JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. POLLACZEK

Résolution de certaines équations intégrales linéaires de deuxième espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 73-93.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__73_0>

Résolution de certaines équations intégrales linéaires de deuxième espèce;

Par F. Pollaczek.

Dans ce qui suit, nous étudions deux types d'équations intégrales linéaires de deuxième espèce qui offrent la particularité que pour des valeurs suffisamment petites du module de leur paramètre, leurs solutions peuvent être représentées au moyen d'un nombre fini d'intégrales définies. Pour exposer notre méthode, nous supposons que le domaine d'intégration est une droite du plan complexe; cependant, nos raisonnements s'appliquent aussi, avec des modifications légères, à des chemins d'intégration quelconques qui sont simplement fermés sur la sphère de Riemann.

1. Noyau de la forme

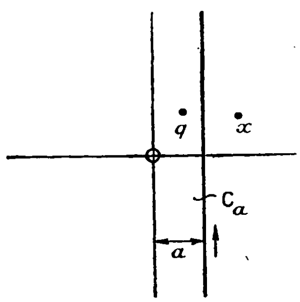
$$K(x, \xi) = \frac{j_0(x)\, k_0(\xi)}{x - \xi} + \sum^{n} j_i(x)\, k_i(\xi).$$

— Nous traitons d'abord l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) - \frac{z}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{k(\xi)}{x - \xi} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{x - q} \qquad [R(x - \xi) > 0,\ R(\xi - q) > 0],$$

dont le domaine d'intégration est une parallèle C_a (d'abscisse a) à l'axe imaginaire du plan des ξ, les points x et q étant situés respectivement à droite et à gauche de C_a (*voir* la figure 1).

Fig. 1.



Chemin d'intégration C_a des équations (1) et (41).

Supposons provisoirement que la fonction analytique $k(\xi)$ qui figure dans le noyau $K(x, \xi) = \frac{k(\xi)}{x - \xi}$ de l'équation (1) est régulière et bornée, à l'exception de n pôles simples, $a_1, \ldots, a_n$ près, dans le demi-plan $R(\xi) < a+\delta$, et qu'elle satisfait en outre à l'inégalité

$$(2) \qquad |k(\xi)| < c|\xi|^{-\varepsilon} \quad \text{pour } a \leq R(\xi) < a+\delta,$$

où δ et ε sont des constantes positives arbitrairement petites. Pour $|z|$ suffisamment petit, l'équation (1) possède alors une seule solution analytique dont le développement $\varphi(x) = \sum_0^\infty a_\nu(x) z^\nu$ converge uniformément sur C_a, et nous allons démontrer qu'avec nos hypothèses provisoires sur $k(\xi)$, $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle de x.

A ce dessein, montrons d'abord que les coefficients du développement formel de $\varphi(x)$ en une série de Taylor en z

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x) z^\nu; \qquad a_0(x) = \dfrac{1}{x-q}, \qquad a_\nu(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_a} \dfrac{k(\xi)}{x-\xi} a_{\nu-1}(\xi)\, d\xi \\ \qquad\qquad \{\nu = 1, 2, \ldots; R(x) > a\} \end{cases}$$

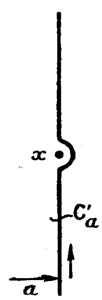
sont majorés par les termes d'une série géométrique constante, de sorte que pour $|z|$ suffisamment petit et pour $R(x) \geq a$, la série (3) converge uniformément et représente une fonction holomorphe et bornée de x. En effet, on a

$$(4) \qquad |a_0(x)| = \frac{1}{|x-q|} < c_0, \qquad \text{pour } R(x) \geq a;$$

ensuite, nous tirons de l'intégrale (3) dont nous déformons préalablement le chemin d'intégration au voisinage du point $\xi = x$ au moyen d'un demi-cercle de rayon $\rho < \delta$ (*voir* la figure 2) :

$$(5) \qquad a_1(x) = k(x)\, a_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_a} \frac{k(\xi)}{x-\xi} a_0(\xi)\, d\xi, \qquad [R(x) = a],$$

Fig. 2.



Chemin d'intégration C'_a [équation (5)].

et de là, grâce aux inégalités (2) et (4),

$$|a_1(x)| < c\,c_0\left(|x|^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int_{C'_a} \frac{|d\xi|}{|x-\xi|\cdot|\xi|^{\varepsilon}}\right) \qquad [R(x) = a]$$

La dernière intégrale est évidemment convergente et tend vers zéro avec $\frac{1}{\mathfrak{I}(x)}$, de sorte qu'en posant

$$c \operatorname*{Max}_{R(x)=a}\left[|x|^{-\varepsilon}+\frac{1}{2\pi}\int_{C'_a}\frac{|d\xi|}{|x-\xi|.|\xi|^{\varepsilon}}\right]=c',$$

on obtient

$$|a_1(x)|<c_0 c' \qquad [R(x)=a],$$

et de la même façon

$$(6) \qquad |a_\nu(x)|<c_0 c'^\nu \qquad [\nu=1, 2, \ldots; R(x)=a].$$

Mais comme chaque intégrale (3) tend uniformément vers zéro sur la périphérie d'un demi-cercle suffisamment grand du demi-plan droit des x, les inégalités (6) subsistent pour $R(x)\geqq a$, ce qui achève notre démonstration.

En prolongeant maintenant $\varphi(x)$, à l'aide de l'équation (1), dans l'intérieur du demi-plan $R(x)<a$, on obtient

$$(7) \qquad [1-z\,k(x)]\,\varphi(x)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{k(\xi)}{x-\xi}\varphi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{x-q} \qquad [R(x-\xi)<0].$$

En raison de l'inégalité (2) et de ce que nous venons d'établir au sujet de $\varphi(x)$, l'intégrale qui figure dans l'équation (7) est, pour $|z|<c'$, holomorphe et bornée dans le demi-plan $R(x)<a$ et y tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$; par conséquent, le même vaut pour la fonction

$$(8) \qquad [1-z\,k(x)]\,\varphi(x)-\frac{1}{x-q}, \qquad \text{pour } R(x)<a.$$

Considérons maintenant, pour $R(x)<a$, la fonction

$$(9) \qquad 1-z\,k(x)$$

qui figure dans la dernière expression. Dans ce demi-plan, la fonction (9) a les mêmes pôles (simples) $a_1, \ldots, a_n$ que $k(x)$ et pour $|z|$ suffisamment petit, elle ne peut évidemment s'annuler qu'au voisinage d'un de ces pôles. D'autre part, on reconnaît aisément que pour $|z|$ suffisamment petit, l'équation

$$(10) \qquad 1-z\,k(x)=0$$

possède une seule solution $\alpha_\nu(z)$ qui soit située dans le voisinage de $x=a_\nu (\nu=1, \ldots, n)$.

