

PIERRE MASSÉ

**Application des probabilités en chaîne à l'hydrologie
statistique et au jeu des réservoirs**

Journal de la société statistique de Paris, tome 85 (1944), p. 204-219

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1944__85_204_0

© Société de statistique de Paris, 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

III.

APPLICATION DES PROBABILITÉS EN CHAÎNE A L'HYDROLOGIE STATISTIQUE ET AU JEU DES RÉSERVOIRS

Les problèmes abordés dans cet exposé ont deux traits communs.

C'est d'abord qu'ils ont été suggérés par l'*industrie hydroélectrique* dont ils traduisent certaines préoccupations fondamentales. C'est ensuite qu'ils font appel, pour leur solution, au même outil scientifique, la *Théorie des probabilités en chaîne*.

Ils ont pourtant chacun son objet et sa physionomie propres. Le premier est de l'ordre de la *connaissance pure* : il s'agit, en précisant les lois de probabilité des débits, de mieux

pénétrer l'essence des phénomènes et de faire des prévisions plus serrées. Le second, au contraire, est déjà du domaine de l'action, puisqu'il se propose de modifier le régime des cours d'eau pour mieux servir les besoins humains.

La parenté des problèmes a paru néanmoins l'emporter sur leur différence et légitimer leur réunion dans le cadre d'un même exposé.

I.

*L'Hydrologie statistique
et les lois de probabilité des débits.*

Le premier pas de l'Hydrologie statistique a été l'établissement de lois de probabilités simples, ou non liées, par ajustement des fréquences observées dans le passé.

Une telle loi se traduit par une fonction $k(x)$, telle que $k(x) dx$ exprime la probabilité pour que le débit du cours d'eau considéré, au point considéré, soit compris entre x et $x + dx$.

Pour certaines applications (par exemple lorsqu'on cherche à estimer la productibilité annuelle probable ou le nombre probable de jours de déversement d'une usine au fil de l'eau), on ne précise pas l'époque à laquelle se produira le débit x . la fonction $k(x)$ s'obtient alors par ajustement de tous les débits observés à n'importe quelle date du passé. Dans les cas les plus nombreux, au contraire, on resserre la prévision en établissant les lois de probabilité mois par mois, voire semaine par semaine, de manière à tenir compte du caractère saisonnier du régime des rivières.

Le premier résultat fondamental, dans ce domaine, a été obtenu il y a une quinzaine d'années par M. Gibrat, qui a montré, sur l'exemple de la Truyère, que les *logarithmes des débits suivent approximativement la loi de Gauss* (1). La même circonstance a été constatée depuis lors sur nombre d'autres rivières. On en a proposé plusieurs explications théoriques dont aucune, à l'heure actuelle, ne s'impose absolument.

* * *

Il est intéressant, et il est possible, d'obtenir des lois de probabilité plus précises (2). Les lois simples dont il vient d'être question ne tiennent pas compte en effet de tous les renseignements dont on dispose à l'instant de la prévision, puisqu'elles ne font pas intervenir les conditions hydrométéorologiques du moment qui pourtant influencent manifestement l'avenir.

Il est essentiel d'observer que, sur ce point, une différence radicale sépare les prévisions à court terme et les prévisions à long terme.

Si l'on se place au premier point de vue, et si l'on cherche à prévoir, à une station donnée, le débit du lendemain, on peut, au moins en théorie, en déterminer exactement la valeur à partir du débit d'aujourd'hui, des débits d'amont, des précipitations sur l'étendue du bassin versant, de la courbe de tarissement, des lois de propagation des intumescences, etc...

Au contraire, si l'on opère à long terme, l'influence des conditions du moment est devenue négligeable. Il y a, en une station donnée, une loi de probabilités des débits pour janvier 2.000, et cette loi est indépendante des données hydrométéorologiques actuelles.

Ce contraste d'un mécanisme *déterministe* et d'un mécanisme *probabiliste* se retrouve dans beaucoup d'autres problèmes. Citons, après M. Halphen, l'image humaine du *bulletin de santé* pour le pronostic à courte échéance et de la *table de mortalité* pour le pronostic à longue échéance.

Pourquoi ce déplacement de perspective? C'est que les débits, déterminés aujourd'hui, sont soumis à des perturbations aléatoires successives dont l'effet, négligeable à chaque instant, devient prépondérant à la longue. Ces perturbations sont petites, incessantes, et distribuées au hasard. On se trouve de ce fait dans un cas d'application du *principe ergodique* en vertu duquel « l'effet capricieux d'une opération dépendant du hasard se trouve régularisé de plus en plus par une répétition suffisante de cette opération (3) ». Il en résulte que les probabilités de débits tendent vers une loi-limite, variable suivant la saison, mais indépendante des conditions actuelles dont l'influence s'efface progressivement.

En pratique, nous ne faisons des prévisions ni pour demain, ni pour l'an 2000, mais à échéance de quelques semaines ou de quelques mois. Dans ces conditions, le débit que nous cherchons à prévoir n'est pas déterminé par les données d'aujourd'hui, mais n'en est pas non plus indépendant. Il est *en corrélation* avec elles.

(1) GIBRAT, *Aménagement hydroélectrique des cours d'eau. Statistique mathématique et probabilités* (Revue générale de l'Électricité, n° 15 et 16 des 15 et 22 octobre 1932; Revue générale de l'Hydraulique, n° 11 de septembre et octobre 1936).

(2) P. MASSÉ, *Situation, perspectives et applications de l'hydrologie statistique* (Annuaire hydrologique de la France pour 1940).

(3) MAURICE FRÉCHET, *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne* (Gauthier-Villars, p. 11).

* *

L'étude de cette corrélation a été récemment faite par M. Halphen sur l'exemple du Rhin à Bâle (1), aucune station française ne présentant malheureusement une aussi longue continuité de résultats. M. Halphen n'a fait intervenir comme données hydrométéorologiques que les débits eux-mêmes, ce qui est l'hypothèse de travail la plus simple dont on puisse partir. Il a montré que les logarithmes de débits moyens mensuels peuvent être considérés, en première approximation, comme formant une chaîne simple normale. Simple en ce sens que l'influence de l'instant t_1 sur l'instant t , est tout entière contenue dans les influences successives de t_1 sur t_2 et de t_2 sur t_3 . Normale en ce sens que les logarithmes des débits sont gaussiens et en corrélation normale.

L'équation d'une telle chaîne s'écrit :

$$(1) \quad x_n = r x_{n-1} + b y_n,$$

x_n étant l'écart de la variable en chaîne (elle-même égale au logarithme du débit moyen de la n° période), y_n une variable gaussienne réduite (de valeur probable nulle et d'écart-type unité) et r et b deux paramètres dépendant de la saison ($r < 1$).

Si nous nous plaçons, pour simplifier l'écriture, dans l'hypothèse où r et b sont constants, l'application de la méthode des fonctions caractéristiques (2) permet de montrer que x_n est la somme d'un terme systématique dépendant des conditions initiales et égal à $r^{n-1} x_1$ et d'un terme aléatoire Y_n qui est une variable gaussienne de valeur probable nulle et d'écart-

type $b \sqrt{\frac{1-r^{2(n-1)}}{1-r^2}}$.

On vérifie tout d'abord, conformément au principe ergodique, que l'influence des conditions initiales disparaît pour n infini, et que la répartition de probabilités de la variable x tend vers une loi-limite. Cette loi-limite, ou loi libre, est gaussienne, de valeur probable

nulle et d'écart-type $\frac{b}{\sqrt{1-r^2}}$.

La loi liée, correspondant aux valeurs finies de n , diffère de la loi libre. Si la valeur initiale de l'écart est x_1 , sa valeur probable au bout de n périodes passe de 0 (loi libre) à $r^{n-1} x_1$ (loi liée); autrement dit, si la variable elle-même est, à l'origine, supérieure de $K\%$ à sa valeur probable, elle est, au bout de n périodes, supérieure de $r^{n-1} K\%$ à cette valeur probable.

