

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

R. RISSER

Essai sur les courbes de distribution statistique

Journal de la société statistique de Paris, tome 89 (1948), p. 288-306

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1948__89__288_0

© Société de statistique de Paris, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

V

ESSAI SUR LES COURBES DE DISTRIBUTION STATISTIQUE

Aux mathématiciens Poisson, Cournot, Bienayme, puis, plus tard Bertrand, Poincaré en France, qui, à la suite de Laplace et de Gauss, consacrèrent une partie de leur activité scientifique à l'étude du calcul des probabilités, Gram, Bruns, Thiele, Czuber, Tchebycheff, Markoff, Liapounoff à l'étranger, pour ne parler que des disparus, vinrent s'adjoindre des novateurs de la statistique en la personne de Quetelet, Lexis, L. von Bortkiewicz, Galton, Karl Pearson, Tschuprow; les élèves de ces maîtres ont à leur tour apporté de nouvelles contributions tant dans le domaine purement analytique des probabilités que dans celui des applications à la statistique mathématique.

Alors que, jusque vers 1900, les physiciens, les biologistes, les statisticiens et les actuaires n'avaient recours qu'à la courbe de Laplace-Gauss pour la distribution de leurs observations, ils ont aujourd'hui à leur disposition toute la gamme des courbes de K. Pearson, les représentations de Bruns, Charlier, Romanowsky faisant intervenir les développements en série.

On sait que K. Pearson, étudiant le polygone obtenu en joignant les points du graphique binomial a considéré la pente du côté $(n, n + 1)$, soit $(Y_{x+1} - Y_x)$, avec $Y_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$, et l'a rapproché de l'ordonnée moyenne

$$Y_m = \frac{Y_{x+1} + Y_x}{2}.$$

Après avoir pris comme variable l'abscisse $\xi = x + \frac{1}{2}$, puis posé —
 $(np + \frac{p-q}{2}) + \xi = X\sigma$, avec $\sigma = \sqrt{npq}$, (ce qui revient à introduire l'équi-

distance $\frac{1}{\sigma}$ pour les abscisses), il a été conduit — après avoir remplacé Y par $\frac{y}{\sigma}$ — à l'équation

$$(1) \quad \frac{\sigma \Delta y}{y_m} = \frac{-X}{1 + \frac{1}{n} + \frac{(q-p)X}{2\sigma}}$$

qui ne vaut que pour le polygone réduit.

Supposant n très grand, l'équidistance des abscisses devient très petite et le polygone binomial dessine une courbe dont la pente est définie par l'équation ci-dessus; il s'ensuit que l'on a approximativement :

$$(2) \quad \frac{y'}{y} = -X.$$

Une méthode absolument analogue dans le cas où l'on procède exhaustivement (c'est-à-dire lorsque l'on ne remet pas les boules dans l'urne), conduit à l'équation suivante :

$$(3) \quad \frac{\Delta Y}{2 Y_m} = \frac{A \left(Np + \frac{p-q}{2} \right) + N - \xi (A + 2)}{A \left(Np + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \xi [A(p-q) + 2N] + 2\xi^2}$$

où A représente le nombre total des boules de l'urne, N le nombre des tirages successifs, et où la composition de l'urne avant tout tirage en boules blanches et en boules noires est définie par (p, q) , ξ étant liée au nombre x des boules extraites par la relation $\xi = x + 1/2$.

K. Pearson a été alors amené à considérer une équation différentielle du type suivant :

$$(4) \quad \frac{y'}{y} = \frac{-(x + a_0)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

et il a procédé à la recherche des constantes de cette équation différentielle en faisant appel aux moments de la distribution statistique; c'est ainsi qu'il a mis en évidence sept formes de courbes de distribution.

Rappelons, à propos de l'équation (3) que si l'on fait $p = q$, et si l'on suppose A très grand, et N également très grand, mais très inférieur à A , l'on constate que l'on trouve encore l'égalité approchée (2), qui correspond à la courbe normale symétrique.

On peut alors se demander si l'on peut étudier les distributions afférentes aux tirages non exhaustifs et aux tirages exhaustifs, en faisant appel non plus à l'équation aux différences finies issue de

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1/2 [f(x+1) + f(x)]}$$

mais à l'équation beaucoup plus simple

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$$

c'est ce que nous ferons brièvement en mettant en lumière les conditions d'application de ce type d'équation.

Il était naturel de faire abstraction de distributions issues des deux types de tirages précités, et de se placer tout d'abord dans le cas où l'erreur commise sur une observation serait la résultante de n erreurs régies toutes par la loi la plus simple $\frac{dx}{2a}$; nous avons déjà eu l'occasion d'étudier l'erreur définitive résultante et montré que la courbe de distribution était formée par l'assemblage d'axes de paraboles de degré $(n-1)$ se raccordant les uns aux autres, grâce à un contact d'ordre $(n-2)$ (1).

On peut en première approximation supposer que la courbe de distribution est formée par de petits arcs de paraboles du second degré; il s'ensuit alors qu'au point (x, y) l'on a :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2f(x)}.$$

Cette conception que nous allons utiliser maintenant en adoptant pour la fonction $f(x)$ la valeur correspondant tout d'abord à des tirages non exhaustifs, puis à des tirages exhaustifs, fait apparaître non seulement les types de courbe en cloche et en U, mais encore permet de déceler les types des courbes monotones; elle nous a conduit à étudier l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_0 + x}{P_4(x)},$$

(P_4 étant un polynome de quatrième degré), et à mettre en évidence toutes les formes classiques de distributions dans le plan, retrouvées ensuite par un processus différent des précédents (2).

Retour sur les courbes de distribution.

L'utilisation de l'équation aux différences finies

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{\frac{1}{2}[f(x+1) + f(x)]}$$

comme l'a montré K. Pearson, tant dans le cas de tirages exhaustifs que dans celui de tirages non exhaustifs, conduit en première approximation lorsque l'on passe à la limite, c'est-à-dire en supposant le nombre des tirages très grand, à l'équation différentielle $\frac{y'}{y} = -x$.

