JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROBIN

Étude de l'énergie cinétique d'un liquide visqueux incompressible emplissant l'espace, quand le temps croît indéfiniment

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 33-49.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__33_0>

Étude de l'énergie cinétique d'un liquide visqueux incompressible emplissant l'espace, quand le temps croît indéfiniment (1);

Par Louis ROBIN.

Cas des mouvements dans l'espace a trois dimensions.

1. Notations. — t désigne le temps; $t = 0$ est l'époque initiale; x, un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3); $u_i(x, t)$ est la vitesse du liquide; $u_i(x, 0)$ est donnée; p est la pression; r, la distance de deux points, x et y — (ou y et z).

Un élément de volume engendré par x est désigné par δx; ν est le quotient du coefficient de viscosité μ par la densité ρ; $\mathcal{J}^2(t)$ est l'énergie cinétique de l'ensemble du liquide à l'instant t.

Nous utilisons la convention de « l'indice muet » : un terme, où un indice figure deux fois, représente la somme des termes obtenus en donnant à cet indice successivement les valeurs 1, 2, 3.

Δ désigne le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$; $U(x, t)$ le potentiel d'où dérivent les forces extérieures, et D, l'espace entier.

$V(t)$ est le maximum de $[u_i(x, t) u_i(x, t)]^{\frac{1}{2}}$. $\mathcal{J}^2(0)$ et $V(0)$ sont supposées finies.

2. Avec les hypothèses faites, les équations de Navier s'écrivent

$$\nu \Delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} - U\right), \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

La théorie de la chaleur nous fournit la solution

$$u_i(x, t) = \frac{1}{8(\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \iiint_D e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} u_i(y, 0)\, \delta y, \qquad p(x, t) = \rho U(x, t).$$

---

(1) Nous admettons que, dans les équations de Navier, les termes rectangles peuvent être négligés devant les termes linéaires et que les forces extérieures appliquées dérivent d'un potentiel.

Nous en déduisons l'énergie cinétique de l'ensemble du liquide; on a

$$u_i(x,t)\,u_i(x,t)=\frac{1}{64(\pi\nu t)^3}\iiint_D\iiint_D e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\nu t}}\,u_i(y,0)\,u_i(z,0)\,\delta y\,\delta z,$$

r' désignant la distance du point x au point z, et

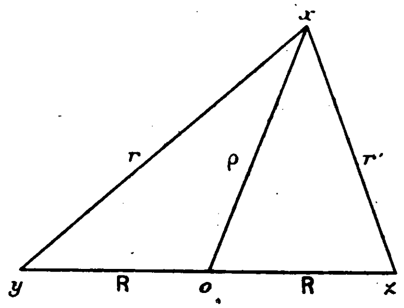
$$\mathcal{J}^2(t)=\frac{1}{64(\pi\nu t)^3}\iiint_D\iiint_D u_i(y,0)\,u_i(z,0)\,\delta y\,\delta z\iiint_D e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\nu t}}\,\delta x.$$

La dernière intégrale se calcule aisément, nous avons (*voir* la figure)

$$r^2+r'^2=2(\rho^2+R^2),$$

$$\iiint_D e^{-\frac{\rho^2}{2\nu t}}\,\delta x=4\pi\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2\nu t}}\rho^2\,d\rho=4\pi\nu t\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2\nu t}}\,d\rho=(2\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}.$$

Fig. 1.



En changeant de notations et en désignant maintenant par r la distance des points y et z, nous avons donc

$$\mathcal{J}^2(t)=\frac{1}{(8\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}}\iiint_D\iiint_D e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}\,u_i(y,0)\,u_i(z,0)\,\delta y\,\delta z.$$

$\mathcal{J}^2(0)$ étant supposée finie, l'inégalité de Schwarz montre que $\mathcal{J}^2(t)$ est bornée

$$\mathcal{J}^2(t)\leqq\frac{1}{(8\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}}\iiint_D\iiint_D e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}\,u_i(y,0)\,u_i(z,0)\,\delta y\,\delta z=\iiint_D u_i(y,0)\,u_i(y,0)\,\delta y=\mathcal{J}^2(0).$$

Posons $\frac{1}{\sqrt{8\nu t}}=\lambda$, il vient

$$\mathcal{J}^2(t)=\frac{\lambda^3}{\pi^{\frac{3}{2}}}\iiint_D\iiint_D e^{-\lambda^2 r^2}\,u_i(y,0)\,u_i(z,0)\,\delta y\,\delta z.$$

Pour étudier l'allure de $\mathcal{J}^2(t)$, lorsque t augmente indéfiniment (ou lorsque λ tend vers zéro), nous ferons l'hypothèse supplémentaire

$$[u_i(y,0)\,u_i(y,0)]^{\frac{1}{2}}<\frac{U}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}},$$

où U, α et β sont des constantes positives et où $R = (y_j y_j)^{\frac{1}{2}}$, hypothèse qui a comme conséquence que $\mathcal{J}^2(0)$ a un sens.