Par conséquent, les fonctions $\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\alpha_\nu(z)}{x-a_\nu}$ et (9) possédant dans le demi-plan $R(x)<a$ les mêmes pôles et zéros, leur quotient

$$\prod^{n}\frac{x-\alpha_\nu(z)}{x-a_\nu}\,\frac{1}{1-z\,k(x)}$$

En multipliant la fonction (8) par la dernière expression, on obtient la fonction

$$(11)\qquad \prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\alpha_\nu(z)}{x-a_\nu}\varphi(x)-\frac{1}{x-q}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\alpha_\nu(z)}{x-a_\nu}\,\frac{1}{1-z\,k(x)},$$

qui, pareillement à la fonction (8), est holomorphe et bornée dans le demi-plan $R(x)<a$ et y tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

D'autre part, en raison de ce qui a été dit précédemment sur $\varphi(x)$, la fonction

$$(12)\qquad \prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\alpha_\nu(z)}{x-a_\nu}\varphi(x)$$

est holomorphe et bornée pour $R(x)\geqq a$. Donc, cette fonction est régulière dans le plan complexe fermé, à l'exception du point $x=q$, où elle a un pôle simple, et elle s'annule pour $x=\infty$. Par conséquent, la fonction (12) est égale à $\frac{\text{const.}}{x-q}$, et puisque l'expression (11) est régulière pour $x=q$, on a

$$\text{const.}=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{q-\alpha_\nu(z)}{q-a_\nu}\,\frac{1}{1-z\,k(q)}.$$

Ainsi, on obtient finalement,

$$(13a)\quad \varphi(x)=\varphi(x;\,q)=\frac{1}{x-q}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-a_\nu}{x-\alpha_\nu(z)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{q-\alpha_\nu(z)}{q-a_\nu}\,\frac{1}{1-z\,k(q)},\qquad \text{pour } R(q)<a,$$

pour l'unique solution de l'équation (1) dont le développement $\varphi(x)=\sum_0^\infty a_\nu(x)z^\nu$ converge uniformément sur C_a.

Notons encore que la fonction (13) se comporte à l'infini comme $\frac{1}{x}$, ce qui nous permettrait d'atténuer dans le cas présent la condition (2) que nous avions imposée à $k(x)$ afin d'assurer la convergence uniforme de la série (3).

Nous allons représenter maintenant la fonction (13) sous une autre forme qui nous permettra de restreindre encore les hypothèses faites auparavant sur $k(x)$. En prenant les logarithmes, définis de manière appropriée, des deux membres de (13), on a

$$\log\varphi(x)=-\log(x-q)+\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{x-a_\nu}{x-\alpha_\nu(z)}-\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{q-a_\nu}{q-\alpha_\nu(z)}-\log[1-z\,k(q)].$$

Pour $R(x)<a$, les termes qui figurent dans ces sommes, sont égaux aux résidus de l'expression

$$\log\frac{q-\xi}{x-\xi}\,d\log[1-z\,k(\xi)]$$

dans le demi-plan $R(\xi) < a$, découpé à partir du point $\xi = q$, de sorte qu'on obtient

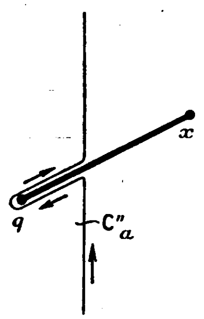
$$(13b) \quad \log\varphi(x) = -\log(x-q) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C''_a} \log\frac{q-\xi}{x-\xi}\, d\log[1 - z\,k(\xi)] - \log[1 - z\,k(q)],$$

où

$$\log[1 - z\,k(q)] = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^\nu k^\nu(q);$$

les points x et q et le chemin d'intégration C''_a sont représentés dans la figure 3.

Fig. 3.



Chemin d'intégration C''_a [équation (13b)].

En intégrant ici partiellement et en remplaçant ensuite le chemin C''_a par C_a, on a, compte tenu du résidu en $\xi = q$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C''_a} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C''_a} \log[1 - z\,k(\xi)]\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi - q}\right)d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \log[1 - z\,k(\xi)]\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi - q}\right)d\xi + \log[1 - z\,k(q)],\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\log\varphi(x) = -\log(x-q) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \log[1 - z\,k(\xi)]\frac{x-q}{(x-\xi)(\xi-q)}\,d\xi \qquad [R(x) > a]$$

ou

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x) = \varphi(x, q) = \frac{1}{x-q}\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \log[1 - z\,k(\xi)]\frac{x-q}{(x-\xi)(\xi-q)}\,d\xi\right) \\ &\qquad [R(x) > a]. \end{aligned}\right.$$

Les conclusions précédentes, faites dans l'hypothèse $R(q) < a$, s'appliquent aussi, avec des modifications insignifiantes, au cas $R(q) > a$, où l'on aboutit, en particulier, à la même formule (14) que pour $R(q) < a$; cette formule est donc valable pour $R(x) > a$ et pour tous les q, pourvu que pour les q situés sur C_a, on déforme localement le chemin d'intégration.

Il est facile de prolonger la fonction (14) dans l'intérieur du demi-plan gauche, et l'on trouve que pour $R(x) < a$, le deuxième membre de (14) doit être multiplié par $\frac{1}{1 - z k(x)}$.

Admettons maintenant seulement que la fonction

$$w(x) = \log[1 - z\, k(x)]$$

puisse être représentée comme somme de deux fonctions $w_1(x)$ et $w_2(x)$ qui sont respectivement holomorphes et bornées dans les points finis des demi-plans $R(x) \leqq a$ et $R(x) \geqq a$, donc

$$\log[1 - z\, k(x)] = w_1(x) + w_2(x), \tag{15}$$

et démontrons que dans cette hypothèse, la fonction (14) satisfait encore à l'équation (1). D'abord, on tire de la formule (14), pour $R(q) < a$,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{x-q} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} [w_1(\xi) + w_2(\xi)]\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi - q}\right) d\xi\right] \\ &= \frac{1}{x-q}\, e^{-w_1(q) - w_2(x)} \\ &\qquad\qquad [R(x) \geqq a,\ R(q) < a], \end{aligned}\right. \tag{16}$$

puisque les deux intégrales $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} w_1(\xi)\ldots d\xi$ et $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} w_2(\xi)\ldots d\xi$ se réduisent respectivement aux résidus en $\xi = q$ et $\xi = x$.

La fonction $\varphi(x)$ étant, en vertu de (16), holomorphe et $O\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $R(x) \geqq a$, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{x - \xi} \qquad [R(x) > a],$$

de sorte que l'équation (1) prend la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{[1 - z\, k(\xi)]\, \varphi(\xi)}{x - \xi}\, d\xi = \frac{1}{x - q} \qquad [R(x) > a,\ R(q) < a].$$

On vérifie maintenant aisément que la fonction (16) satisfait à cette équation, car grâce à (15) et à (16), on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{\exp[w_1(\xi) + w_2(\xi) - w_1(q) - w_2(\xi)]}{(x - \xi)(\xi - q)}\, d\xi = \frac{1}{x - q}$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} e^{w_1(\xi) - w_1(q)}\left(\frac{1}{x - \xi} + \frac{1}{\xi - q}\right) d\xi = 1 \qquad [R(x) > a,\ R(q) < a],$$

ce qui est une identité, puisque avec notre hypothèse sur $w_1(x)$, $\int_{C_a}$ devient égale au résidu en $\xi = q$. On démontre de manière analogue que la fonction (14) satisfait aussi pour $R(q) \geqq a$ à l'équation (1).