Or, si l'on considère l'expression

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)},$$

(1) Sur un problème relatif à la dispersion de n erreurs, voir *Bulletin de l'Institut des Actuaire français* (nos 117, 153, 159, 162), Congrès international des Mathématiciens, Zurich, 1933. Le problème généralisé a fait l'objet d'un mémoire inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1933).

(2) Voir communication faite à l'Institut des Actuaire français, 1944, et notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Sur les courbes de distribution, p. 505 (1944).

Étude spéciale du type de tirages d'une urne renfermant des boules de deux couleurs dans l'hypothèse de non remise des boules après tirage, p. 541 (1944).

dans le cas de tirages non exhaustifs, on remarque que l'expression précédente a pour valeur

$$\frac{np - x - q}{q(x + 1)}, \text{ avec } f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Or, en posant

$$x + \frac{1}{2} = \xi, \text{ et } \xi = X\sigma + np + \frac{p-q}{2}, \text{ avec } \sigma = \sqrt{npq},$$

on voit que :

$$(5) \quad \frac{f(X\sigma + np + p) - f(X\sigma + np - q)}{f(X\sigma + np - q)} = - \frac{X\sigma}{q(X\sigma + np + p)}.$$

Procédons au développement en série de numérateur du premier membre et remarquons que :

$$\frac{\sum_2^{\infty} \frac{p^n - (-1)^n q^n}{n! \sigma^n}}{f(X\sigma + np)} \times \frac{f^{(n)}(X\sigma + np)}{f(X\sigma + np)}$$

est négligeable du fait que la fonction f est finie, que σ est de l'ordre de \sqrt{n} , mais négligeable devant n qui est un grand nombre, on constate qu'à la limite, le premier membre de l'équation multiplié par σ se réduit à $\frac{y'}{y}$, et que le second membre a pour valeur limite $(-X)$.

Examinons maintenant le cas de tirages exhaustifs en procédant au tirage de n boules d'une urne renfermant K boules blanches et h boules noires; la probabilité de sortie de x boules blanches et de $(m-x)$ boules noires a pour valeur :

$$f(x) = \frac{c_k^x c_h^{m-x}}{c_{h+k}^m}.$$

Dans ces conditions, l'on a :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{m(k+1) - (h+1) - x(h+k+2)}{(x+1)(h-m+1+x)},$$

et si l'on fait le changement de variable

$$x = mp + T\sigma, \text{ avec } \sigma = \sqrt{mpq}, p = \frac{k}{h+k}, q = \frac{h}{h+k},$$

on remarque, en supposant que h et k sont de très grands nombres, m étant inférieur au plus petit des nombres k et h , que l'on a — à la limite — en première approximation

$$(6) \quad \frac{y'}{y} = \frac{-(A\sigma + B T \sigma^2)}{T^2 \sigma^2 + T\sigma(2mp + h - m + 2) + m^2 p^2 + mp(h - m + 2) + h - m + 1}.$$

Si l'on fait maintenant $p = q$, c'est-à-dire $h = k$, l'expression de $\frac{y'}{y}$ se simplifie et s'écrit :

$$(6)' \quad \frac{y'}{y} = \frac{(k+1) \frac{\sqrt{m}}{2} (1 + T \sqrt{m})}{(k-m+1) \left[1 + \frac{(m + T \sqrt{m})}{2(k-m+1)} (k-m+2) \right]}$$

Ceci étant, si m^2 est de l'ordre de k^α avec $\alpha < 1$ on constate en négligeant m devant K , et $T\sqrt{m}$ devant m , qu'à la limite $\frac{y'}{y}$ se réduit à $-T$.

On voit, en définitive, que l'introduction de $f \frac{(x+1) - f(x)}{f(x)}$, conduit à la limite, avec les deux modes de tirages aux types d'équation différentielle examinés par K. Pearson; le fait se vérifie d'autant mieux que l'équidistance des abscisses devient de plus en plus petite.

D'UN DEUXIÈME MODE DE RECHERCHE DES COURBES DE DISTRIBUTION.

Admettre que le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) d'une courbe de distribution a pour valeur

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{2},$$

revient, comme nous l'avons fait remarquer, à substituer aux petits arcs $(y+1, x+1)$, $(y-1, x-1)$, une parabole du second degré; une telle hypothèse ne permet — il est vrai — de définir que les tangentes aux points 1, 2, 3, ..., $n-1$, c'est-à-dire de laisser flotter une certaine indétermination sur les points extrêmes de la courbe.

Nous allons rechercher, en introduisant une telle équation aux différences finies, les courbes correspondant aux deux types de tirages invoqués.

Cas des tirages non exhaustifs. — Revenons à la fonction binomiale proprement dite

$$(7) \quad y = f(x) = C_k^x p^x (1-p)^{k-x},$$

et formons l'expression

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{2},$$

grâce à l'équation (7), on remarque que

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{k-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \cdot \frac{x}{k+1} \right),$$

et l'on est conduit immédiatement à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{x+1} \cdot \frac{p}{q} - \frac{k+1}{(k-x+1)} \cdot \frac{p}{q} \right) - \frac{1}{2} \frac{p^2 - q^2}{p - q},$$

et, par suite à :

$$(8) \quad y = A e^{-x \left(\frac{p^2 - q^2}{2pq} \right)} \cdot (x+1)^{\frac{p}{2q}(k+1)} \cdot (k-x+1)^{\frac{q}{2p}(k+1)}$$

Si $p = q$, l'équation de la courbe de distribution s'écrit :

$$(8)' \quad y = A (x+1)^{\frac{k+1}{2}} \cdot (k-x+1)^{\frac{k+1}{2}}$$

Grâce au changement de variable $x = \frac{k}{2} + z$, l'équation (8)' devient :

$$(8)'' \quad y = A \left(\frac{k}{2} + 1 \right)^{k+1} \left(1 + \frac{z}{\frac{k}{2} + 1} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left(1 - \frac{z}{\frac{k}{2} + 1} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

ou encore en posant

$$\frac{x}{\frac{k}{2} + 1} = \eta$$

$$(8)'' \quad y = A' (1 - \eta^2)^{\frac{k+1}{2}},$$

et l'on trouve immédiatement l'expression de A' , en calculant le moment d'ordre 0;

Pour $k = 2m$, A' pour valeur

$$\frac{2^{2m+1} (m!)^2}{(2m+1) (2m!) \pi};$$

si m est un très grand nombre, l'expression de (8)''' peut-être prise égale à

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi k}{2}}} \left(1 - \frac{x^2}{\frac{k^2}{4}} \right)^{\frac{k}{2}}$$

Si $k = 2m + 1$, l'expression de A' se réduit à

$$\frac{(2m+2)!}{2^{2m+2} [(m+1)!]^2}$$

et pour m très grand, à $\frac{1}{\sqrt{m\pi}}$ à un infiniment petit près.

