

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JSFS

Bibliographie

Journal de la société statistique de Paris, tome 83 (1942), p. 151-160

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1942__83__151_0

© Société de statistique de Paris, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VI

BIBLIOGRAPHIE

Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, par M. Maurice FRÉCHET.

Les recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités figurant dans le fascicule III (t. I) du grand traité de calcul des probabilités de M. E. Borel ont été exposées par M. Maurice Fréchet dans deux importants ouvrages intitulés respectivement (Généralités sur les probabilités. — Variables aléatoires) et (Méthode des fonctions arbitraires. — Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles).

C'est ce deuxième ouvrage dont nous allons présenter à nos collègues de la Société de Statistique de Paris un compte rendu, en nous efforçant de faire apparaître — dans ce domaine spécial du calcul des probabilités — les étapes parcourues jusqu'en 1938; notre tâche nous est grandement facilitée par l'auteur, qui n'a pas craint, au cours de sa rédaction, d'entrer dans les détails, tout en mettant toujours en évidence des idées essentielles, et qui a eu de plus l'heureuse idée d'adjointre à son ouvrage une série de notes complémentaires d'ordre mathématique en vue d'en faciliter la lecture.

Qu'il nous soit permis de signaler que M. Fréchet n'a pas seulement réussi à perfectionner un certain nombre de points de la théorie des événements en chaîne, mais encore qu'il a résolu certains problèmes s'y rattachant pour lesquels on n'avait pas obtenu jusqu'ici des résultats définitifs; son ouvrage plein de substance, riche d'idées, lui fait le plus grand honneur.

LA MÉTHODE DES FONCTIONS ARBITRAIRES DE POINCARÉ. — La première partie est consacrée à l'examen de la méthode des fonctions arbitraires, grâce à laquelle le génial Poincaré qui en est le créateur, a apporté l'une des contributions les plus importantes aux progrès modernes de la théorie des probabilités.

Rappelons tout d'abord comment Poincaré, étudiant le problème de la roulette a imaginé la méthode des fonctions arbitraires. Qu'entend on par problème de la roulette : un cercle mobile autour de son centre porte sur sa circonférence des arcs alternativement rouges et noirs, ayant respectivement pour longueur R et N, en même nombre n , une impulsion donnée au hasard fait arrêter devant un repère fixe un arc rouge ou un arc noir.

Le problème de la roulette consiste dans la détermination de la probabilité p_n pour que ce soit une division rouge, par exemple, ou tout au moins dans l'étude du comportement de p_n pour n très grand.

M. Fréchet signale qu'avant Poincaré, on se serait contenté de dire : « Si l'impulsion est assez vive, deux arcs égaux, unicolores ou bariolés, d'un seul tenant ou non, ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère et cela étant, d'en déduire la solution $p_n = \frac{R}{R+N}$.

Cette hypothèse est assez exacte si l'on exclut les petites impulsions de la roue; elle doit être rejetée dans le cas extrême où les impulsions sont petites, et où les longueurs R et N sont assez grandes.

Pour tenter de se rendre compte de ce qui se passe dans les cas intermédiaires, Poincaré fait une hypothèse infiniment plus générale que la précédente; il suppose que les probabilités que deux arcs α et β s'arrêtent devant le repère sont encore proportionnelles à α et β , mais seulement lorsque les deux arcs sont petits et voisins, et, par suite que ces probabilités sont de la forme $k\alpha$ et $k\beta$, si α et β sont petits; il admet en outre que le coefficient k ne dépend que de l'arc de rotation, ce qui revient à dire qu'il y a une probabilité élémentaire $f(\Theta) d\Theta$ pour que l'arc de rotation soit compris entre Θ et $\Theta + d\Theta$.

Poincaré supposait la fonction $f(\Theta)$ dérivable; M. Borel a obtenu ensuite le même résultat que Poincaré en supposant seulement $f(\Theta)$ continue. Quant à M. Fréchet, il s'est contenté d'admettre que la fonction $f(\Theta)$ est intégrable.

En définitive, on trouve que la limite de p_n , quand n croît indéfiniment, a pour valeur $\frac{R}{R+N}$, alors que l'adoption de l'hypothèse initiale sur l'impulsion, conduisait à dire que le rapport $\frac{R}{R+N}$ était une valeur de p_n indépendante de n .

M. Fréchet fait remarquer à juste titre que l'intérêt que l'on a à n'admettre pour $f(\Theta)$ que son intégrabilité, consiste à mettre en évidence ce point particulier que l'hypothèse ainsi faite sur $f(\Theta)$ porte sur la forme attribuée à la répartition des probabilités qui sert de point de départ, c'est à dire qu'il existe une densité de probabilité.

Au cours du chapitre I, l'auteur examine plusieurs problèmes (mélange des urnes, battage des cartes, mouvements browniens discontinus, événements en chaînes) dont les solutions dépendent toutes du calcul des probabilités; ces divers problèmes peuvent être traités par les mêmes méthodes, et ne sont, en définitive, que des cas particuliers d'un *problème mathématique plus général* qui sera étudié ultérieurement.

LE PRINCIPE ERGODIQUE. — En définitive, on se propose de vérifier dans tous ces problèmes un principe général énoncé d'abord par Boltzmann, sous le nom de principe ergodique et dans une forme applicable seulement à la théorie cinétique des gaz, principe qui a vu son sens et son champ d'application considérablement élargis.

Le principe ergodique, qui doit être précisé dans chaque cas particulier, revient à dire que l'effet capricieux d'une opération dépendant du hasard se trouve régularisé de plus en plus par une répétition suffisante de cette opération. La difficulté à surmonter consiste à préciser dans chaque cas particulier les circonstances, « d'ailleurs toujours très générales », dans lesquelles le principe ergodique est vérifié, et, par suite, à faire apparaître le cas singulier où ce principe se trouve en défaut; dans ce cas, l'on dit que l'on a résolu le premier problème.

