JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PIERRE THIONET

Essai de détermination mathématique du stock optimum

Journal de la société statistique de Paris, tome 86 (1945), p. 99-121

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1945__86__99_0>

III

ESSAI DE DÉTERMINATION MATHÉMATIQUE DU STOCK OPTIMUM

INTRODUCTION

Le rôle normal du commerçant est de détenir un stock de marchandises offertes au public. Il entretient ce stock, selon l'importance des ventes, par des réapprovisionnements successifs. Il évite d'avoir un stock trop important qui constituerait un investissement de capitaux improductifs; mais il ne se réapprovisionne pas après chaque vente, en raison des frais de transport élevés que cela entraînerait. On suppose qu'il ne s'agit ni d'un nouveau commerçant ni de nouveaux produits, et l'on raisonne dans le cas d'un régime permanent. Il y a, pour un article donné, une quantité dont la vente est probable; mais la quantité qui en fait sera vendue en est plus ou moins voisine dans un sens ou dans l'autre, et le commerçant doit entretenir un stock qui dépasse la moyenne des ventes d'une certaine marge de sécurité. Car le commerçant se propose d'avoir une très faible probabilité de ne pas satisfaire aux demandes éventuelles de tous ses clients.

Le problème du stock optimum se présente donc comme pouvant se soumettre au calcul des probabilités. On peut admettre que 5 % est la probabilité d'un événement encore assez courant, alors que 2 % correspond à un événement rare. On donnera les 2 nombres correspondants, qui permettront d'apprécier l'importance d'une variation de quelques unités sur les stocks.

Cette idée n'est pas neuve et les stocks théoriques ont déjà été calculés au moins dans certains cas (par exemple pour les P. T. T.) (1), s'il y a lieu de penser que jamais commerçant détaillant ne fit pareil calcul. Sans doute personne ne connaît les stocks qui étaient accumulés en 1939 dans les boutiques (pour notre plus grand bien, d'ailleurs, il faut le reconnaître, en 1945). Mais enfin, peut-être, certains ont-ils quelque idée de ce qui se passait dans une boutique donnée et pourront-ils comparer les stocks constitués empiriquement à ceux qu'il suffisait théoriquement de détenir.

Cependant, le but du présent travail est d'étudier le problème des stocks à l'échelle de l'économie d'une collectivité plutôt qu'à celle de l'entreprise. Des économistes ont observé que la multiplication du nombre de commerçants et leur habitude de « tenir » le plus grand nombre possible d'articles pour détourner le client de la fréquentation des boutiques concurrentes, entraînaient la constitution de stocks anormalement élevés répartis entre tous les magasins. Il conviendrait de mettre en balance, d'une part la commodité que ces stocks disséminés procurent au consommateur (en lui évitant notamment des frais de déplacement et une perte de temps) — et, d'autre part, le gaspillage, l'inertie du marché, l'endettement résultant de ces stocks. On s'est contenté de montrer l'accroissement du stock total nécessaire quand croît le nombre de magasins (supposés tous égaux) entre lesquels il faut le répartir. Dans bien des cas, cet accroissement est insignifiant et, par suite, largement compensé par les commodités qu'offre la multiplication des points de vente; alors le commerce de détail joue son rôle normal. On a donc recherché spécialement dans quels cas l'accroissement du stock total devenait manifestement abusif. C'est pour répondre à une demande posée au Service national des Statistiques par M. Dayre, ingénieur en chef du Génie rural, qu'a été entrepris ce travail sur ce qu'il appelle le *foisonnement des stocks*.

La méthode, commune à toutes les mathématiques appliquées, consiste à partir d'hypothèses à la fois conformes au bon sens et assez *schématiques* pour se prêter au calcul; puis à leur appliquer les déductions rigoureuses de la logique mathématique; enfin à faire des résultats théoriques un nombre suffisant d'applications numériques pour que l'on discerne bien le point d'arrivée.

Ici le choix des hypothèses restera fortement arbitraire.

Un premier système d'hypothèses correspond à une absence totale de concurrence : les clients sont inscrits (2) à leur boutique et ne peuvent se servir dans une autre.

La principale difficulté incluse dans les hypothèses est alors de faire intervenir une probabilité k à côté d'une probabilité P. Le schéma suivant parlera peut-être mieux à l'esprit.

A la porte du magasin se trouve une urne contenant 1.000 boules dont 1.000 k sont noires. Entre deux réapprovisionnements, chaque client passe une fois devant la boutique, tire une boule et, si elle est noire, entre et demande à être servi (de toutes façons, il remet la boule dans l'urne). Qu'il soit servi ou non, le client ne reviendra pas avant le prochain réapprovisionnement.

On remarquera que s'il y a N clients la valeur moyenne empirique du nombre de clients se présentant sera voisine de k N.

On a alors supposé, dans un second jeu d'hypothèses à l'origine duquel est M. Dayre, que les clients restent inscrits à certaines boutiques, mais que le nombre total de clients servis chaque fois est exactement k N. L'étude de ce schéma, avec son développement mathématique occupe le chapitre II. L'application numérique n'est pas achevée.

Les chapitres III et IV sont consacrés à l'étude du cas de la libre concurrence. L'intérêt ne s'est pas porté sur les schémas (qui se ramènent l'un à l'autre), mais sur les différences de point de vue du boutiquier et de la collectivité, expliquant ainsi que M. Dayre et nous même ayons pu être en désaccord pendant quelque temps. Le développement mathématique ne diffère guère du précédent. La valeur moyenne du nombre de clients mécontents permet de faire la synthèse entre les deux points de vue par un calcul numérique aisé.

Au total les tableaux numériques, qui intéressent seuls l'économiste pur, ne constituent qu'une partie du travail; et leur nombre, provoqué par la multiplicité des hypothèses, lui causera quelque perplexité.

CHAPITRE I. — *Absence de concurrence. — Premier schéma.*

Soit r le nombre d'inscrits (indiscernables entre eux) d'une maison de commerce; chacun peut venir acheter un seul objet (le même pour tous), chacun ayant la probabilité k de se présenter entre deux réapprovisionnements pour se faire servir. Alors la probabilité que i clients se présentent est $p_i = C_r^i\, k^i\, (i - k)^{r-i}$ avec $C_r^i = \dfrac{r!}{i!\,(r-i)!}$.

La probabilité qu'au plus s clients se présentent est $\sum\limits_{i=0}^{s} p_i = P$.

---

(1) Par exemple : voir les *Leçons professées à l'École polytechnique en 1942-1943*, par M. CHAPELON. Loi de Poisson, § 133. Application à la constitution des stocks de réserve.

(2) Le terme employé ne doit pas faire perdre de vue que le principal souci du commerce en temps de guerre n'est pas de satisfaire, avec la probabilité maximum, les clients inscrits venant se faire servir. Bien qu'il soit question d' « inscriptions », on suppose ne pas être dans les conditions d'une Économie de guerre.

Si la boutique détient le stock s, la probabilité qu'elle satisfasse tous les clients qui se présenteront est donc égale à P. Si P est imposé à l'avance (par exemple 98 %), s est racine de l'équation $\sum_{i=0}^{s} p_i = P$, qu'on ne peut résoudre que sur chaque exemple numérique et après un travail d'autant plus grand que r est élevé. On a donc un gros intérêt à substituer à cette équation une équation approchée résoluble à l'aide des Tables numériques existant, en l'espèce celles de Gauss ou de Poisson.

Lorsque r est grand, une approximation particulièrement favorable aux calculs est la substitution d'une *loi de Gauss* à la loi binomiale précédente. D'après Pearson, il faut pour cela que k reste compris entre 0,03 et 0,97 ; et r ne doit guère descendre au-dessous de 50.

Alors la loi de Gauss qui convient a même valeur moyenne kr et même écart type $\sqrt{k(1-k)r} = \sigma$. que la loi binomiale. On sait que la marge de sécurité doit être de l'ordre de 2 écarts types. Plus précisément, avec une marge de $2{,}054\,\sigma$, on aura une probabilité de 98 % de satisfaire les clients, tandis qu'avec une marge de $1{,}645\,\sigma$ on n'a qu'une probabilité de 95 %.

Si l'on fait abstraction de la nécessité d'arrondir en objets entiers les marges de chaque boutique, on obtient, pour un ensemble de n boutiques ayant chacune r inscrits et pour une population totale de $N = nr$ clients, le total de marges suivant :

$$2{,}054\,\sigma.\,n = 2{,}054\sqrt{\frac{k(1-k)}{r}}\,N = 2{,}054\sqrt{k(1-k)\,N}\,.\sqrt{n}.$$

Les conséquences économiques sont les suivantes :

Pour une population donnée, le gaspillage causé par les stocks croît comme la racine carrée du nombre de boutiques; il est très faible si les réapprovisionnements sont très fréquents (k petit) ou au contraire très espacés (k voisin de 1) de façon que la fraction à servir soit dans le premier cas très faible et dans le second cas très élevée.

Si les boutiques sont en nombre fixe, on a intérêt à ce que la population augmente.

Si la clientèle de chaque boutique est fixe, le stock est proportionnel à la population (ce n'est qu'un résultat approché puisque les stocks de chaque boutique sont des nombres entiers).

Ce résultat permet de se contenter du tableau ci-après où la population N a été choisie arbitrairement égale à 100.000 : tous les nombres varieraient proportionnellement à N.

TABLEAU I. — *Stock par boutique.*

NOMBRE DE CLIENTS par boutique r		100.000	50.000	20.000	10.000	5.000	2.000	1.000	500	200	100	50
$k=0,9$	P=95%	90.156	45.101	18.070	9.049	4.535	1.822	916	460	187	95	49
	P=98%	90.195	45.138	18.087	9.062	4.544	1.828	920	464	189	96	49
$k=0,8$	P=95%	80.208	40.147	16.092	8.066	4.047	1.630	821	415	169	87	45
	P=98%	80.260	40.184	16.117	8.082	4.058	1.637	826	418	172	88	46
$k=0,7$	P=95%	70.239	35.169	14.107	7.075	3.553	1.434	724	367	151	78	40
	P=98%	70.298	35.211	14.133	7.094	3.567	1.442	730	371	153	79	42
$k=0,6$	P=95%	60.255	30.179	12.114	6.081	3.057	1.236	626	318	131	68	36
	P=98%	60.319	30.222	12.143	6.099	3.071	1.245	632	322	134	70	37
$k=0,5$	P=95%	50.261	25.184	10.116	5.082	2.558	1.037	526	268	112	58	31
	P=98%	50.325	25.230	10.145	5.103	2.573	1.046	533	273	115	60	32
$k=0,4$	P=95%	40.255	20.179	8.114	4.081	2.057	836	426	218	91	48	26
	P=98%	40.319	20.222	8.143	4.099	2.071	845	432	222	94	50	27
$k=0,3$	P=95%	30.239	15.169	6.107	3.075	1.553	634	324	167	71	38	20
	P=98%	30.298	15.211	6.133	3.094	1.567	642	330	171	73	39	22
$k=0,2$	P=95%	20.208	10.147	4.092	2.066	1.047	430	221	115	49	27	15
	P=98%	20.260	10.184	4.117	2.082	1.058	437	226	118	52	28	16
$k=0,1$	P=95%	10.156	5.101	2.070	1.049	535	222	116	60	27	15	9
	P=98%	10.195	5.138	2.087	1.062	544	228	120	64	29	16	9
$k=0,05$	P=95%	5.114	2.574	1.051	536	275	116	61	32	15	9	(5,5)
	P=98%	5.142	2.592	1.063	545	282	120	64	34	16	10	(5,5)