Revenons maintenant au cas où $p \neq q$, et supposons $p > q$; l'expression de $\frac{y'}{y}$ s'écrit :

$$(9) \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta},$$

avec

$$\delta = x^2 (p^2 - q^2) - x [p^2 (2k+1) + q^2] + p^2 k (k+1),$$

et

$$\Delta = (x+1) (k-x+1) p q.$$

L'étude de $\frac{y'}{y}$ montre facilement que l'on se trouve en présence d'une courbe en cloche; une étude analogue faite dans le cas de $p < q$, conduit à une conclusion de même nature.

Observation. — La méthode adoptée au cours de cet exposé consiste à supposer que sur un très petit arc de la courbe de distribution, la différence $\Delta^3 U_0 = 0$; si maintenant l'on se bornait aux différences quatrièmes, et par suite si l'on supposait $\Delta^5 U_0 = 0$, on astreindrait la fonction u , s'étendant de u_{-2} à u_{+2} , à la condition que la dérivée u'_0 au point x_0 , aurait pour valeur :

$$\frac{\delta (u_1 - u_{-1}) - (u_2 - u_{-2})}{12};$$

les essais tentés dans cette voie conduisent à des calculs inextricables, alors que l'on se place dans le cas relatif à la remise des boules dans l'urne après chaque tirage.

Cas des tirages exhaustifs. — Faisant état, d'une part, de ce que

$$f(x) = \frac{C_k^x C_h^{m-x}}{C_{h+k}^m},$$

puisque l'on ne remet pas les boules extraites, après tirages, et d'autre part, de la relation

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2f(x)}$$

résultant de l'interprétation initiale, on trouve immédiatement l'équation :

$$(10) \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{(k-x)(m-x)}{(x+1)(h-m+1+x)} - \frac{x(h-m+x)}{(k-x+1)(m-x+1)} \right]$$

dont l'intégration, conduit à la relation

$$(10)' \quad y = \frac{H \left[(x+1)^{\frac{(k+1)(m+1)}{2(h-m)}} \cdot (m-x+1)^{\frac{(h+1)(m+1)}{2(k-m)}} \right]}{(h-m+1+x)^{\frac{(h+1)(h+k+1-m)}{2(h-m)}} \cdot (k-x+1)^{\frac{(k+1)(h+k+1-m)}{2(k-m)}}},$$

Si les boules blanches et noires sont en nombre égal au début du tirage, on constate — après avoir fait le changement de variable —

$$x = \frac{m}{2} + X\sigma,$$

avec

$$\sigma = \frac{\sqrt{m}}{2},$$

que l'expression de y s'écrit :

$$(10)'' \quad y = H_1 \frac{\left[1 - \frac{X^2 \sigma^2}{(m/2 + 1)^2} \right]^{\frac{A}{2}}}{\left[1 - \frac{X^2 \sigma^2}{\left(k - \frac{m}{2} + 1\right)^2} \right]^{\frac{A'}{2}}}$$

avec

$$A = \frac{(k+1)(m+1)}{k-m},$$

et

$$A' = - \frac{(k+1)(2k+1-m)}{k-m}.$$

Dans l'hypothèse où m est très grand par rapport à l'unité, mais absolument négligeable devant k , que l'on suppose extrêmement grand, la densité de probabilité a pour valeur :

$$(11) \quad y = H_1 \left(1 - \frac{X^2}{m} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot e^{-\frac{X^2}{4k}} \sim e^{-\frac{X^2}{2} \left(1 + \frac{m}{2k} \right)},$$

soit à très peu près

$$(11)' \quad y = H_1 e^{-\frac{X^2}{2}}$$

Si k n'est pas un très grand nombre, m étant toutefois négligeable devant k , la loi de densité de probabilité peut en première approximation être définie par la fonction :

$$(11)'' \quad H_1 \left(1 - \frac{X^2}{m} \right) \left(1 - \frac{X^2 \sigma^2}{k^2} \right)^{-k}.$$

Revenons maintenant au cas général, et remarquons que l'expression : $\frac{y'}{y}$ définie par l'équation (10), s'écrit :

$$(12) \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \frac{b_0 x^3 - b_1 x^2 + b_2 x - b_3}{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4} = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{Q}_4},$$

où Δ_1 est toujours positif.

Le changement de variable $x = mp + X \sigma$, avec $p = \frac{K}{h+k}$ et $\sigma = \sqrt{mpq}$, nous conduit après une transformation classique à :

$$(13) \quad \frac{y'}{y} = -\frac{\mathfrak{P}_3(x\sigma)}{\mathfrak{Q}_4(x\sigma)},$$

\mathfrak{P}_3 étant un polynome de la forme :

$$x^3 \sigma^3 + R x \sigma + S, \text{ et } \mathfrak{Q}_4 \text{ un polynome complet du 4}^{\text{e}} \text{ degré.}$$

A ce propos, il y a lieu de remarquer que la substitution d'une courbe au polygone des fréquences par l'un des procédés indiqués ci-dessus, conduit à la considération d'une équation de la forme

$$(14) \quad \frac{y'}{y} = \frac{-M - N T}{T^2 \sigma^2 + T S_1 \sigma + Q_1}$$

mais seulement dans l'hypothèse où σ est supposé très grand, alors que pour l'établissement de l'équation (13), nous n'avons point fait d'autre hypothèse que celle qui consiste à substituer une parabole à chaque arc de la courbe de densité de probabilité passant par les points $(x-1)$, x , $(x+1)$

On constate d'ailleurs que lorsque m est petit par rapport à h et k , que l'on retombe sur une équation différentielle du type (14).