En posant $R' = (z_j z_j)^{\frac{1}{2}}$, nous avons alors

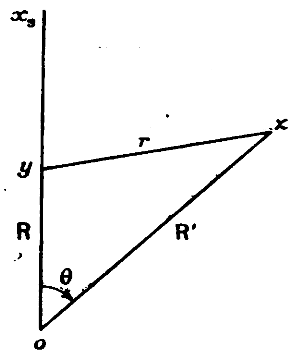
$$\mathcal{J}^2(t) < \frac{U^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \lambda^3 \iiint_D \iiint_D \frac{e^{-\lambda^2 r^2}\,\delta y\,\delta z}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}(1+\beta R')^{\frac{3}{2}+\alpha}} = \frac{U^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} I_\alpha(\lambda).$$

Si $\alpha < \alpha'$, nous voyons tout de suite que $I_{\alpha'}(\lambda) < I_\alpha(\lambda)$, quel que soit λ.

Pour simplifier l'expression de $I_\alpha(\lambda)$, nous passons en coordonnées polaires de l'espace

$$r^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta, \qquad \delta y = 4\pi R^2\,dR, \qquad \delta z = 2\pi R'^2 \sin\theta\,dR'\,d\theta.$$

Fig. 2.



Nous avons donc

$$\begin{aligned} I_\alpha(\lambda) &= 8\pi^2\lambda^3 \int_0^{+\infty} \frac{R^2 e^{-\lambda^2 R^2}}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\,dR \int^{+\infty} \frac{R'^2 e^{-\lambda^2 R'^2}}{(1+\beta R')^{\frac{3}{2}+\alpha}}\,dR' \int_0^{\pi} e^{2\lambda^2 RR'\cos\theta}\sin\theta\,d\theta \\ &= 4\pi^2\lambda \int_0^{+\infty} \frac{R\,dR}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{R'\left[e^{-\lambda^2(R'-R)^2} - e^{-\lambda^2(R'+R)^2}\right]}{(1+\beta R')^{\frac{3}{2}+\alpha}}\,dR'. \end{aligned}$$

Nous posons encore $\lambda R = u$, $\lambda R' = v$, u et v sont des quantités purement numériques, sans dimension, et il vient

$$I_\alpha(\lambda) = 4\pi^2\lambda^{2\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^{\frac{3}{2}+\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{v\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\,dv,$$

ce qui montre que $I_\alpha(\lambda)$ et par suite $\mathcal{J}^2(t)$ tendent vers zéro avec λ ou $\frac{1}{t}$. La partie principale de $I_\alpha(\lambda)$, pour $\lambda \to 0$, est

$$I_\alpha^0(\lambda) = \frac{4\pi^2\lambda^{2\alpha}}{\beta^{3+2\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{1}{2}+\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}}{v^{\frac{1}{2}+\alpha}}\,dv,$$

pourvu que $I_\alpha^0(\lambda)$ ait un sens.

3. Vérifions la convergence de I et étudions celle de I^0.

a. Dans $I_\alpha(\lambda)$, la fonction intégrée est finie et continue dans tout le champ pour $\lambda \neq 0$. Au contraire, dans $I_\alpha^0(\lambda)$, la fonction intégrée devient infinie, soit pour $u = 0$, soit pour $v = 0$.

Supposons u infiniment petit, nous avons

$$e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2} = e^{-v^2}(e^{2uv-u^2} - e^{-2uv-u^2}) = e^{-v^2}(4uv + \ldots),$$

donc $I_\alpha^0(\lambda)$ converge, pourvu que

$$\alpha - \frac{1}{2} < 1, \qquad \text{ou} \qquad \alpha < \frac{3}{2}.$$

Si u et v tendent simultanément vers zéro, nous avons

$$e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2} = 4uv + \ldots,$$

et la conclusion reste la même.

b. Le champ d'intégration est infini. La convergence de

$$\int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty} \frac{e^{-(v+u)^2}}{(uv)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\,du\,dv, \qquad a > 0,$$

est évidente et il ne peut y avoir de difficultés que pour

$$J_\alpha^0 = \int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty} \frac{e^{-(v-u)^2}}{(uv)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\,du\,dv.$$

Posons $u = r\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, $v = r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, il vient

$$J_\alpha^0 = 2^{\frac{1}{2}+\alpha}\int_{a\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha}}\int_{-\left(\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{a}{r}\right)}^{\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{a}{r}} \frac{e^{-2r^2\sin^2\varphi}}{\cos^{\frac{1}{2}+\alpha}2\varphi}\,d\varphi = 2^{\frac{3}{2}+\alpha}\int_{a\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{a}{r}} \frac{e^{-2r^2\sin^2\varphi}}{\cos^{\frac{1}{2}+\alpha}2\varphi}\,d\varphi.$$