En outre, la dispersion est resserrée par la connaissance de x_1 : le rapport des écarts types de la variable liée et de la variable libre est $\sqrt{1-r^{2(n-1)}}$.

Si enfin on calcule le coefficient de corrélation entre les périodes 1 et n , on constate qu'il est égal au facteur r^{n-1} , qui intervient dans les formules précédentes; il décroît en progression géométrique quand n augmente.

* *

L'idée vient naturellement à l'esprit de passer de ce processus discontinu à un processus continu. L'équation (1) est alors remplacée par une équation différentielle stochastique qui peut s'écrire :

$$(2) \quad dx = -ax dt + by \sqrt{2} dt.$$

(x écart de la variable en chaîne, y variable gaussienne réduite, a et b paramètres dépendant de la saison).

La caractéristique essentielle de cette équation différentielle stochastique est qu'alors que le terme systématique $-ax dt$ est du premier ordre, le terme aléatoire $by \sqrt{2} dt$ est d'ordre $\frac{1}{2}$. Ce fait est d'ordre général: un phénomène observé pendant une durée finie ne resterait pas aléatoire si les infiniment petits aléatoires étaient du premier ordre.

La méthode des fonctions caractéristiques s'applique à l'équation (2) comme à l'équation (1). Elle permet de montrer que, si l'écart initial est x_0 , l'écart lié x à l'époque t est la somme d'un terme systématique égal à $x_0 e^{-at}$ et d'un terme aléatoire Y indépendant des conditions initiales qui est une variable gaussienne de valeur probable nulle et d'écart type

$\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - e^{-2at}}$. On en déduit les mêmes conséquences que précédemment sur l'existence d'une loi-limite et sur l'amélioration de la prévision résultant de la connaissance de la donnée initiale x_0 .

* *

(1) Un exposé de cette étude paraîtra prochainement dans l'Annuaire hydrologique de la France pour 1941.

(2) Paul LÉVY, *Calcul des probabilités* (Gauthier-Villars, 2^e partie, chap. II).
Théorie de l'addition des variables aléatoires (Gauthier-Villars, chap. III, § 14).

Contrairement à ce qu'on aurait pu espérer, l'équation (2) ne s'applique pas aux débits instantanés. L'étude de ceux-ci soulève en effet des difficultés particulières, marquées notamment par une dissymétrie entre passé et avenir, et oblige à recourir à des schémas différents dans lesquels les conditions de régularité de Kolmogoroff ne sont pas remplies.

L'équation différentielle stochastique (2) n'est donc, en l'espèce actuelle, qu'un artifice de calcul définissant ce qu'on peut appeler le *processus normal fictif équivalent*, c'est-à-dire un processus continu tel que, si les débits instantanés s'y conformaient, on retrouverait pour les débits moyens mensuels la loi de probabilité correcte. Les formules reliant ce processus continu fictif au processus réel suivi par les débits moyens mensuels ont été établies par M. Halphen.

* *

Dans le cas de la chaîne continue, le coefficient de corrélation entre les époques O et t est égal à e^{-at} , et décroît par suite exponentiellement au cours du temps.

Le paramètre a qui y figure a les dimensions de l'inverse d'un temps. Si l'on pose $T = \frac{1}{a}$, le paramètre de durée T mesure la lenteur de la décroissance de la corrélation. C'est le *temps de corrélation* du phénomène. Sur le Rhin à Bâle, ce temps de corrélation varie, suivant la saison, de vingt-neuf à quarante-cinq jours. Il est du même ordre de grandeur sur la Dordogne à Argentat et sur le Drac au Sautet.

La théorie précédente conduit à tenter la *description statistique du régime d'un cours d'eau* du moyen de trois paramètres, variables suivant l'époque de l'année : la valeur probable m du logarithme du débit, l'écart type σ , et le temps de corrélation T.

σ mesure la variabilité du débit d'une année à l'autre, T sa variabilité d'un jour à l'autre.

* *

On voit par ce qui précède que l'introduction de la théorie des probabilités en chaîne a permis à l'hydrologie statistique de faire un nouveau pas en avant. Il reste toutefois à reconnaître si les hypothèses de travail de M. Halphen peuvent être tenues pour définitives, à trouver pour les débits journaliers un schéma satisfaisant et à étudier le lien entre précipitations et débits.

Nous avons donc encore une longue route à parcourir.

Nous devons néanmoins — et ceci m'amène au second sujet que je veux traiter — aborder sans plus attendre l'étude du jeu des réservoirs. Ou bien, en effet, la part du hasard y est négligeable (bassins journaliers) ; ou bien, si elle y est essentielle, comme c'est le cas pour les réservoirs saisonniers, ceux-ci sont des intégrateurs de débit fonctionnant à une échelle de durée (de l'ordre du mois au moins) qui permet d'appliquer les schémas précédents sans scrupule de validité.

II

Le jeu des réservoirs.

POSITION DU PROBLÈME

Quand on parle du *jeu* d'un réservoir, on peut entendre ce terme dans une double acception, celle d'un mouvement matériel des eaux et celle d'une spéculation sur un avenir incertain.

Ce second point de vue est évidemment prédominant.

Ramené à ses lignes essentielles, il conduit à énoncer comme il suit le problème du jeu d'un réservoir — plus précisément de son exploitation optimum :

On dispose, sur une rivière, d'un réservoir de capacité M. Il y entre un débit x qui est une variable aléatoire naturelle, et il en sort un débit q qui est une variable aléatoire réglée. On connaît en fonction du temps la loi de probabilité (k) du débit naturel, la fonction d'utilité (U) du débit réglé, et la fonction d'utilité (S_1) du volume restant en réserve en fin d'exploitation.

On se propose de déterminer une *règle d'exploitation* telle que les débits sortant du réservoir présentent statistiquement la plus grande utilité, c'est-à-dire telle que l'espérance mathématique totale S de l'exploitant soit aussi grande que possible. Cette règle « optimum » une fois déterminée, on se propose de calculer la loi de probabilité (P) des états du réservoir, la loi de probabilité (p) des débits réglés (ou lâchures du réservoir) et l'espérance totale S.

* *

Les deux données essentielles du problème sont :

- la *fonction d'utilité* des lâchures q du réservoir ;
- le *schéma de probabilité* des débits naturels x .

L'étude approfondie de la première donnée sort du cadre de cet exposé; elle obligerait, au surplus, à des considérations fort intéressantes, mais un peu longues, touchant l'économie d'une part, l'industrie électrique d'autre part. Il nous suffira de savoir que l'utilité est, dans chaque cas particulier, une fonction bien définie, soit par des recettes de contrats, soit par des économies de charbon obtenues en substituant de l'énergie hydraulique à de l'énergie thermique. La dérivée de l'utilité totale U par rapport au débit réglé q est l'utilité marginale u , fonction décroissante de q qui s'annule pour une valeur de q dépendant du débouché et de l'équipement (débit maximum utile).

Quant au schéma de probabilité des débits naturels, il semble tout tracé par les considérations d'hydrologie statistique esquissées plus haut.

Toutefois, l'introduction de débits en chaîne, et spécialement de débits en chaîne continue, soulève des difficultés qui ne sont pas encore toutes résolues.

C'est pourquoi je me suis d'abord attaché à traiter le problème de l'exploitation optimum des réservoirs dans le cadre d'un schéma de probabilités simplifié.

On suppose dans ce schéma que le temps est divisé en *périodes élémentaires indépendantes de durée finie*. Le débit entrant est alors remplacé par le volume entrant au cours d'une période, que nous désignerons encore par x . Au début de chaque période, x entre de l'aléatoire dans le connu, — comme s'il était tiré dans une urne de composition indépendante de l'évolution antérieure des débits, — et l'exploitant cherche à déterminer au mieux le volume transmis q , ou lâchure de la période. Cette hypothèse revient, en somme, à remplacer l'affaiblissement continu de la corrélation découlant de la théorie des débits en chaîne, par un schéma à gradins, avec corrélation complète à l'intérieur d'une période, et corrélation nulle d'une période à la suivante.