Rappelons à propos de la régularisation, qu'il est un second problème qui n'a été abordé que depuis peu de temps, et qui consiste à préciser le mode, la rapidité et même l'expression de la régularisation.

Le premier problème revient à montrer qu'une certaine probabilité dépendant de l'état initial et de l'état final de plusieurs variables et du nombre n des observations tend, — lorsque ce nombre croît indéfiniment, — vers une probabilité limite indépendante de l'état initial.

On est ainsi conduit à voir combien la liaison entre ce premier problème et celui de la roulette est intime, et à se rendre compte de la fécondité de la méthode des fonctions arbitraires de Poincaré.

LA CONCEPTION DU HASARD PAR POINCARÉ. — LE POINT DE VUE DE MARKOFF SUR UN MODE DE GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS CLASSIQUES DES ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS ET DES VARIABLES INDÉPENDANTES. — Les divers problèmes énoncés ci dessus : mélange des urnes, battage des cartes, mouvements browniens rentrent dans un type général qui a été étudié systématiquement par Markoff. Poincaré considère que le hasard serait dû, soit à l'action de petites causes susceptibles de produire de grands effets, soit à l'action de causes très complexes, et chiffre l'effet de ces deux circonstances dans les problèmes que nous venons de signaler; il ajoute d'ailleurs, au cours même de leur résolution, que les méthodes employées peuvent être utilisées dans d'autres problèmes de philosophie naturelle.

Pour Markoff, il s'agit tout d'abord de généraliser les propriétés classiques des événements indépendants et des variables indépendantes

Mais l'on peut dire avec M. Fréchet « que si l'on ne sait absolument rien sur la dépendance que l'on veut introduire, une telle généralisation serait impossible, ou tout au moins se réduirait à un très petit nombre de résultats. Il s'agissait donc d'imaginer une dépendance assez lâche pour que l'on puisse lui étendre un grand nombre de résultats obtenus dans le cas de l'indépendance. Il fallait, d'autre part, que cette sorte de dépendance se rencontrât effectivement dans les applications, et en même temps fût assez générale pour se présenter dans des exemples de natures très diverses ».

C'est grâce à sa belle conception des phénomènes en chaîne que Markoff a effectué les généralisations qu'il avait en vue pour les événements en chaîne de l'espèce analysée plus loin, et étudié spécialement le cas où les variables et la succession des épreuves forment des suites discontinues, cas qui se prête à des extensions relatives à des suites continues d'états et d'épreuves.

Ne considérant que le cas des chaînes *simples et constantes*, M. Fréchet examine dans la section I du chapitre II le cas d'une *suite discrète d'épreuves* et dans la section II du même chapitre le cas d'une *suite continue d'épreuves*.

LES CHAÎNES SIMPLES ET CONSTANTES DE MARKOFF. — LES SUITES CONTINUES D'ÉPREUVES VUES PAR M. KOLMOGOROFF. — Avant d'aborder toute partie technique, définissons ce que l'on entend avec Markoff par chaînes simples et constantes; pour cela, nous considérerons avec l'auteur certains événements incompatibles E_1, E_2, \dots, E_r , en nombre fini, et dont, à chaque épreuve, l'un d'eux se produit nécessairement.

Supposons maintenant que la probabilité que E_h se produise, dépend de ceux des événements qui se sont produits dans les épreuves précédentes, et attachons nous au cas où la probabilité de chaque événement E_k est déterminée lorsque l'on connaît seulement celui E_h des événements E_1, E_2, \dots, E_r qui s'est produit à la seule épreuve précédant immédiatement l'épreuve considérée.

On désignera par p_{hk} la probabilité que l'événement E_k ait lieu quand E_h a eu lieu à l'épreuve précédente.

Dans le cas de suites continues d'épreuves, on peut avec M. Kolmogoroff considérer E_1, E_2, \dots, E_r comme les états possibles d'un certain système S; p_{hk} sera la probabilité — déterminée par les indices h et k — pour que le système passe en une seule épreuve de l'état E_h à l'état E_k .

La détermination des p_{hk} étant admise, on procède facilement au calcul de la probabilité $P_{hk}^{(n)}$, pour que le système S passe en n opérations de l'état E_h à l'état E_k , puis à celui de $P_{hk}^{(n+1)}$.

$$(I) P_{hk}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^r P_{hj}^{(n)} P_{jk}^{(n)}, \text{ ou encore à celui de } P_{hk}^{(n+1)}$$

$$(I_1) P_{hk}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^r P_{hj}^{(n)} p_{jk}, \text{ avec } P_{hk}^{(1)} = p_{hk}.$$

Il est évident que le système partant de E_h se trouve nécessairement après n épreuves dans l'un des états E_k , il résulte de là que l'on a :

$$(T) \sum_{k=1}^r P_{hk}^{(n)} = 1, \quad \text{et } (T_1) \sum_k p_{hk} = 1.$$

Si l'on conçoit fort bien que l'on puisse calculer successivement les $P_{hk}^{(n)}$ grâce à la formule (I₁), on s'aperçoit que leur comportement — quand n croît — devient difficile dans les cas signalés par Markoff; aussi, ce grand analyste, grâce à des considérations simples basées sur le principe de la moyenne a-t-il surmonté cette difficulté.

Supposant l'indice k fixe, on voit alors que la formule

$$P_{hk}^{(n)} = \sum_j p_{hj} P_{jk}^{(n-1)}, \text{ avec } \sum_j p_{hj} = 1$$

revient à considérer $P_{hk}^{(n)}$ comme une moyenne pondérée des $P_{jk}^{(n-1)}$. Ceci étant, si $P_k^{(n)}$ et $p_k^{(n)}$ représentent respectivement le plus grand et le plus petit des nombres $P_{ik}^{(n)}$, avec ($i = 1, 2, 3, \dots, r$), on remarque que l'on se trouve en présence de deux suites monotones et bornées :

$$p_k^{(1)} \leq p_k^{(2)} \leq \dots \leq p_k^{(n)} \dots$$

$$P_k^{(1)} \geq P_k^{(2)} \geq \dots \geq P_k^{(n)}.$$

qui sont convergentes, et qui ont des limites respectives p_k et P_k , avec $p_k \leq P_k$.