Nous pouvons écrire

$$J_\alpha^0 = 2^{\frac{3}{2}+\alpha}\int_{a\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha}}\int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-2r^2\sin^2\varphi}}{\cos^{\frac{1}{2}+\alpha}2\varphi}\,d\varphi + 2^{\frac{3}{2}+\alpha}\int_{a\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{a}{r}} \frac{e^{-2r^2\sin^2\varphi}}{\cos^{\frac{1}{2}+\alpha}2\varphi}\,d\varphi.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{r^{1-\gamma}}$, avec $0 < \gamma < 1$, le deuxième terme a un sens; quant au premier, il est inférieur à

$$\frac{2^{\frac{3}{2}+\alpha}}{\cos^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{2}{(a\sqrt{2})^{1-\gamma}}}\int_{a\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dr}{r^{1+2\alpha-\gamma}},$$

il suffit donc de prendre $\gamma < 2\alpha$, et la convergence de J_α^0 est bien assurée, pourvu que $\alpha > 0$.

Il s'agit, d'ailleurs, seulement d'une vérification, puisque nous savions que $\mathcal{J}^2(t)$ a un sens.

En résumé, pour $\alpha < \frac{3}{2}$, $\mathcal{J}^2(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, comme $\frac{1}{t^\alpha}$, et nous avons

$$\mathcal{J}(t) < \frac{AU}{\beta^{\frac{3}{2}+\alpha}(\gamma t)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

où A est une constante sans dimension.

Pour $\alpha \geqq \frac{3}{2}$, cette inégalité n'est plus valable, mais nous savons déjà que

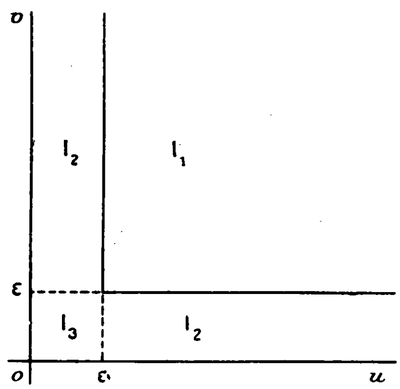
$$I_{\alpha'}(\lambda) < I_\alpha(\lambda), \qquad \text{quel que soit } \lambda, \text{ si } \alpha < \alpha';$$

$\mathcal{J}^2(t)$ tend donc vers zéro, quel que soit $\alpha > 0$, lorsque $t \to +\infty$. Voici, du reste, les études détaillées correspondant à $\alpha > \frac{3}{2}$ et à $\alpha = \frac{3}{2}$.

4. *Cas* $\alpha > \frac{3}{2}$. — Nous avons toujours

$$\mathcal{J}^2(t) < \frac{U^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} I_\alpha(\lambda), \qquad I_\alpha(\lambda) = 4\pi^2\lambda^{2\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{v\left[e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}dv.$$

Fig. 3.



Nous avons (*voir* figure ci-dessus)

$$I_\alpha(\lambda) = I_1 + 2I_2 + I_3,$$

$$I_1 \quad \to 0, \qquad \text{avec } \lambda, \text{ comme } \lambda^{2\alpha},$$

$$I_2 \quad = 4\pi^2\lambda^{2\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\int_0^{\varepsilon}\frac{v\left[e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}dv,$$

$$I_3 \quad = 4\pi^2\lambda^{2\alpha}\int_0^{\varepsilon}\frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\int_0^{\varepsilon}\frac{v\left[e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}dv.$$

Étudions d'abord I_2; *u* étant fini et *v* infiniment petit, nous avons

$$e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}=e^{-u^2}(4uv+\ldots)$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{v\left[e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}dv=4u\,e^{-u^2}\int_0^\varepsilon\frac{v^2\,dv}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}+\ldots$$

$$=\frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^2}\int_0^\varepsilon\frac{(\lambda+\beta v)^2-\lambda(\lambda+2\beta v)}{(\lambda+\beta v)^{\frac{3}{2}+\alpha}}dv$$

$$=\frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^2}\left[\int_0^\varepsilon\frac{dv}{(\lambda+\beta v)^{\alpha-\frac{1}{2}}}-2\lambda\int_0^\varepsilon\frac{(\lambda+\beta v)\,dv}{(\lambda+\beta v)^{\alpha+\frac{3}{2}}}+\lambda^2\int_0^\varepsilon\frac{dv}{(\lambda+\beta v)^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^3}\left[\frac{1}{\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\lambda^{\alpha-\frac{3}{2}}}-\frac{\alpha+\frac{3}{2}}{\alpha^2-\frac{1}{4}}\frac{1}{\lambda^{\alpha-\frac{3}{2}}}+\ldots\right]$$

$$=\frac{8u\,e^{-u^2}}{\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}\frac{1}{\beta^3\lambda^{\alpha-\frac{3}{2}}}+\ldots.$$