TABLEAU II. — *Stock total nécessaire pour 100.000 clients.*

NOMBRE DE BOUTIQUES $n = N : r$		1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000
Nombre de clients par boutique r		100.000	50.000	20.000	10.000	5.000	2.000	1.000	500	200	100	50
$kN = 90.000$	P = 95 %	90.159	90.202	90.350	90.490	90.700	91.100	91.600	92.900	93.500	95.000	98.000
	P = 98 %	90.195	90.276	90.435	90.620	90.880	91.400	92.000	92.800	94.500	96.000	98.000
$kN = 80.000$	P = 95 %	80.208	80.294	80.460	80.660	80.940	81.500	82.100	83.000	84.500	87.000	90.000
	P = 98 %	80.260	80.368	80.585	80.820	81.160	81.750	82.600	83.000	86.000	88.000	92.000
$kN = 70.000$	P = 95 %	70.239	70.338	70.535	70.750	71.060	71.700	72.400	73.400	75.500	78.000	80.000
	P = 98 %	70.298	70.422	70.665	70.940	71.340	72.100	73.000	84.200	76.500	79.000	84.000
$kN = 60.000$	P = 95 %	60.255	60.358	60.570	60.810	61.140	61.800	62.600	63.600	65.500	68.000	72.000
	P = 98 %	60.319	60.666	60.715	60.990	61.420	62.250	63.200	64.400	67.000	70.000	74.000
$kN = 50.000$	P = 95 %	50.261	50.368	50.580	50.820	51.160	51.850	52.600	53.600	56.000	58.000	62.000
	P = 98 %	50.325	50.460	50.725	51.030	51.460	52.300	53.300	54.600	57.500	60.000	64.000
$kN = 40.000$	P = 95 %	40.255	40.358	40.570	40.810	41.140	41.800	42.600	43.600	45.500	48.000	52.000
	P = 98 %	40.319	40.666	40.715	40.990	31.420	42.250	43.200	44.400	47.000	50.000	54.000
$kN = 30.000$	P = 95 %	30.239	30.338	30.535	30.750	31.060	31.700	32.400	33.400	35.500	38.000	40.000
	P = 98 %	30.298	30.422	30.665	30.940	31.349	32.100	33.000	34.200	36.500	39.000	44.000
$kN = 20.000$	P = 95 %	20.208	20.294	20.469	20.660	20.940	21.500	22.100	23.000	24.500	27.000	30.000
	P = 98 %	20.260	20.368	20.585	20.820	21.160	21.750	22.600	23.600	26.000	28.000	32.000
$kN = 10.000$	P = 95 %	10.156	10.202	10.350	10.490	10.700	11.100	11.600	12.000	13.500	15.000	18.000
	P = 98 %	10.195	10.276	10.435	10.620	10.880	11.400	12.000	12.800	14.500	16.000	18.000
$kN = 5.000$	P = 95 %	5.114	5.148	5.255	5.360	5.500	5.800	6.100	6.400	7.500	9.000	11.000
	P = 98 %	5.142	5.184	5.315	5.450	5.640	6.000	6.400	6.800	8.000	10.000	11.000

On constate au tableau II que l'écart entre la moyenne kN et le stock nécessaire est faible tant que k ne descend pas en dessous de 0,1 et la clientèle r au-dessous de 1.000.

Si l'on passe de $r = 1.000$ à $r = 100$, on constate un écart sensible, qui, pour $r = 50$, devient énorme, surtout pour les petites valeurs de k. Enfin, kN est plus que doublé si l'on a à la fois r et k très petits ($k = 0{,}05$ et $r = 50$). D'ailleurs, l'approximation de Gauss ne donne déjà plus guère que des ordres de grandeur.

Revenons aux cas où cette approximation n'est plus valable. Il est inutile de s'occuper des valeurs de k voisines de 1, le plus simple étant alors d'attribuer à chaque boutique un stock de r objets. Au contraire, les valeurs de k voisines de 0 sont très intéressantes; ce sera par exemple le cas du libraire parisien qui envoie chaque jour son employé chercher chez les éditeurs les volumes qu'il a vendus la veille, car on admettra qu'en une journée une faible fraction seulement des clients se présentera. La loi binomiale est alors voisine d'une loi de Poisson de valeur moyenne kr.

La loi de Poisson nous fournit les renseignements suivants (nos tables s'arrêtent à $kr = 20$).

TABLEAU I *bis*. — *Stock nécessaire par boutique.*

NOMBRE DE CLIENTS par boutique r		100.000	50.000	.....	2.000	1.000	500	200	100	50
$k = 0{,}05$ (1)	P = 95 %.	—	—	—	—	—	—	16	10	6
	P = 98 %.	—	—	—	—	—	—	18	11	7
$k = 0{,}02$	P = 95 %.	—	—	—	—	28	16	8	5	4
	P = 98 %.	—	—	—	—	30	18	9	6	4
$k = 0{,}01$	P = 95 %.	—	—	—	28	16	10	5	4	3
	P = 98 %.	—	—	—	30	18	11	6	4	3
$k = 0{,}005$	P = 95 %.	—	—	—	16	10	6	4	3	2
	P = 98 %.	—	—	—	18	11	7	4	3	2

(1) On peut comparer, pour $k = 0{,}05$, les résultats des approximations de Gauss et de Poisson. La concordance est satisfaisante.

TABLEAU II *bis.* — *Stock total nécessaire.*

NOMBRE DE BOUTIQUES $n = N : r$		1	....	50	100	200	500	1.000	2.000
Nombre de clients par boutique r		100.000		2.000	1.000	500	200	100	50
$kN = 5.000$ (1)	P = 95 %.	—		—	—	—	8.000	10.000	12.000
	P = 98 %.	—		—	—	—	9.000	11.000	14.000
$kN = 2.000$	P = 95 %.	—		—	2.800	3.200	4.000	5.000	8.000
	P = 98 %.	—		—	3.000	3.600	4.500	6.000	8.000
$kN = 1.000$	P = 95 %.	—		1.400	1.600	2.000	2.500	4.000	6.000
	P = 98 %.	—		1.500	1.800	2.200	3.000	4.000	6.000
$kN = 500$	P = 95 %.	—		800	1.000	1.200	2.000	3.000	4.000
	P = 98 %.	—		900	1.100	1.400	2.000	3.000	4.000

(1) On peut comparer, pour $k = 0,05$, les résultats des approximations de Gauss et de Poisson. La concordance est satisfaisante.

On constate qu'avec des boutiques de 50 clients il faut 8.000 objets stockés contre seulement 2.000 distribués, puis 6.000 contre 1.000, et même 4.000 contre 500. Ainsi, pour k très petit, c'est-à-dire si l'on réapprovisionne très souvent, on est obligé de détenir un stock beaucoup plus considérable avec des petites boutiques qu'avec quelques grands magasins. Les boutiques très nombreuses font perdre les avantages que procure un réapprovisionnement fréquent; il faut par exemple 4.000 objets avec $k = \frac{1}{200}$ et des boutiques de 50 clients, comme avec $k = \frac{1}{50}$ et des boutiques de 200 clients (c'est-à-dire avec un réapprovisionnement quatre fois moins fréquent).

Reste le cas où r est petit. C'est peut-être le plus intéressant, puisqu'il concerne les commerçants qui « tiennent » des articles destinés à satisfaire un nombre infime de clients, — par exemple les libraires de quartier qui mettent en vente des ouvrages techniques très spécialisés dont ils n'espèrent vendre qu'un petit nombre d'exemplaires. Alors il n'existe aucun autre procédé qu'un calcul direct des probabilités binomiales.

$$C_r^0 k^r + C_r^1 k^{r-1}(1-k) + C_r^2 k^{r-2}(1-k)^2 + \ldots + C_r^r (1-k)^r = (k + 1 - k)^r = 1.$$

En procédant à quelques essais, on constate qu'il n'y a guère de différence sensible entre les résultats donnés par les différentes valeurs de r, pourvu qu'elles soient petites.

Stock nécessaire par boutique.

		5	6	7	8	9	10
$k = 0,9$	P = ...	5 1					10 1
	P = ...	(4) 0,4085					(9) 0,6513
$k = 0,7$	P = ...	5 1					9 0,972
	P = ...	(4) 0,832					(8) 0,851
$k = 0,5$	P = ...	4 0,969	5 0,984	6 0,992	7 0,996	7 0,981	8 0,989
	P = ...	(3) 0,813	(4) 0,891	(5) 0,937	6 0,965	(6) 0,91	(7) 0,945

On peut donc se contenter des résultats suivants :

		STOCK NÉCESSAIRE		
		Par boutique (Tableau I *ter*)	Au total (Tableau II *ter*)	
Nombre de boutiques				10.000
Nombre de clients par boutique r		10		10
$k=0,9$	P=95%	10	kN=90.000	100.000
	P=98%	10		100.000
$k=0,8$	P=95%	10	kN=80.000	100.000
	P=98%	10		100.000
$k=0,7$	P=95%	9	kN=70.000	90.000
	P=98%	9		90.000
$k=0,6$	P=95%	8	kN=60.000	80.000
	P=98%	9		90.000
$k=0,05$	P=95%	7	kN=50.000	70.000
	P=98%	8		80.000
$k=0,4$	P=95%	6	kN=40.000	60.000
	P=98%	7		70.000
$k=0,3$	P=95%	5	kN=30.000	50.000
	P=98%	6		60.000
$k=0,2$	P=95%	4	kN=20.000	40.000
	P=98%	5		50.000
$k=0,1$	P=95%	3	kN=10.000	30.000
	P=98%	3		30.000
$k=0,05$	P=95%	3	kN=5,000	30.000
	P=98%	3		30.000
$k=0,02$	P=95%	2	kN=2.000	20.000
	P=98%	2		20.000
$k=0,01$	P=95%	2	kN=1.000	20.000
	P=98%	2		20.000
$k=0,005$	P=95%	1	kN=500	10.000
	P=98%	2		20.000

Ainsi c'est dans le cas où le nombre de clients est faible et où la probabilité qu'ils demandent à acheter l'objet est très faible, que l'on observe le plus grand gaspillage, le plus grand « foisonnement » de stock.

Pour terminer, il faut observer que les probabilités P concernent une boutique donnée. P est la probabilité qu'aucun client de la boutique, se présentant pour être servi, ne soit éconduit. La probabilité Q qu'aucun des N clients de la collectivité, parmi ceux se présentant à leurs magasins respectifs, ne soit éconduit est P^n, n étant le nombre de boutiques; Q est intéressante au point de vue social; il faudrait malheureusement donner à P des valeurs extrêmement voisines de 1 pour que $Q = P^n$ soit de l'ordre de 0,98, surtout si n est grand.

Chapitre II. — *Absence de concurrence. — Second schéma.*

Le schéma étudié ci-dessus, très classique, diffère sensiblement de celui que M. Dayre, abordant la question sans idée préconçue, a imaginé.

Le problème mathématique auquel conduit ce schéma, fait l'objet du présent chapitre.