Remarquons que la décomposition de $\log[1 - zk(x)]$ selon l'équation (15) est certainement possible si la fonction $k(x)$ est holomorphe dans une bande arbitrairement mince

$$a \leqq \mathrm{R}(x) \leqq a + \delta \tag{17 a}$$

et y satisfait à l'inégalité (2). Car pour $|z|$ suffisamment petit, le même vaut alors pour $w(x) = \log[1 - zk(x)]$, et en représentant cette fonction dans cette bande au moyen de la formule de Cauchy

$$w(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_{a+\delta}} \frac{w(\xi)}{x - \xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a} \frac{w(\xi)}{x - \xi}\,d\xi \qquad [a < \mathrm{R}(x) < a + \delta], \tag{17 b}$$

nous la décomposons en deux parties $w_1(x)$ et $w_2(x)$, qui sont respectivement holomorphes pour $\mathrm{R}(x) \leqq a$ et pour $\mathrm{R}(x) \geqq a$; en procédant de la même manière que lors de la déduction des inégalités (6), on montre en outre que $w_1(x)$ et $w_2(x)$ sont bornés dans leurs demi-plans respectifs. Notons ici que pour $\mathrm{R}(q) < a < \mathrm{R}(x)$ la fonction (14) satisfait aussi à l'équation

$$\varphi(x, q) - \frac{z}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a} \frac{k(\xi)}{\xi - q}\,\varphi(x, \xi)\,d\xi = \frac{1}{x - q},$$

ce qu'on vérifie par exemple à l'aide de l'équation (16).

Nous passons maintenant à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a} \frac{k(\xi)}{x - \xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) \qquad [\mathrm{R}(x) > a], \tag{18}$$

en supposant que la fonction donnée $f(x)$ soit holomorphe dans la bande (17 a) et y satisfasse à l'inégalité (2), de sorte qu'on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_{a+\delta}} \frac{f(q)}{x - q}\,dq \qquad [a < \mathrm{R}(x) < a + \delta].$$

En effectuant maintenant dans l'équation (1) l'opération $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a - \mathrm{C}_{a+\delta}} f(q) \ldots dq$, on reconnaît que la fonction

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\ldots}\int_{\mathrm{C}_a - \mathrm{C}_{a+\delta}} f(q)\,\varphi(x, q)\,dq \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_a - \mathrm{C}_{a+\delta}} \frac{f(q)}{x - q}\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_{a+0}} \log[1 - z\,k(\xi)]\,\frac{x - q}{(x - \xi)(\xi - q)}\,d\xi\right) \\ &\qquad\qquad [\mathrm{R}(x) > a] \end{aligned}\right. \tag{19}$$

satisfait à l'équation (18), puisque, avec nos hypothèses sur $k(x)$ et $f(x)$, l'intégrale itérée

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathrm{C}_a - \mathrm{C}_{a+\delta}} f(q)\int_{\mathrm{C}_{a+0}} \frac{k(\xi)}{x - \xi}\,\varphi(\xi, q)\,d\xi\,dq \ .$$

converge absolument, de sorte qu'il est permis d'y intervertir l'ordre des intégrations. En effet, on tire de l'équation (14), compte tenu de (2),

$$|\varphi(x, q)| < \frac{1}{|x-q|} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{C_a}\left|\log[1 - z\,k(\xi)]\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi - q}\right)d\xi\right|\right) < \frac{C_1}{|x-q|},$$

où la constante C_1 ne dépend ni de $\mathcal{J}_{(x)}$ ni de $\mathcal{J}_{(q)}$, donc

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint\left|f(q)\,k(\xi)\,\varphi(\xi, q)\frac{d\xi\,dq}{x-\xi}\right| < \frac{C_1}{4\pi^2}\iint\left|\frac{f(q)\,k(\xi)}{(x-\xi)(\xi-q)}d\xi\,dq\right|$$
$$< C_2\int_{C_a - C_{a+\delta}}\int_{C_{a+0}}\left|\frac{q^{-\varepsilon}\xi^{-\varepsilon}}{(x-\xi)(\xi-q)}d\xi\,dq\right|,$$

la dernière intégrale double étant convergente.

L'équation intégrale

$$(20) \qquad \varphi(x) - \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\left[\frac{j_0(x)\,k_0(\xi)}{x-\xi} + \sum_1^n j_i(x)\,k_i(\xi)\right]\varphi(\xi)\,d\xi = f(x)$$

se ramène, au moyen de transformations évidentes, à une équation de la forme (18) et peut être traitée comme celle-ci pourvu que les fonctions $j_0(x)k_i(x)$, $\frac{f(x)}{j_0(x)}$, $\frac{j_i(x)}{j_0(x)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ satisfassent à la condition (2); dans ce cas, la solution de l'équation (20) peut être représentée, pour $|z|$ suffisamment petit, au moyen d'un nombre fini d'intégrations.

A titre d'exemple, prenons l'équation

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x) - \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\left[\frac{k_0(\xi)}{x-\xi} + \sum_1^m j_i(x)\,k_i(\xi) + \sum_{m+1}^{m+m'}\frac{k_i(\xi)}{x-b_i}\right]\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{x-q} \\ &\qquad [R(x) > a,\ R(q) < a], \end{aligned}\right.$$

en admettant que les fonctions $j_i(x)$ sont holomorphes et bornées pour $R(x) \leqq a$ et que les m' pôles simples b_i sont situés dans ce même demi-plan. En supposant en outre que $k_0(x)$ est holomorphe et borné pour $R(x) \leqq a$, aux voisinages de n pôles $a_1, \ldots, a_n$ près, on obtient analoguement à la formul 13$_a$)

$$(22\,a) \qquad \varphi(x) = \sum_{l=1}^{m+m'} K_l\lambda_l(x) + \varphi(x, q)$$

où

$$(22\,b) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_i(x) = j_i(x) - \sum_{k=1}^n j_i(a_k)\prod_{\mu=1}^n\frac{a_k - \alpha_\mu(z)}{x - \alpha_\mu(z)}\prod_{\nu\neq k}{}'\frac{x - a_\nu}{a_k - a_\nu} \qquad (i = 1, \ldots, m); \\ &\lambda_i(x) = \varphi(x, b_i) \qquad (i = m+1, \ldots, m+m'). \end{aligned}\right.$$

Ici, les $m+m'$ constantes K_i sont déterminées par le système d'équations linéaires

$$\text{(23)} \quad K_i - z \sum_{\nu=1}^{m+m'} K_\nu \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} k_i(\xi)\,\lambda_\nu(\xi)\,d\xi = \frac{z}{2\pi i} \int_{C_a} k_i(\xi)\,\varphi(\xi, q)\,d\xi \qquad (i = 1, \ldots, m+m'),$$

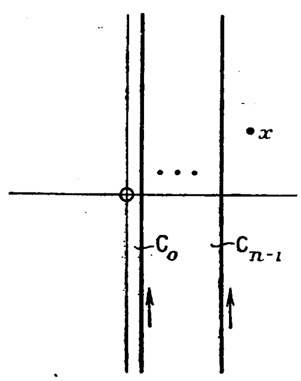
dont le déterminant ne s'annule pas pour $|z|$ suffisamment petit; de même que la fonction $\varphi(x, q)$ [équat. (13), (14)], les $\lambda_i(x)$ peuvent être représentées, à l'aide de signes d'intégrations, par des expressions où les irrationnalités a_ν et $a_\nu(z)$ ne figurent plus.