Forme des courbes de distribution dans le cas de tirages exhaustifs.

Nous avons été amené à étudier l'équation différentielle, correspondant au cas où

$$f(x) = \frac{C_k C_h^{m-x}}{C_{h+k}^m};$$

qui s'écrit :

$$\frac{y'}{y} = Y_1 - Y_2, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{h-m+1+x} + 1 \\ Y_2 = \frac{A'}{k-x+1} + \frac{B'}{m-x+1} + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans l'hypothèse} \\ \text{où} \\ k > h > m. \end{array}$$

On peut construire les courbes $(Y_1 - 1)$ et $(Y_2 - 1)$, et suivre graphiquement

les variations de $\frac{y'}{y}$, et par suite celles de y' , puisque y est constamment positif; on est alors en mesure de se rendre compte de la forme de la courbe de distribution.

Un procédé absolument analogue peut-être utilisé dans le cas où $K > m > h$.

Il est infiniment plus simple de recourir à l'étude du rapport $\frac{f(x)}{f(x-1)}$

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \varphi(x) = \frac{(k-x-1)(m-x+1)}{x(h-m+x)},$$

si l'on suppose que l'on a $K > h > m$.

Si $\varphi(x)$ est inférieure à 1, la probabilité $f(x)$ est inférieure à $f(x-1)$ et par suite la courbe de distribution va en décroissant quand le nombre des boules blanches passe de $(x-1)$ à x . La valeur x_0 afférente à $\varphi(x_0) = 1$ est définie par la relation :

$$x_0 = \frac{(K+1)(m+1)}{K+h+2}.$$

Formons $[\varphi(x) - 1]$, et remarquons que si $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(m) - 1]$ sont de signes contraires, x_0 se trouve dans l'intervalle $(1, m)$, et si $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(m) - 1]$ sont de même signe, x_0 se trouve à l'extérieur de l'intervalle $(1, m)$; Or,

$$\begin{aligned} \varphi(x) - 1 &= \frac{(k+1)(m+1) - x(k+h+2)}{x(h-m+1+x)}, \\ [\varphi(1) - 1][\varphi(m) - 1] &= \frac{[(k+1)m - (h+1)][k+1 - m(h+1)]}{(h-m+1)(m+h)}. \end{aligned}$$

Si nous supposons $h > m$, le produit précédent a le signe de :

$$[(k+1)m - (h+1)][k+1 - m(h+1)] = -(\beta m - \alpha)(\alpha m - \beta),$$

avec

$$h+1 = \alpha \quad k+1 = \beta.$$

Pour que $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(m) - 1]$ soient de même signe, il faut que m soit intérieur aux racines $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$; au contraire le produit $[\varphi(1) - 1][\varphi(m) - 1]$ sera négatif, si m est extérieur à ces racines.

Exemple : $K = 499, h = 99, \frac{\alpha}{\beta} = 5, \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{5}$; m extérieur à l'intervalle $(\frac{1}{5}, 5)$, soit $m = 7$. Dans ce cas $\varphi(1) - 1 > 0$, la courbe de distribution est ascendante à gauche (monotone); $\varphi(7) - 1 < 0$, la courbe de distribution est descendante à droite (monotone); en définitive, la courbe de distribution est en forme de cloche. Avec toute autre valeur de m supérieure à 5 et inférieure à 99, on aurait également la courbe en forme de cloche.

Si m est compris entre 1 et 5, soit $m = 3$, on constate que la courbe de distribution est monotone et ascendante de gauche à droite.

Considérons maintenant le cas des tirages exhaustifs, afférent à l'hypothèse $m \geq h$; la probabilité de tirer $(h-y)$ noires et $(m-h+y)$ blanches a pour valeur :

$$P_{h-y} = \frac{C_k^{m-k+y} C_h^{h-y}}{C_{h+k}^m};$$

formons comme précédemment

$$\frac{p_{h-y}}{p_{h-(y+1)}} = \varphi(y) = \frac{m-h+y+1}{K+h-m-y} \cdot \frac{y+1}{h-y}$$

et étudions l'expression $\varphi(y) - 1$, soit encore

$$\varphi(y) - 1 = \frac{y(h+k+2) - h^2 - h(k-m+1) + m+1}{(k+h-m-y)(h-y)},$$

qui s'annule pour

$$y_0 = \frac{h^2 + h(k-m+1) + m+1}{h+k+2}.$$

Si $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(h-1) - 1]$, sont de signes contraires, y_0 se trouve dans l'intervalle $[1, (h-1)]$; si au contraire $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(h-1) - 1]$ sont de même signe, y_0 se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[1, (h-1)]$.

Pour que $[\varphi(1) - 1]$ et $[\varphi(h-1) - 1]$ soient de signes contraires, il faut que l'on ait l'inégalité

$$[m(h+1) - h^2 - hk + k + 3] [m(h+1) - (k+1)] < 0,$$

et en posant

$$m(h+1) = M, \psi(M) = M^2 - M(h^2 + hk - 2) + (h^2 + hk - k - 3)(k+1)k.$$

Or, les racines de $\psi(M) = 0$, sont égales respectivement à

$$Q - (k+1), \quad \text{et } (k-1), \quad \text{avec } Q = h^2 - hk - 2.$$

Si l'on prend comme dans l'exemple précédent $K = 499$, $h = 99$, on trouve $m_1 = 497$, et $m_2 = 5$.

En choisissant m égal à 150, valeur de m pour laquelle $\psi(M) < 0$, on constate que y_0 a une valeur voisine de 73, qui se trouve dans l'intervalle $(1, h-1 = 98)$; on remarque que $\psi(1) - 1 < 0$ et $\varphi(98) - 1 > 0$; il s'ensuit que de $y = 0$ à $y = 72,7$, environ la fonction p_{h-y} est décroissante et passe par un minimum.