On est alors conduit à se demander dans quel cas les limites p_k et P_k sont toutes égales deux à deux, c'est à dire dans quel cas chacun des $P_{hk}^{(n)}$ a une limite P_k indépendante de l'état initial et, par suite, du premier indice h ; c'est ce cas que l'on appelle avec M. Hadamard le cas régulier.

Le cas régulier ne peut se présenter que si parmi les tableaux $D^{(n)}$ des $P_{hk}^{(n)}$:

$$D^{(n)} = \left\| \begin{array}{cccc} P_{11}^{(n)}, P_{21}^{(n)}, \dots, P_{r1}^{(n)} \\ \dots \\ P_{1i}^{(n)}, P_{2i}^{(n)}, \dots, P_{ri}^{(n)} \\ \dots \\ P_{1r}^{(n)}, P_{2r}^{(n)}, \dots, P_{rr}^{(n)} \end{array} \right\|$$

il existe au moins un $D^{(n)}$, dont une ligne au moins a ses éléments (correspondants à un second indice l , c'est à-dire à un même état final E_l) différents de zéro.

A ce cas, l'on rattache le cas dit *positivement régulier*, dans lequel les limites P_k non seulement existent, mais encore sont toutes positives; pour que l'on soit effectivement dans le cas positivement régulier, il faut que l'un au moins $D^{(n)}$ des tableaux $D^{(n)}$ ait tous ses éléments positifs. Tous les tableaux $D^{n_0 + \lambda}$, avec λ positif entier auront tous leurs éléments positifs.

Nous avons mis en évidence l'existence d'une limite de $P_{hk}^{(n)}$ quand n croît indéfiniment, il faut maintenant procéder à la détermination de cette limite que l'on désigne par P_{hk} ; ces limites satisfont aux relations

$$P_{hk} = \sum_j P_{hj} p_{jk}, \text{ et } \sum_j P_{hj} = 1.$$

Comme dans le cas *régulier*, les P_{hk} se réduisent aux P_k , on est conduit immédiatement aux deux relations suivantes :

$$P_k = \sum_j P_j p_{jk}, \text{ et } \sum_{j=1}^r P_j = 1.$$

L'auteur passe alors au cas de la limite *constante*, en recherchant si les limites de $P_{hk}^{(n)}$, qui, dans le cas régulier, sont indépendantes de l'état initial E_h , pourraient être aussi indépendantes de l'état final E_k ; il nous montre facilement que la *limite commune P est égale à $\frac{1}{r}$* , et que l'on se trouve dans le cas *positivement régulier*.

En définitive, pour que les $P_{hk}^{(n)}$ tendent vers une limite indépendante de k et de h , il faut et il suffit que la condition $\sum_{j=1}^r p_{jk} = 1$, soit vérifiée, et qu'il existe au moins un tableau $D^{(n)}$ dont une ligne au moins soit positive.

Le cas où les $P_{hk}^{(n)}$ convergent vers une limite indépendante de l'état initial E_h et de l'état final E_k est désigné par M. Fréchet cas *le plus régulier*.

L'auteur rappelle, à propos du battage des cartes, que si les opérations du battage sont telles qu'elles ne s'opposent pas au passage d'une carte de rang quelconque à un rang quelconque après une seule opération, dans ces conditions, les probabilités de passage d'un rang h à un rang k au bout de n opérations tendent à s'uniformiser; le signale ensuite que le joueur peut avoir des habitudes telles que les opérations de battage ne conduisent pas à une uniformisation, c'est à dire au cas régulier.

Il nous signale ensuite une autre façon de présenter le problème du battage des cartes conçue par Poincaré; on peut — avec ce grand géomètre — étudier les changements de l'ordre dans l'ensemble des cartes, au lieu de porter son attention sur chacune des cartes.

Dans l'hypothèse où les habitudes du joueur sont indépendantes de la nature des cartes qui figureraient initialement aux rangs 1, 2,..... N, (N étant le nombre des cartes du jeu), et où les probabilités de passer d'au moins une permutation à une autre quelconque sont toutes positives (au moins après un nombre fini d'opérations), ces probabilités tendent vers un même nombre égal à $\frac{1}{N!}$, quand le nombre des opérations croît indéfiniment.

M. Fréchet revient au cas général du problème de Markoff, c'est à dire à celui où la condition $\sum_k P_{hk}^{(n)} = 1$, n'est pas nécessairement vérifiée; il nous montre alors que si $P_{hk}^{(n)}$ tend vers une limite déterminée P_{hk} lorsque n croît indéfiniment, $P_{h1}, P_{h2}, \dots, P_{hr}$ sont, pour chaque valeur de h , un système de solutions des équations (E).

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} x_k = \sum_j x_j p_{jk}, \text{ avec } (k = 1, 2, \dots, r), \\ \sum x_j = 1, \end{array} \right.$$

en rappelant tout d'abord que ce système (E) de $(r + 1)$ équations à r inconnues se ramène à un système de r équations.

L'auteur signale ce point important que dans le cas régulier, le système des équations (E) n'a qu'un seul système de solutions, et fait observer que cette remarque permet de déterminer les quantités $s_{ik} = \sum_{n=1}^{+\infty} (P_{ik}^{(n)} - P_k)$, qui sont en définitive les solutions $(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{rr})$ d'un système d'équations linéaires :

$$(E') \left\{ \begin{array}{l} z_k - (p_{ik} - P_k) = \sum_j z_j p_{jk}, \text{ (avec } k = 1, 2, \dots, r), \\ \sum_j z_j = 0, \text{ avec } z_j = s_{ij} = \sum_{\mu=1}^{+\infty} (P_{ij}^{(\mu)} - P_j), \end{array} \right.$$

système (E') qui se réduit comme le système (E) à r équations.