2. Étude d'une équation particulière. — Nous traitons enfin l'équation

$$\text{(24)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(x) - \frac{z^n}{(2\pi i)^n} \int_{C_0} \cdots \int_{C_{n-1}} \frac{e^{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i t_{n-i}} \varphi(\xi_0)\,d\xi_0 \ldots d\xi_{n-1}}{\xi_0 \ldots \xi_{n-1} (\xi_1 - \xi_0) \ldots (\xi_{n-1} - \xi_{n-2})(x - \xi_{n-1})} = \frac{1}{x-q} \\ & \qquad \Bigg(\sum_{l=1}^{n} t_l = 1;\ t_i \geqq 0,\ (i = 1, \ldots, n-1); \\ & \qquad\qquad R(x - \xi_{n-1}) > 0,\ R(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) > 0,\ \ldots,\ R(\xi_0 - q) \gtrless 0 \Bigg), \end{aligned} \right.$$

où les chemins d'intégration $C_0, \ldots, C_{n-1}$ (*voir* la figure 4) sont des parallèles

Fig. 4.



Domaine d'intégration de l'équation (24).

à l'axe imaginaire qui se suivent à droite de cet axe, de telle sorte que tous les facteurs linéaires qui figurent dans le dénominateur de la fonction à intégrer ont des parties réelles positives. Cette équation rentre aussi sous le type de l'équation (20), puisque son noyau satisfait à la relation

$$(25)\quad \frac{e^{\xi_0\left(1-\sum\limits_1^{n-1} t_i\right)}}{\xi_0}\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{C_1}\dots\int_{C_{n-1}}\frac{e^{\sum\limits_1^{n-1}\xi_i t_{n-i}}\,d\zeta_1\dots d\zeta_{n-1}}{\xi_0\dots\xi_{n-1}(\xi_1-\xi_0)\dots(\xi_{n-1}-\xi_{n-2})(x-\xi_{n-1})}$$

$$=\frac{e^{\xi_0}}{\xi_0^n(x-\xi_0)}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{a_\nu(\xi_0)}{x^\nu},$$

mais en raison de sa forme particulière, elle peut être traitée de manière plus simple.

Pour vérifier la formule (25), remplaçons-y d'abord l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{n-1}}\dots d\xi_{n-1}$ par la somme des résidus aux pôles $\xi_{n-1}=\xi_{n-2}$ et $\xi_{n-1}=0$; le premier de ces résidus est une intégrale $(n-2)$-tuple pareille à (25) et qui ne contient la variable x que par l'intermédiaire du facteur $\frac{1}{x-\xi_{n-2}}$, tandis que le résidu en $\xi_{n-1}=0$ a la forme $\frac{a(\xi_0)}{x}$. En continuant de la même façon pour l'intégrale $(n-2)$-tuple mentionnée, on aboutit finalement à la formule (25), où le terme $\frac{e^{\xi_0}}{\xi_0^n(x-\xi_0)}$ est obtenu de manière formelle en posant dans la fonction à intégrer $\xi_{n-1}=\xi_{n-2}=\dots=\xi_0$, tout en écartant les facteurs $\xi_{n-1}-\xi_{n-2},\ \dots,\ \xi_1-\xi_0$ du dénominateur.

Grâce à la dernière formule, l'équation (24) prend la forme

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\varphi(x)-\frac{z^n}{(2\pi i)^n}\int_{C_0}\frac{e^{\xi}\varphi(\xi)}{\xi^n(x-\xi)}d\xi=\frac{1}{x-q}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{a_\nu}{x^\nu}\\ &[R(x-\xi)>0,\ R(\xi)>0,\ R(\xi-1)>0).\end{aligned}\right.$$

En procédant de manière analogue qu'au début de cet article, nous en concluons que les fonctions

$$(27)\quad \varphi(x)-\frac{1}{x-q}\qquad\text{et}\qquad \varphi(x)\left(1-\frac{z^n e^x}{x^n}\right)-\frac{1}{x-q}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{a_\nu}{x^\nu}$$

sont respectivement holomorphes et bornées dans les demi-plans droit et gauche et qu'elles s'annulent à l'infini. Par conséquent, $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle qui s'annule pour $x=0$ et $x=\infty$, et qui a des pôles simples aux points $x=q,\ w_0(z),\ \dots,\ w_{n-1}(z)$; ici, nous avons désigné par

$$(28\,a)\qquad w_\nu(z),\qquad \nu=0,\ \dots,\ n-1,$$

les n racines de l'équation

$$(28\,b)\qquad x^n-z^n e^x=0,$$

qui sont régulières pour $z=0$, donc qui tendent vers zéro avec z.

Donc, $\varphi(x)$ a la forme suivante,

$$\varphi(x) = cx\left[\frac{1}{x-q} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{x - w_i(z)}\right], \tag{29}$$

et l'équation $\varphi(\infty) = 0$ nous donne

$$\sum_{i=0}^{n=1} c_i = 1. \tag{30}$$

Les fonctions (27) étant toutes deux régulières pour $x = q$, on a en outre

$$c = \begin{cases} \dfrac{q^{n-1}}{q^n - z^n e^q}, & \text{pour } R(q) < 0; \\ \dfrac{1}{q}, & \text{pour } R(q) > 0. \end{cases} \tag{31}$$

En introduisant l'expression (29) de $\varphi(x)$ dans l'équation (24), nous parviendrions à une identité en x $\left[\text{polynome du } (n-1)^{\text{ième}} \text{ degré en } \frac{1}{x} \text{ dont les coefficients s'annulent}\right]$ qui donne lieu à un système de $n-1$ équations linéaires en $c_1, \ldots, c_n$. Mais comme les coefficients de ces équations sont des fonctions compliquées des paramètres t_i, nous établirons $n-1$ relations linéaires entre les c_i en effectuant dans les deux membres de l'équation (24) l'opération

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_x} e^{-x\sum\limits_1^k t_j} x^{k-1} \ldots dx, \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, n-1, \tag{32}$$

où C_x est située à droite de l'axe imaginaire et de tous les pôles de la fonction (29), tandis que K_x désigne un petit cercle autour de l'origine des x; provisoirement, nous supposons ici qu'en outre $t_1 > 0$, mais pour des raisons de continuité, nos formules finales seront encore valables pour $t_1 = 0$.

Désignons pour le moment l'intégrale n-tuple qui figure dans l'équation (24), par $\mathfrak{J}_n(x)$ ou par $\mathfrak{J}_n^\star(x)$ selon que $R(x - \xi_{n-1}) > 0$ ou < 0; avant d'effectuer les opérations (32), il faut remplacer $\mathfrak{J}_n(x)$, où x est assujetti à la condition de rester à droite du chemin C_{n-1}, par une autre expression analytique qui est en particulier valable pour tous les x situés au voisinage de $x = 0$. En amenant d'abord, dans l'intégrale $\mathfrak{J}_n$, le chemin C_{n-1} dans une position à droite du point x, on a

$$\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_n^\star + \frac{e^{xt_1}}{x}\mathfrak{J}_{n-1},$$

et en procédant de manière analogue pour $\mathfrak{J}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{J}_1$, on obtient la formule

$$\mathfrak{J}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{x\sum\limits_1^\nu t_j}}{x^\nu} \mathfrak{J}_{n-\nu}^\star(x) + \frac{e^x}{x^n}\varphi(x). \tag{33}$$

où les fonctions $\mathfrak{I}^{*}_{n-\nu}(x)$ sont holomorphes et bornées à gauche de la droite C_x (où $R(x) > 0$).