Donnons-en d'abord une définition rigoureuse. Une urne contient N boules, chaque boule représente un client inscrit à une boutique donnée; par exemple la boule a la couleur de la boutique et porte le numéro du client. Entre deux réapprovisionnements, on extrait k N boules $(0<k<1)$, soit ensemble, soit successivement, sans remettre les boules. Les clients dont la boule a été tirée se présentent tous à leurs boutiques respectives pour réclamer leur objet (il s'agit d'objets identiques). Au réapprovisionnement suivant, on remet les boules dans l'urne et on recommence.

On se propose encore de trouver le stock nécessaire dans chaque boutique pour avoir la probabilité P de satisfaire les clients.

I. — *Cas de deux boutiques.*

Premier exemple ($n = 2$, $r = 10$, $k = 0,5$). — Deux boutiques ont chacune 10 clients. Dix clients en tout se présentent. Quelle est la probabilité qu'un stock s entreposé dans chaque boutique ne rende aucun client mécontent?

Il y a lieu ici, plus qu'au chapitre I, de distinguer la probabilité P pour une boutique donnée, de celle Q relative à l'ensemble des boutiques. On choisit 10 clients. Il y a une probabilité P non négligeable qu'ils soient tous clients de la première boutique, donc qu'il n'y ait pas de mécontents à la deuxième boutique quand celle-ci détient un stock nul. Ce résultat paraît paradoxal lorsqu'on entend, par probabilité, celle Q que pour l'ensemble des deux boutiques il n'y ait aucun mécontent; car il est alors indispensable de placer au moins un stock de 5 objets dans chaque boutique pour qu'on ait une chance, avec 10 clients à servir, de ne mécontenter personne.

La formule d'analyse combinatoire employée (1) est :

$$C_{20}^{10} = (C_{10}^{0})^2 + (C_{10}^{1})^2 + (C_{10}^{2})^2 + \ldots + (C_{10}^{10})^2$$

La probabilité que les 10 clients choisis soient inscrits à la première boutique est :

$$\frac{C_{10}^{0} \times C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{(C_{10}^{0})^2}{C_{20}^{10}}$$

Plus généralement, on a :

$$s = 0, \quad P = \frac{(C_{10}^{0})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 1, \quad P = \frac{(C_{10}^{0})^2 + (C_{10}^{1})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 2, \quad P = \frac{(C_{10}^{0})^2 + (C_{10}^{1})^2 + (C_{10}^{2})^2}{C_{20}^{10}}$$

. . . .

$$s = 9, \quad P = \frac{(C_{10}^{0})^2 + (C_{10}^{1})^2 + \ldots\ldots + (C_{10}^{9})^2}{C_{20}^{10}} = 1 - \frac{(C_{10}^{10})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 10, \quad P = \frac{(C_{10}^{0})^2 + (C_{10}^{1})^2 + \ldots\ldots + (C_{10}^{9})^2 + (C_{10}^{10})^2}{(C_{20}^{10})} = 1.$$

D'autre part, on a, en rapprochant les coefficients du binôme égaux :

$$C_{20}^{10} = 2\,(C_{10}^{10})^2 + 2\,(C_{10}^{9})^2 + 2\,(C_{10}^{8})^2 + 2\,(C_{10}^{7})^2 + 2\,(C_{10}^{6})^2 + (C_{10}^{5})^2.$$

La probabilité Q que, pour un stock s, il n'y ait aucun mécontent dans les deux boutiques, est pour :

$s = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad Q = 0$

$$s = 5 \qquad Q = \frac{(C_{10}^{5})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 6 \qquad Q = \frac{2\,(C_{10}^{6})^2 + (C_{10}^{5})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 7 \qquad Q = \frac{2\,(C_{10}^{7})^2 + 2\,(C_{10}^{6})^2 + (C_{10}^{5})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 8 \qquad Q = \frac{2\,(C_{10}^{8})^2 + 2\,(C_{10}^{7})^2 + 2\,(C_{10}^{6})^2 + (C_{10}^{5})^2}{C_{20}^{10}} = 1 - 2\,\frac{(C_{10}^{10})^2 + (C_{10}^{9})^2}{C_{20}^{10}}$$

$$s = 9 \qquad Q = \frac{2\,(C_{10}^{9})^2 + 2\,(C_{10}^{8})^2 + 2\,(C_{10}^{7}) + 2\,(C_{10}^{6})^2 + (C_{10}^{5})^2}{(C_{20}^{10}} = 1 - 2\,\frac{(C_{10}^{10})^2}{C_{20}^{10}}$$

$s = 10 \qquad Q = 1$

(1) Cette formule, comme celles relatives au cas général, se démontre en effectuant le produit : $(x + y)^{2r} = (x + y)^r\,(y + x)^r = (C^0_r\,x^r + C^1_r\,x^{r-1}\,y + \ldots + C^r_r\,y^r)\,.\,(C^0_r\,y^r + C^1_r\,y^{r-1}\,x + \ldots + C^r_r\,x^r).$

Résultats numériques : Stocks nécessaires.

PROBABILITÉ P	STOCK POUR 1 boutique	2 boutiques
0.0001	0	0
0,0006	1	2
0,0116	2	4
0,0894	3	6
0,3282	4	8
0,6718	5	10
0,9106	6	12
0,9884	7	14
0,9994	8	16
0,9999	9	18
1	10	20

PROBABILITÉ Q	STOCK POUR 1 boutique	2 boutiques
0	Moins de 5	Moins de 10
0,3437	5	10
0,8211	6	12
0,9769	7	14
0,9988	8	16
0,9999	9	18
1	10	20

On peut en conclure qu'un stock de 14 objets est nécessaire, dans les deux cas, pour 10 objets qu'en moyenne on vendra.

Étude générale du cas de deux boutiques ($n = 2$, r et k variables).

Les formules précédentes se généralisent sans difficulté.
Si $k = 0{,}5$, on a :

$$C^r_{2r} = (C^0_r)^2 + (C^1_r)^2 + (C^2_r)^2 + \ldots\ldots + (C^{r-1}_r)^2 + (C^r_r)^2$$

d'où l'expression de P; et

$$C^r_{2r} = 2\,(C^r_r)^2 + 2\,(C^{r-1}_r)^2 + 2\,(C^{r-2}_r)^2 + \ldots + \begin{cases} 2\left(C_r^{\frac{r+1}{2}}\right)^2 & \text{si } r \text{ est impair,} \\ \left(C_r^{\frac{r}{2}}\right)^2 & \text{si } r \text{ est pair.} \end{cases}$$

d'où l'expression de Q.
Pour des valeurs quelconques de k, il est nécessaire de supposer que kr est un entier.
On sait que :

$$(x + y)^r\,(y + x)^r = \Sigma_i\, C^i_r\, x^{r-i}\, y^i \,.\, \Sigma_j\, C^j_r\, x^j\, y^{r-j}$$

ou

$$\Sigma_h\, C^h_{2r}\, x^{r-h}\, y^h = \Sigma_i\, \Sigma_j\, C^i_r\, C^j_r \,.\, x^{r-i+j} \,.\, y^{r+i-j}.$$

d'où :

$$h = r + i - j$$
$$h - r = i - j.$$

On en tire donc, en posant $h - r = 2\,kr - r = (2\,k - 1)\,r$, $|\ 2\,k - 1\ | = l$.

Si $k > \frac{1}{2}$	$l = 2\,k - 1$	$C^{2kr}_{2r} = C^{lr}_r\, C^0_r + C^{lr+1}_r\, C^1_r + \ldots\ldots + C^r_r\, C^{(1-l)r}_r$
Si $k < \frac{1}{2}$	$l = 1 - 2\,k$	$C^{2kr}_{2r} = C^0_r\, C^{lr}_r + C^1_r\ \ C^{lr}_r + \ldots\ldots + C^{(1-l)r}_r\, C^r_r$

Ainsi, quelle que soit la valeur de k, la même formule est applicable, et on en déduit immédiatement la valeur de P.
Rassemblant alors les termes extrêmes égaux, il vient (avec toujours $l = 2k - 1$).

$$C^{2kr}_{2r} = 2\,(C^{lr}_r)^2 + 2\,(C^{lr-1}_r)^2 + 2\,(C^{lr-2}_r)^2 + \ldots\ldots + \begin{cases} 2\,C_r^{\frac{lr+1}{2}} & \text{si } lr \text{ est impair,} \\ C_r^{\frac{lr}{2}} & \text{si } lr \text{ est pair.} \end{cases}$$

Application numérique : $k = 0{,}5$, $r = 50$. — Les calculs sont excessivement pénibles.

PROBABILITÉ P	STOCK POUR 1 boutique	STOCK POUR 2 boutiques
....	......	......
0,0001	14	26
0,0001	15	30
0,0003	16	32
0,0013	17	34
0,0045	18	36
0,0136	19	38
0,0356	20	40
0,0805	21	42
0,1586	22	44
0,2742	23	46
0,4208	24	48
0,5792	25	50
0,7258	26	52
0,8414	27	54
0,9195	28	56
0,9644	29	58
0,9864	30	60
0,9955	31	62
0,9987	32	64
0,9997	33	66
0,9999	34	68
0,9999	35	70
	.....	......
1,0000	50	100

PROBABILITÉ Q	STOCK POUR 1 boutique	STOCK POUR 2 boutiques
0,0000	Moins de 25	Moins de 50
0,1584	25	50
0,4514	26	52
0,6827	27	54
0,8389	28	56
0,9287	29	58
0,9727	30	60
0,9910	31	62
0,9974	32	64
0,9993	33	66
0,9997	34	68
0,9998	35	70
....	......	......
1,0000	50	100

Méthode de calcul approché.

Quand les nombres de clients par boutique (r) et de clients à servir ($2\,kr$) sont grands, on peut, par la formule de Stirling, remplacer la loi de probabilité combinatoire par une loi approchée. Nous allons voir qu'on trouve ainsi une *loi de Gauss*, de sorte que, dans la mesure où cette approximation est valable, les calculs numériques longs et pénibles vont disparaître.

1. Dans le cas où $k = 0{,}5$, il vient :

$$p^i = \frac{(C_r^i)^2}{C_r^{2r}} = \frac{(r!)^4}{i!\,i!\,(r-i)!\,(r-i)!\,(2r)!}$$

$$\backsim \frac{\left(r^{r+\frac{1}{2}}e^{-r}\sqrt{2\pi r}\right)^4}{\left(i^{i+\frac{1}{2}}e^{-i}\sqrt{2\pi}\right)^2\left[(r-i)^{r-i+\frac{1}{2}}e^{-r+i}\sqrt{2\pi}\right]^2 2r^{2r+\frac{1}{2}}e^{-2r}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{2r+\frac{1}{2}}}\;\frac{r^{2r+\frac{3}{2}}}{i^{2i+1}\,(r-i)^{2r-2i+1}}$$

On pose :

$$i - \frac{r}{2} = h \qquad \text{d'où :} \quad i = \frac{r}{2} + h \;, \quad r - i = \frac{r}{2} - h$$

d'où :

$$i^{2i+1}\,(r-i)^{2r-2i+1} = \left(\frac{r}{2}\right)^{2r}\left(1+\frac{2h}{r}\right)^{r+2h+1}\left(1-\frac{2h}{r}\right)^{r-2h+1}$$

d'où :

$$p_i \backsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\left[\left(1+\frac{2h}{r}\right)^{r+2h+1}\left(1-\frac{2h}{r}\right)^{r-2h+1}\right]^{-1}$$

Remplaçons le crochet par une exponentielle e^{-X}

$$X = (r+2h+1)\,\mathcal{L}\left(1+\frac{2h}{r}\right) + (r-2h+1)\,\mathcal{L}\left(1-\frac{2h}{r}\right)$$

$$= (r+2h+1)\left(\frac{2h}{r} - \frac{4h^2}{2r^2} + \frac{8h^3}{3r^3}\;\right) + (r-2h+1)\left(-\frac{2h}{r} - \frac{4h^2}{2r^2} - \frac{8h^3}{3r^3}\cdots\right)$$

$$= O + \frac{4h^2}{r} + \frac{K}{r^2} + \dots$$

D'où les expressions Gaussiennes de P et Q.

$$\left| \begin{array}{l} P \# \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ Q \# \int_{-x}^{+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{array} \right. \qquad \text{avec } t = \frac{2\sqrt{2}\,h}{\sqrt{r}} = \frac{i - \frac{r}{2}}{\frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}}}$$

Comparons les résultats du calcul direct et de la méthode approchée dans le cas où $h = 0{,}5$ et $r = 50$:

L'écart type est $\dfrac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}} = 2{,}5$.