I_2 a donc comme partie principale, quand $\lambda\to 0$,

$$I_2^0=\frac{32\pi^2\lambda^{\frac{3}{2}+\alpha}}{\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\beta^{\frac{9}{2}+\alpha}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-u^2}\,du}{u^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Étudions maintenant I_3; *u* et *v* étant infiniment petits, nous avons

$$e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}=4uv+\ldots$$

$$\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon\frac{uv\left[e^{-(v-u)^2}-e^{-(v+u)^2}\right]}{\left[(\lambda+\beta u)(\lambda+\beta v)\right]^{\frac{3}{2}+\alpha}}du\,dv$$

$$=4\left[\int_0^\varepsilon\frac{u^2\,du}{(\lambda+\beta u)^{\frac{3}{2}+\alpha}}\right]^2+\ldots=\frac{16}{\beta^6\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2\lambda^{2\alpha-3}}+\ldots.$$

Et par suite

$$I_\alpha(\lambda)=\frac{64\pi^2\lambda^3}{\beta^6\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2}+\ldots,$$

les termes non écrits tendant vers zéro avec λ, plus vite que λ^3.

Donc finalement

$$\mathcal{J}(t)<\frac{AU}{\beta^3(\nu t)^{\frac{3}{4}}}\qquad (A=\text{const. sans dimension}).$$

3. *Cas* $\alpha = \frac{3}{2}$. — Nous avons alors

$$I_{\frac{3}{2}}(\lambda) = 4\pi^2\lambda^3 \int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^3} \int_0^{+\infty} \frac{v\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^3}\,dv.$$

Pour chercher la partie principale de $I_{\frac{3}{2}}(\lambda)$, pour $\lambda \to 0$, nous effectuons la même décomposition que dans le cas $\alpha > \frac{3}{2}$

$$I_{\frac{3}{2}}(\lambda) = I_1 + 2I_2 + I_3,$$

$I_1 \to 0$, avec λ, comme λ^3,

$$I_2 = 4\pi^2\lambda^3 \int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^3} \int_0^{\varepsilon} \frac{v\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^3}\,dv,$$

$$I_3 = 4\pi^2\lambda^3 \int_0^{\varepsilon} \frac{u\,du}{(\lambda+\beta u)^3} \int_0^{\varepsilon} \frac{v\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^3}\,dv.$$

Nous avons

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{v\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{(\lambda+\beta v)^3}\,dv$$

$$= \frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^2} \int_0^{\varepsilon} \frac{(\lambda+\beta v)^2 - 2\lambda(\lambda+\beta v) + \lambda^2}{(\lambda+\beta v)^3}\,dv + \ldots$$

$$= \frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^2}\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{dv}{\lambda+\beta v} - 2\lambda \int_0^{\varepsilon} \frac{dv}{(\lambda+\beta v)^2} + \lambda^2 \int_0^{\varepsilon} \frac{dv}{(\lambda+\beta v)^3}\right] + \ldots$$

$$= \frac{4u\,e^{-u^2}}{\beta^3}\left[-\log\lambda - \frac{3}{2} + \log(\lambda+\beta\varepsilon) + \ldots\right].$$

I_2 tend donc vers zéro avec λ, comme

$$I_2^0 = \frac{16\pi^2}{\beta^6}\lambda^3 \log\frac{1}{\lambda} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,du.$$

D'autre part

$$\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{uv\left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2}\right]}{[(\lambda+\beta u)(\lambda+\beta v)]^3}\,du\,dv = 4\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{u^2\,du}{(\lambda+\beta u)^3} + \ldots\right]^2 = \frac{4}{\beta^6}(\log^2\lambda + \ldots).$$

La partie principale de I_3 pour $\lambda \to 0$ est donc

$$I_3^0 = \frac{16\pi^2}{\beta^6}\lambda^3 \log^2\lambda$$

Et par suite

$$I_{\frac{3}{2}}(\lambda) = \frac{A}{\beta^6}\lambda^3 \log^2\lambda + \ldots, \qquad \mathcal{J}(t) < \frac{AU}{\beta^5}\,\frac{\log(\nu t)}{(\nu t)^{\frac{3}{4}}},$$

où les A sont encore des constantes numériques, sans dimension.

6. En résumé, nous avons les résultats suivants, au sujet du comportement de l'énergie cinétique $I^2(t)$ du liquide, quand $t \to \infty$

1° Si $\alpha < \frac{3}{2}$, $\qquad \mathcal{I}(t) < \dfrac{AU}{\beta^{\frac{3}{2}+\alpha}(\nu t)^{\frac{\alpha}{2}}}$;

2° » $\alpha > \frac{3}{2}$, $\qquad \mathcal{I}(t) < \dfrac{AU}{\beta^3(\nu t)^{\frac{3}{4}}}$;

3° » $\alpha = \frac{3}{2}$, $\qquad \mathcal{I}(t) < \dfrac{AU\log(\nu t)}{\beta^3(\nu t)^{\frac{3}{4}}}$.