Considérant d'une part la quantité

$$\mathcal{R}_{ik}^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} [P_{ik}^{(i)} - P_k], \text{ et d'autre part la différence } \mathcal{R}_{ik}^{(n)} - s_{ik} = \mathcal{E}_{ik}^{(n)}$$

M. Fréchet étudie la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{ik}^{(n)}$, et montre qu'elle est absolument convergente; ces considérations établies, il fait une application des principes exposés au mélange des urnes.

RETOUR SUR LE PROBLÈME DU MÉLANGE DES URNES. — Le problème du mélange des urnes a été posé pour la première fois par Bernoulli sous une forme particulière. Avec Bernoulli, l'on considère deux urnes U et V contenant chacune un certain nombre de boules; on tire au hasard simultanément une boule de U et une boule de V, et l'on place la première dans V et la seconde dans U, et l'on répète n fois cette opération. Les boules étant les unes blanches, les autres noires, il s'en suit que la composition de chaque urne peut être modifiée à chaque opération, et qu'il y a un nombre fini de compositions possibles $C_0, C_1, C_2, \dots, C_r$ de l'ensemble des deux urnes. Pour une composition initiale C_h , il y a une probabilité $P_{hk}^{(n)}$, pour que l'on obtienne après la n^{e} opération la composition C_k .

Le problème posé revient à étudier ce que devient cette probabilité $P_{hk}^{(n)}$, lorsque n croît indéfiniment, ainsi que l'influence de la composition initiale sur cette même probabilité.

Laplace a étudié ce problème dans le cas particulier où les urnes U et V contiennent le même nombre de boules supposé très grand, et où dans l'ensemble des deux urnes, il y a autant de boules blanches et de boules noires.

De l'expression de P_k , dans l'hypothèse où les urnes ont une composition *quelconque*, l'on déduit que la probabilité pour qu'au bout de n opérations, il y ait k boules blanches dans l'urne U tend, quand n croît indéfiniment, vers la probabilité qu'en versant U et V dans une urne W, et en tirant au hasard de W un nombre u de boules égal au nombre *initial* de boules se trouvant dans l'urne U, on trouve k boules blanches parmi les u boules tirées de W.

LA CONCEPTION DE M. HADAMARD RELATIVE A $P_{hk}^{(n)}$. — M. Hadamard a donné à la relation $P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}$, une interprétation mathématique extrêmement intéressante qui trouve son emploi dans le cas plus général des suites continues d'état et permet d'interpréter facilement les probabilités inverses des événements en chaîne qui ont été étudiées successivement par MM. Bernstein et Mihoc, et ensuite à peu près simultanément par MM. Hostinsky et Kolmogoroff; MM. Potocek et Onicescu se sont également occupés de cette question.

Quant au cas assez fréquent dans la nature, où l'on ne peut assigner une origine à la suite des épreuves, c'est-à-dire où l'on peut pratiquement la supposer illimitée dans les deux sens, il a été considéré tout d'abord par M. Kolmogoroff, qui a fait intervenir les probabilités absolues et les probabilités de passage.

VALEUR MOYENNE ET DISPERSION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE. — Passant ensuite à l'étude d'une *variable aléatoire en chaîne* dans le cas régulier, l'auteur s'occupe de la valeur moyenne, et revient au théorème de Laplace relatif au mélange des urnes, *sans supposer cette fois-ci* que les nombres de boules de chaque couleur et de chaque urne sont très grands.

La *dispersion* d'une variable aléatoire quelconque fait l'objet d'une discussion intéressante où se trouvent démontrés les résultats mis en lumière pour la première fois par Markoff. Supposons avec Markoff qu'une variable aléatoire $X(E)$ soit déterminée par le résultat fortuit E d'une épreuve, et que celle-ci amène un certain système S à l'un E_k par exemple des états possibles de S ; si les *probabilités des résultats d'épreuves successives sont en chaîne*, on peut désigner par $Y_h^{(n)} = Y^{(n)}(E_h) = x_i$, la valeur prise par $X(E)$, quand E_i est le résultat de n épreuves à partir de E_h .

Quand n et h sont donnés, la valeur x_i de $Y_h^{(n)}$ n'est alors fixée que par le hasard, mais sa probabilité étant $P_{hi}^{(n)}$, il est facile de déterminer la valeur moyenne :

$$\mathcal{M} Y_h^{(n)} = \overline{Y_h^{(n)}} = \sum_i P_{hi}^{(n)} x_i$$

Dans le cas *régulier*, la limite de $\mathcal{M} Y_h^{(n)}$, quand n croît indéfiniment est égale à $\sum_i P_i x_i = M$. On peut d'ailleurs donner avec Markoff une autre interprétation de M , en faisant intervenir la moyenne arithmétique $A_h^{(n)}$ de $Y_h^{(1)}, Y_h^{(2)}, \dots, Y_h^{(n)}$, et la valeur moyenne $\mathcal{M} A_h^{(n)} = M_h^{(n)}$ de $A_h^{(n)}$.

Si l'on désigne par $\rho_h^{(n)}$ l'écart quadratique moyen de la moyenne arithmétique $A_h^{(n)}$ des n premiers $Y_h^{(i)}$, on voit que :

$$n [\rho_h^{(n)}]^2 = n \mathcal{M} (A_h^{(n)} - M)^2 = n (M_h^{(n)} - M)^2,$$

et que l'on est conduit à étudier la quantité $n (\delta_h)^2 = n \mathcal{N} (A_h^{(n)} - M)^2$, si l'on se trouve dans le cas régulier, car en semblable circonstance $n^2 (M_h^{(n)} - M)^2$ a une valeur finie.