	Stock correspondant 1 boutique	2 boutiques
Pour $i - \frac{r}{2} = 1{,}645\ \sigma$, $P = 95\ \%$	29	58
$2{,}054\ \sigma$, $P = 98\ \%$	30	60
$i - \frac{r}{2} = 1{,}960,\ \sigma$, $Q = 95\ \%$	30	60
$2{,}326,\ \sigma$, $Q = 98\ \%$	31	62

La coïncidence est donc très satisfaisante dans ce cas et *a fortiori* pour les valeurs de r plus grandes.

2. Dans le cas général (k quelconque), il vient (en posant $k' = 1 - k$, $i - kr = h$) :

$$p_i = \frac{C_r^i\, C_r^{i_1+i}}{C_{2r}^{2kr}} = \frac{(r!)^2\,(2kr)!\,(2k'r)!}{(kr+h)!\,(k'r-h)!\,(kr-h)!\,(k'r+h)!\,(2r)!}$$

$$\backsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r^{2r+1}\,(2kr)^{2kr+\frac{1}{2}}\,(2k'r)^{2k'r+\frac{1}{2}}}{(kr+h)^{kr+h+\frac{1}{2}}\,(k'r-h)^{k'r-h+\frac{1}{2}}\,(kr-h)^{kr-h+\frac{1}{2}}\,(k'r+h)^{k'r+h+\frac{1}{2}}\,(2r)^{2r+\frac{1}{2}}}$$

Au numérateur, il vient :

$$k^{2kr+\frac{1}{2}}\,k'^{2k'r+\frac{1}{2}}\,(2r)^{2(k+k')r+1}\,r^{2r+1}$$

Au dénominateur, il vient :

$$r^{kr+h+\frac{1}{2}+k'r-h+\frac{1}{2}+kr-h+\frac{1}{2}+k'r+h+\frac{1}{2}} = r^{2r+2}$$

et

$$k^{kr+h+\frac{1}{2}+kr-h+\frac{1}{2}}\,k'^{k'r-h+\frac{1}{2}+k'r+h+\frac{1}{2}} = k^{2kr+1}\,k'^{2k'r+1}$$

Au total :

$$p_i \backsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{kk'r}}\, e^{-X-X'},$$

avec :

$$X = \left(kr + h + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\left(1 + \frac{h}{kr}\right) + \left(kr - h + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\left(1 - \frac{h}{kr}\right)$$

$$= \left(kr + h + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{kr} - \frac{h^2}{2k^2r^2} + \ldots\right) + \left(kr - h + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{kr} - \frac{h^2}{k^2r^2} - \ldots\right) = \frac{h^2}{kr} + \frac{K}{r^2} + \ldots$$

D'où :

$$e^{-X-X'} \backsim e^{-\frac{h^2}{kr}-\frac{h^2}{k'r}} = e^{-\frac{h^2}{kk'r}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{h^2}{\frac{kk'r}{2}}}.$$

D'où les expressions Gaussiennes de P et Q :

$$\left| \begin{array}{l} P \# \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ Q \# \int_{-x}^{+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{array} \right. \qquad \text{avec } t = \sqrt{\frac{2}{kk'r}}\, h = \frac{i - kr}{\sqrt{\frac{kk'r}{2}}} \quad \text{et} \quad x = \frac{s - kr}{\sqrt{\frac{kk'r}{2}}}$$

(où $k + k' = 1$).

On vérifie la coïncidence de cette expression et de la précédente pour $k = k' = \frac{1}{2}$. Il y aurait lieu de procéder au calcul direct de P et Q pour diverses valeurs de k pour vérifier la coïncidence avec les résultats approchés suivants :

Application numérique : N = 10.000.

$k =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
P = 95 %	9.025	8.032	7.038	6.040	5.041	4.040	3.038	2.032	1.025
P = 98 %	9.031	8.041	7.047	6.050	5.051	4.050	3.047	2.041	1.031
Q = 95 %	9.059	8.078	7.090	6.096	5.098	4.096	3.090	2.078	1.059
Q = 98 %	9.070	8.093	7.107	6.114	5.116	4.114	3.107	2.093	1.070

Comparons d'ailleurs ces résultats à ceux fournis par le premier schéma (pour P) :

d'une part : $2{,}054 \sqrt{k\,(1 - k)\,r}$;

d'autre part : $2{,}054 \sqrt{\dfrac{k\,(1 - k)\,r}{2}}$.

Le second schéma fournissant des marges de sécurité $\sqrt{2}$ fois plus petites que le premier il y aura donc lieu d'être circonspect. On ne saurait assigner ici à chaque boutique un stock rationnel, mais seulement indiquer un ordre de grandeur et surtout dégager l'influence néfaste des magasins non spécialisés. Quant aux deux schémas, il est clair que le second (où l'on suppose que k N clients se présentent dans chaque période) exige *a priori* une marge plus faible que le premier (où k N n'est que la moyenne des clients se présentant).

II. — *Cas de* n *boutiques.*

Deuxième exemple : Trois boutiques ont chacune 4 clients; 6 clients se présentent pour être servis. Quelle est la répartition?

L'étude directe révèle l'existence des cas suivants (où A B C désignent les trois boutiques).

B B B C C C B B C C C C B B B B C C	4 × 4 cas 6 × 2 cas	28	$P_0 = \dfrac{28}{924}$
A B C C C C A B B B B C A B B C C C A B B B C C	16 × 2 cas (4 × 6 × 4) × 2 cas	224	$P_1 = \dfrac{224}{924} + P_0$
A A B B B B A A C C C C A A B C C C A A B B B C A A B B C C	6 × 2 cas (4 × 6 × 4) × 2 cas 6 × 6 × 6 cas	420	$P_2 = \dfrac{420}{924} + P_1$
A A A B B B A A A C C C A A A B B C A A A B C C	(4 × 4) × 2 cas (4 × 6 × 4) × 2 cas	224	$P_3 = \dfrac{224}{924} + P_2$
A A A A B B A A A A C C A A A A B C	6 × 2 cas 16 cas	28	$P_4 = \dfrac{28}{924} + P_3 = 1$
	Total	924	

			$Q_0 = Q_1 = 0$
A A B B C C	6 × 6 × 6 cas =	216	$Q_2 = \dfrac{216}{924}$
A A A B B B et analogues : A A A B B C et analogues :	(4 × 4) × 3 cas (4 × 6 × 4) × 6 cas	624	$Q_3 = \dfrac{624}{924} + Q_2$
A A A A B B et analogues : A A A A B C et analogues :	6 × 6 cas 16 × 3 cas	84	$Q_4 = \dfrac{84}{924} + Q_3 = 1$
	Total	924	

Avec un stock de 3 objets par boutique, il y a donc une probabilité $P_3 = 1 - \frac{28}{924} \# 97\ \%$ qu'on puisse servir tout client se présentant dans une boutique donnée, mais seulement une probabilité $Q_3 = 1 - \frac{84}{924} \# 91\ \%$ que tout client se présentant dans toute boutique sera servi.

Étude du cas général.

On suppose toujours, pour simplifier, que r et kr sont des nombres entiers. Désignons par $x_1\, x_2 \ldots x_n$ le nombre (entier) de clients se présentant respectivement dans la 1re, la 2e,... la n^e boutique. Ces entiers satisfont aux conditions suivantes :

$$\sum_i x_i = nkr$$

et
$$0 \leqslant x_i \leqslant r \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Tout système de valeurs $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ sera appelé point (x_i). A ce point sera affectée la probabilité élémentaire $p\,(x_i)$.

$$p\,(x_i) = \frac{C_r^{x_1}\, C_r^{x_2} \ldots C_r^{x_n}}{C_{nr}^{knr}} = \frac{\dfrac{r\,!}{x_1!\ y_1!}\ \dfrac{r\,!}{x_2!\ y_2!} \cdots \dfrac{r\,!}{x_n!\ y_n!}}{\dfrac{(nr)\,!}{(k\,nr)\,!\ (k'\,nr)\,!}}$$

$$= \frac{\dfrac{(knr)\,!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!}\ \dfrac{(k'nr)\,!}{y_1!\, y_2! \ldots y_n!}}{\dfrac{nr\,!}{r\,!\, r\,! \ldots r\,!}} = \frac{C_k\, C_{k'}}{C}$$

en posant :

$$\begin{array}{ll} x_1 + y_1 = r & \\ x_2 + y_2 = r & \Sigma\ x_i = knr \\ \ldots\ldots & \Sigma\ y_i = k'nr \\ x_n + y_n = r & \\ k' = 1 - k. & \end{array}$$

Pour vérifier qu'on a bien $\Sigma\ p\,(x_i) = 1$, c'est-à-dire $C_{nr}^{knr} = \Sigma\ C_r^{x_1}\, C_r^{x_2} \ldots C_r^{x_n}$, on identifiera les deux développements suivants :

$$(u + v)^{nr} = \Sigma\ C_{nr}^{knr}\, u^{knr}\, v^{k'nr}$$

$$\equiv [(u + v)^r]^n = [\Sigma\ C_r^{x_i} u^{x_i} v^{y_i}]^n \text{ avec } knr = h \text{ entier compris entre } o \text{ et } nr,$$

Le symbole Σ indique une sommation étendue à tous les systèmes de valeurs $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ entières, positives ou nulles, de somme knr. En regroupant les systèmes se déduisant de l'un d'eux par permutation des x_i, on peut remplacer Σ relatif à tous les arrangements avec répétition des entiers x_i par Σ' relatif aux combinaisons avec répétition des x_i.

$$p\,(x_i) = \Sigma'\ \frac{C_r^{x_1}\, C_r^{x_2} \ldots C_r^{x_n}}{C_{nr}^{knr}}\ .\ \varpi\ (x_1\, x_2 \ldots x_n).$$

où ϖ est le nombre de permutations avec répétition de $x_1\, x_2 \ldots x_n$. $\left(\varpi = \frac{n\,!}{a\,!\, b\,! \ldots f\,!}\right)$