Par hypothèse, les vitesses initiales vérifient l'inégalité

$$[u_j(x,\, 0)\, u_j(x,\, 0)]^{\frac{1}{2}} < \frac{U}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}}, \qquad \left[R = (x_j x_j)^{\frac{1}{2}};\ \alpha,\ \beta > 0\right].$$

Cas des mouvements plans.

Les notations sont les mêmes que dans le cas des mouvements dans l'espace à trois dimensions, à cela près que chaque indice ne prend plus que les valeurs 1 et 2.

1. Les équations de Navier s'écrivent comme dans le cas de l'espace à trois dimensions et la théorie de la chaleur nous fournit encore la solution

$$u_i(x,\, t) = \frac{1}{4\pi\nu t}\iint_D e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} u_i(y,\, 0)\, \delta y, \qquad p(x,\, t) = \rho U(x,\, t).$$

Nous avons

$$u_j(x,\, t)\, u_j(x,\, t) = \frac{1}{16\pi^2\nu^2 t^2}\iint_D \iint_D e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\nu t}} u_j(y,\, 0)\, u_j(z,\, 0)\, \delta y\, \delta z;$$

$$r' = \overline{xz}, \qquad \mathcal{I}^2(t) = \frac{1}{16\pi^2\nu^2 t^2}\iint_D \iint_D u_j(y,\, 0)\, u_j(z,\, 0)\, \delta y\, \delta z \iint_D e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\nu t}} \delta x;$$

$$r^2 + r'^2 = 2(\rho^2 + R^2), \qquad \iint_D e^{-\frac{\rho^2}{2\nu t}} \delta x = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2\nu t}} \rho\, d\rho = 2\pi\nu t.$$

D'où, en changeant de notations, comme dans le cas de l'espace, et en désignant maintenant par r la distance $\overline{yz}$

$$\mathcal{I}^2(t) = \frac{1}{8\pi\nu t}\iint_D \iint_D e^{-\frac{r^2}{8\nu t}} u_j(y,\, 0)\, u_j(z,\, 0)\, \delta y\, \delta z.$$

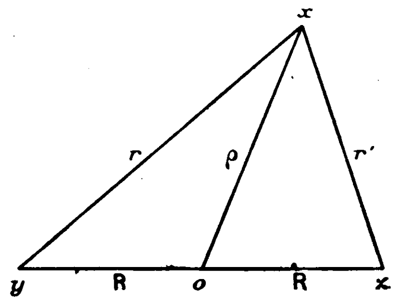
$\mathcal{I}^2(0)$ étant supposée finie, l'inégalité de Schwarz montre encore que $\mathcal{I}^2(t)$ est bornée

$$\mathcal{I}^2(t) \leqq \frac{1}{8\pi\nu t}\iint_D \iint_D e^{-\frac{r^2}{8\nu t}} u_j(y,\, 0)\, u_j(y,\, 0)\, \delta y\, \delta z = \iint_D u_j(y,\, 0)\, u_j(y,\, 0)\, \delta y = \mathcal{I}^2(0).$$

Nous posons encore $\frac{1}{\sqrt{8\nu t}} = \lambda$, d'où

$$\mathcal{J}^2(t) = \frac{\lambda^2}{\pi}\iint_D\iint_D e^{-\lambda^2 r^2} u_j(y, 0)\, u_j(z, 0)\, \delta y\, \delta z.$$

Fig. 4.



Pour étudier l'allure de $\mathcal{J}^2(t)$, lorsque t augmente indéfiniment (ou lorsque λ tend vers zéro), nous ferons alors l'hypothèse supplémentaire

$$[u_j(y, 0)\, u_j(y, 0)]^{\frac{1}{2}} < \frac{U}{(1+\beta R)^{1+\alpha}},$$

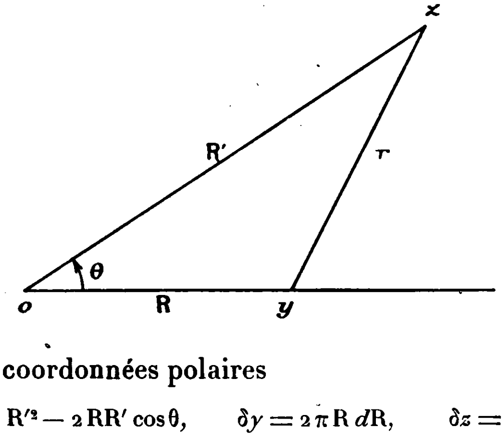
où U, α et β sont encore des constantes positives et où $R = (y_j y_j)^{\frac{1}{2}}$, hypothèse qui a encore comme conséquence que $\mathcal{J}^2(0)$ a un sens.

En posant $R' = (z_j z_j)^{\frac{1}{2}}$, nous avons l'inégalité

$$\mathcal{J}^2(t) < \frac{U^2}{\pi}\lambda^2 \iint_D\iint_D \frac{e^{-\lambda^2 r^2}\,\delta y\,\delta z}{[(1+\beta R)(1+\beta R')]^{1+\alpha}} = \frac{U^2}{\pi} I_\alpha(\lambda),$$

$\alpha < \alpha'$ entraîne encore $I_{\alpha'}(\lambda) < I_\alpha(\lambda)$.