Pour que ce schéma soit acceptable, il faut que la durée de la période élémentaire ne soit ni trop longue, ni trop courte : sinon, on aurait pour les débits cumulés une dispersion excessive ou insuffisante selon le cas. On est ainsi conduit à fixer la durée de la période élémentaire aux environs du temps de corrélation du phénomène, ce qui lui assigne l'ordre de grandeur du mois.

PRINCIPE DE LA RÉGULATION

La régulation consiste, par définition, à rendre aussi grande que possible l'espérance mathématique de l'exploitant.

Cette espérance mathématique, que j'appellerai *espérance totale*, est l'espérance du produit total d'exploitation, c'est-à-dire la valeur probable de la somme des utilités engendrées en cours d'exploitation par les lâchures du réservoir, accrue de la valeur probable de l'utilité totale du stock résiduel en fin d'exploitation (1).

On notera que l'espérance totale n'est définie que si on se donne une règle d'exploitation — ici la règle d'exploitation optimum.

À côté de l'espérance totale, nous aurons à considérer l'*espérance marginale*, qui est, par définition, la dérivée de l'espérance totale par rapport au volume accumulé. Elle s'identifie avec le prix auquel, dans une transaction équitable, l'exploitant céderait un mètre cube de son stock.

* * *

Ces définitions étant posées, nous pouvons préciser notre système de notation qui est le suivant :

- x volume entrant au cours d'une période;
- q volume transmis (ou lâchure) au cours d'une période;
- X volume en réserve au début de la période;
- Y volume en réserve à la fin de la période;
- (3) $k_n(x)$ loi de probabilité de x au cours de la n^{e} période;
- $U_n(q)$ utilité totale de la lâchure q au cours de la n^{e} période (2);
- $S_n(Y)$ espérance totale de la réserve Y à la fin de la n^{e} période;
- $u_n(q) = \frac{d U_n(q)}{d q}$ utilité marginale de la lâchure q ;
- $s_n(Y) = \frac{d S_n(Y)}{d Y}$ espérance marginale de la réserve Y .

Nous supposons enfin que les périodes sont numérotées en remontant le cours du temps, ce mode de numérotation étant en correspondance avec le processus d'itération, ou de récurrence, qui permet, comme nous le verrons plus loin, de déterminer de proche en proche les espérances marginales.

(1) On ne tient pas compte ici du prix du temps. Si on désirait le faire, il faudrait, dans la définition, remplacer les valeurs probables par les valeurs *actuelles* probables.

(2) La détermination de $U_n(q)$ présuppose la solution du problème d'exploitation optimum en régime connu, ou déterminé. — Voir VARLET, *Étude graphique des conditions d'exploitation d'un réservoir de régularisation* (Annales des Ponts et Chaussées, 1923, IV, p. 61); RICARD, *La détermination du programme optimum d'usines génératrices hydrauliques et thermiques interconnectées* (Revue générale d'électricité, septembre 1940).

* * *

L'établissement du principe de la régulation se fait en trois temps.

* * *

1° La règle d'exploitation optimum d'une période est déterminée lorsqu'on connaît, — en dehors des données (U) et (k), — la fonction d'espérance marginale en fin de période.

La règle d'exploitation optimum d'une période est, en termes précis, le choix des inconnues q et Y en fonction des données X et x .

Les deux inconnues q et Y sont d'abord liées par l'équation de conservation des volumes

$$(4) \quad Y + q = X + r.$$

Il existe entre elles une seconde relation qu'on obtient en cherchant à rendre l'espérance totale aussi grande que possible.

L'espérance totale au début d'une période est la somme de l'utilité totale du volume transmis q et de l'espérance totale du stock résiduel Y . En annulant $d(U + S)$ et en tenant compte de la relation (4), on obtient comme condition de maximum de l'espérance totale :

$$(5) \quad u_n(q) = s_n(Y),$$

c'est-à-dire l'égalité de l'utilité marginale de la lâchure et de l'espérance marginale de la réserve résiduelle (1).

Ce résultat est intuitif, si l'on observe que l'espérance marginale peut être assimilée à un coût de production marginal : en turbinant le volume dq on se prive en effet d'une recette probable future $s \, d q$. L'équation (5) n'est ainsi que l'extension aux entreprises d'arbitrage, opérant des transferts entre un présent connu et un avenir aléatoire, du théorème classique sur l'égalité de l'utilité marginale et du coût de production marginal dans le fonctionnement optimum des entreprises de production. C'est, si l'on veut, le théorème fondamental de l'analyse marginale aléatoire.

Lorsque l'ensemble des équations (4) et (5) conduit à des valeurs admissibles pour q et Y , on se trouve, dit-on, en régime équilibré (A).

Il peut arriver toutefois qu'avant d'atteindre le régime équilibré on se heurte à l'une des limitations ou discontinuités physiques provenant de la nature des flux ou stocks en jeu : la réserve finale Y ne peut en effet ni tomber au-dessous de 0, ni monter au-dessus de M ; la lâchure ne peut être négative, et quand elle atteint le volume maximum utile Q_n de la période, son utilité marginale tombe brusquement d'une valeur non nulle à zéro.

Dans ces différents cas, la condition d'équilibre marginal est à remplacer par une condition de limitation ($Y = 0$, $Y = M$; $q = 0$; $q = Q_n$). Nous dirons qu'on se trouve alors en régime bloqué.

Il y a cinq régimes bloqués :

Stockage-limite	$Y = M$	$0 < q < Q_n$	(D)
Destockage-limite	$Y = 0$	$0 < q < Q_n$	(B)
Vente nulle	$q = 0$	$0 < Y < M$	(E)
Vente maximum	$q = Q_n$	$0 < Y < M$	(C)
Vente maximum déversement	$Y = M$	$q > Q_n$	(F)

La question de savoir en face duquel des six régimes possibles on se trouve lorsque X et x sont donnés peut se résoudre par tâtonnements. Mais on peut aussi lui donner une réponse immédiate en appliquant une méthode graphique dont je ne puis indiquer ici que le principe : on trace, par rapport à un axe des utilités et à un axe des volumes en réserve, une ligne de stockage et une ligne de vente constituées par les arcs de courbe $s_n(Y)$ et $u_n(q) = u_n(X + x - Y)$ prolongés par des demi-droites convenables (fig. 1).

Le point d'intersection j de la ligne de stockage et de la ligne de vente, qui est unique, représente le régime optimum en ce sens que son ordonnée est l'inconnue Y ; l'autre inconnue q se lit également d'une manière aisée sur le diagramme. (Différence d'ordonnées entre le point optimum j et le point d'intersection de la ligne de vente avec la verticale de vente nulle).

* * *

(1) Strictement parlant, ce qui précède établit seulement que la condition (5) est nécessaire. On montre qu'elle est suffisante, c'est-à-dire qu'on a affaire à un maximum et non à un minimum, en considérant les dérivées secondes de U et S .

* * *

2° Par application combinée de la règle précédente et de la propriété fondamentale des espérances mathématiques, on peut, en remontant le cours du temps, déduire toutes les espérances (totales ou marginales) de l'une d'elles supposée connue.

Cherchons par exemple à calculer $s_{n+1}(X)$ connaissant la fonction (s_n) .

Au moment où nous faisons ce calcul, c'est-à-dire à la fin de la période $(n+1)$, trois éventualités sont possibles, selon la valeur que prendra la variable aléatoire x pour la période (n) qui va s'ouvrir : régime équilibré, vente-limite, stockage (ou déstockage)-limite. Dans la première éventualité, une partie de la tranche différentielle dX , qu'on peut supposer matérialisée par une mince couche d'huile à la surface du réservoir, est vendue au prix unitaire u_n et l'autre reste en stock avec la valeur unitaire s_n . Peu nous importe de savoir, d'ailleurs, comment la tranche dX se partage entre vente supplémentaire et stockage supplémentaire; le régime équilibré étant caractérisé par l'égalité de l'espérance et de l'utilité marginales, on a $u_n = s_n$, et la tranche dX rapporte au total, sous forme tant de vente que de stock supplémentaires $u_n(q) dX = s_n(Y) dX$.