Dans l'*exemple précédent*, on avait :

$$\begin{array}{ll} C_{12}^6 = 924\,; & (C_4^2)^3 = 6^3 = 216 \\ & C_4^3\, C_4^2\, C_4^1 = 4 \times 6 \times 4 = 96 \\ & C_4^4\, C_4^1\, C_4^1 = 1 \times 4 \times 4 = 16 \\ & C_4^3\, C_4^3\, C_4^0 = 4 \times 4 \times 1 = 16 \\ & C_4^4\, C_4^2\, C_4^0 = 1 \times 6 \times 1 = \ \ 6 \end{array}$$

On avait donc les relations suivantes :
d'une part :

$$C_{12}^{6} = [C_4^0 (C_4^2 C_4^4 + C_4^4 C_4^2) + C_4^0 C_4^3 \cdot C_4^3] + [C_4^1 (C_4^1 C_4^4 + C_4^4 C_4^1) + C_4^1 (C_4^2 C_4^3 + C_4^3 \cdot C_4^2)]$$
$$+ [C_4^2 (C_4^4 C_4^0 + C_4^0 C_4^4) + C_4^2 (C_4^3 C_4^1 + C_4^1 C_4^3) + C_4^2 C_4^2 C_4^2] + [C_4^3 (C_4^3 C_4^0 C_4^0 C_4^3) + C_4^3 (C_4^2 C_4^1 + C_4^1 C_4^2)]$$
$$+ [C_4^4 (C_4^2 C_4^0 + C_4^0 C_4^2) + C_4^4 C_4^1 C_4^1]$$

d'autre part :

$$C_{12}^{6} = C_4^2 C_4^2 C_4^2 + C_4^3 C_4^3 C_4^0 \times \frac{3\,!}{2\,!1\,!0\,!} + C_4^3 C_4^2 C_4^1 \times \frac{3\,!}{1\,!1\,!1\,!} + C_4^4 C_4^2 C_4^0 \frac{3\,!}{1\,!1\,!1\,!} + C_4^4 C_4^1 C_4^1 \frac{3\,!}{2\,!1\,!0\,!}$$

Passons aux expressions des probabilités P *et* Q *de satisfaire la clientèle avec le stock* s.

Si $x_1 \leqslant s$, les clients de la 1re boutique seront satisfaits; d'où $\boxed{P(s) = \sum_{o \leqslant x_1 \leqslant s} p(x_1 x_2 \ldots x_n)}$

Si chaque boutique a un stock s, tous les clients seront satisfaits dans chaque cas où l'on aura $o \leqslant x_1 \leqslant s, o \leqslant x_2 \leqslant s, \ldots\ldots o \leqslant x_n \leqslant s$, simultanément; comme $\Sigma x_i = nkr$, il en résulte que l'on devra prendre $s \geqslant kr$; d'où :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} Q(s) = 0 \quad \text{si} \quad s < kr. \\ Q(s) = \sum_{o \leqslant x_i \leqslant s} p(x_1 x_2 \ldots x_n) \ \text{si} \ s \geqslant kr \end{array}\right.}$$

Valeurs approchées de P *et* Q, *lorsque* r *est grand.*

Appliquons encore la formule de Stirling à l'expression $p(x_i)$.

Le terme en π est $(\sqrt{2\pi})^{n-1}$ au dénominateur.

Le numérateur donne : $(r^{r+\frac{1}{2}})^n (knr)^{knr+\frac{1}{2}} (k'nr)^{k'nr+\frac{1}{2}} = r^{2nr+\frac{n}{2}+1} k^{knr+\frac{1}{2}} k'^{k'nr+\frac{1}{2}} n^{nr+1}$
et le dénominateur : $(nr)^{nr+\frac{1}{2}} = r^{nr+\frac{1}{2}} n^{nr+\frac{1}{2}}$.

Divisons chacun des facteurs de $x_i^{x_i+\frac{1}{2}} \; y_i^{y_i+\frac{1}{2}}$ par kr ou $k'r$; cela permet de mettre en facteur : $\quad r^{nr+n} k^{nkr+\frac{n}{2}} k'^{nk'r+\frac{n}{2}}$

De sorte que le premier facteur obtenu est :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \; \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(kk'r)^{\frac{n-1}{2}}}$$

qu'on contrôle en faisant $n = \frac{1}{2}$.

Restent les termes de la forme $\left(\frac{x_i}{kr}\right)^{x_i+\frac{1}{2}} \left(\frac{y_i}{k'r}\right)^{y_i+\frac{1}{2}}$. Portons l'origine des coordonnées au point central $x_i = kr$ $(y_i = k'r)$, en posant

$$X_i = x_i - kr \quad \text{où} \quad \frac{x_i}{kr} = 1 + \frac{X_i}{kr}$$

$$\Sigma X_i = 0 \qquad \text{d'où} \ : \frac{y_i}{k'r} = 1 - \frac{X_i}{k'r}.$$

Il vient :

$$\Sigma \left(x_i + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L} \frac{x_i}{kr} = \Sigma \left(X_i + \frac{1}{2} + kr\right) \left(\frac{X_i}{kr} - \frac{X_i^2}{2k^2r^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \frac{\Sigma X_i^2}{kr} - \frac{\Sigma X_i^2}{4k^2r^2} \ldots\ldots$$
$$\# \frac{\Sigma X_i^2}{2kr}$$

De même :

$$\Sigma \left(y_i + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L} \frac{y_i}{kr} \# \frac{\Sigma X_i^2}{2k'r}$$

et, au total :

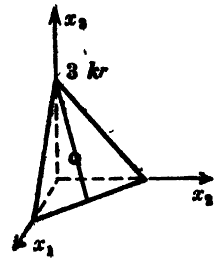
$$\frac{\Sigma X_i^2}{2r} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'}\right) = \frac{\Sigma X_i^2}{2rkk'}.$$

On peut donc remplacer (approximativement) la loi combinatoire par la *loi de Gauss*.

$$\boxed{\frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \; e^{-\frac{\Sigma X_i^2}{2\, rkk'}} \; \frac{d X_1 \ldots\ldots d X_{n-1}}{(kk'r)^{\frac{n-1}{2}}}} = df$$

avec $\Sigma X_i = 0, \quad X_i = x_i - kr$

D'où les expressions :



$$P(s) = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} df$$

$$Q(s) = \int\int \ldots \int df$$

dans le domaine d'intégration $\begin{cases} x_1 \leqslant s \\ x_2 \leqslant s \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n \leqslant s \end{cases}$

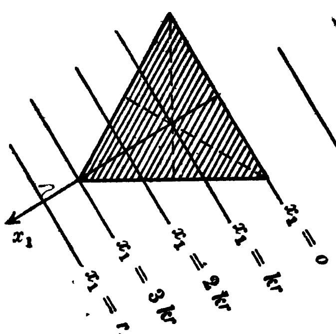
Étude du cas de trois boutiques (n = 3).

1. Le point $(x_1 \, x_2 \, x_3)$ est un point de l'espace à 3 dimensions.
2. L'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 3\ kr$ représente un plan. Les inéquations $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ y déterminent un triangle équilatéral dont le centre de gravité a pour coordonnées (kr, kr, kr) (Voir fig. 1).
3. Les inéquations $x_1 < r$, $x_2 < r$, $x_3 < r$ déterminent un trièdre découpé par le plan $(x_1 + x_2 + x_3 = 3\ kr)$ suivant un second triangle isocèle. Trois cas de figure apparaissent pour la détermination du *domaine* du point $(x_1 \, x_2 \, x_3)$.

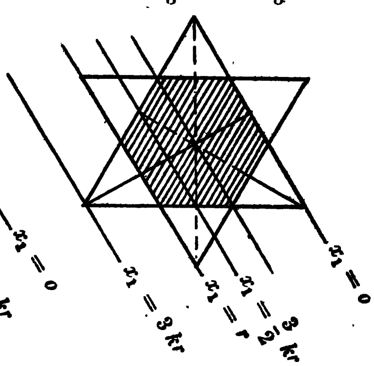
$3\ kr \leqslant r$ ou $k \leqslant \frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\ kr \leqslant r < 3\ kr$ ou $\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$

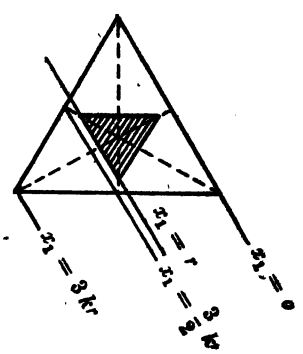
$r < \frac{3}{2}\ kr$ ou $\frac{2}{3} \leqslant k$



Domaine
$xi \geqslant 0$
(triangle fixe)



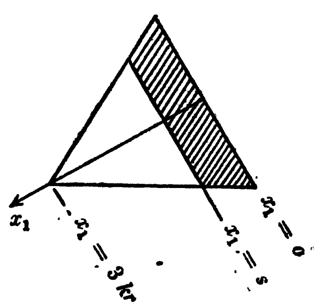
Domaine
$r \geqslant xi \geqslant 0$
(hexagone)



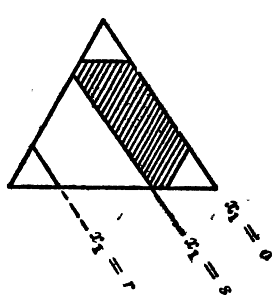
Domaine
$r \geqslant xi$
(petit triangle variable)

Les domaines d'intégration des expressions P et Q sont, suivant les cas :

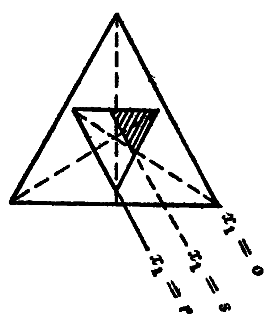
Domaine de P (s) :



$k \leqslant \frac{1}{3}$



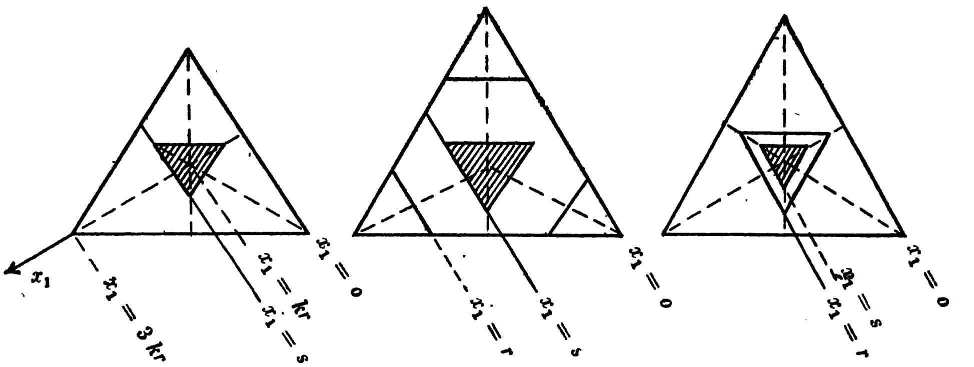
$\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$



$\frac{2}{3} \leqslant k$

Domaine de Q (s) :

$kr < s < \frac{3}{2}\, kr$; pour les autres valeurs de s, voir les figures relatives au domaine de $(x_1\, x_2\, x_3)$.



Il est possible que l'intégration des intégrales précédentes d'ordre $n - 1$ conduise à des fonctions déjà utilisées, par exemple les fonctions χ^2 dont les tables sont bien connues. Les fonctions χ^2 sont en effet obtenues en intégrant les mêmes expressions dans un cercle ayant son centre au centre de gravité du triangle (pour $n = 3$; de même pour $n > 3$). Mais le problème n'a pas été abordé, de sorte qu'on ne peut donner les tableaux analogues aux tableaux I et II du chapitre I.