Dans l'hypothèse où les $Y_h^{(n)}$ seraient indépendants, $n^2 (\rho_h)^2$ serait égal à $\sum_{i=1}^n [\mu_h^{(i)}]^2$, et à la limite pour n croissant indéfiniment, $\rho_h^{(n)}$ tendant vers μ , on constaterait que $\rho_h^{(n)}$ serait un infiniment petit équivalent à $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$.

Comme la valeur des $Y_h^{(n)}$ influe sur celle des $Y_h^{(n+1)}$, le résultat précédent ne subsiste plus, et le calcul montre que la valeur limite dans le cas régulier pour $n \rightarrow \infty$ de $n (\rho_h)^2$ est égale à $\sigma^2 = \mu^2 + L$, avec

$$L = 2 \sum_i \sum_j P_i s_{ij} (x_i - M) (x_j - M).$$

L'auteur procède ensuite à la détermination générale des cas où σ est nul, et s'occupe ensuite de la dispersion des fréquences; il traite alors d'une manière complète le problème afférent au mélange des urnes, dans le cas où le nombre des urnes est très grand, puis celui des mouvements browniens, en ne considérant il est vrai qu'un nombre fini d'états alors que Lord Rayleigh a étudié le problème en faisant intervenir un nombre infini d'états possibles.

CONSIDÉRATIONS SUR LA DEUXIÈME MÉTHODE ET LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES $P_{hk}^{(n)}$. — Les résultats obtenus jusqu'ici sont dus en grande partie à Markoff; ils résultent de l'emploi même de la méthode de Markoff. Il y a lieu toutefois de rappeler que ces résultats, qui sont incomplets, ont été très largement prolongés, grâce à une extension judicieuse d'une méthode nouvelle dite de Poincaré, complétée par Romanovsky, qui a pour but d'éviter une série de calculs des $P_{hk}^{(n)}$, ($\nu = 1, 2, \dots$), série qui à première vue pourrait être illimitée.

Au fond, ce qui nous intéresse c'est le comportement asymptotique des $P_{hk}^{(n)}$; or on apportera plus de précision dans l'étude de ce comportement, si l'on détermine l'expression directe des $P_{hk}^{(n)}$ en fonction de n .

A ce propos, l'auteur ayant observé que les méthodes employées faisaient en définitive peu usage de ce que la relation d'itération (I)

$$(I) P_{hk}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{j=r} P_{hj}^{(m)} P_{jk}^{(n)}$$

s'appliquait à des probabilités, il a eu l'ingénieuse idée de les étendre à des cas plus généraux; il a été ainsi conduit à étudier sous le vocable de *deuxième méthode* l'équation d'itération (I) dans le cas général où les quantités qui y interviennent ne sont pas assujetties aux conditions relatives au calcul des probabilités, puis à appliquer les résultats obtenus au cas spécial du calcul des probabilités.

Avant de procéder à la présentation de la deuxième méthode, M. Fréchet rappelle au lecteur qu'il est utile de se reporter à une série de notes figurant à la fin de l'ouvrage, notes relatives à l'étude de systèmes d'équations linéaires récurrentes du premier ordre à coefficients constants qu'il rapproche d'un système d'équations aux différences finies de premier ordre. En effet, si l'on revient à l'équation (I), et si l'on y remplace $P_{jk}^{(n)}$ par $a_{jk}^{(n)}$, qui est une quantité sans relation nécessaire avec le calcul des probabilités, on est conduit au système des r^2 relations :

$$(I_1) a_{jk}^{(m+n)} = \sum_{i=1}^{i=r} a_{ji}^{(n)} a_{ik}^{(m)}, \text{ avec } (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

qui permettent de déterminer de proche en proche les $a_{jk}^{(n)}$ à partir des $a_{ik} = a_{ik}^{(1)}$, supposées entièrement arbitraires.

Il s'en suit que l'on peut considérer les $a_{jk}^{(n)}$ avec ($i = 1, 2, \dots, r$), soit comme les solutions d'un système d'équations aux différences finies du premier ordre :

$$(2) \Delta x_j = \sum_{i=1}^{i=r} A_{ji} x_i(n), \text{ avec } (j = 1, 2, \dots, r), \text{ et où } \Delta x_i(n) = x_i(n+1) - x_i(n),$$

après avoir posé :

$$A_{ji} = a_{ji}, \text{ si } j \neq i, \text{ et } A_{jj} = a_{jj} - 1,$$

soit encore comme les solutions du système d'équations récurrentes :

$$(3) x_j(n+1) = \sum_{i=1}^{i=r} a_{ji} x_i(n), \text{ avec } (j = 1, 2, \dots, r)$$

Si l'on remarque maintenant que le système (2) est analogue au système (4) de r équations linéaires et homogènes du premier ordre à coefficients constants à r inconnues :

$$(4) \quad \frac{dx_j^{(t)}}{dt} = \sum_{i=1}^{i=r} A_{ji} x_i(t), \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

on voit, en invoquant un raisonnement tout semblable à celui utilisé pour la résolution du système (4), que la solution générale s'écrit ainsi qu'il suit :

$$(5) \quad x_j(n) = \sum_{g=1}^{g=r} \mu_g X_{jg}(n), \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

et qu'il suffit de prendre pour les $X_{jg}(n)$, r solutions de la forme.

$$Z_{jg} = (s_g)^n v_{jg}(n), \quad \text{avec } (j = 1, 2, \dots, r),$$

où s_1, s_2, \dots, s_r sont les r racines distinctes ou non de l'équation en s du système (3), avec

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{21}, \dots, a_{r1} \\ a_{12} & , & a_{22} - s, \dots, a_{r2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r} & , & a_{2r}, \dots, a_{rr} - s \end{vmatrix}$$

et où $v_{jg}(n)$ est un polynome en n de degré inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine s_g de $\Delta(s)$.