Fig. 5.



Nous passons en coordonnées polaires

$$r^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta, \qquad \delta y = 2\pi R\, dR, \qquad \delta z = R'\, dR'\, d\theta,$$

d'où

$$I_\alpha(\lambda) = 2\pi\lambda^2 \int_0^{+\infty} \frac{R\, e^{-\lambda^2 R^2}}{(1+\beta R)^{1+\alpha}}\, dR \int_0^{+\infty} \frac{R'\, e^{-\lambda^2 R'^2}}{(1+\beta R')^{1+\alpha}}\, dR' \int_0^{2\pi} e^{2\lambda^2 RR' \cos\theta}\, d\theta.$$

Nous posons encore $R = \frac{u}{\lambda}$, $R' = \frac{v}{\lambda}$, il vient

$$I_\alpha(\lambda) = 2\pi\lambda^{2\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u\, e^{-u^2}\, du}{(1+\beta u)^{1+\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{v e^{-v^2}\, dv}{(\lambda+\beta v)^{1+\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{2uv\cos\theta}\, d\theta.$$

Nous avons, comme il est bien connu et facile à voir, en développant l'exponentielle,

$$\int_0^{2\pi} e^{2uv\cos\theta}\, d\theta = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(uv)^{2p}}{(p!)^2} = 2\pi J_0(2iuv),$$

J_0 désignant la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Par suite

$$I_\alpha(\lambda) = 4\pi^2\lambda^{2\alpha} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{uv\, e^{-(u^2+v^2)} J_0(2iuv)}{[(\lambda+\beta u)(\lambda+\beta v)]^{1+\alpha}}\, du\, dv,$$

expression qui montre que $I_\alpha(\lambda)$ tend vers zéro avec λ et que sa partie principale est

$$I_\alpha^0(\lambda) = \frac{4\pi^2\lambda^{2\alpha}}{\beta^{2(1+\alpha)}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+v^2)}}{(uv)^\alpha} J_0(2iuv)\, du\, dv,$$

pourvu que I_α^0 ait un sens.

2. Comme dans le cas des mouvements à trois dimensions, nous vérifions la convergence des intégrales qui représentent $I_\alpha(\lambda)$ et étudions la convergence de celles qui représentent $I_\alpha^0(\lambda)$.

a. Dans $I_\alpha(\lambda)$, la fonction intégrée est finie et continue dans tout le champ d'intégration, pour $\lambda \neq 0$. Au contraire, la fonction intégrée devient infinie, pour $u = 0$ ou pour $v = 0$, dans $I_\alpha^0(\lambda)$, $[J_0(0) = 1]$.

Supposons v infiniment petit, la fonction sous le signe $\iint$ tend vers $+\infty$, comme $\frac{1}{v^\alpha}$. Il est donc nécessaire et suffisant de supposer $\alpha < 1$, pour que $I_\alpha^0(\lambda)$ converge.

Si u et v tendent simultanément vers zéro, la fonction intégrée augmente indéfiniment comme $\frac{1}{(uv)^\alpha}$ et la même conclusion reste valable.

b. Le champ d'intégration est infini. La question se présente exactement de la même façon pour I_α et I_α^0. Nous pouvons donc prévoir que cette circonstance permettra la convergence de I_α et de I_α^0, quel que soit α et que, par suite, seule la circonstance *a.* donne une condition de convergence pour $I_\alpha^0 (\alpha < 1)$.

La partie principale de $J_0(2iuv)$ pour uv infini est $\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{e^{2uv}}{(uv)^{\frac{1}{2}}}$.

La partie principale de la fonction intégrée, dans $I_\alpha^0(\lambda)$, pour uv infini, est donc, à un facteur constant près,

$$\frac{e^{-(v-u)^2}}{(uv)^{\frac{1}{2}+\alpha}}.$$

Nous sommes donc ramené exactement à la même intégrale double (J_α^0) que dans le cas des mouvements à trois dimensions.

$I_\alpha(\lambda)$ converge donc bien, pourvu que $\alpha > 0$, et il en est de même pour $I_\alpha^0(\lambda)$, si $\alpha < 1$.

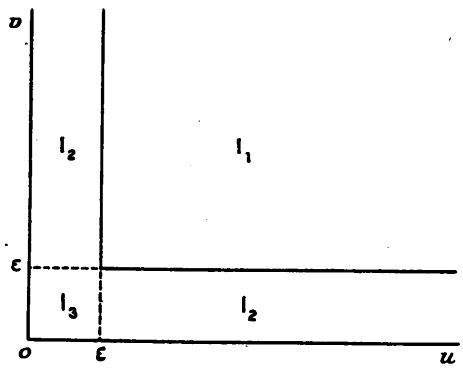
Par suite, si $\alpha < 1$, nous avons

$$\mathcal{J}(t) < \frac{AU}{\beta^{1+\alpha}(\nu t)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

où A est une constante sans dimension.