Conclusion. — Le second schéma paraissait plus simple à son inventeur que le premier, car il ne faisait pas intervenir deux probabilités superposées P et k (ce qui est pourtant fréquent en statistique, par exemple quand on s'occupe des tests). Nous lui trouvons les inconvénients suivants : 1° Il conduit à des formules compliquées; 2° Les choix des clients ne sont plus indépendants, bien que les boutiques soient indépendantes (les premiers clients ont le choix, mais le sort des derniers est réglé par la formule $\Sigma\, x_i = knr$) ; c'est assez peu logique; 3° Il n'y a aucune raison pour qu'en pratique le nombre de clients désireux d'être servis soit exactement knr : une pareille constance ne se rencontre jamais, tandis que, si knr n'est qu'une moyenne du nombre de ces mêmes clients, on se rapproche de la stabilité des phénomènes naturels.

On observera en outre que les deux schémas présentent le défaut de ne pas supposer impossibles, mais seulement peu probables, des événements tels que : un même client ne se présente pas pendant 50 périodes. Il est clair qu'au moins la vente de produits contingentés avec inscription sera mal représentée par ces schémas. Nous ne pensons pas qu'il y ait là toutefois une objection bien sérieuse, car il est bien connu que les distributions théoriques les plus employées ont des branches infinies alors que les distributions pratiques n'en ont pas.

Chapitre III. — *Cas où la concurrence existe entre les boutiques.*

On va pouvoir rendre compte des phénomènes de concurrence, négligés dans les deux premiers chapitres, au moyen de schémas analogues. On suppose d'abord qu'une localité a nr habitants et n boutiques concurrentes pour la vente du même produit; boutiques et clients sont également probables; la probabilité qu'un magasin donné soit choisi par un client donné, est $\frac{1}{n}$; celle qu'il soit choisi par i clients, parmi M se présentant pour la localité, est :

$$r_i = C_M^i \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{M-i} = C_M^i \frac{(n-1)^{M-i}}{n^M}$$

La valeur moyenne de i est $\frac{M}{n}$, son écart type est $\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) M} = \frac{\sqrt{(n-1)\, M}}{n}$.

Les clients se présentant sont $M = k\, n\, r$. En pratique M sera rarement petit de sorte que, plus que jamais, il sera utile de substituer une loi limite à la loi binomiale précédente. Alors, si le nombre n de boutiques ne dépasse pas la trentaine, l'approximation de Gauss sera correcte (puisque $\frac{1}{n}$ restera supérieur à 0,03) ; tandis qu'au delà c'est la loi de Poisson qu'il y aura lieu d'employer. Malheureusement nous ne disposions que d'une table de la loi de Poisson où la valeur moyenne $\left(m = \frac{M}{n} = kr\right)$ ne dépasse pas 20; même s'il existe des Tables plus complètes, on peut donc affirmer que les renseignements nous feront défaut dès que le nombre moyen de clients se présentant par boutique sera un peu grand.

L'écart type de i est, de toutes façons, petit : $\frac{\sqrt{(n-1)\,M}}{n} = \sqrt{k\frac{n-1}{n}r}$. Il en résulte que l'hypothèse de boutiques également probables est très éloignée de la réalité, puisque la clientèle des diverses boutiques, au même moment, devrait former une distribution très peu dispersée. Il est clair que les boutiques sont plus ou moins bien situées. Il sera donc préférable d'imaginer qu'en période stable, la clientèle moyenne de la boutique est connue, et son rapport à la population totale sera désigné par $\frac{1}{n}$. (Par exemple, des inscriptions de clients pourront servir à ce recensement). n ne sera plus nécessairement entier, mais rien ne sera changé; on aboutit ainsi au schéma suivant :

Schéma A. — Une urne contient par exemple 1.000 boules dont $\frac{1.000}{n}$ sont rouges (n non nécessairement entier). M habitants $\left(\text{sur un total de } \frac{M}{k}\right)$ vont y tirer pendant chaque période entre deux réapprovisionnements. Chacun tire une boule et la remet aussitôt. Si la boule est rouge, il va se présenter à la boutique qu'on appellera boutique rouge. (Quant à l'urne, commune à toutes les boutiques, elle est à la mairie.) Quel stock la boutique rouge doit-elle détenir pour avoir une probabilité P de satisfaire les clients?

Ce schéma prêtant immédiatement à une critique déjà formulée au sujet de celui de M. Dayre, le suivant est proposé :

Schéma B. — Entre deux réapprovisionnements, tous les habitants se présentent à la mairie. Mais l'urne contient 1.000 $(1 - k)$ boules blanches contre 1.000 k' boules de couleur, dont la fraction $\frac{1}{n'}$ est rouge. Si une boule blanche est tirée, on ne se présente à aucune boutique; si c'est une boule de couleur, on se présente à la boutique ayant la même couleur. Dans ces conditions, il vient :

$$p_i = C_N^i \left(\frac{k'}{n'}\right)^i \left(1 - \frac{k'}{n'}\right)^{N-i}, \text{ où N est la population totale.}$$

Il suffit de poser $\frac{k'}{n'} = \frac{1}{n}$, $N = k\,n\,r$, pour se ramener au schéma A. Les tableaux numériques de ce dernier renfermeront les résultats relatifs au schéma B à la ligne $k = 1$, à condition de lire $\frac{n'}{k'}$ au lieu de n.

Marge de sécurité (*avec le Schéma* A).

Quand on se trouve dans le domaine de la loi de Gauss, la probabilité P correspondant à s est encore :

$$P(s) = \int_{-\infty}^{S} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{avec } S = \frac{s - kr}{\sqrt{k\frac{n-1}{n}r}}$$

et la marge de sécurité a pour valeur :

$$s - kr = 2{,}054\sqrt{k\frac{n-1}{n}.r} \quad \text{si } P(s) = 98\,\%.$$

Dans le cas où toutes les boutiques sont égales, la somme des marges a les propriétés suivantes :

Pour une population donnée, elle croît comme $\sqrt{n-1}$ avec le nombre n de boutiques.

Pour un nombre de boutiques donné, elle croît comme $\sqrt{N}$ avec la population.

Toutes choses égales d'ailleurs, elle croît comme $\sqrt{k}$. Si on la compare à celle relative à l'absence de concurrence (schéma 1), toutes deux s'annulent bien avec k; mais elle est ici maximum et non nulle pour $k = 1$. On a en effet :

au chapitre 1 : $2{,}054\sqrt{k\,(1-k)\,n^2\,r}$ et ici : $2{,}054\sqrt{kn\,(n-1)\,r}$.

En dehors du domaine de la loi de Gauss, ces résultats, valables pour l'écart-type de la distribution, ont encore une valeur qualitative quand il s'agit de la marge de sécurité.

Marge de sécurité (*avec le schéma B*).

La valeur moyenne de la distribution est $k'r$, et l'écart-type est $\dfrac{\sqrt{k'(n'-k')\,\mathrm{N}}}{n}$.

La somme des marges de sécurité est donc : $2{,}054\sqrt{k'(n'-k')\,\mathrm{N}}$.

Pour une population donnée, elle croît comme $\sqrt{n'-k'}$ avec le nombre n' de boutiques.

Pour un nombre de boutiques donné, elle croît comme $\sqrt{\mathrm{N}}$ avec la population.

Si $k = k'$ et $n = n'$, le rapport des marges des schémas A et B est $\sqrt{\dfrac{n-1}{n-k}} < 1$. Ainsi lorsque le nombre de clients à servir est krn en moyenne et non pas exactement, la marge est évidemment plus grande, mais à peine.

Quant aux deux lois de Poisson relatives aux schémas A et B, elles sont identiques (moyenne $m = knr$).

Schéma A

Tableau I (A). — *Stock par boutique pour une localité de 100.000 habitants.*
(Tableau incomplet faute de Tables).

n		1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000	5.000
Nombre de clients par boutique r		100.000	50.000	20.000	10.000	5.000	2.000	1.000	500	200	100	50	20
$k=1$	P=95 % . . . . P=98 %	100.000	50.260 50.325	20.208 20.260	10.156 10.195	5.113 5.142	\	\	\	\	\	\	28 30
$k=0,9$	P=95 % . . . . P=98 %	90.000	45.247 45.308	18.198 18.247	9.148 9.185	4.608 4.634	\	\	\	\	\	\	26 28
$k=0,8$	P=95 % . . . . P=98 %	80.000	40.233 40.291	16.186 16.232	8.140 8.175	4.102 4.127	\	\	\	\	\	\	23 25
$k=0,7$	P=95 % . . . . P=98 %	70.000	35.218 35.272	14.174 14.217	7.129 7.163	3.595 3.618	\	\	\	\	\	\	21 23
$k=0,6$	P=95 % . . . . P=98 %	60.000	30.202 30.252	12.161 12.201	6.121 6.151	3.088 3.110	\	\	\	\	\	\	19 20
$k=0,5$	P=95 % . . . . P=98 %	50.000	25.184 25.230	10.147 10.184	5.110 5.138	2.580 2.600	\	\	\	\	\	\	16 18
$k=0,4$	P=95 % . . . . P=98 %	40.000	20.165 20.205	8.132 8.164	4.099 4.123	2.072 2.090	\	\	\	\	\	28 30	14 15
$k=0,3$	P=95 % . . . . P=98 %	30.000	15.143 15.178	6.114 6.143	3.086 3.107	1.562 1.578	\	\	\	\	\	22 24	11 22
$k=0,2$	P=95 % . . . . P=98 %	20.000	10.116 10.145	4.093 4.116	2.070 2.087	1.051 1.063	\	\	\	\	28 30	16 18	8 9
$k=0,1$	P=95 % . . . . P=98 %	10.000	5.082 5.103	2.066 2.082	1.049 1.062	536 545	\	\	\	28 30	16 18	10 11	5 6
$k=0,05$	P=95 % . . . . P=98 %	5.000	2.558 2.574	1.047 1.058	535 544	275 282	\	\	\	16 18	10 11	6 7	4 4
$k=0,02$	P=95 % . . . . P=98 %	2.000	1.037 1.046	430 437	222 228	116 120	\	28 30	16 18	8 9	5 6	4 4	2 3
$k=0,01$	P=95 % . . . . P=98 %	1.000	526 533	221 226	116 120	61 64	28 30	16 18	10 11	5 6	4 4	3 3	2 2
Domaine de validité.		Loi de Gauss.					Loi de Poisson.						

Schéma B.

Tableau I (B). — *Stock par boutique pour une localité de 100.000 habitants.*

$n' : k'$		1	2	5	10	20	....	5.000	10.000	20.000	50.000	100.000	200.000	500.000
P=95 % P=93 %		100.000	50.260 50.325	20.208 20.260	10.156 10.195	5.113 5.142	....	28 30	16 18	10 11	5 6	4 4	3 3	2 2
$k'=1$ . . .	$n'=$	1	2	5	10	20	......	5.000	—	—	—	—	—	—
$k'=0,5$ . .	$n'=$	—	1	—	5	10	......	2.500	5.000	—	—	—	—	—
$k'=0,2$	$n'=$	—	—	1	2	4	......	1.000	2.000	4.000	—	—	—	—
$k'=0,1$	$n'=$	—	—	—	1	2	......	500	1.000	2.000	5.000	—	—	—
$k'=0,05$	$n'=$	—	—	—	—	1	......	250	500	1.000	2.500	5.000	—	—
$k'=0,02$	$n'=$	—	—	—	—	—	......	100	200	400	1.000	2.000	4.000	—
$k'=0,01$	$n'=$	—	—	—	—	—	......	50	100	200	500	1.000	2.000	5.000

Schéma A.