Au delà de $y_0 = 73$, la fonction p_{h-y} est croissante. On se trouve donc en présence d'une courbe en U.

Ce mode d'exposition met donc en évidence pour la dispersion, soit une courbe monotone, soit une courbe en forme de cloche, présentant une dissymétrie caractéristique, et enfin une courbe en U.

* * *

Examen de l'équation différentielle $\frac{y'}{y} = \frac{P_1(x)}{P_4(x)}$.

L'étude de l'équation différentielle afférente aux deux espèces de tirages (non exhaustifs et exhaustifs), et déduite de l'hypothèse que tout arc infiniment petit de la courbe de distribution peut être assimilée à un arc de parabole, nous a amené à discuter l'équation :

$$(I) \quad \frac{y'}{y} = \frac{N}{D},$$

dans laquelle N et D sont respectivement des polynômes de troisième et du quatrième degré (et $D = 0$ ayant toutes ses racines réelles).

Il semble intéressant d'examiner maintenant une équation d'un type analogue où N serait réduit à un monome, équation qui après une transformation simple sera :

soit du type

$$\text{II} \quad \frac{y'}{y} = \frac{-x}{b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4},$$

soit du type

$$\text{II}' \quad \frac{y'}{y} = \frac{a_0 + x}{b_0' x^4 + b_1' x^3 + b_2' x^2 + b_3' x + b_4'}.$$

Nous allons nous attacher tout spécialement au type (II), et supposer que l'équation

$$P_4(x) = b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0,$$

a toutes ses racines réelles, puis deux racines réelles distinctes ou non distinctes, puis toutes ses racines imaginaires.

Première hypothèse globale. $P_4(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes; nous les désignerons par a, b, c, d .

Nous pouvons ainsi constituer 16 fonctions formant quatre groupes distincts :

Le premier groupe comprend les fonctions :

$$\begin{aligned} y &= y_0 (x-a)^A (x-b)^B (x-c)^C (x-d)^D, \\ y &= y_0 (x-a)^A (x-b)^B (x-c)^0 (x+d)^D, \\ y &= y_0 (x-a)^A (x-b)^B (x+c)^C (x-d)^D, \\ y &= y_0 (x-a)^A (x-b)^B (x+c)^0 (x+d)^D. \end{aligned}$$

Le deuxième groupe dérive du premier par le changement de a en $-a$,

le troisième groupe dérive du premier par le changement de b en $-b$, et le

quatrième se déduit du premier par la substitution de $(-a)$ à (a) , et de $(-b)$ à b .

L'examen systématique des combinaisons des divers groupes a été effectué de la manière suivante; à cet effet, considérons la première combinaison du premier groupe à laquelle correspond l'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} = \frac{-x}{b_0 (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

et pour simplifier faisons $b_0 = 1$.

Les coefficients A, B, C, D, ont pour valeur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-a}{(a-b)(a-c)(a-d)}, & B &= \frac{-b}{(b-a)(b-c)(b-d)}, \\ C &= \frac{-c}{(c-a)(c-b)(c-d)}, & D &= \frac{-d}{(d-a)(d-b)(d-c)}, \end{aligned}$$

et si l'on suppose $a > b > c > d$, l'on remarque que

$$A = -\alpha^2, \quad B = \beta^2, \quad C = -\gamma^2, \quad D = \delta^2;$$

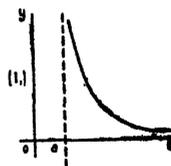
dans ces conditions, la fonction y est définie par l'expression

$$y = y_0 \frac{(x-b)^{\beta^2} (x-d)^{\delta^2}}{(x-a)^{\alpha^2} (x-c)^{\gamma^2}},$$

qui correspond à une distribution statistique si $x > a$, et si les deux conditions

$$\alpha^2 < 1, \quad \beta^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 < -1,$$

sont satisfaites; la distribution est asymptote à $x = a$ et à l'axe ox .

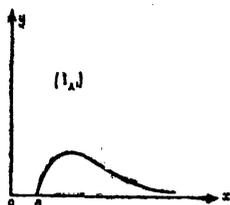


Si l'on pose $\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ la deuxième condition peut encore s'écrire :

$$\frac{a}{\varphi'(a)} + \frac{c}{\varphi'(c)} + 1 < \frac{b}{\varphi'(b)} + \frac{d}{\varphi'(d)};$$

quant à la première, elle se ramène à

$$\frac{a}{\varphi'(a)} < 1.$$



Si l'on prend $+x$ pour le numérateur du second membre de l'équation différentielle, on constate immédiatement que la courbe de distribution part du point $x = a$, et est asymptote à l'axe des x .

2° Combinaison du groupe I.

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)},$$

à laquelle correspond la solution

$$y = y_0 \frac{(x-b)^{\beta^2}}{(x-a)^{\alpha^2} (x-c)^{\gamma^2} (x+d)^{\delta^2}}$$

La courbe de distribution est du même type que (I₁); $x = a$ et $y = 0$ sont des asymptotes. Conditions à remplir $x \geq a$, $\alpha^2 < 1$, $\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 - \delta^2 < -1$.

La combinaison

$$\frac{y'}{y} = \frac{+x}{(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)}$$

fournit une courbe du type (I₁').

L'étude des combinaisons I₃ et I₄ ne met en évidence que les deux types précédents (I₁) et (I₁').

L'examen de la combinaison

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(a+x)(b-x)(x-c)(x-d)},$$

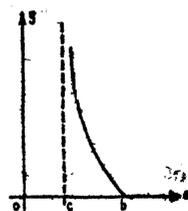
du groupe II, conduit à la courbe de distribution

$$y = y_0 \frac{(x+a)^{\alpha^2} (x-d)^{\delta^2} (b-x)^{\beta^2}}{(x-c)^{\gamma^2}},$$

susceptibles d'être utilisée si :

$$\gamma^2 < 1, \quad x \text{ variant de } c \text{ à } b.$$

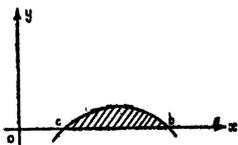
Asymptote $x = c$ ($y = 0$, $x = b$ point d'arrêt)



La combinaison

$$\frac{y'}{y} = \frac{+x}{(a+x)(b-x)(x-c)(x-d)}$$

fournit une courbe de distribution passant par les points d'arrêt ($y = 0, x = c;$
 $y = 0, x = b$)



$$y = y_0 \frac{(b-x)^{\beta^2} (x-c)^{\gamma^2}}{(x+a)^{\alpha^2} (x-d)^{\delta^2}}$$

L'examen de toutes les autres combinaisons des groupes II, III et IV, ne fait pas apparaître d'autres courbes de distributions que celles qui viennent d'être présentées.