Dans la seconde éventualité, la vente est maximum (ou nulle) et, par conséquent, n'est pas modifiée par l'accroissement différentiel dX ; celui-ci se traduit donc par un accroissement identique de la réserve finale, et rapporte en fin de période, sous forme de stock supplémentaire, $s_n(Y) dX$.

Enfin, dans la troisième éventualité, le réservoir est plein (ou vide) en fin de période. La tranche dX est employée tout entière à accroître la vente et rapporte ainsi $u_n(q) dX$.

D'où, par application de la formule d'addition des espérances mathématiques

$$(6) \quad s_{n+1}(X) = \int_I s_n(Y) k_n(x) dx + \int_E u_n(q) k_n(x) dx,$$

la première intégrale s'étendant aux valeurs de la variable aléatoire x conduisant aux valeurs intermédiaires I de la réserve ($0 < Y < M$), la seconde aux valeurs de x conduisant aux valeurs extrêmes E ($Y = 0, Y = M$) et q et Y étant les fonctions de X et x définies par la règle d'exploitation optimum. Dans le second membre de l'équation (6), tout est connu, et, par suite, le calcul de $s_{n+1}(X)$ peut être effectué.

La méthode graphique dont j'ai parlé présente ici un nouvel avantage : c'est que dans tous les cas d'élément d'utilité (u_n ou s_n) à inscrire sous le signe \int est égal à l'abscisse j_n du point d'intersection j de la ligne de vente et de la ligne de stockage. $s_{n+1}(X)$ n'est alors autre chose que la valeur probable de j_n .

Nous venons de faire ainsi un pas en avant important, mais le problème n'est pas encore résolu, puisque *a priori* nous ne connaissons la fonction (s_n) à aucun moment et que nous devons ainsi appliquer le processus de récurrence à partir d'une espérance marginale finale arbitraire $s_1(X)$.

La dernière étape de la solution est constituée par le paragraphe suivant.

* * *

3° L'influence du choix de l'espérance marginale finale $s_1(X)$ s'évanouit au bout d'un temps suffisamment long.

Cette propriété est intuitive, sinon la décision de l'exploitant, — dictée par la comparaison de l'utilité et de l'espérance marginales, — dépendrait, si loin qu'on remonte en arrière, des données de fin de jeu. On peut d'ailleurs en donner une démonstration rigoureuse, sous des conditions assez larges et pratiquement remplies, touchant la fonction d'utilité marginale $u_n(q)$ et la loi de probabilité $k_n(x)$.

En particulier, en économie et climat constants, (les fonctions u et k étant alors indépendantes de l'indice de la période), l'espérance marginale $s_n(X)$ tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite $s_0(X)$ indépendante du choix de $s_1(X)$. Cette espérance marginale limite, ou stationnaire, est la solution d'une équation fonctionnelle de forme complexe.

En économie et climat cycliques, le cycle comprenant j périodes élémentaires, il y a j espérances marginales limites.

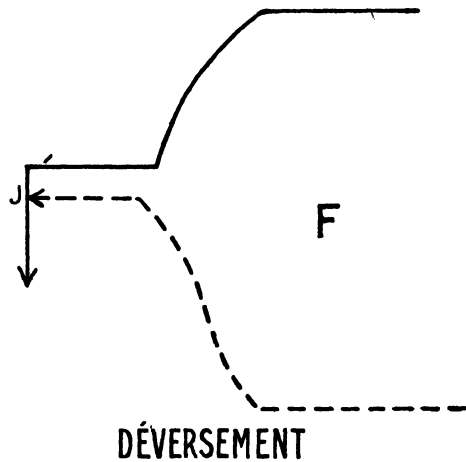
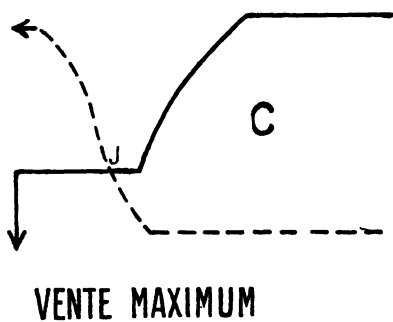
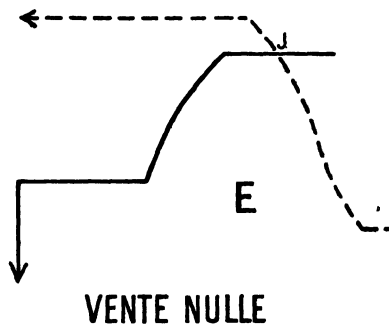
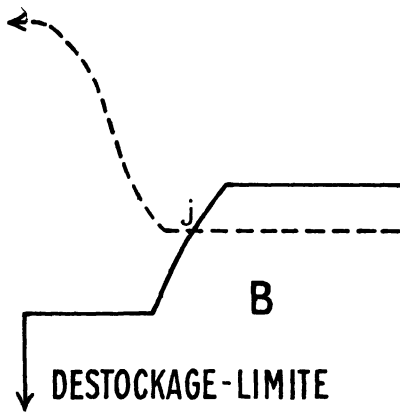
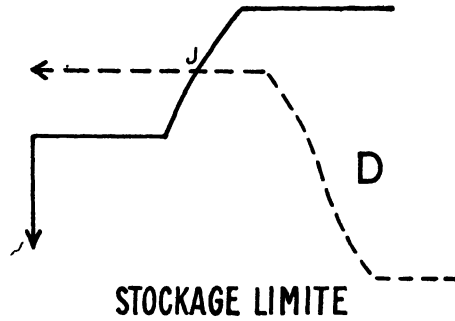
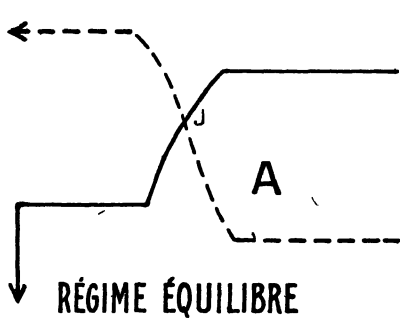
* * *

Pratiquement, la convergence des itérations est très rapide. Dans les cas que j'ai traités, et qui sont régis par le cycle annuel, il est sans exemple que la fonction d'espérance marginale du dix-huitième mois ne coïncide pas avec celle du sixième mois.

Cette convergence est facilitée par l'existence de périodes de hautes eaux où l'on cherche à remplir le réservoir dans toute la mesure possible. Je souligne les derniers mots, car on n'est jamais certain de pouvoir assurer ce remplissage. La probabilité d'y parvenir est plus ou

SCHÉMA DES SIX RÉGIMES D'EXPLOITATION

— Ligne de vente — en abscisses : *utilités et espérances*
- - - Ligne de stockage — en ordonnées : *volumes accumulés*



moins élevée selon que le réservoir est alimenté par un cours d'eau de régime nival ou glaciaire, sur lequel la fonte des neiges et des glaces se reproduit chaque année avec la majesté d'une loi naturelle ou qu'il est tributaire d'une rivière de régime pluvial ou pluvionival dont les hautes eaux sont plus irrégulières et plus incertaines (1). Mais dans quelque cas qu'on se place, la probabilité de remplissage n'est jamais égale à l'unité.

On ne peut donc pas, en régime aléatoire, comme on le fait en régime déterminé, se donner pour condition aux limites l'obligation de porter la réserve à son maximum M à une époque de l'année fixée d'avance. Il faut une condition aux limites plus souple, compatible avec les caprices du hasard.

Cette souplesse, la théorie des espérances marginales nous l'apporte. Au lieu d'assigner rigidelement un résultat déterminé à atteindre, elle sanctionne l'échec par une pénalité, que nous fixons nous-mêmes d'une manière quelque peu arbitraire, mais raisonnable, d'après l'idée que nous nous faisons du préjudice que le défaut de remplissage causera à l'exploitation durant l'étiage qui va suivre. La pénalité différentielle changée de signe est l'espérance marginale finale $s_1(X)$.