Tableau II (A). — *Stock total nécessaire pour 100.000 clients.*

Nombre de boutiques n	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000	5.000
$k=1$	100.000	100.460 100.650	101.040 101.300	101.560 101.950	102.260 102.840	/	/	/	/	/	/	140.000 150.000
$k=0,9$	90.000	90.404 90.616	90.990 91.235	91.480 91.850	92.160 92.680	/	/	/	/	/	/	130.000 140.000
$k=0,8$	80.000	80.466 80.582	80.930 81.160	81.400 81.750	82.040 82.540	/	/	/	/	/	/	115.000 125.000
$k=0,7$	70.000	70.436 70.544	70.870 71.085	71.290 71.630	71.900 72.360	/	/	/	/	/	/	105.000 115.000
$k=0,6$	60.000	60.404 60.504	60.805 61.005	61.210 61.510	61.760 62.200	/	/	/	/	/	/	95.000 100.000
$k=0,5$	50.000	50.368 50.460	50.735 50.920	51.100 51.380	51.600 52.000	/	/	/	/	/	/	80.000 90.000
$k=0,4$	40.000	40.330 40.410	40.660 40.820	40.990 41.230	41.440 41.800	/	/	/	/	/	56.000 60.000	70.000 75.000
$k=0,3$	30.000	30.286 30.356	30.570 30.715	30.860 31.070	31.240 31.560	/	/	/	/	/	44.000 48.000	55.000 60.000
$k=0,2$	20.000	20.232 20.290	20.465 20.580	20.790 20.870	21.020 21.260	/	/	/	/	28.000 30.000	32.000 36.000	40.000 45.000
$k=0,1$	10.000	10.164 10.206	10.330 10.410	10.490 10.620	10.720 10.900	/	/	/	14.000 15.000	16.000 18.000	20.000 22.000	25.000 30.000
$k=0,05$	5.000	5.116 5.148	5.235 5.290	5.350 5.440	5.500 5.640	/	/	/	8.000 9.000	10.000 11.000	12.000 14.000	20.000 20.000
$k=0,02$	2.000	2.074 2.092	2.150 2.185	2.220 2.280	2.320 2.400	/	2.800 3.000	3.200 3.600	4.000 4.500	5.000 6.000	8.000 8.000	10.000 15.000
$k=0,01$	1.000	1.052 1.066	1.105 1.130	1.160 1.200	1.220 1.280	1.400 1.500	1.600 1.800	2.000 2.200	2.500 3.000	4.000 4.000	6.000 6.000	10.000 10.000

Schéma B.

Tableau II (B). — *Stock total nécessaire pour 100.000 clients.*

Nombre de boutiques n	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000	5.000
$k=1$	100.000	100.460 100.650	101.040 101.300	101.560 101.950	102.260 102.840	/	/	/	/	/	/	140.000 150.000
$k=0,9$	90.158 90.195	90.424 90.646	91.900 91.250	91.490 91.860	92.160 92.700	/	/	/	/	/	/	130.000 140.000
$k=0,8$	80.228 80.260	80.510 80.638	80.955 81.180	81.420 81.770	82.060 82.560	/	/	/	/	/	/	115.000 125.000
$k=0,7$	70.238 70.298	70.498 70.620	70.900 71.725	71.310 71.660	71.920 72.380	/	/	/	/	/	/	105.000 115.000
$k=0,6$	60.255 60.318	60.476 60.596	60.845 61.055	61.230 61.540	61.780 62.220	/	/	/	/	/	/	95.000 100.000
$k=0,5$	50.260 50.325	50.448 50.564	50.780 50.975	51.130 51.420	51.620 52.040	/	/	/	/	/	/	80.000 90.000
$k=0,4$	40.255 40.318	40.416 40.520	40.710 40.880	41.020 41.270	41.460 41.840	/	/	/	/	/	56.000 60.000	70.000 75.000
$k=0,3$	30.238 30.298	30.374 30.464	30.620 30.775	30.890 31.110	31.260 31.600	/	/	/	/	/	44.000 48.000	55.000 60.000
$k=0,2$	20.208 20.260	20.312 20.390	20.510 20.635	20.730 20.910	21.040 21.280	/	/	/	/	28.000 30.000	32.000 36.000	40.000 45.000
$k=0,1$	10.158 10.195	10.226 10.284	10.370 10.455	10.510 10.650	10.760 10.920	/	/	/	14.000 15.000	16.000 18.000	20.000 22.000	25.000 30.000
$k=0,05$	5.113 5.142	5.162 5.206	5.265 5.325	5.370 5.460	5.520 5.660	/	/	/	8.000 9.000	10.000 11.000	12.000 14.000	20.000 20.000
$k=0,02$	2.073 2.091	2.104 2.130	2.170 2.210	2.230 2.300	2.340 2.420	/	2.800 3.000	3.200 3.000	4.000 4.500	5.000 6.000	8.000 8.000	10.000 15.000
$k=0,01$	1.052 1.065	1.074 1.042	1.120 1.145	1.170 1.210	1.220 1.280	1.400 1.500	1.600 1.800	2.000 2.200	2.500 3.000	4.000 4.000	6.000 6.000	10.000 10.000

Autre schéma.

On peut, avec M. Dayre, raisonner autrement, c'est-à-dire utiliser un *autre schéma :*
Une table contient n cases. De combien de façons différentes peut-on répartir entre elles M boules? On s'intéresse aux cas où chaque case n'a reçu que s boules au plus; combien y a-t-il de cas favorables? Quelle est la probabilité que « le stock s suffise »?

L'avantage des schémas est de préciser les hypothèses sur lesquelles reposent les raisonnements. Passant d'un schéma à l'autre, les résultats se conservent ou non; il serait à craindre qu'on continuât à parler de la *probabilité* que le stock s suffise, comme d'une grandeur immuable malgré les changements de schéma. En fait, le schéma de M. Dayre se ramène au schéma A.

Mais, alors que la probabilité P calculée plus haut est relative à une boutique, celle dont il est question ici est la probabilité relative à l'ensemble des boutiques.

Dans le cas de la concurrence, les boutiques n'étant pas indépendantes, il n'y a pas de relation simple entre P et Q, pas plus avec le schéma B qu'avec le schéma A. Remarquer d'ailleurs que le schéma B peut se traduire de façon analogue à A : la table contient $n + n_1$ cases égales, avec $\frac{n}{n+m} = k$. (Les n_1 cases supplémentaires reçoivent les boules des clients qui ne se font pas servir.)

L'*expression de* Q (schéma A) est assez voisine de celle donnée pour le schéma 2 (Voir chapitre II).

La formule employée est :

$$1 = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \frac{1}{n}\right)^{M} = \sum \frac{M!}{x_1!\, x_2! \dots x_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^{M} \text{ avec } x_1 + x_2 + \dots + x_n = M = knr$$

où x_i est le nombre de clients se présentant à la boutique n° i $(0 \leqslant i \leqslant n)$. et où Σ indique la sommation de tous les arrangements avec répétition $x_1\, x_2 \dots x_n$.

Comme précédemment, on a $kr \leqslant s$, et

$$Q = \sum_{\substack{x_1 \leqslant s \\ \dots\dots \\ x_n \leqslant s}} \frac{M!}{x_1!\, x_2! \dots x_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^{M} \qquad x_1 + x_2 + + \dots\dots + x_n = M$$

L'étude du domaine de sommation de Q lorsque $n = 3$, suivant les valeurs de k et de s pourrait être menée comme au chapitre 2.

Le symbole Σ peut être également remplacé par un symbole Σ' portant sur les *combinaisons* $x_1\, x_2 \dots x_n$, en multipliant la probabilité par le nombre ϖ de permutations avec répétition de $x_1\, x_2 \dots x_n$. $\left(\varpi = \frac{n!}{a!\, b! \dots f!)}\right)$

$$Q = \sum{}' \frac{M!}{x_1!\ x_2\ ! \dots x_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^{M} \varpi\, (x_1\, x_2 \dots x_n).$$

La formule de Stirling permet de donner de Q une expression approchée Gaussienne :

$$\frac{M!}{x_1!\, x_2! \dots x_n} \# \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} \frac{M^{M+\frac{1}{2}}}{x_1^{x_1+\frac{1}{2}}\, x_2^{x_2+\frac{1}{2}} \dots x_n^{x_n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{n^{M+\frac{1}{2}}(kr)^{M+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x_1}{kr}\right)^{x_1+\frac{1}{2}} \left(\frac{x_2}{kr}\right)^{x_2+\frac{1}{2}} \dots \left(\frac{x_n}{kr}\right)^{x_n+\frac{1}{2}} (kr)^{M+\frac{n}{2}}}$$

Posant $x_i = kr + X_i$ et développant :

$$\sum \mathcal{L} \left(\frac{x_i}{kr}\right)^{x_i+\frac{1}{2}} = \sum \left(X_i + kr + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}\left(1 + \frac{X_i}{kr}\right)$$

$$= \sum \left(X_i + kr + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{X_i}{kr} - \frac{X_i^2}{2k^2r^2} + \dots\right]$$

$$= \sum \frac{X_i^2}{2kr} - \sum \frac{X_i^2}{4k^2r^2} + \dots$$

D'où l'élément différentiel de Q :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{2kr}} \frac{d X_1 \ldots d X_{n-1}}{(kr)^{\frac{n-1}{2}} \; n^{\frac{1}{2}}}$$

avec : $X_i = x_i - kr$.

le domaine d'intégration étant toujours défini par $x_i \leqslant s$.

Exemple. — Dans le cas de 6 clients répartis entre trois boutiques ($n = 3$, $r = 2$, $k = 1$) il y a $3^6 = 729$ cas possibles.

$$3^6 = \frac{6!}{6!0!0!} \frac{3!}{1!2!} + \frac{6!}{5!1!0!} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} + \left[\frac{6!}{4!2!0!} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} + \frac{6!}{4!1!1!} \frac{3!}{1!2!}\right]$$
$$+ \left[\frac{6!}{3!3!0!} \cdot \frac{3!}{2!1!} + \frac{6!}{3!2!1!} \cdot \frac{3!}{1!1!1!}\right] + \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \frac{3!}{3!}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
Q_0 &= Q_1 = 0 \\
Q_2 &= \ \ 90/729 \\
Q_3 &= 420/729 + Q_2 = 510/729 \\
Q_4 &= 180/729 + Q_3 = 690/729 \\
Q_5 &= \ \ 36/729 + Q_4 = 726/729 \\
Q_6 &= \ \ \ 3/729 + Q_5 = 1.
\end{aligned}$$

CHAPITRE IV. — *Valeur moyenne du nombre de clients mécontents.* *(en régime de libre concurrence).*

La probabilité qu'aucun client ne soit mécontent, qu'il s'agisse de P ou de Q, peut être considérée comme n'étant pas absolument satisfaisante, et on pourrait lui préférer la valeur moyenne du nombre de clients mécontents comme moyen d'estimer si le stock est suffisant ou non. Par exemple, on pourrait assigner aux clients mécontents (c'est-à-dire s'étant présentés et n'ayant pu être servis), le maximum de 1 % du nombre total de clients s'étant présentés.