Avec cette formule, l'équation (24) devient

$$z^{-n}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x-q}\right)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{e^{x\sum_1^{\nu} t_j}}{x^{\nu}}\mathfrak{I}^{*}_{n-\nu}(x)+\frac{e^{x}}{x^{n}}\varphi(x)$$

et en effectuant ici les opérations (32), on obtient

$$(34)\qquad \frac{z^{-n}}{2\pi i}\int_{C_x-K_x} e^{-x\sum_1^k t_i}\, x^{k-1}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x-q}\right)dx$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x-K_x} e^{x\left(\sum_1^{\nu} t_i-\sum_1^{k} t_i\right)}\, x^{k-1-\nu}\,\mathfrak{I}^{*}_{n-\nu}(x)\,dx$$
$$+\frac{z^{-n}}{2\pi i}\int_{C_x-K_x}\frac{e^{x\left(1-\sum_1^k t_i\right)}}{x^{n-k+1}}\varphi(x)\,dx \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1).$$

Ici, le premier membre est nul parce que les fonctions $\varphi(x)$ [*voir* l'équ. (29)] et $\frac{1}{x-q}$ sont régulières pour $x=0$ et à droite de C_x. Dans le deuxième membre, les termes de $\sum_{\nu}$ sont nuls à partir de $\nu=k$ parce que pour eux, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}$ se réduit au résidu en $x=0$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2\pi i}\int_{K_x}$; pour les termes aux indices $\nu=0,\ \ldots,\ k-1$, qui sont réguliers en $x=0$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{K_x}$ est nul, et en calculant pour ces termes $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}$, on obtient

$$(35)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_x} e^{-\sum_{\nu+1}^{k} t_i}\, x^{k-1-\nu}\,\mathfrak{I}^{*}_{n-\nu}(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^{n-\nu+1}}$$
$$\times\int_{C}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{n-\nu-1}}\frac{\exp\left[\xi_0\left(1-\sum_1^{n-1}t_i\right)+\sum_1^{n-\nu-1}\xi_i t_{n-i}-x\sum_{i=\nu+1}^{k}t_i\right]x^{k-1-\nu}\varphi(\xi_0)\,d\xi_0\ldots d\xi_{n-\nu-1}\,dx}{\xi_0\ldots\xi_{n-\nu-1}(\xi_1-\xi_0)\ldots(\xi_{n-\nu-1}-\xi_{n-\nu-2})(x-\xi_{n-\nu-1})}$$
$$[R(x-\xi_{n-\nu-1})<0,\quad \nu=0,1,\ \ldots,\ k-1].$$

Dans cette intégrale multiple, $\int_{C_x}$ devient égal au résidu en $x=\xi_{n-\nu-1}$, et dans ce résidu [intégrale $(n-\nu)$-tuple] on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{n-\nu-1}} e^{-\xi\sum_{i=n-\nu-i}^{k} t_i}\,\frac{\xi_{n-\nu-1}^{k-2-\nu}}{\xi_{n-\nu-1}-\xi_{n-\nu-2}}\,d\xi_{n-\nu-1}=0 \qquad (\nu=0,\ \ldots,\ k-1).$$

Donc, les expressions (35) s'annulent aussi, de sorte que les équations (34) se réduisent à

$$(36)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_x-K_x} \frac{e^{x\left(1-\sum_1^k t_i\right)}}{x^{n-k+1}}\varphi(x)\,dx = 0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1).$$

En introduisant ici pour (x) l'expression (29), nous obtenons les équations linéaires

$$(37)\qquad \sum_{i=0}^{n-1} c_i h_{n-k}\left(1-\sum_1^k t_j;\ w_i\right) = h_{n-k}\left(1-\sum_1^k t_j;\ q\right) \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1),$$

où nous avons posé pour $a \gtrless 0$

$$(38)\qquad \begin{aligned} h_\mu(a;\ \alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_x-K_x} \frac{e^{ax}}{x^\mu}\frac{dx}{x-\alpha} \quad [\text{où } R(x-\alpha)>0] \\ &= \mathbf{s}(a)\frac{e^{a\alpha}}{\alpha^\mu} + \mathbf{s}(-a)\frac{1}{\alpha^\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{(a\alpha)^\nu}{\nu!} \qquad (\mu=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

La fonction $\mathbf{s}(a)$ qui figure ici est définie par les relations

$$(39)\qquad \mathbf{s}(a) = \begin{cases} 1, & \text{pour } a>0; \\ \frac{1}{2}, & \quad \text{»} \quad a=0; \\ 0, & \quad \text{»} \quad a<0. \end{cases}$$

En portant maintenant dans la formule (29) les valeurs des c_i qu'on obtient en résolvant les n équations linéaires (37) et (30), on a finalement, sous forme de déterminants :

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) = cx &\begin{vmatrix} \frac{1}{x-q} & \frac{1}{x-w_0} & \cdots & \frac{1}{x-w_{n-1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ h_1\left(1-\sum_1^{n-1} t_i;\ q\right) & h_1\left(1-\sum_1^{n-1} t_i;\ w_0\right) & \cdots & h_1\left(1-\sum_1^{n-1} t_i;\ w_{n-1}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ h_{n-1}(1-t_1;\ q) & h_{n-1}(1-t_1;\ w_0) & \cdots & h_{n-1}(1-t_1;\ w_{n-1}) \end{vmatrix} \\ &\times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ h_1\left(1-\sum_1^{n-1} t_i;\ w_0\right) & \cdots & h_1\left(1-\sum_1^{n-1} t_i;\ w_{n-1}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ h_{n-1}(1-t_1;\ w_0) & \cdots & h_{n-1}(1-t_1;\ w_{n-1}) \end{vmatrix}^{-1}, \end{aligned} \right.$$

c et les h_μ étant donnés par les formules (31) et (36). Notons encore que pour $z \to 0$, les $w_\nu(z)$ [*voir* les équ. (28 *a*), (28 *b*)] se réduisent en première approximation à $ze^{-\frac{2\pi i\nu}{n}}$, et le dénominateur de la dernière formule [*voir* aussi l'équ. (38)], à

$$\prod_{n-1\geqq\nu>\nu'\geqq 0}[w_\nu^{-1}(z)-w_{\nu'}^{-1}(z)]\sim z^{-\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{\nu,\nu'}\left(e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}-e^{\frac{2\pi i\nu'}{n}}\right);$$

donc, ce dénominateur ne s'annule pas pour $|z|$ suffisamment petit.