On voit ainsi que la notion d'espérance marginale qui s'est introduite d'elle-même dans la condition d'optimum intervient non moins naturellement dans la condition aux limites. Elle est au cœur de la solution.

EFFETS DE LA RÉGULATION (2)

Par effets de la régulation, il faut entendre les lois de probabilité (P) et (p) des états et des lâchures du réservoir (3), et la valeur S de l'espérance totale en régime optimum.

La règle d'exploitation une fois connue, le volume accumulé devient une variable aléatoire en chaîne. La loi de passage de X à Y au cours de la période d'indice n (loi élémentaire) se déduit immédiatement de la loi des apports naturels x , combinée avec la règle d'exploitation optimum. Elle comprend une densité de probabilité de passage $K_n(XY)$ si $O < Y < M$, et deux probabilités de passage $K_n^O(X, O)$ et $K_n^M(X, M)$ si la réserve finale est O ou M .

La loi résultante (passage de X à Y pendant la suite des périodes $1, 2, \dots, n$) se déduit de la loi élémentaire par un processus de récurrence découlant de l'application du théorème des probabilités composées et de celui des probabilités totales.

La loi de probabilité des lâchures q se déduit de celle des états Y du réservoir. Sa forme dépend du régime d'exploitation : en régime équilibré, il y a une relation biunivoque entre la lâchure d'une période et la réserve finale; en régime bloqué au contraire, la loi de probabilité des lâchures d'une période s'obtient en combinant la loi des apports de la période et celle des états initiaux du réservoir.

En économie et climat constants, la loi résultante $P^{(n)}$ des états du réservoir tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une loi-limite (P) indépendante de la valeur initiale X de la réserve : c'est une nouvelle application du principe ergodique. La loi-limite (P) comprend, comme la loi élémentaire et comme la loi résultante, une densité de probabilité $P(Y)$, et deux probabilités P_O et P_M . $P(Y)$, P_O , P_M sont les solutions d'un système homogène se ramenant à une équation de Fredholm homogène en $P(Y)$. La considération du système et de l'équation associés permet de montrer que le système et l'équation considérés ont une solution non nulle.

En économie et climat cycliques, le cycle comprenant j périodes élémentaires, il y a j lois-limites. De ces lois-limites, on déduit le mouvement probable limite du réservoir. A une certaine distance des états extrêmes du réservoir, la ligne brisée figurant ce mouvement probable limite est voisine d'une ligne de niveau de la surface d'espérance marginale, celle-ci étant considérée comme fonction de n et de X (fig. 2).

* * *

L'espérance totale de l'exploitant est, par définition, la valeur probable de la somme des utilités engendrées en cours d'exploitation par les lâchures du réservoir, accrue de la valeur probable de l'utilité du stock résiduel en fin d'exploitation.

Elle peut se calculer à partir des fonctions d'utilité $U_n(q)$ et $S_1(Y)$, de la loi de probabilité des lâchures du réservoir en cours d'exploitation, et de la loi de probabilité des états du réservoir en fin d'exploitation.

Mais on peut aussi la déterminer d'une manière plus synthétique par une relation de récurrence analogue à la relation de récurrence des espérances marginales.

Cette relation de récurrence permet d'établir en particulier, que si, en économie et climat constants, l'on part en fin d'exploitation de :

$$(7) \quad S_0(X) = \int_0^X s_0(X) dX,$$

(1) Les phénomènes commandés par le cycle annuel de la température sont toujours plus réguliers que ceux qui dépendent du retour des pluies.

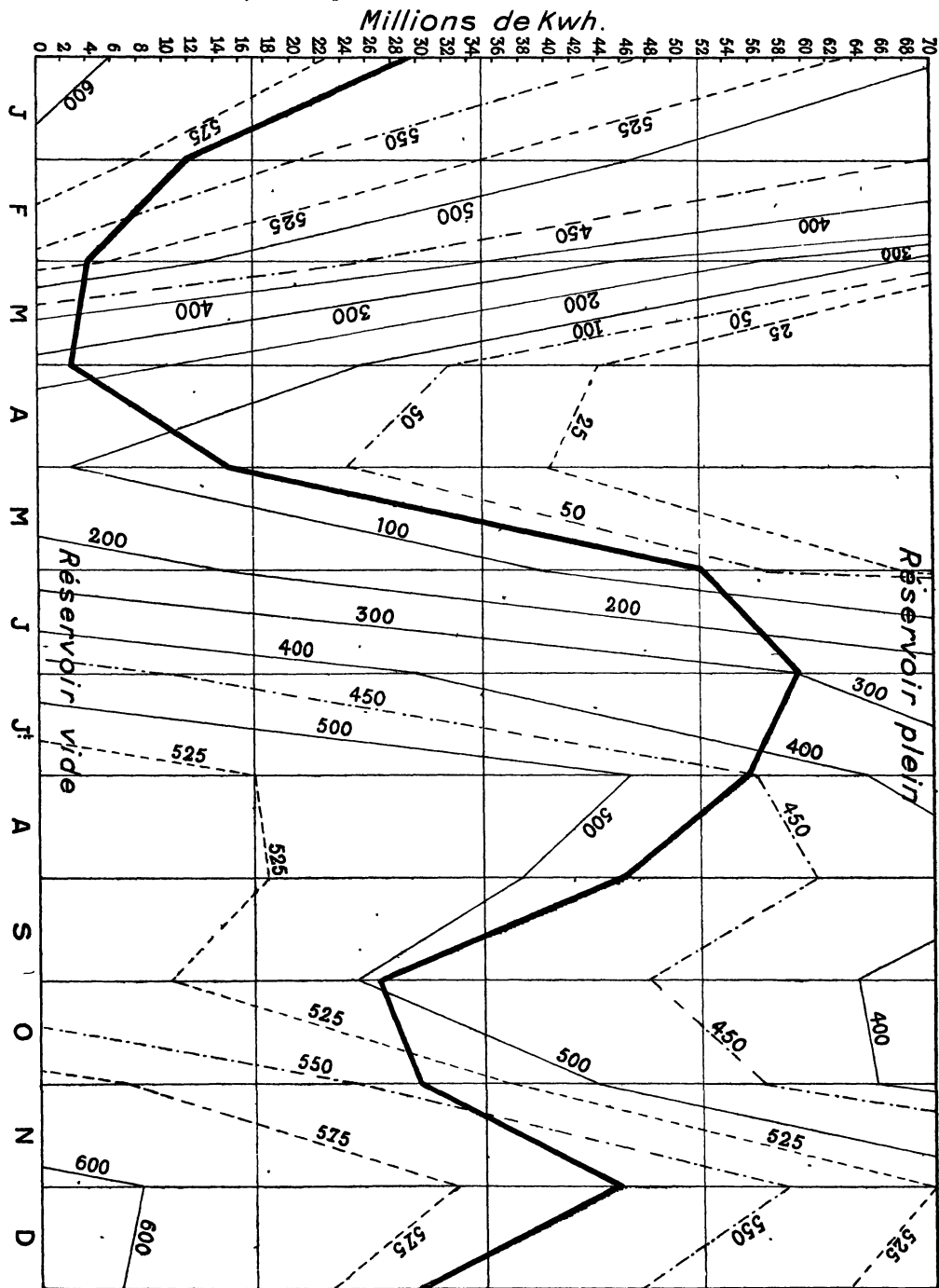
(2) Dans ce passage, nous revenons au sens normal de numérotation des périodes en suivant le cours du temps.

(3) La première étude de ces lois de probabilité a été faite, dans un mémoire encore inédit, par M. SCHUHL, qui, sans connaître la théorie des probabilités en chaîne, en a retrouvé certains résultats.

EXEMPLE DE SURFACE D'ESPÉRANCE MARGINALE EN FONCTION DE L'ÉPOQUE ET DE LA RÉSERVE D'ÉNERGIE

Usine réservoir sur le DRAC conjuguée avec un ensemble d'usines thermiques pour la desserte d'un réseau de distribution.