Lorsque i clients se présentent dans une boutique, si $i > s$, $i - s$ seront mécontents.

La probabilité que i clients se présentent étant $P_{i+1} - P_i = p_i$, la *moyenne cherchée pour une boutique* est :

$$x = \sum_{i=s}^{i=n} p_i (i - s) = \sum_{i=s}^{i=n} ip_i - s(1 - P_s).$$

Pour n boutiques égales, la valeur moyenne est nx, *qu'il y ait indépendance ou non.*

Le rapport au nombre de clients se présentant est :

$$\frac{nx}{knr} = \frac{x}{kr}.$$

$\sum\limits_s^n i p_i$ est le *moment incomplet* du premier ordre de la probabilité binomiale p_i.

Étude dans le cas de l'approximation de Gauss.

On pose $i = kr + \sigma t$, $s = kr + \sigma S$. On a : $\displaystyle\int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{tdt}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{S^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, d'où :

$$\sum_s^n ip_i = kr(1 - P) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}}$$

et

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}} - (1 - P)(s - kr) = \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}} - (1 - P) S\right]$$

Pour $P = 0{,}98$, on a $S = 2{,}054$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}} \# 0{,}05$

(car $S = 2{,}0$ donne $0{,}0540$ et $S = 2{,}1$ donne $0{,}0440$)

$$(1 - P) S = 0{,}02 \times 2{,}054 \# 0{,}04.$$

Donc :

$$\boxed{x \# \sigma \times 0{,}01 = \frac{\sigma}{100}}$$

résultat aussi simple qu'important. Par contre, si l'on se donne x, ou plutôt $\frac{x}{kr}$, on obtient des équations assez compliquées en S. Nous nous contenterons donc du résultat précédent, puisque tous nos tableaux correspondent à P = 0,98.

On sait que :

Schéma 1	Schéma 2	Schéma A	Schéma B
$\sigma = \sqrt{k(1-k)r}$	$\sigma = \sqrt{\frac{k(1-k)r}{2}}$	$\sigma = \sqrt{k\frac{n-1}{n}r}$	$\sigma = \sqrt{k\frac{n-k}{n}r}$

Remarque. — Si l'on fait P = 0,95, on a S = 1,645

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}} \# 0{,}102$$

$$(1 - P)\,S = 0{,}05 \times 1{,}645 \# 0{,}082.$$

Donc : $x = \sigma \times 0{,}02 = \frac{2\sigma}{100}$,

Le nombre moyen de mécontents est le *double* du précédent.

M. Dayre consacre un exposé à l'étude de ce nombre moyen de mécontents; sa formule se ramène à la nôtre, où l'on poserait $S = \alpha\sqrt{\frac{N}{n-1}}$, avec $k = 1$. Au lieu de suivre la ligne d'égale probabilité P = constante ou S = constante, les lignes suivies par M. Dayre sont celles où

$$\alpha = \frac{s - \frac{N}{n}}{\frac{N}{n}} = \text{constante.}$$

Conclusion.

L'économiste trouvera ci dessus les tableaux numériques répondant au problème posé; le mathématicien s'attardera à l'intégrale multiple Gaussienne et essaiera de la ramener à des fonctions connues. — Le philosophe enfin appréciera la fragilité des méthodes rationnelles rigoureuses.

Pierre THIONET.

TABLEAUX

Tableau III. — *Nombre moyen de clients mécontents sur 100.000 habitants* (1) *avec* P = *98 %*.

Sans concurrence.

Schéma 1.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000
k=0,9. . . .	0,95	1,34	2,12	3,0	4,24	6,71	9,48	13,4	21,2	30	42,4
k=0,8. . . .	1,26	1,78	2,83	4,0	5,66	8,94	12,64	17,9	28,3	40	56,6
k=0,7. . . .	1,45	2,05	3,24	4,6	6,48	10,25	14,5	20,5	32,4	46	64,8
k=0,6. . . .	1,55	2,18	3,46	4,9	6,94	10,95	15,5	21,8	34,6	49	69,4
k=0,5. . . .	1,58	2,24	3,53	5,0	7,06	11,2	15,8	22,4	35,3	50	70,6
k=0,4. . . .	1,55	2,18	3,46	4,9	6,94	10,95	15,5	21,8	34,6	49	69,4
k=0,3. . . .	1,45	2,05	3,24	4,6	6,48	10,25	14,5	20,5	32,4	46	64,8
k=0,2. . . .	1,26	1,78	2,83	4,0	5,66	8,94	12,64	17,8	28,3	40	56,6
k=0,1. . . .	0,95	1,34	2,12	3,0	4,24	6,71	9,48	13,4	21,2	30	42,4
k=0,05 . . .	0,69	0,89	1,54	2,2	3,08	4,9	6,89	8,9	15,4	22	30,8

Schéma 2.

NOMBRE de boutiques	1	2
k=0,9. . . .	—	0,30
k=0,8. . . .	—	0,40
k=0,7. . . .	—	0,46
k=0,6. . . .	—	0,49
k=0,5. . . .	—	0,50
k=0,4. . . .	—	0,49
k=0,3. . . .	—	0,46
k=0,2. . . .	—	0,40
k=0,1. . . .	—	0,30

Avec concurrence.

Schéma A.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20
k=1.	—	3,16	6,33	9,49	13,8
k=0,9. . . .	—	3,0	6,0	9,0	13,1
k=0,8. . . .	—	2,8	5,7	8,4	12,3
k=0,7. . . .	—	2,6	5,3	7,9	11,5
k=0,6. . . .	—	2,4	4,9	7,3	10,7
k=0,5. . . .	—	2,2	4,5	6,7	9,9
k=0,4. . . .	—	2,0	4,0	6,0	8,7
k=0,3. . . .	—	1,7	3,5	5,2	7,5
k=0,2. . . .	—	1,4	2,8	4,2	6,2
k=0,1. . . .	—	1,0	2,0	3,0	4,4
k=0,05 . . .	—	0,7	1,4	2,1	3,1
k=0,02 . . .	—	0,5	0,9	1,3	1,9
k=0,01 . . .	—	0,3	0,6	0,9	1,4

Schéma B.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20
k=1.	—	3,16	6,33	9,49	13,8
k=0,9. . . .	0,96	3,11	6,09	9,05	13,1
k=0,8. . . .	1,26	3,02	5,75	8,62	12,5
k=0,7. . . .	1,45	3,02	5.48	8,08	11,6
k=0,6. . . .	1,55	2,90	5,14	7,50	10,8
k=0,5. . . .	1,58	2,75	4,75	6,90	9,9
k=0,4. . . .	1,55	2,53	4,28	6,2	9,0
k=0,3. . . .	1,45	2,26	8,77	5,4	8,2
k=0,2. . . .	1,26	1,90	3,10	4,4	6,2
k=0,1. . . .	0,96	1,38	2,21	3,2	4,5
k=0,05 . . .	0,69	1,02	1,59	2,2	3,2
k=0,02 . . .	0,44	0,63	1,02	1,5	2,0
k=0,01 . . .	0,32	0,46	0,69	1,0	1,4

(1) Soit n le nombre de boutiques, le nombre moyen de clients mécontents est 0,01 $n\sigma$ pour 100.000 habitants (tableau III) ou pour 100.000 × k clients à servir (tableau III *bis*).

TABLEAU III *bis*. — *Nombre moyen de clients mécontents si 100.000 se présentaient avec* P = *98* %.

Sans concurrence.

Schéma 1.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1.000	2.000
k=0,9. . . .	1,05	1,49	2,35	3,33	4,72	7,45	10,5	14,9	23,5	33,3	47,2
k=0,8. . . .	1,58	2,24	3,50	5,00	7,08	11,2	15,8	22,4	35,0	50,0	70,8
k=0,7. . . .	2,07	2,93	4,62	6,55	9,24	14,6	20,7	29,3	46,2	65,5	92,4
k=0,6. . . .	2,58	3,64	5,77	8,17	11,46	18,2	25,8	36,4	57,7	81,7	114,6
k=0,5. . . .	3,16	4,48	7,07	10,0	14,1	22,4	31,6	44,8	70,7	100	141
k=0,4. . . .	3,88	5,44	8,70	12,2	17,4	27,3	38,8	54,4	87	122	174
k=0,3. . . .	4,84	6,83	10,8	15,3	21,6	34,2	48,4	68,3	108	153	216
k=0,2. . . .	6,33	8,93	14,2	20,0	28,3	44,7	63,3	89,3	142	200	283
k=0,1. . . .	9,48	13,40	21,2	30,0	42,4	67,1	94,8	134,0	212	300	424
k=0,05 . . .	13,78	17,88	30,8	43,6	61,6	97,5	137,8	178,8	308	436	.616

Schéma 2.

NOMBRE de boutiques	1	2									
k=0,9. . . .	—	0,33									
k=0,8. . . .	—	0,50									
k=0,7. . . .	—	0,66									
k=0,6. . . .	—	0,75									
k=0,5. . . .	—	1,00									
k=0,4. . . .	—	1,23									
k=0,3. . . .	—	1,49									
k=0,2. . . .	—	2,00									
k=0,1. . . .	—	3,00									

Avec concurrence.

Schéma A.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20						
k=1.	—	3,16	6,33	9,49	13,8						
k=0,9. . . .	—	3,33	6,67	10,0	14,5						
k=0,8. . . .	—	3,54	7,07	10,6	15,4						
k=0,7. . . .	—	3,78	7,56	11,2	16,5						
k=0,6. . . .	—	4,08	8,16	12,2	17,8						
k=0,5. . . .	—	4,48	8,94	13,4	19,5						
k=0,4. . . .	—	5,0	10,0	15,0	21,8						
k=0,3. . . .	—	5,78	11,6	17,4	25,2						
k=0,2. . . .	—	7,07	11,3	21,2	30,9						
k=0,1. . . .	—	10,0	16,0	30,0	43,6						
k=0,05 . . .	—	14,2	22,6	42,4	61,6						
k=0,02 . . .	—	22,4	44,8	67,0	97,5						
k=0,01 . . .	—	31,6	63,5	95,9	138,0						

Schéma B.

NOMBRE de boutiques	1	2	5	10	20						
k=1.	—	3,16	6,33	9,49	13,8						
k=0,9. . . .	1,07	3,5	6,7	10,0	15,3						
k=0,8. . . .	1,6	3,8	7,2	10,8	15,6						
k=0,7. . . .	2,07	4,3	7,8	11,5	16,6						
k=0,6. . . .	2,6	4,8	8,6	12,5	18,0						
k=0,5. . . .	3,16	5,5	9,5	13,8	19,8						
k=0,4. . . .	3,75	6,3	10,7	15,5	22,5						
k=0,3. . . .	4,8	7,5	12,6	18	27,3						
k=0,2. . . .	6,3	9,5	15,5	22	31						
k=0,1. . . .	9,6	13,8	22,1	32	45						
k=0,05 . . .	13,8	20,4	31,8	44	64						
k=0,02 . . .	22,0	31,5	51,0	75	100						
k=0,01 . . .	32,0	46,0	69,0	100	140						