3. *Cas où* $\alpha > 1$: — Pour calculer dans ce cas la partie principale de $I_\alpha(\lambda)$, pour $\lambda \to 0$, nous procédons d'une façon tout à fait analogue à celle suivie pour le cas correspondant des mouvements à trois dimensions.

Fig. 6.



Nous avons encore

$$I_\alpha(\lambda) = I_1 = 2I_2 + I_3,$$

$$I_1 \quad \to 0, \quad \text{avec } \lambda, \text{ comme } \lambda^{2\alpha},$$

$$I_2 = 4\pi^2\lambda^{2\alpha}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{u\,e^{-u^2}\,du}{(\lambda+\beta u)^{1+\alpha}}\int_0^\varepsilon\frac{v\,e^{-v^2}J_0(2iuv)}{(\lambda+\beta v)^{1+\alpha}}\,dv,$$

$$I_3 = 4\pi^2\lambda^{2\alpha}\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon\frac{uv\,e^{-(u^2+v^2)}J_0(2iuv)}{[(\lambda+\beta u)(\lambda+\beta v)]^{1+\alpha}}\,du\,dv.$$

Pour x infiniment petit, nous avons

$$J_0(2ix) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \ldots,$$

par suite

$$\int_0^\varepsilon \frac{v\,e^{-v^2} J_0(2iuv)}{(\lambda+\beta v)^{1+\alpha}}\,dv$$
$$= \int_0^\varepsilon \frac{v\,dv}{(\lambda+\beta v)^{1+\alpha}} + \ldots$$
$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\varepsilon \frac{dv}{(\lambda+\beta v)^{\alpha}} - \frac{\lambda}{\beta}\int_0^\varepsilon \frac{dv}{(\lambda+\beta v)^{1+\alpha}} + \ldots$$
$$= \frac{-1}{(\alpha-1)\beta^2}\left[\frac{1}{(\lambda+\beta\varepsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}}\right] + \frac{\lambda}{\alpha\beta^2}\left[\frac{1}{\lambda+\beta\varepsilon)^{\alpha}} - \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right] + \ldots$$
$$= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\beta^2\lambda^{\alpha-1}} + \ldots.$$

La partie principale de I_2, pour $\lambda \to 0$, est donc

$$I_2^0 = \frac{4\pi^2\lambda^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha-1)\beta^{3+\alpha}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^\alpha}\,du.$$

Pour I_3, nous avons

$$\left[\int_0^\varepsilon \frac{u\,du}{(u+\beta u)^{1+\alpha}}\right]^2 = \frac{1}{\alpha^2(\alpha-1)^2\beta^4\lambda^{2\alpha-2}} + \ldots.$$

Par suite, la partie principale de I_3, pour $\lambda \to 0$, est

$$I_3^0 = \frac{4\pi^2\lambda^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2\beta^4},$$

et nous avons

$$I_\alpha(\lambda) = \frac{4\pi^2\lambda^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2\beta^4} + \ldots,$$

les termes non écrits tendant vers zéro, avec λ, plus vite que λ^2.

Donc, finalement, pour $\alpha > 1$,

$$\mathcal{J}(t) < \frac{AU}{\beta^2(\nu t)^{\frac{1}{2}}}.$$

4. *Cas où* $\alpha = 1$. — Nous effectuons toujours la même décomposition

$$I(\lambda) = I_1 + 2I_2 + I_3.$$

I_1 tend vers zéro comme λ^2.

$$I_2 = 4\pi^2\lambda^2\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{u\,e^{-u^2}\,du}{(\lambda+\beta u)^2}\int_0^\varepsilon \frac{v\,e^{-v^2}J_0(2iuv)}{(\lambda+\beta v)^2}\,dv,$$

$$I_3 = 4\pi^2\lambda^2\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon \frac{uv\,e^{-(u^2+v^2)}J_0(2iuv)}{[(\lambda+\beta u)(\lambda+\beta v)]^2}\,du\,dv.$$

Nous avons

$$\int_0^\varepsilon \frac{v\,dv}{(\lambda+\beta v)^2} = \frac{1}{\beta^2}[\log(\lambda+\beta\varepsilon)-\log\lambda] - \frac{\lambda}{\beta^2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\beta\varepsilon}\right) = \frac{1}{\beta^2}\log\frac{1}{\lambda}+\ldots,$$

et par suite

$$I_2^0 = \frac{4\pi^2\lambda^2}{\beta^4}\log\frac{1}{\lambda}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\,du, \qquad I_3^0 = \frac{4\pi^2\lambda^2}{\beta^4}\log^2\lambda,$$

$$I(\lambda) = \frac{4\pi^2\lambda^2}{\beta^4}\log^2\lambda+\ldots, \qquad \mathcal{J}(t) < \frac{AU}{\beta^2(\nu t)^{\frac{1}{2}}}\log(\nu t).$$