5. Le noyau

$$K(x, \xi)=\frac{1}{p-x-\xi}\,\frac{k(\xi)}{1-zk(p-\xi)}.$$

— Les méthodes que nous avons utilisées dans ce qui précède nous permettent aussi de traiter l'équation

$$(41)\quad L(\varphi)\equiv\varphi(x)-\frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{k(\xi)}{p-x-\xi}[\varphi(x)+\varphi(\xi)]\,d\xi=f(x)\qquad [R(p-x-\xi)>0],$$

dont la forme canonique serait

$$\varphi_1(x)-\frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{1}{p-x-\xi}\,\frac{k(\xi)}{1-zk(p-\xi)}\varphi_1(\xi)\,d\xi=f_1(x),$$

mais qu'il est préférable d'étudier sous la forme indiquée ci-dessus.

Ici, p est un paramètre complexe et les fonctions $k(x)$ et $f(x)$ sont holomorphes et $O(|x|^{-\varepsilon})$ respectivement pour $R(x)\geqq a$ et pour $R(x)\leqq a+\delta$. On démontre alors de manière analogue qu'au début de cet article que pour $|z|$ suffisamment petit et pour

$$(42)\qquad 2a+\delta>R(p)\geqq 2a,$$

cette équation possède une seule solution $\varphi(x)$ qui est holomorphe et bornée pour $R(x)<\mathrm{Min}[R(p)-a,\ a+\delta]=R(p)-a$, et dont le développement $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)z^\nu$ converge uniformément sur C_a.

Afin d'être en mesure de prolonger $\varphi(x)$ dans le demi-plan droit, admettons maintenant provisoirement que $k(x)$ est une fonction rationnelle qui s'annule à l'infini et qui a dans le demi-plan gauche n pôles simples

$$(43)\qquad a_1,\ \ldots,\ a_n\qquad [k(a_i)=\infty,\ R(a_i)<a,\ i=1,\ \ldots,\ n].$$

En traitant alors l'équation (41) de la même façon qu'auparavant l'équation (1), et en utilisant la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{k(\xi)}{p-x-\xi}\,d\xi=k(p-x),$$

on obtient

$$(44)\quad [1 - zk(p-x)]\varphi(x) - zk(p-x)\varphi(p-x) - f(x) = \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{k(\xi)\varphi(\xi)}{p-x-\xi}\,d\xi$$
$$[R(p-x-\xi) < 0,\ R(x) > R(p) - a].$$

En posant ensuite

$$(45)\qquad 1 - zk(p-x) = l(x),$$
$$(46)\qquad \varphi(x) - \frac{f(x)}{l(x)} = \psi(x),$$

on a pour le premier membre de l'équation (43)

$$l(x)\left[\varphi(x) + \varphi(p-x) - \frac{f(x)}{l(x)}\right] - \varphi(p-x)$$
$$= l(x)\left[\psi(x) + \psi(p-x) + \frac{f(p-x)}{l(p-x)}\right] - \varphi(p-x),$$

de sorte que cette équation prend la forme

$$(47)\qquad l(x)\left[\psi(x) + \psi(p-x) + \frac{f(p-x)}{l(p-x)}\right]$$
$$= \varphi(p-x) + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{k(\xi)\varphi(\xi)}{p-x-\xi}\,d\xi \qquad [R(p-x-\xi) < 0].$$

Les fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$, $l(x)$ et $\psi(x)$ étant holomorphes et bornées pour $R(x) \leqq R(p) - a$, il en est de même (pourvu que $|z|$ soit suffisamment petit) pour $\varphi(p-x)$, $\frac{f(p-x)}{l(p-x)}$ et $\varphi(p-x)$ dans le demi-plan $R(x) \geqq a$, donc, en raison de (42), dans le domaine $R(x) \geqq R(p) - a$. Comme, en outre, le deuxième membre de l'équation (47) est holomorphe et borné pour $R(x) \geqq R(p) - a$, on voit qu'il en est de même dans ce demi-plan pour la fonction $\psi(x)$, augmentée de la fonction holomorphe et bornée $\psi(p-x) + \frac{f(p-x)}{l(p-x)}$, et multipliée par la fonction rationnelle $l(x)$. Nous en concluons que $\psi(x)$ est une fonction rationnelle dont les seuls pôles sont les zéros de $l(x)$, tandis que l'expression

$$\psi(x) + \psi(p-x) + \frac{f(p-x)}{l(p-x)}$$

s'annule aux pôles de $l(x)$, c'est-à-dire [*voir* l'équ. (45)] aux pôles $p - a_1, \ldots, p - a_n$ de $k(p-x)$; on a donc, en remplaçant x par $p - x$,

$$(48)\qquad \psi(x) + \psi(p-x) = -\frac{f(x)}{l(x)}, \qquad \text{pour } x = a_1, \ldots, a_n.$$

En outre, $\psi(x)$ s'annule à l'infini, ce qu'on reconnaît par exemple en introduisant $\psi(x)$, à l'aide de (46), dans l'équation (41) et en y faisant tendre x vers l'infini du demi-plan gauche.

En décomposant $l(x)$ [*voir* (43), (45)] en des facteurs linéaires, on a

$$l(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p - x - \alpha_i(z)}{p - x - a_i}, \tag{49}$$

les $\alpha_i(z)$ étant situés, pour $|z|$ suffisamment petit, dans les voisinages des a_i correspondants.

D'après ce que nous venons de dire, $\psi(x)$ peut être représenté sous la forme suivante

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p - x - \alpha_i(z)}, \tag{50}$$

et en introduisant ceci dans la formule (48), on obtient les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(x) + \psi(p - x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{1}{x - \alpha_i} + \frac{1}{p - x - \alpha_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(p - 2\alpha_i)}{px - x^2 - (p\alpha_i - \alpha_i^2)} = -\frac{f(x)}{l(x)} \\ & (x = a_1, \ldots, a_n), \end{aligned} \right. \tag{51}$$

qui déterminent les n coefficients a_i et par conséquent la fonction $\psi(x)$.

En vue d'obtenir $\psi(x)$ sous forme d'une intégrale définie, nous utilisons le fait que $\psi(x) + \psi(p - x)$ [*voir* l'équ. 51)] est une fonction rationnelle de la variable

$$x^\star = x(p - x) = px - x^2, \tag{52}$$

qui a n pôles simples $\alpha_i^\star = pa_i - a_i^2$ et prend aux n points $a_i^\star = pa_i - a_i^2$ les valeurs « données » $-\frac{f(a_i)}{l(a_i)}$ et qui, en outre, s'annule pour $x^\star = \infty$. Par conséquent, nous pourrons calculer la fonction $\prod_{i=1}^{n} (x^\star - \alpha_i^\star)[\psi(x) + \psi(p - x)]$ (polynome en $x^\star$ de degré $n - 1$) au moyen de la formule de Lagrange que nous appliquerons sous forme d'intégrale.

Posons pour le moment

$$f^\star(x^\star) = \prod_{1}^{n} (x - a_i^\star), \qquad g^\star(x^\star) = \prod_{1}^{n} (x^\star - \alpha_i^\star), \tag{53}$$

et soit $h^\star(x^\star)$ une fonction analytique de $x^\star$; l'unique fonction rationnelle de $x^\star$, à dénominateur $g^\star(x^\star)$, qui prend les valeurs $h^\star(a_i^\star)$ pour $x^\star = a_i^\star (i = 1, \ldots, n)$ et qui s'annule à l'infini, est évidemment égale à

$$\frac{f^\star(x^\star)}{g^\star(x^\star)} \sum_{i=1}^{n} \frac{g^\star(a_i^\star)\, h^\star(a_i^\star)}{(x^\star - a_i^\star) f^{\star\prime}(a_i^\star)} = \frac{f^\star(x^\star)}{g^\star(x^\star)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma K_{a_i^\star}} \frac{g^\star(\xi^\star)\, h^\star(\xi^\star)}{(x^\star - \xi^\star) f^\star(\xi^\star)} d\xi^\star, \tag{54}$$

les $K_{a_i^\star}$ désignant ici de petits cercles de centres $\xi^\star = a_i^\star$.