Surface cotée en grs. de charbon par kwh en réserve.
En trait fort, courbe représentant le mouvement probable limite du réservoir.



$s_0(X)$ étant l'espérance marginale limite précédemment définie, on a, n périodes en arrière

$$(8) \quad S_{n-1}(X) = S_0(X) + nW,$$

W étant une constante fondamentale qui mesure la valeur, rapportée à une période, de l'exploitation réglée par le réservoir.

Pour une exploitation étendue à l'infini, l'espérance totale devient infinie, comme il était évident *a priori* : mais on peut préciser qu'elle devient infinie comme nW .

En économie et climat cycliques, on retrouve la même propriété, les indices s'appliquant, non plus aux périodes élémentaires, mais aux cycles successifs.

En comparant la valeur W de l'exploitation réglée — rapportée selon le cas à une période ou à un cycle — à la valeur homologue W_0 de l'exploitation naturelle (ou au fil de l'eau), on obtient la valeur de la régulation $W-W_0$.

CAS LINÉAIRE

Il est intéressant de signaler au passage un cas particulier dans lequel la théorie des espérances marginales se simplifie, l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait l'espérance marginale limite $S_0(X)$ se transformant en une équation intégrale linéaire (non homogène) du type de Fredholm.

Nous conservons le schéma de probabilité des périodes élémentaires indépendantes de durée finie, et nous nous supposons placés en économie et climat constants.

Nous admettons, en outre, que le mode de rémunération de l'exploitant du réservoir est le suivant.

Il existe un volume *souscrit* q_0 que l'exploitant s'est engagé à transmettre vers l'aval moyennant une rémunération fixe égale à $c q_0$ par période; l'exploitant touche en outre une recette a par mètre cube transmis en surplus de q_0 et paie une pénalité b par mètre cube manquant ($a < b$).

Autrement dit, l'utilité marginale $u(q)$ est égale à b pour $q < q_0$ et à a pour $q > q_0$.

On admet enfin que l'utilité marginale de la réserve résiduelle en fin d'exploitation, soit $s_1(X)$, est comprise entre a et b .

Ces hypothèses ont pour conséquence les résultats suivants qu'il est aisé de démontrer :

1° Quels que soient n et X , l'espérance marginale $s_n(X)$ est comprise entre a et b ;

2° La règle d'exploitation optimum est indépendante de l'expression précise de l'espérance marginale. Elle consiste à fournir, autant que faire se peut, le volume souscrit, et à faire absorber, dans toute la mesure possible, par le réservoir, l'écart entre le volume des apports naturels x et le volume souscrit q_0 (schéma de diffusion sur un segment limité).

Il est possible, dans ces conditions, de calculer *directement* l'espérance marginale.

Reprenons l'image de la couche d'huile différentielle à la surface du réservoir.

Les éventualités possibles se divisent en trois groupes :

1° Le réservoir s'étant rempli, la couche d'huile est vendue comme excédent au cours de la 1^{re}, de la 2^e,... de la n ^e période;

2° Le réservoir s'étant vidé, la couche d'huile est utilisée pour réduire les défaillances au cours de la 1^{re}, de la 2^e,... de la n ^e période;

3° Le réservoir ne s'étant ni rempli, ni vidé, la couche d'huile reste en stock en fin d'exploitation.

Les gains afférents aux éventualités des groupes 1, 2, 3, sont respectivement a , b , et $s_1(Y)$.

Calculons les probabilités correspondantes. Soit $K(X, Y)$, $K^0(X, O)$, $K^M(X, M)$ la loi de passage élémentaire d'un état à un autre du réservoir, telle qu'elle découle de la règle d'exploitation optimum indiquée plus haut.

On est amené à considérer des probabilités résultantes $K^{(n)}$ différentes des probabilités $P^{(n)}$ étudiées dans le paragraphe consacré aux effets de la régulation. Ces probabilités plus restrictives $K^{(n)}(X, Y)$ caractérisent le passage en n périodes de l'état initial X à l'état final Y sans que le point figuratif de l'état du réservoir ait jamais rencontré entre temps les limites O ou M (exploitation sans excédents ni défaillances).

Elles se calculent par récurrence par la formule évidente :

$$(9) \quad K^{(n)}(X, Y) = \int_0^M K^{(n-1)}(X, Z) K(Z, Y) dZ = \int_0^M K(X, Z) K^{(n-1)}(Z, Y) dZ.$$

Dans ces conditions, les probabilités des groupes d'éventualités 1 et 2 sont respectivement :

$$(10) \quad \begin{aligned} \omega_a^{(n+1)}(X) &= K^M(X, M) + \int_0^M K(X, Y) K^M(Y, M) dY + \dots \\ &\quad + \int_0^M K^{(n-1)}(X, Y) K^M(Y, M) dY \\ \omega_b^{(n+1)}(X) &= K^0(X, O) + \int_0^M K(X, Y) K^0(Y, O) dY + \dots \\ &\quad + \int_0^M K^{(n-1)}(X, Y) K^0(Y, O) dY. \end{aligned}$$

L'application de la propriété fondamentale des espérances mathématiques montre alors que l'on a :

$$(11) \quad S_{n+1}(X) = a \varpi_a^{(n-1)}(X) + b \varpi_b^{(n-1)}(X) + \int_0^M K^{(n)}(X, Y) s_1(Y) dY.$$

Si n augmente indéfiniment, $s_{n+1}(X)$ tend vers une limite indépendante des conditions finales :

$$(12) \quad S_0(X) = a \varpi_a(X) + b \varpi_b(X).$$

* * *

Ces résultats peuvent être aisément retrouvés par application de la théorie générale. La relation de récurrence des espérances marginales s'écrit :

$$(13) \quad S_{n+1}(X) = \int_0^M K(X, Y) S_n(Y) dY + a K^M(X, M) + b K^0(X, 0).$$

Elle se transforme à la limite en l'équation de Fredholm non homogène :

$$(14) \quad S_0(X) = \int_0^M K(X, Y) S_0(Y) dY + a K^M(X, M) + b K^0(X, 0).$$

Le développement direct résultant des formules (10) et (12) est celui qu'on obtient en appliquant à cette équation de Fredholm la méthode d'itération. En particulier, les probabilités $K^{(n)}(X, Y)$ coïncident avec les noyaux réitérés.

* * *

Je terminerai l'étude du cas linéaire par quelques remarques :

1° Le processus d'itération des probabilités des états successifs du réservoir étant déjà linéaire dans le cas général, nos hypothèses particulières n'apportent ici aucune simplification substantielle. On trouve, toutefois, une complémentarité remarquable entre la loi des états et celle des lâchures du réservoir;

2° Les résultats de la théorie générale conduisent à étudier, par voie de récurrence, non l'espérance totale $S_{n+1}(X)$, mais la différence $S_{n+1}(X) - nW$. La relation de récurrence trouvée se transforme à la limite en une équation intégrale singulière avec second membre, pour laquelle on vérifie aisément que la condition d'existence des solutions est remplie;

3° La constante W qui mesure la valeur, rapportée à une période, de l'exploitation réglée par le réservoir, a pour expression évidente :

$$(15) \quad W = c q_0 + a A_1 + b B_1,$$

A_1 et B_1 désignant respectivement les valeurs probables, en régime limite, des volumes des excédents et défaillances.

On a de même, pour l'exploitation naturelle (ou au fil de l'eau) :

$$(16) \quad W_0 = c q_0 + a A_0 + b B_0.$$

Comme on a d'autre part :

$$(17) \quad q_0 + A_0 + B_0 = q_0 + A_1 + B_1.$$

On en déduit :

$$(18) \quad W - W_0 = (b - a)(A_0 - A_1) = (b - a)(B_1 - B_0).$$

Le rôle du réservoir est de transformer, par le jeu du stockage, des excédents en lâchures garanties, en diminuant d'autant l'importance des défaillances.