L'expression générale des solutions du système (I), tel qu'il a été considéré tout d'abord par Poincaré, a permis à M. Romanovsky d'étendre la méthode de Poincaré dans le cas où les racines de l'équation en s sont simples; cette même méthode a été appliquée au cas général où les racines de $\Delta(s) = 0$ sont multiples.

Si l'on se reporte à l'équation d'itération :

$$P_{hk}^{(n)} = \sum_j p_{hj} P_{jk}^{(n-1)},$$

invoquée dès le début de la première partie de ce compte rendu, et à laquelle correspond une certaine équation en s $\Delta(s) = 0$, on remarque immédiatement, en raison de la relation $\sum_k p_{hk} = 1$, que cette équation en s a nécessairement l'unité pour racine.

On démontre de plus : 1° que si les éléments p_{hk} de la diagonale principale de D , c'est-à-dire du déterminant obtenu en remplaçant s par zéro dans $\Delta(s)$, sont tous différents de zéro, il n'y a pas de racine de module 1 de l'équation en s autre que l'unité; et 2° qu'il ne peut y avoir de racine de module 1 de l'équation en s , qui soit autre que 1, que si la diagonale principale comporte au moins deux éléments nuls.

De plus, le module d'une racine de $\Delta(s)$, ne peut être égal à 1, que si cette racine est racine d'une équation binome de la forme $s^m - 1 = 0$, où m est un entier positif $\leq r$. Il s'en suit que les racines de module 1 de $\Delta(s) = 0$ étant racines d'équations binomes de degrés m_1, m_2, \dots sont alors les racines d'une même équation $s^v - 1 = 0$.

COMPORTEMENT DES PROBABILITÉS ITÉRÉES. — Les probabilités itérées $P_{jk}^{(n)}$ convergent toujours en moyenne arithmétique vers des limites π_{jk} , qui ne sont pas toutes nulles, puisque l'on a :

$$\sum_{k=1}^{k=r} \pi_{jk} = 1, \quad (j = 1, 2, \dots, r);$$

quant à la moyenne $\pi_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} [P_{jk}^{(1)} + P_{jk}^{(2)} + \dots + P_{jk}^{(n)}]$, elle ne diffère de sa limite π_{jk} que par un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, infiniment petit qui est au moins du premier ordre.

M. Fréchet met ensuite en lumière par une méthode élégante la condition nécessaire et suffisante pour que les limites généralisées π_{jk} soient indépendantes du premier indice; cette condition réside en ce qu'il n'existe qu'un système de solutions du système d'équations

$$(E) \quad \left\{ y_k = \sum_{i=1}^{i=r} y_i p_{ik}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=r} y_i = 1 \right\};$$

Dans ce cas, les $\pi_k = \pi_{jk}$ ont précisément pour valeurs ce système de solutions. La condition nécessaire et suffisante consiste en ce que l'unité soit racine simple de $\Delta(s) = 0$.

En définitive, pour que l'on soit dans le cas régulier, il faut et il suffit :

1° Que l'équation en s n'ait pas de racine de module 1 autre que l'unité;

2° Que celle-ci soit racine simple de $\Delta(s) = 0$.

L'auteur examine ensuite le cas *positivement régulier* et le cas *le plus régulier*, et signale que toutes les propriétés des $P_{jk}^{(n)}$, énoncées dans cette partie spéciale, reposent sur ce que ces $P_{jk}^{(n)}$ — pour n assez grand — (en tout cas pour $n > r$), ont une expression de la forme $P_{jk}^{(n)} = \sum_{\sigma} (\sigma_{\sigma})^n R_{j\sigma}(n)$, où $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ sont les racines distinctes de $\Delta(s) = 0$, et où $R_{j\sigma}$ est un polynôme en n de degré inférieur à l'ordre de multiplicité de σ , comme racine de $\Delta(s)$.

Il procède ensuite à la discussion du cas où il n'y a que deux états possibles, puis revient au mouvement circulaire, et généralise un schéma d'urnes, signalé et étudié antérieurement par MM. Onicescu et Mihoc.

M. Fréchet fait alors remarquer qu'un certain nombre de résultats concernant les variables en chaîne dans le cas régulier, peuvent être étendus au cas général, et cela grâce à la convergence en moyenne arithmétique des $P_{jk}^{(n)}$.

A l'étude correspondant au cas simple où chaque état E_i a une probabilité constante p_i , c'est-à-dire au cas où p_k est indépendante de k , se rattache l'examen du comportement asymptotique de la loi de répartition de la moyenne arithmétique; on démontre alors que chacune des variables aléatoires $(f_j^{(n)} - p_j)$, [$f_j^{(n)}$ étant la fréquence de E_j en n épreuves], a une loi réduite de répartition qui converge vers la loi de Laplace.

Markoff, puis M. Bernstein ont réussi à étendre cet important résultat au cas où les p_k dépendent de k ; M. Doeblin a étendu la méthode de M. Bernstein; de leur côté, d'autres probabilistes, MM. Schulz, Romanovsky, puis Schulz et Mihoc appliquaient au même but une méthode différente, que M. Fréchet expose en s'attachant au mode de présentation de MM. Schulz et Mihoc, après y avoir apporté certaines modifications et précisions.

L'auteur passe alors à l'examen du comportement asymptotique des moments dans le cas général, puis dans le cas régulier et le cas positivement régulier.

Considérant l'hypothèse $P_k = 0$, comme un cas particulier de l'hypothèse $\pi_k = 0$, l'auteur examine la condition pour qu'un au moins des π_k soit nul; cette dernière condition étant remplie, il est amené à préciser ce que l'on entend par tableau décomposable D des p_{jk} , auquel correspond une décomposition des indices $(1, 2, 3, \dots, r)$ en deux groupes disjoints a et b , contenant chacun au moins un élément, et tels que pour k', k'' pris arbitrairement sur a et b , l'on ait $p_{kk''} = 0$.