Pour appliquer cette formule à notre problème, il faut poser [*voir* les équ. (51) et (52)]

$$h^*(\xi^*) = -\frac{f[\xi(\xi^*)]}{l[\xi(\xi^*)]}, \qquad \text{où } \xi^* = \xi(p-\xi),$$

donc

$$\psi(x) + \psi(p-x) = -\frac{f^*(x^*)}{g^*(x^*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma K_{a_i^*}} \frac{g^*(\xi^*) f[\xi(\xi^*)]}{f^*(\xi^*)\, l[\xi(\xi^*)]}\frac{d\xi^*}{x^*-\xi^*}, \tag{55}$$

et ici nous allons remplacer $x^*, \xi^*, a_i^*, \alpha_i^*$ respectivement par $px - x^2, \ldots, p\alpha_i - \alpha_i^2$. On a [*voir* les équ. (53) et (49)]

$$\frac{g^*(x^*)}{f^*(x^*)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{x^*-\alpha_i^*}{x^*-a_i^*} = \prod_{i=1}^{n}\frac{x^2-px-\alpha_i^2+p\alpha_i}{x^2-px-a_i^2+pa_i} = \prod_{i=1}^{n}\frac{(x-\alpha_i)(p-x-\alpha_i)}{(x-a_i)(p-x-a_i)} = l(x)\, l(p-x),$$

et avec ceci, l'équation (55) devient

$$\psi(x) + \psi(p-x) = -\frac{1}{l(x)\, l(p-x)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma K_{a_i}} f(\xi)\, l(p-\xi)\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{p-x-\xi}\right) d\xi,$$

ou, en remplaçant $\int_{\Sigma K_{a_i}}$ par $\int_{C_a}$, ce qui est permis en raison de nos hypothèses sur $k(x)$ et $f(x)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x) + \psi(p-x) = -\frac{1}{l(x)\, l(p-x)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} f(\xi)\, l(p-\xi)\left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{p-x-\xi}\right) d\xi \\ &\qquad [R(x-\xi) > 0,\ R(p-x-\xi) > 0]. \end{aligned}\right. \tag{56}$$

On passe de là à $\psi(x)$ grâce à la relation

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{1}{\zeta - x}[\psi(\zeta) + \psi(p-\zeta)]\, d\zeta \qquad [R(\zeta - x) > 0], \tag{57}$$

que l'on démontre en éloignant C_a respectivement vers l'infini des demi-plans gauche et droit pour les intégrales qui se rapportent à $\psi(\zeta)$ et à $\psi(p-\zeta)$. Les équations (56) et (57) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x) = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_{a+0}}\frac{d\zeta}{(\zeta-x)\, l(\zeta)\, l(p-\zeta)}\int_{C_a} f(\xi)\, l(p-\xi)\left(\frac{1}{\zeta-\xi} + \frac{1}{p-\zeta-\xi}\right) d\xi \\ &\qquad [R(\zeta - \xi) > 0], \end{aligned}\right. \tag{58}$$

et en amenant ici C_ξ à droite de C_ζ, on obtient, compte tenu de l'équation (46),

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_a}\frac{d\zeta}{(\zeta-x)\, l(\zeta)\, l(p-\zeta)}\int_{C_{a+0}} f(\xi)\, l(p-\xi)\left(\frac{1}{\xi-\zeta} - \frac{1}{p-\zeta-\xi}\right) d\xi \\ &\qquad [R(\xi - \zeta) > 0]. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

En introduisant, d'autre part, cette expression dans le premier membre de l'équation (41), et en supposant seulement, pour le moment, outre l'inégalité (42), que $k(x)$ et $f(x)$ sont holomorphes et $O(|x|^{-\varepsilon})$ respectivement pour $R(x) \geqq a$ et dans une bande arbitrairement étroite $a \leqq R(x) \leqq a+\delta$, on obtient par un calcul simple

$$(60) \qquad L[\varphi(x)] = l(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a+0}} \frac{f(\xi)}{l(\xi)}\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{p-x-\xi}\right)d\xi,$$

et cette expression se réduit à $f(x)$ si nous admettons qu'en outre, $f(x)$ est holomorphe et $O(|x|^{-\varepsilon})$ dans tout le demi-plan $R(x) \leqq a+\delta$. Mais la formule (59) est valable sans qu'il faille ajouter des hypothèses concernant le comportement de $k(x)$ dans le demi-plan $R(x) < a$, et en particulier, il n'est pas nécessaire de supposer $k(x)$ comme fonction rationnelle de x. Notons ici encore la formule

$$(61) \qquad L\left(\psi(x) + \frac{f(x)}{l(x)}\right) = f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{f(\xi)}{l(\xi)}\,\frac{d\xi}{p-x-\xi},$$

où $\psi(x)$ est donné par l'équation (58) et qui est valable au même titre que la formule (60).

Nous cherchons maintenant à résoudre l'équation

$$(62) \qquad L[\varphi(x)] = \frac{1}{x-q} \qquad [R(q) < a].$$

Comme le deuxième membre de cette équation a un point singulier dans le demi-plan gauche, la formule (58) ne s'applique plus ici, mais en introduisant l'expression

$$\frac{1}{l(q)}\left(\frac{1}{x-q} - \frac{1}{p-q-x}\right)$$

dans le premier membre de (41), nous obtenons

$$L\left[\frac{1}{l(q)}\left(\frac{1}{x-q} - \frac{1}{p-q-x}\right)\right] = \frac{1}{x-q} - \frac{1}{l(q)}\,\frac{1}{p-q-x}$$
$$[R(p-q-x) > 0,\ R(x-q) > 0],$$

et d'autre part, la formule (58) fournit comme solution de l'équation

$$L[\varphi(x)] = \frac{1}{l(q)}\,\frac{1}{p-q-x},$$

dont le deuxième membre est holomorphe pour $R(x) \leqq a$, l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{1}{(\zeta - x)\,l(\zeta)\,l(p-\zeta)}\left(\frac{1}{\zeta - q} + \frac{1}{p-q-\zeta}\right)d\zeta.$$

Par conséquent, l'opération L étant additive, la solution de l'équation (62) est donnée par

$$(63) \qquad \varphi(x, q) = \frac{1}{l(q)}\left(\frac{1}{x-q} - \frac{1}{p-q-x}\right)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{1}{(\zeta - x)\,l(\zeta)\,l(p-\zeta)}\left(\frac{1}{\zeta - q} + \frac{1}{p-q-\zeta}\right)d\zeta;$$

à l'aide de cette fonction, nous obtenons maintenant la solution de l'équation (40) pour des $f(x)$ qui sont holomorphes et $O(|x|^{-\varepsilon})$ pour $R(x) \geqq a$, par la formule

$$(64) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a+0}} f(q)\varphi(x, q)\,dq$$
$$= \frac{f(x)}{l(x)\,l(p-x)} - \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a} \frac{k(\zeta)f(\zeta)}{l(\zeta)\,l(p-\zeta)}\left(\frac{1}{x-\zeta} - \frac{1}{p-x-\zeta}\right)d\zeta.$$

Enfin on obtient comme solution de cette équation pour des $f(x)$ qui ne sont holomorphes et $O(|x|^{-\varepsilon})$ que dans une bande arbitrairement étroite (17 a) et que l'on décomposera selon la formule (17 b)), la somme d'une expression (59) et d'une expression (64).