Le type de courbe de distribution correspondant à une courbe en U, ne peut être mis en évidence, dans les conditions admises ci-dessus ($a > b > c > d > 0$) comme on le démontre assez facilement.

Nous n'avons examiné jusqu'ici que le cas où dans l'équation $\frac{y'}{y} = \frac{N}{D}$, le dénominateur $D = 0$, avait des racines réelles et distinctes : nous allons supposer maintenant que $D = 0$, a : soit une racine double (a) et deux racines simples c et d; soit une racine triple a et la racine d; soit les racines $\pm a$ et $\pm b$; soit, enfin, la racine quadruple a.

Nous passerons ensuite à l'examen du cas où $D = 0$, a deux racines réelles distinctes ou non, et deux racines imaginaires conjuguées, puis, enfin, à celui où $D = 0$ n'a que des racines imaginaires.

1^{er} cas. — $D = (x-a)^2 (x-c) (x-d)$.

Nous sommes conduit à étudier le système :

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{(x-a)^2 (x-c) (x-d)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}$$

Si l'on suppose $a > c > d > 0$, il s'ensuit que $a^2 - cd > 0$ et que la solution est définie par l'expression :

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{x-a}} \frac{(x-c)^{\gamma^2}}{(x-a)^{\beta^2} (x-d)^{\delta^2}}$$

qui n'a de sens que pour $x \geq a$;

et qui ne peut être utilisée comme courbe de distribution, car l'aire de la courbe n'est pas finie.

Un calcul absolument analogue au précédent, montre que l'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x-a)^2 (x-c) (x-d)}$$

ne peut donner naissance à une courbe de distribution lorsque l'on a : $a > c > d > 0$.

Si, aux conditions $a > c > d > 0$, l'on substitue les suivantes $c > a > d > 0$, et que l'on suppose $a^2 - cd > 0$ ou $a^2 - cd < 0$, on constate facilement qu'il n'existe pas de courbe de distribution répondant aux hypothèses adoptées.

Les types d'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x-a)^2 (x-b)^2},$$

afférents aux hypothèses $a > b > 0$, $0 < a < b$, et enfin $a < 0 < b$, conduisent à des courbes qui ne peuvent répondre à des distributions statistiques, attendu que leur aire n'est point finie.

Cas d'une racine triple et d'une racine simple.

L'étude des équations différentielles

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x-a)^3 (x-d)}$$

et

$$\frac{y'}{y} \frac{-x}{(x-a)^3 (d-x)}$$

met en évidence dans le cas où $a > d > 0$, des courbes qui ne peuvent être assimilées à des courbes de distribution, attendu que leur aire n'est point finie.

Si $a < 0 < d$, on trouve après un calcul simple que :

$$y = y_0 e^{\frac{-A}{2(x-a)^2} - \frac{B}{x-a}} (x-a)^c (d-x)^d = y_0 e^{\frac{-a^2}{2(x-a)^2} + \frac{\beta^1}{x-a}} \frac{1}{(x-a)^r (d-x)^{\delta^1}},$$

et que x ne peut varier qu'entre a et d .

Pour $x = a + \epsilon$ (ϵ étant très petit), y est voisin de zéro et pour $x = d$, y est infini; l'aire est finie si $\delta^2 < 1$, c'est-à-dire si $\frac{d}{(d-a)^3} < 1$.

L'inégalité en question se trouve vérifiée si d est supérieur à l'unité, puisque a est négatif.

Si $d < 1$ on est amené à rechercher les valeurs de $a = -a_0$ ($a_0 > 0$), vérifiant l'inégalité $\frac{\lambda^2}{(1 + \lambda a_0)^3} < 1$, avec $d = \frac{1}{\lambda}$, ou $\lambda^{3/3} < 1 + \lambda a_0$, soit encore $a_0 > \frac{\lambda^{3/3} - 1}{\lambda}$

La courbe de distribution est une courbe monotone.

L'équation $D = 0$, a deux racines égales et de signes contraires, et deux autres racines distinctes.

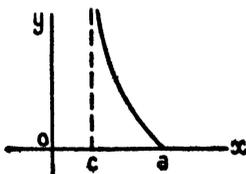
L'étude de l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(a-x)(a+x)(x-c)(x-d)},$$

conduit lorsque $a > c > d > 0$, à une courbe de distribution

$$y = y_0 \frac{(a-x)^{\alpha^1} (a+x)^{\beta^1} (x-d)^{\delta^1}}{(x-c)^{\gamma^1}},$$

toutes les fois que l'on a :

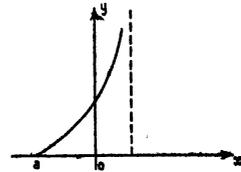


$$\frac{c}{(a-c)(a-d)(a+c)} < 1, x \text{ variant entre } c \text{ et } a.$$

Asymptote : $x=c$; point d'arrêt $x=a$ (courbe monotone)

L'étude de

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(a-x)(a+x)(c-x)(x-d)}$$



met en évidence une courbe de distribution monotone.

$$y = y_0 \frac{(c-x)\gamma^2}{(a-x)^{\alpha^2} (x+a)^{\beta^2} (x-d)^{\delta^2}}$$

Conditions d'existence de la courbe

$$d < x < c, \text{ avec } \frac{d}{(a-d)(a+d)(c-d)} < 1.$$

A asymptote $x = d$; point d'arrêt ($y = 0, x = c$)

Si aux systèmes d'équations différentielles se rattachant respectivement aux cas où $D = 0$ a comme racines, soit $(\pm a, \pm b)$, soit une racine quadruple, ne correspondent point de courbes de distribution; par contre lorsque $D = 0$ a 2 racines réelles et 2 racines imaginaires conjuguées, on voit apparaître des courbes de distribution.