La valeur de la régulation est le produit de la valorisation ainsi obtenue $(b - a)$, pour la quantité d'eau valorisée $(A_0 - A_1 = B_1 - B_0)$.

APPLICATIONS ET EXTENSIONS

La théorie précédente a déjà fait l'objet d'assez nombreuses applications d'ordre industriel.

On rencontre dans la plupart de ces applications, des circonstances plus complexes que celles dont j'ai fait état jusqu'à présent.

La première de ces complications tient au fait que la théorie précédemment développée s'applique au cas d'une usine-réservoir à hauteur de chute constante, alors que les usines-réservoirs sont en général à hauteur variable. Si, dans certains cas, les variations de hauteur de chute peuvent être négligées (usines de lac des Pyrénées et des Alpes), il n'en est pas de même pour les grandes usines-barrages (Sarrans sur la Truyère, Sautet sur le Drac).

L'équation de conservation des volumes fait intervenir des quantités d'eau, les utilités et les espérances des quantités d'énergie et le rapport $\frac{\text{énergie}}{\text{eau}}$ dépend de la hauteur de chute, ainsi que d'autres facteurs comme le rendement. Les principes de la théorie ne sont pas affectés, mais les calculs deviennent inextricables, si l'on ne se contente pas d'approximations.

La deuxième difficulté pratique provient de ce qu'on n'a pas toujours affaire à une usine-réservoir unique, mais à des complexes comprenant une ou plusieurs usines-réservoirs, une ou plusieurs usines au fil de l'eau. Là encore, les principes de la théorie sont applicables. Dans le cas de la conjugaison d'une usine-réservoir et d'une usine au fil de l'eau, on a toutefois à remplacer la loi de probabilité simple $k_n(x)$ par une loi liée $k_n(x, y)$ qui fait intervenir les apports naturels x, y , aux deux usines et qui caractérise une corrélation spatiale et non plus temporelle comme celles étudiées dans la première partie de cet exposé. De même la fonction d'utilité $U_n(q)$ doit être remplacée par $U_n(q, y)$, et l'on doit faire intervenir, en outre, le fait que l'énergie au fil de l'eau a la priorité sur l'énergie stockable.

Dans le cas de conjugaison de K usines-réservoirs, la théorie des espérances marginales fournit de nouveau la clef du problème.

Il y a une espérance totale unique $S(X_1, X_2, \dots, X_K)$, ayant pour dérivés partielles les K espérances marginales $\frac{\partial S}{\partial X_1}, \frac{\partial S}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial X_K}$ et l'exploitation optimum doit se faire autant que possible à égalité d'espérances marginales.

Mais le nombre des régimes possibles n'est plus de six comme dans le cas d'une usine-réservoir unique; il peut atteindre un chiffre beaucoup plus élevé, de sorte que les calculs, pour être menés jusqu'au bout, exigent là encore des simplifications préalables. Aucune règle générale ne peut être formulée quant à cette schématisation des données. Il faut faire intervenir l'esprit de finesse, le sens des ordres de grandeur, l'intuition basée sur les faits.

* * *

Dans un autre ordre d'idées, il faut signaler que les problèmes qui se posent à l'industrie électrique sont rarement des problèmes d'optimum pur, mais des *problèmes mixtes d'optimum et de garantie*. Ces problèmes *mixtes* interviennent toutes les fois qu'on n'est pas certain de pouvoir desservir en toute éventualité la totalité de la clientèle au moyen de l'ensemble des sources de production dont on dispose, autrement dit lorsqu'il y a *risque de défaillance*.

Dans ce cas, on impose *a priori* à l'exploitation une *condition de garantie*, consistant à faire en sorte que le risque de défaillance soit inférieur à un nombre ϵ donné d'avance (par exemple 1 année sur 20, sur 30, sur 50...), et on cherche l'exploitation optimum dans la classe des exploitations satisfaisant à la condition de garantie.

On est ainsi amené à résoudre le problème en deux temps :

- détermination de la classe des exploitations garanties;
- recherche de l'optimum dans cette classe.

La première partie du problème est devenue classique depuis les travaux de MM. Gibrat et Bourla (1); la seconde partie se résout par une adaptation facile de la méthode des espérances marginales.

Il resterait à examiner si la notion même de problème mixte correspond à une réalité profonde, ou si elle ne découle pas simplement de l'impuissance où nous sommes de définir les utilités véritables, notamment de mesurer le préjudice social causé par les défaillances d'un service public essentiel comme la production et la distribution d'électricité. Je me borne à signaler la question qui déborde le cadre de cet exposé.

INTRODUCTION DES DÉBITS EN CHAÎNE

La théorie précédente constitue un ensemble cohérent et à peu près achevé dans son principe sinon dans ses applications. Elle a toutefois le défaut grave de reposer sur un schéma de probabilité des débits s'écartant quelque peu du réel.

La tâche qui s'impose maintenant est d'introduire dans la théorie des espérances marginales, un schéma plus proche de la réalité, qui sera naturellement le schéma des débits en chaîne.

L'introduction de chaînes discontinues du type (1) ne paraît pas devoir soulever de difficulté essentielle. Elle nous affranchit au contraire de la servitude qui nous obligeait précédemment à fixer la durée de la période élémentaire au voisinage du temps de corrélation des débits. Dorénavant, nous pouvons choisir cette durée librement, en nous rapprochant des usages des exploitants. En revanche, les espérances à une époque donnée ne sont

(1) GIBRAT (Articles déjà cités). — BOURLA, *Méthodes d'exploitation des réservoirs saisonniers annexés aux grandes centrales hydroélectriques* (Rapport présenté au Congrès du Syndicat professionnel des producteurs et distributeurs d'énergie électrique, juin 1938).

plus fonction du seul volume accumulé X , mais dépendent aussi du volume des apports naturels x pendant la dernière période connue, puisque ce volume influence maintenant les apports naturels futurs. De ce fait, le processus de récurrence ne porte plus sur des courbes $s_n(X)$, mais sur des surfaces $s_n(X, x)$, ce qui alourdit notablement les calculs.

Enfin, ce nouveau schéma de probabilités nous conduit à nous poser une question également nouvelle : l'exploitant établit-il son programme de vente de la période sur le vu des apports réels supposés connus, ou sur le vu des apports probables liés, compte tenu des apports de la période précédente? La seconde hypothèse, plus conforme à la réalité, mais d'application plus complexe, laisse subsister au cours de la période un résidu d'aléa pouvant conduire à des rectifications de programme. Il faut alors tenir compte du fait que l'utilité d'une fourniture dépend du préavis sous lequel cette fourniture est annoncée.

* * *

L'introduction de chaînes continues, représentées par une équation différentielle stochastique du type (2) change profondément les bases mathématiques du problème. On est conduit à des équations aux dérivés partielles du second ordre du type parabolique présentant des particularités qui, au moins *a priori*, en rendent la solution fort ardue. Même, dans les hypothèses du *cas linéaire*, on a affaire pour déterminer l'espérance marginale limite ou stationnaire $s(X, x)$ à une *équation parabolique singulière* :

$$(19) \quad \beta^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + (x - q_0) \frac{\partial s}{\partial x} - \alpha (x - m) \frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

m désignant la valeur probable du débit naturel, q_0 le débit souscrit et α et β étant deux constantes.

Une analyse assez délicate permet de déterminer les valeurs de s au contour; mais il s'agit ici d'un contour discontinu, comprenant deux tronçons situés de part et d'autre de la ligne singulière ($x = q_0$), et il faut déterminer à partir de chaque tronçon deux solutions se raccordant sur la ligne singulière (problème du raccordement de Gevrey) (1).

CONSIDÉRATIONS FINALES

La théorie précédente a été développée dans le cadre de l'hydroélectricité et présentée en langage de débits et de réservoirs.

Mais elle a manifestement un caractère plus général et s'applique, moyennant les adaptations convenables, à la régulation de toute autre sorte de flux par un stock, c'est-à-dire à l'un des mécanismes essentiels de la vie économique : celui des arbitrages dans le temps, des transferts entre le présent et l'avenir, plus précisément entre le présent et un avenir aléatoire.