Il est facile d'étendre nos formules à des $k(x)$ et $f(x)$ particuliers qui ne sont pas $O(|x|^{-\varepsilon})$ à l'infini; par exemple, on déduit de (53), en formant l'expression $\lim\limits_{q \to -\infty}(-q\varphi(x, q))$, que l'équation

$$(65\ a) \qquad L[\varphi(x)] = 1$$

est résolue par la fonction

$$(65\ b) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_a}^{*} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)\,l(\zeta)\,l(p-\zeta)},$$

$\int^{*}$ désignant ici la valeur principale au sens de Cauchy.

Notons encore que l'équation intégrale

$$(66) \qquad \varphi(x) - \frac{z}{2\pi i}\int_{C_a}\left(k_0(\xi) + \frac{k_1(\xi)}{p-x-\xi}\right)[\varphi(x) + \varphi(\xi)]\,d\xi = f(x),$$

où nous supposerons [outre les hypothèses antérieures sur $k(x)$ et $f(x)$] que $\int_{C_a} k_0(\xi)\,d\xi$ existe et que $k_0(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ sur C_a, se réduit essentiellement, à l'aide de transformations élémentaires, à une équation du type (41).

4. Résolution d'un système de n équations intégrales linéaires simultanées. — Finalement, nous donnons ici, sans démonstration, les formules de résolution d'un certain système de n équations intégrales linéaires non homogènes à n variables complexes ($n = 1, 2, \ldots$) que nous avions établi jadis au cours de nos recherches concernant un problème du calcul des probabilités [1], sans pouvoir le résoudre alors de manière générale.

---

[1] *Ueber das Warteproblem* (*Math. Zeitschr.*, t. 38, 1934, p. 552). Voir aussi : *Sur l'application de la théorie des fonctions au calcul de certaines probabilités* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. X, fasc. I, 1946).

Ce système est donné par les équations suivantes, où nous avons modifié quelque peu les notations utilisées dans le Mémoire cité :

$$
(67\,a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_\lambda(x_1,\,\ldots,\,x_\lambda;\,p,\,z) = \frac{z}{2\pi i}\int_{C^*} \varepsilon(-\xi)\\
&\quad\times\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{p-\xi-\sum_1^\lambda x_i}\right)\varphi_{\lambda+1}(x_1,\,\ldots,\,x_\lambda,\,\xi;\,p,\,z)\,d\xi = \delta_0^\lambda\\
&\qquad\left[R\left(p-\xi-\sum_1^\lambda x_i\right)>0;\ 0\leqq\lambda\leqq n-1\right],
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(67\,b)\qquad \varphi_n(x_1,\,\ldots,\,x_n;\,p,\,z) = \sum_{\rho=0}^{n-1}(-1)^{n-1-\rho}\sum_{1'\ldots\rho'}\varphi_\rho(x_{1'},\,\ldots,\,x_{\rho'};\,p,\,z).
$$

Ici, $C^* = C_{-\delta}$ est une parallèle à l'axe imaginaire, à gauche de cet axe et $\varepsilon(x)$(²) est supposé comme holomorphe et $O(|x|^{-\varepsilon})$ pour $-\infty < R(x) \leqq \delta$; dans l'équation (67 *b*), la somme $\sum_{1'\ldots\rho'}$ doit être étendue à toutes les C_n^ρ combinaisons ρ à ρ des n indices $1,\,\ldots,\,n$.

Pour $|z|$ suffisamment petit, la solution de ces équations est fournie par les formules

$$
(68)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_\nu(x_1,\,\ldots,\,x_\nu;\,p,\,z)\\
&\quad = (-1)^{n-1}(n-\nu)\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{C_1^*}\cdots\int_{C_{n-1}^*}\frac{1}{(\zeta_1-x_1)\ldots(\zeta_\nu-x_\nu)\zeta_{\nu+1}\ldots\zeta_{n-1}}\\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{l(\zeta_i)}\left[\frac{1}{l\left(p-\sum_1^{n-1}\zeta_i\right)}-\frac{1}{1+z}\right]d\zeta_1\ldots d\zeta_{n-1}\\
&\quad +(-1)^{n-1}\sum_{1'\ldots(\nu-1)'}\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{C_1^*}\cdots\int_{C_{n-1}^*}\frac{1}{(\zeta_1-x_{1'})\ldots(\zeta_{\nu-1}-x_{(\nu-1)'})\zeta_\nu\ldots\zeta_{n-1}}\\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{l(\zeta_i)}\left[\frac{1}{l\left(p-\sum_1^{n-1}\zeta_i\right)}-\frac{1}{1+z}\right]d\zeta_1\ldots d\zeta_{n-1}+\frac{(-1)^{\nu+1}z^{n-\nu}}{(1+z)^n}+\delta_0^\nu\\
&\{R(\zeta_i-x_{i'})>0,\ (i,\,i'=1,\,\ldots,\,n-1);\ R(x_i)<-\delta\ (i=1,\,\ldots,\,n-1);\ R(p)>-n\delta\},\\
&\qquad\qquad \nu = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1;
\end{aligned}
\right.
$$

(²) Dans notre Mémoire, $\varepsilon(x)$ est défini par une intégrale de Stieltjes

$$
\varepsilon(x) = \int_0^\infty e^{xt}\,df(t),
$$

où $f(t)$ est une fonction monotone au sens faible, avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; en d'autres termes, $\varepsilon(x)$ est la fonction caractéristique pour la fonction de répartition $f(t)$.

où la somme $\sum\limits_{1'\ldots(\nu-1)'}$ ($\Sigma = 1$, pour $\nu = 1$; $= 0$, pour $\nu = 0$) doit être étendue à toutes les ν combinaisons $\nu - 1$ à $\nu - 1$ des indices $1, \ldots, \nu$ ([3]) et où nous avons posé

$$l(\zeta) = 1 + z - z\varepsilon(-\zeta). \tag{69}$$

Signalons que pour $n = 2$, le système (67 a), (67 b) se réduit essentiellement à un cas particulier de l'équation (66).

([3]) Les n fonctions $B_{\nu,0}(p_1, \ldots, p_\nu; p, q, z)$ qui figurent dans ([1]), contiennent encore un paramètre supplémentaire q et se déduisent des fonctions φ_ν par les formules

$$B_{\nu,0}(p_1, \ldots, p_\nu; p, q, z) = \frac{1}{q-z}\varphi_\nu\left(p_1, \ldots, p_\nu; p-q, \frac{z}{q-z}\right) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$