En effet, dans ce dernier cas, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x-a_1)(x-a_2)[(x+\gamma^2+\delta^2)]}$$

dont l'intégrale est définie par :

$$y = y_0 (x-a_1)^A (x-a_2)^B [(x+\gamma^2+\delta^2)]^{\frac{C}{2}} e^{\frac{D-C\gamma}{\delta} \arctan \frac{x+\gamma}{\delta}}$$

avec

$$A = \frac{a_1}{(a_2-a_1)(\sigma_1^2+\delta^2)}, B = \frac{a_2}{(a_2-a_1)(\sigma_2^2+\delta^2)}, C = \frac{(\gamma N - M)}{M^2 + N^2 \delta^2}$$

$$D - C\gamma = \frac{\gamma M + N\delta^2}{M^2 + N^2 \delta^2}$$

$$\sigma_1 = a_1 + \gamma \quad \sigma_2 = a_2 + \gamma \quad M = \sigma_1 \sigma_2 - \delta^2 \quad N = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$M^2 + N^2 \delta^2 = (\sigma_1^2 + \delta^2)(\sigma_2^2 + \delta^2)$$

1°) $a_1 < 0 < a_2$ - $A < 0, B < 0, C$ a le signe de $\gamma N - M = \gamma^2 + \delta^2 - a_1 a_2$.

C est donc > 0

$$y = y_0 \frac{[(x+\gamma)^2 + \delta^2]^{C/2}}{(x-a_1)^{\alpha^2} (x-a_2)^{\beta^2}} e^{\frac{D-C\gamma}{\delta} \arctan \frac{x+\gamma}{\delta}}$$

Il faut que x soit compris entre $a_1 = -\lambda^2$ et $a_2 = \mu^2$ pour avoir une courbe réelle; il faut de plus que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\frac{-a_1}{(a_2-a_1)[(a_1+\gamma)^2+\delta^2]} < 1 \text{ et } \frac{a_2}{(a_2-a_1)[(a_2+\gamma)^2+\delta^2]} < 1.$$

La courbe de distribution est une courbe en U, asymptote aux droites $x = a_1$ et $x = a_2$.

Variante $a_1 = -a, a_2 = +a$.

En ce cas, les inégalités

$$\frac{1}{2[(\gamma-a)^2+\delta^2]} < 1, \text{ et } \frac{1}{2[(\gamma+a)^2+\delta^2]} < 1$$

doivent être vérifiées; il est évident que si la première d'entre elles est satisfaite, la seconde l'est également.

Il faudra choisir a extérieur à l'intervalle :

$$\gamma - \sqrt{\frac{1}{2} - \delta^2}, \gamma + \sqrt{\frac{1}{2} - \delta^2}, \text{ avec } \delta^2 < \frac{1}{2};$$

On se trouve en présence d'une courbe en U

L'hypothèse $a_1 > a_2 > 0$ adaptée à l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{\pm (x)}{(x - a_1)(x - a_2)[(x + \gamma)^2 + \delta^2]}$$

met en évidence des courbes qui ne peuvent convenir pour des distributions statistiques.

L'hypothèse $a_1 > 0 > a_2$, adaptée à :

$$\frac{y'}{y} = \frac{+x}{(x - a_1)(x - a_2)[(x + \gamma)^2 + \delta^2]}$$

conduit à la courbe de distribution :

$$y = y_0 (x + \lambda^2)^{\alpha^2} (x - \mu^2)^{\beta^2} [(x + \gamma)^2 + \delta^2]^{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{C}{\gamma} \arctan \frac{x + \gamma}{\delta}}$$

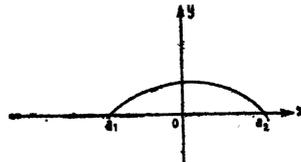
passant par les points :

$$(y = 0, x = a_1 = \lambda^2), (\gamma = 0, x = a_2 = \mu^2).$$

Cas particulier $a_1 = -a_2$.

L'étude des équations différentielles

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{(x - a)^2 [(x + \gamma)^2 + \delta^2]}$$



et

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{[x + \alpha]^2 + \beta^2} [(x + \gamma)^2 + \delta^2]}$$

fait apparaître des courbes qui ne conviennent point à des distributions statistiques.

En définitive, si l'étude de l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4}$$

et aussi celle de l'équation.

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_0 + x}{b'_0 x^4 + b'_1 x^3 + b'_2 x^2 + b'_3 x + b'_4}$$

ont mis en lumière les distributions statistiques de K. Pearson, toutefois la méthode de discrimination des divers types de distribution due au grand statisticien K. Pearson, est simple et n'exige que l'introduction de quatre cons-

tantes, alors que celle que nous venons d'exposer fait appel à cinq constantes, et nécessite par suite l'intervention de cinq moments.

Nous n'avons, au cours de cet essai, invoqué que des tirages simples, avec ou sans remise de boules, mais on peut concevoir des tirages par grappes, et aussi des tirages où l'on remet non point la boule extraite, mais plusieurs boules (en nombre α) de la même couleur, pouvant, d'ailleurs, varier suivant la couleur de la boule extraite (α_b pour les boules blanches, α_r pour les boules rouges...)

On peut aussi supposer, comme l'a suggéré M. E. Borel, que le phénomène à l'étude est assimilable à des tirages dans une urne dont la constitution serait obtenue en faisant n tirages dans une urne u_i de composition (p_i, q_i) , le nombre n_i étant lui-même déterminé par un procédé quelconque (soit par exemple par le tirage de boules numérotées de α à β dans une urne particulière, n_i étant un des nombres de la suite (α, β)). La composition des urnes u_i , pourrait être telle que p_i ne serait pas forcément voisin de p_j .