Il démontre ensuite que si l'équation possède une racine différente de 1 et de module 1, l'un au moins des $D^{(n)}$ de rang supérieur à 1 est décomposable, et montre comment Romanovsky, suivant les travaux algébriques de Frobenius, a fait apparaître les groupements finals et les groupements de passage.

Quant à la répartition des groupements finals en sous-groupements cycliques dont l'importance est capitale, elle est mise en lumière par l'auteur d'une manière simple, qui rappelle que c'est M. Hadamard qui — dans le cas du battage des cartes — a découvert en 1928, la répartition en sous-groupements cycliques grâce à une méthode nouvelle.

Ce grand mathématicien a eu recours, en effet, pour le problème des probabilités en chaîne à une méthode *directe*, désignée sous le nom de *troisième méthode*, qui n'utilise exclusivement que le langage des probabilités, et ne fait jamais appel aux théories algébriques.

A son tour, M. Kolmogoroff, après avoir modifié la méthode de M. Hadamard, en vue de son extension au cas où la condition $\sum_{j=1}^r P_{jk} = 1$ n'est pas réalisée, a retrouvé plusieurs résultats déduits par MM. de Mises et Romanovsky de ceux de Frobenius.

M. Doeblin — de son côté — a retrouvé les résultats de MM. Hadamard et Kolmogoroff, et apporté une contribution nouvelle à l'étude afférente au nombre fini d'états possibles. Si la méthode directe offre le grand avantage de faire mieux comprendre ce qui se passe, alors que l'on se trouve en présence d'un petit nombre d'épreuves, il faut toutefois reconnaître que la méthode algébrique fournit une expression explicite des probabilités itérées, et qu'elle a pu être étendue à des théories distinctes du calcul des probabilités.

M. Hadamard, à la suite de Poincaré, appelle *conséquent d'ordre n* d'un état E_k un état E_k tel que $P_{jk}^{(n)} \neq 0$; partant de cette notion simple, l'on trouve facilement la condition pour que l'ensemble G des états possibles soit décomposable, et l'on met alors en lumière la propriété des groupements indécomposables, puis la répartition d'un groupement indécomposable en sous-groupements cycliques.

On se rend compte alors que l'effet d'une épreuve sur un état appartenant à un groupe final est la résultante de deux actions : une action presque certaine faisant passer le système d'un sous-groupement cyclique au suivant dans leur ordre circulaire, et une action aléatoire déterminant sa position fortuite dans le nouveau sous-groupement certain.

CAS D'UNE SUITE CONTINUE D'ÉPREUVES. — L'auteur passe alors à l'étude d'un système, qui ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états possibles E_1, E_2, \dots, E_r , est assujéti à une suite d'épreuves qui se déroulent d'une façon continue dans le temps.

Si l'on admet qu'il y a une probabilité déterminée $P_{jk}(s, t)$, pour que le système partant

de l'état E_j à l'instant s , arrive à l'état E_k à l'instant $t \geq s$, on remarque que l'application du théorème des probabilités totales conduit à l'équation

$$(I) \quad P_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=r} P_{ji}(s, u) P_{ik}(u, t), \text{ pour } s \leq u \leq t, \text{ avec } (j, k = 1, 2, \dots, r).$$

On remarque de plus que :

$$(T) \quad \sum_{k=1}^{k=r} P_{jk}(s, t) = 1, \text{ pour } s \leq t, \text{ avec } (j = 1, 2, \dots, r),$$

et aussi que

$$(P) \quad P_{jk}(s, t) \geq 0, \text{ pour } s \leq t, \text{ avec } (j, k = 1, 2, \dots, r).$$

Toutefois, il ne faut pas oublier d'observer que $P_{jk}(s, S)$ ne peut être quelconque, car les effets E_1, E_2, \dots, E_r étant supposés incompatibles, il y aura lieu de faire intervenir les conditions suivantes :

$$(L) \quad P_{jk}(s, s) = \delta_{jk}, \text{ qui se réduisent à } \delta_{jj} = 1, \text{ et } \delta_{jk} = 0 \text{ (} k \text{ étant différent de } j \text{)}.$$

La recherche de la forme la plus générale des fonctions de (s, t) vérifiant le système des conditions (I), (T), (P), (L) est complétée par l'examen du comportement asymptotique de P_{jk} quand t croît indéfiniment.

C'est au mathématicien russe M. Kolmogoroff que l'on doit la première méthode de résolution des équations fonctionnelles ci-dessus, méthode basée sur l'intégration d'un système d'équations canoniques linéaires et homogènes.

M. Kolmogoroff supposant que $P_{jk}(s, t)$ est continue pour $s \leq t$, et dérivable pour $s < t$, montre que l'on est conduit à l'étude du système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{jk}(s, t) = \sum_i P_{ji}(s, t) U_{ik}(t), \text{ avec } (j, k = 1, 2, \dots, r), \text{ et où}$$

$$U_{jk}(t) = \left[\frac{\partial^*}{\partial t} P_{ik}(s, t) \right]_{s=t}, \text{ c'est-à-dire que } P_{jk}(s, t) \text{ a pour } s = t \text{ au moins une dérivée à droite par rapport à } t.$$

Si donc à un instant initial t_0 , la probabilité initiale pour que le système se trouve à l'état E_j est $\varpi_j(t_0)$, on aura évidemment pour $t > t_0$.

$$\varpi_k(t) = \sum_j \varpi_j(t_0) P_{jk}(t, t_0),$$

et l'on constate que les ϖ_k vérifient le système d'équations

$$\frac{d}{dt} \varpi_k(t) = \sum_i \varpi_i(t) U_{ik}(t), \text{ qui suffit à déterminer les } \varpi_k(t) \text{ pour } t > t_0,$$

lorsque l'on se donne les valeurs initiales $\varpi(t_0)$.

