1, on voit de suite que la conjonction de ces deux erreurs a pour loi de probabilité :

$$\text{(1)} \qquad Z = \left(\frac{a_1 - x}{a_1^2} \cdot \frac{b_1 - y}{b_1^2}\right).$$

En l'occurrence, l'assimilation d'un tir sur cible est tout à fait complète, attendu que l'on fait intervenir à la fois des écarts en direction et des écarts en partie, en supposant la cible placée sur le sol; la probabilité d'avoir un écart compris entre $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$ est définie par :

$$\frac{a_1 - x}{a_1} \cdot \frac{b_1 - y}{b_1}\, dx\, dy.$$

Revenons à la loi de probabilité (1) et transportons les axes au point (a_1, b_1); dans le nouveau système d'axes, la surface de probabilité a pour équation $a_1^2\ b_1^2\ z = XY$, qui n'est autre que celle d'un paraboloïde de hyperbolique équilatère.

On peut encore faire le changement de variables

$$X = (X_1 - Y_1)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Y = (X_1 + Y_1\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et l'équation de la surface s'écrit sous la forme classique

$$X_1^2 - Y_1^2 = 2\, a_1^2\, b_1^2\, Z.$$

En se reportant à l'équation :

$$z = z_0 \left[1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + 2r\, \frac{xy}{\alpha\beta}\right],$$

on remarque que pour $r < 1$ l'équation précédente représente un paraboloïde elliptique, dont la concavité est tournée vers le plan $z = o$; la substitution à r d'une valeur $r' > 1$ nous met en présence d'un paraboloïde hyperbolique.

Il n'y a pas lieu de s'étonner d'une telle circonstance; en effet, l'on sait que la première loi de probabilité de Laplace est définie par l'équation :

$$Y = K\, e^{-|x|}, \text{ avec } K = \frac{1}{2}.$$

On est donc conduit naturellement à prendre comme loi de probabilité des erreurs associées x et y l'expression

$$Z = z_0\, e^{-\alpha^2 |x| - \beta^2 |y| - \gamma^2 |xy|},$$

qui est telle que pour $x = o$, puis pour $y = o$ l'on retrouve la première loi de Laplace.

En se plaçant dans l'angle dièdre supérieur droit, on aurait la portion de surface :

$$Z = z_0\, e^{-\alpha^2 x - \beta^2 y - \gamma^2 xy},$$

soit encore :

$$Z = z_0 \left[[1 - (\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 x y) + \frac{1}{2\,!} (\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 y)^2 - \ldots\ldots \right];$$

si donc, l'on ne considère que le premier terme du développement (ce qui revient à supposer que x et y sont suffisamment petits), on remplace la surface de distribution de l'espace par une portion de paraboloïde hyperbolique.

En première approximation, on peut en supposant les écarts (x, y) des observations contenus dans un rectangle de côtés $6\, E_{q\,(x)}$, $6\, E_{q\,(y)}$, ayant pour centre le centre de gravité des observations et en admettant les écarts x_i indépendants des y_i — substituer à la surface de distribution une portion de paraboloïde hyperbolique.

R. Risser.

***