Si l'on se rend compte de la complexité du problème général posé par la statistique, on doit néanmoins remarquer que les phénomènes observés dans les sciences expérimentales mettent en évidence divers types de distribution dont la représentation peut-être effectuée en recouvrant aux courbes de K. Pearson.

Remarque. — Les équations différentielles des deux types

$$(II) \frac{y'}{y} = \frac{-x}{b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, (II') \frac{y'}{y} = \frac{a_0 + x}{b_4 x^4 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

peuvent en ce qui concerne le calcul des constantes b_i — être traitées absolument de la même façon que l'équation classique :

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_0 + x}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

On aboutit ainsi en faisant état de l'équation (II') à la relation

$$M_{n+1} + a_0 M_n = -[(n+4) b_4 M_{n+3} + (n+2) b_2 M_{n+1} + (n+1) b_1 M_n + b_0 M_{n-1}]$$

dans laquelle M_n est le moment d'ordre n

Faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3, 4$, dans cette dernière relation, l'on a alors cinq relations linéaires entre les coefficients b_i et les moments M_i .

L'origine étant transportée au point moyen M_1 on remplace M_0 par 1, et les M_k par μ_k , l'on se trouve en présence de cinq équations linéaires d'où l'on tire a_0, b_4, b_2, b_1 et b_0 .

On est alors amené à étudier la nature des racines de l'équation $b_4 x^4 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$, et à définir, grâce à l'emploi de la méthode préconisée ci-dessus, le type de distribution statistique.

Autre mode d'étude du cas afférent au tirage de m boules d'une urne renfermant k boules blanches et h boules noires, dans l'hypothèse de non remise des boules tirées de l'urne.

Alors que l'éminent statisticien K. Pearson et les élèves de son école, se sont placés dans le cas où k et h étaient des grands nombres, nous avons fait abstraction de l'hypothèse précitée et déterminé la valeur de la probabilité afférente à l'arrivée de x boules blanches. Ceci étant, désignons par x le nombre

des boules blanches tirées en supposant $k > h > m$, puis prenons pour valeur approchée de $\log(n!)$ l'expression :

$$\log(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n},$$

et posons

$$p_1 = \frac{k}{k+h}, q_1 = \frac{h}{k+h}, x = mp + l_1, m-x = mq + l_2, \text{ avec } l_2 = -l_1.$$

Le nombre des boules blanches restant dans l'urne après m tirages a pour valeur :

$$k-x = \frac{Mk}{k+h} - l_1, \text{ avec } M = h+k-m,$$

et la valeur de la probabilité cherchée est définie par la relation :

$$(15) \quad P = P_0 \frac{(mp_1! (Mp_1)! (mp_2) (Mp_2)!}{(mp_1 + l_1)! (Mp_1 - l_1)! (mp_2 + l_2)! (Mp_2 - l_2)!},$$

avec

$$(16) \quad P_0 = \frac{k! h! m! (h+k-m)!}{(h+k)!} \cdot \frac{1}{(mp_1)! (Mp_1)! (mp_2)! (Mp_2)!}$$

Eu égard au développement de $\log(n!)$, on trouve que

$$(17) \quad \log P = \log P_0 + Al_1 + Bl_1^2 + Cl_1^3 + Dl_1^4,$$

expression dans laquelle les éléments A, B, C, D, sont définis par :

$$(18) \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{M^2}\right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right), \\ B = -\frac{1}{2pq} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{M^2}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{M^3}\right), \\ C = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{M^2}\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right) \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{M^3}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{q^4}\right) \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{M^4}\right), \\ D = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{M^3}\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4}\right) \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{M^4}\right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p^5} + \frac{1}{q^5}\right) \left(\frac{1}{m^5} + \frac{1}{M^5}\right). \end{cases}$$

Quant à $\log P_0$, on le calcule facilement et l'on trouve :

$$\log P_0 = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{mM}{m+M} pq} + \Delta + \Delta_1,$$

avec :

$$\Delta = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \left(\frac{1}{pq} - 1\right), \quad \Delta_1 = \frac{1}{12k} + \frac{1}{12h} - \frac{1}{12(h+k)},$$

Revenons maintenant à la forme :

$$P = P_0 e^{\varphi(l)}, \text{ avec } \varphi(l) = Al + Bl^2 + Cl^3 + Dl^4,$$

et proposons-nous d'étudier les différentes formes de la courbe de dispersion, dans les hypothèses suivantes :

$$A < 0, D < 0; \quad A > 0, D < 0; \quad A < 0, D > 0; \quad A > 0, D > 0,$$



et en supposant implicitement que la fonction $\varphi = 0$, n'a qu'une racine réelle, ce qui revient à dire que les courbes de dispersion n'ont qu'un sommet, ou encore que l'on ne peut se trouver qu'en présence d'un maximum ou d'un minimum.

1^{re} hypothèse $A < 0$, $D < 0$.

Si l_0 racine négative de $\varphi'(l) = 0$ est supérieur à $(-mp)$, on remarque immédiatement que l'on se trouve en présence d'une courbe en cloche, et si $l_0 < -mp$ la courbe de distribution est assimilable à une fonction monotone décroissante de $l = -mp$ à $l = +mq$.

2^e hypothèse $A > 0$, $D < 0$

Suivant que l_0 (racine de $\varphi'(l) = 0$) est inférieure ou supérieure à mq , on aura une courbe en cloche, ou une portion de cette courbe correspondant à une fonction monotone croissante.

3^e hypothèse $A < 0$, $D > 0$

On se trouve en présence d'une courbe en U, et l'on doit rechercher la position de l_0 par rapport à l'intervalle $(0, mq)$; ou bien $l_0 < mq$, et l'on constate effectivement la position d'un minimum, ou bien $l_0 > mq$, et l'on remarque que la courbe de distribution est assimilable à une courbe représentative d'une fonction monotone décroissante dont la concavité est tournée vers la partie positive de l'axe des P.

4^e hypothèse $A > 0$, $D > 0$.

Une discussion analogue à celle que nous venons de présenter nous montre que la courbe de distribution est assimilable soit à une courbe en U, soit à une portion de cette courbe.

R. RISSER.