M. Fréchet, sans apporter de changement à l'idée maîtresse qui a guidé M. Kolmogoroff, a modifié, d'une manière heureuse, la méthode de ce géomètre, dans le but d'étendre le champ des solutions envisagées; à cet effet, il a substitué aux $P_{jk}(s, t)$ des fonctions $\varphi_{jk}(s, t)$, qui peuvent ne plus représenter des probabilités.

Considérant maintenant l'équation d'itération

$$(I') \quad \varphi_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=r} \varphi_{ji}(s, u) \varphi_{ik}(u, t), \text{ avec } s \leq u \leq t, \text{ et } (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

l'auteur en cherche les solutions qui sont des fonctions continues et à variations bornées; il est alors conduit à montrer que $\varphi_{j1}(s, t), \dots, \varphi_{jr}(s, t)$, sont pour s fixe, des solutions d'un système de la forme

$$y_k(t) = y_k(s) + \sum_{i=1}^{i=r} y_i(\tau) dV_{ik}(\tau), \text{ avec } (k = 1, 2, \dots, r),$$

où les $V_{ik}(t)$ sont des fonctions continues à variations bornées, système qui généralise le système d'équations différentielles de M. Kolmogoroff.

A la méthode de M. Kolmogoroff ne fournissant pas l'expression des solutions, sont venues s'ajouter en 1932, puis en 1937, les deux méthodes de M. Hostinsky; la première de ces méthodes est fondée sur l'emploi ingénieux de la notion d'intégrale d'une substitution due à Volterra, appliquée à l'équation fonctionnelle du type (I). Quant à la seconde méthode, qui offre le grand avantage de donner toutes les solutions à dérivées continues,

elle consiste dans l'utilisation des équations différentielles de M. Hostinsky et leur intégration par la méthode des approximations successives.

A son tour, M. Fréchet a apporté, en 1932, une intéressante contribution à la solution du problème précédent; elle conduit — comme la méthode de M. Hostinsky — à donner non seulement la solution en fonction du même nombre r^2 de fonctions arbitraires sous forme finie, mais encore à l'exprimer en fonctions rationnelles de ces mêmes r^2 fonctions arbitraires.

Faisant abstraction des conditions (P') et (T') afférentes aux fonctions $\varphi_{jk}(s, t)$, alors que les conditions (I), (L), (P), (T) se rattachent aux $P_{jk}(s, t)$, il s'est proposé la détermination de toutes les fonctions continues soumises à la condition

$$\varphi_{ik}(s, s) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j \neq k, \text{ de l'équation fonctionnelle (I') ou (F}_r) \end{cases}$$

$$(F_r) \quad \varphi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{j=r} \varphi_{ij}(s, u) \varphi_{jk}(u, t), \text{ avec } s \leq u \leq t.$$

Désignant par $D(s, t)$ le déterminant d'un système de solutions $\varphi_{ik}(s, t)$, on remarque de suite, grâce à l'équation (F_r), que l'on a :

$$(F_1) \quad D(s, t) = D(s, u) D(u, t)$$

et l'on remarque que cette relation auxiliaire (F₁) est celle à laquelle se réduit à l'équation fonctionnelle (F_r) dans le cas où $r = 1$, et où $D(s, t)$ se réduit à $\varphi_{11}(s, t)$.

La solution continue la plus générale de l'équation fonctionnelle (F₁) a suggéré à M. Fréchet le moyen de présenter la solution la plus générale de (F_r), et d'aboutir à la conclusion suivante : la solution (continue ou non) $\varphi_{jk}(s, t)$ de l'équation fonctionnelle (F_r) la plus générale parmi celles pour lesquelles le déterminant des $\varphi_{ik}(s, t)$ reste $\neq 0$ pour $s \leq t$, est de la forme

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s) \frac{A_{ki}(t)}{d(t)}$$

où les $a_{ji}(s)$ sont des fonctions qui peuvent être arbitrairement choisies pourvu que le déterminant $d(s)$ reste $\neq 0$, et où $A_{ki}(t)$ est le coefficient de $a_{ki}(t)$ dans le déterminant $d(t)$ formé par les $a_{ki}(t)$.

On peut encore donner aux $\varphi_{jk}(s, t)$ la forme suivante :

$$\varphi_{jk}(s, t) = \sum_i \frac{B_{ji}(s)}{D(s)} b_{ki}(t),$$

où les b_{ki} sont choisies arbitrairement pourvu que leur déterminant $D(t)$ reste $\neq 0$, et où $B_{ji}(s)$ est le coefficient de $b_{ji}(s)$ dans le développement de $D(s)$.

Rappelons à titre indicatif les relations caractérisant les fonctions a_{ji} et b_{ki} .

$$\sum_i a_{ij}(s) b_{i,k}(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}, \text{ et } \sum_i a_{ji}(s) b_{k,i}(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

M. Fréchet a étudié le comportement asymptotique des solutions continues $\varphi_{jk}(t)$ du système (F_r) et (L'), quand s restant fixe, t croît indéfiniment; il a procédé à un examen approfondi tant du système (I) que du système (I') ou (F_r) dans le cas où $r = 2$.

Nous nous sommes efforcé au cours de cet exposé d'analyser aussi simplement que possible l'excellent ouvrage de M. Fréchet, et de rappeler la contribution importante qu'il a apportée dans le domaine des probabilités en chaîne; peut être notre essai bibliographique incitera-t-il nos collègues statisticiens à en faire une étude approfondie — c'est le vœu que nous formulons ici.

Nous espérons que l'auteur nous donnera bientôt, dans une prochaine édition de son traité, une étude substantielle sur les matrices, ainsi qu'une analyse approfondie du mémoire de Hopf (on causality, statistics and probability); il complétera ainsi son œuvre qui — dès aujourd'hui — est destinée à rendre les plus grands services à ceux qui cherchent à dévoiler les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des questions démographiques et économiques et de certains problèmes touchant à la physique.

R. RISSER.

Le Gérant : R. WALTHER.