On peut même, avec une certaine hardiesse d'esprit, concevoir des vues analogues débordant le domaine de l'économie et s'étendant, par exemple, à celui de la physiologie.

Je voudrais, à cet égard, citer quelques lignes de M. Pierre Vendryès, qui ont éveillé en moi une profonde résonance.

« La mise en réserve est une fonction universelle. Tout être vivant lui doit ses possibilités de survie... La régularité des événements physiologiques que permet la stabilité du sang est une victoire sur les irrégularités des événements aléatoires... L'être vivant joue contre le milieu et gagne grâce à ses réserves... Les régulations sont contraléatoires. »

On voit ainsi s'esquisser avec des perspectives très amples, le problème très général de la *régulation du hasard*. Je n'ai pu en donner, ici, qu'un bref aperçu, au cours duquel j'ai posé sans doute plus de questions que je n'ai apporté de réponses. Mon but sera toutefois atteint si j'ai pu éveiller l'intérêt sur ce champ de recherches, et si, ayant eu des devanciers, je puis espérer avoir des continuateurs.

Pierre MASSÉ.

DISCUSSION

M. DIVISIA. — J'ai été très vivement intéressé par la communication de M. Massé, non seulement en raison de la nature du sujet et de la manière dont il l'a traité, mais aussi, par sa portée générale, touchant la question si importante en maints domaines, de la constitution et du jeu des réservoirs.

Je m'associe notamment à ce qu'a dit notre conférencier des travaux sur les réserves physiologiques publiés par le Dr Vendryès, dont l'ouvrage : *Vie et Probabilité* m'a paru, à bien des égards, de tout premier plan.

(1) GEVREY, *Sur les équations aux dérivés partielles du type parabolique (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1913-1914).*

La même question se pose aussi en économique, où elle touche directement à la fonction d'épargne, et je pense que des études comme celle de M. Massé pourront conduire, sur ce point, à des résultats importants dans la science économique générale.

Je voudrais poser deux questions à M. Massé :

1° Dans son exposé, il a été amené à faire intervenir la fonction d'utilité, et à mentionner, à ce sujet, que son expression comporte l'introduction d'une fonction arbitraire. Il m'intéresserait de savoir si cette considération de la fonction arbitraire d'utilité classique en économique, lui a été imposée par la nature de son sujet, ou s'il l'a mentionnée simplement dans le souci d'être rigoureux et conforme à la théorie économique. A première vue, il semble que ce qui intéresse l'hydraulicien, en ce qui concerne l'utilité des KWH produits, c'est uniquement leur prix commercial qui, assurément, varie avec l'état du marché, et notamment, avec le degré d'abondance de l'énergie offerte, mais ne comporte pas de fonction arbitraire;

2° Les travaux si précis, dont M. Massé nous a fait l'exposé, doivent conduire à une exploitation des réservoirs plus serrée au point de vue économique que l'exploitation empirique actuelle. Il m'intéresserait de savoir si les études faites comportent, dès à présent, la perspective d'une augmentation du rendement commercial ou financier des installations, et, dans l'affirmative, s'il est possible de connaître un ordre de grandeur de cette amélioration de rendement.

M. MASSÉ. — M. Divisia a soulevé la question du caractère arbitraire de la fonction d'utilité.

On constate, en effet, dans ma théorie, que la règle d'exploitation optimum ne change pas quand on fait varier, d'une manière quelconque, la fonction d'utilité, sous la seule réserve que l'utilité marginale reste une fonction décroissante du débit transmis. Ce théorème est évident si l'on observe que les espérances sont des moyennes d'utilités pondérées par des coefficients de probabilité et que, dès lors, un changement d'échelle des utilités et des espérances est sans effet sur les résultats de la théorie.

Ce théorème est intéressant à mentionner, parce qu'il a un intérêt économique d'ordre général; mais il n'est pas imposé par la nature du sujet, l'utilité ayant toujours pour l'exploitant d'une chute d'eau une définition précise et certaine (recette de contrat, économie de charbon, etc...).

Sur le second point, je ne dispose pas de résultats numériques, la théorie nouvelle étant trop récente et la période actuelle trop troublée pour que des applications concluantes aient été possibles. J'estime qu'en période normale, on devrait arriver à un gain de l'ordre de 1 à 2 % par rapport aux méthodes d'exploitation antérieures (ce gain ne se dégageant évidemment qu'à la longue sur la moyenne de plusieurs années). Un gain plus important, de l'ordre peut-être de 10 %, pourra être obtenu en appliquant des méthodes du même ordre au choix judicieux des investissements nouveaux à réaliser.

M. GIBRAT. — Je n'ai pas, Monsieur le Président, beaucoup à ajouter, M. Massé ayant eu la gentillesse de me mettre au courant de ses travaux au fur et à mesure de leur avancement. On ne peut qu'insister sur leur grand intérêt pratique, d'une part l'intuition n'est jamais aussi sûre que lorsqu'elle s'appuie sur des raisonnements. D'autre part, il était nécessaire de préciser les concepts empiriques imaginés d'une manière confuse par les exploitants; les travaux de M. Massé sont donc fondamentaux; il m'est agréable de pouvoir ainsi mesurer le grand chemin parcouru depuis mes premières réflexions sur le sujet, il y a quinze ans.

Nous poursuivons, à la Société hydrotechnique de France, un travail d'équipe assez complet sur l'hydrologie statistique. Nous venons de terminer toute une série de travaux sur le modèle hydraulique, c'est-à-dire sur la possibilité de représentation de l'hydraulicité générale française par les débits de quelques usines convenablement choisies; ils nous ont entraînés à quelques études théoriques assez délicates que nous publierons à la première occasion favorable.

D'autre part, nous avons mis en chantier une série d'études sur la succession des jours secs et des jours humides qui nous permettent de penser que ce phénomène relève des chaînes multiples de Markoff. Il y a, dans tous ces travaux, matière à réflexions. Ici encore les Français sont nettement en tête de ce genre de recherches.

M. MASSÉ. — Les intéressantes indications données par M. Gibrat sur le travail d'équipe entrepris à la Société hydrotechnique de France, tant sur la définition d'un indice de productibilité correct qu'un prolongement des études de M. Halphen sur les chaînes, tendent à montrer que le schéma de chaîne simple, initialement choisi comme hypothèse de travail, ne pourra sans doute pas être conservé, tout au moins pour les pluies. Pour les débits, la question est moins claire et je crois qu'il nous faut prendre un délai de réflexion avant de conclure définitivement.

M. DECUGIS. — M. Massé voudrait-il nous indiquer si des études analogues aux siennes ont été faites dans les pays étrangers? L'exploitation de l'énergie hydraulique est très développée, par exemple, en Suisse et aux États-Unis. Les techniciens de ces pays ont-ils songé à appliquer des méthodes de prévision des variations de débit des chutes d'eau?

M. MASSÉ. — M. Decugis a posé la question des études analogues qui auraient pu être entreprises en Suisse et aux États-Unis.

Les techniciens du premier de ces deux pays ont une longue expérience de l'exploitation des réservoirs. Ils ont notamment abordé ce problème dans deux études d'ensemble d'un

haut intérêt publiées par le Service fédéral des Eaux (Étude économique sur l'approvisionnement du pays en énergie pendant l'hiver. Berne, 1928; *Das Leistungs und Arbeitsvermögen der schweizerischen wasserkraft-anlagen*, Berne, 1933). J'ai l'impression toutefois que les études de nos voisins ont été moins poussées que les nôtres quant à la recherche des principes fondamentaux et à la mise en œuvre du calcul des probabilités. Les données suisses sont, d'autre part, différentes des données françaises, puisqu'on a affaire à une production presque exclusivement hydraulique qui s'oppose à notre économie électrique mixte, à la fois hydraulique et thermique.

Quant aux États-Unis, je ne connais pas — et pour cause — les travaux récents qui ont pu y être effectués. J'espère qu'un proche avenir comblera cette lacune.