En résumé, dans le cas du mouvement plan, nous avons les résultats suivants, au sujet du comportement de l'énergie cinétique $I^2(t)$, quand $t\to\infty$,

1° Si $\alpha<1$, $\qquad \mathcal{J}(t) < \dfrac{AU}{\beta^{1+\alpha}(\nu t)^{\frac{\alpha}{2}}}$;

2° » $\alpha>1$, $\qquad \mathcal{J}(t) < \dfrac{AU}{\beta^2(\nu t)^{\frac{1}{2}}}$;

3° » $\alpha=1$, $\qquad \mathcal{J}(t) < \dfrac{AU}{\beta^2(\nu t)^{\frac{1}{2}}}\log(\nu t)$.

Par hypothèse, les vitesses initiales vérifient

$$[u_j(x,0)\,u_j(x,0)]^{\frac{1}{2}} < \frac{U}{(1+\beta R)^{1+\alpha}} \qquad \left[\alpha,\ \beta>0,\ R=(x_jx_j)^{\frac{1}{2}}\right].$$

CAS DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE NAVIER, LES MOUVEMENTS, DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS, ÉTANT SUPPOSÉS RÉGULIERS.

1. Nous utilisons les mêmes notations que dans le Chapitre précédent (cas des équations de Stokes) : $t=0$ est l'époque initiale, x, un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3), $u_i(x, t)$ est une des trois composantes de la vitesse du liquide, ν est le quotient du coefficient de viscosité par la densité du liquide ; un élément de volume engendré par x est désigné par δx ; $\mathcal{J}^2(t)$ est l'énergie cinétique de l'ensemble du liquide, $V(t)$ le maximum de la vitesse à l'instant t ; D désigne l'espace entier ; nous utiliserons la convention de « l'indice muet », les A désignent des constantes numériques sans dimension, dont la valeur n'est pas précisée, etc. En outre nous posons

$$\mathcal{J}^2(t) = \iiint_D \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}\,\delta x.$$

Nous entendons la régularité des mouvements du liquide au sens de M. Leray, c'est-à-dire qu'une solution $u_i(x, t)$ des équations de Navier est régulière dans un intervalle de temps $t_1<t<t_2$, si, dans cet intervalle, les

fonctions u et p et les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ sont continues par rapport à l'ensemble des variables x_1, x_2, x_3, t et si, en outre, les fonctions $\mathcal{J}^2(t)$ et $V(t)$ sont inférieures à des fonctions de t, continues pour $t_1 < t < t_2$.

Les mouvements étant supposés réguliers dans tout intervalle de temps $(0, +\infty)$, nous partons de la relation (3.2) du Mémoire de M. Jean Leray, intitulé : *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* (1), relation qui peut s'écrire :

$$(1) \qquad u_i(x, t) = \frac{1}{8(\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \iiint_D e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} u_i(y, 0)\,\delta y - \int_0^t dt' \iiint_D T_{ij}(x-y, t-t')\, u_j(y, t')\, \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\,\delta y,$$

où $T_{ij}(x-y, t-t')$ est le tenseur fondamental, bien connu, de M. Oseen, tel que

$$4\pi^{\frac{3}{2}} T_{ij}(x-y, t-t') = \frac{\delta_{ij}}{2}\,\frac{E(r, t-t')}{\nu(t-t')} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$E(r, t-t') = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu(t-t')}}}{[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \Phi = \frac{1}{r}\int_0^r E(\alpha, t-t')\,d\alpha.$$

Nous en déduisons, en désignant par r' la distance $\overline{xz}$,

$$\begin{aligned} u_i(x, t)\, u_i(x, t) &= \frac{1}{64\pi^2\nu^3 t^3} \iiint_D \iiint_D e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\nu t}} u_i(y, 0)\, u_i(z, 0)\,\delta y\,\delta z \\ &- \frac{1}{4(\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \iiint_D u_k(y, t')\, \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\, T_{ij}(x-y, t-t')\,\delta y \iiint_D u_i(z, 0)\, e^{-\frac{r'^2}{4\nu t}}\,\delta z \\ &+ \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \iiint_D T_{ij}(x-y, t-t')\, u_k(y, t')\, \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\,\delta y \\ &\times \iiint_D u_m(z, t'')\, \frac{\partial u_l(z, t'')}{\partial z_m}\, T_{il}(x-z, t-t'')\,\delta z ; \end{aligned}$$

d'où, par interversion des variables d'intégration, en posant $\rho = \overline{yz}$,

$$\begin{aligned} (2) \quad \mathcal{J}^2(t) &= \frac{1}{8\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \iiint_D \iiint_D e^{-\frac{\rho^2}{8\nu t}} u_i(y, 0)\, u_i(z, 0)\,\delta y\,\delta z \\ &- \frac{1}{4(\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \int_0^t dt' \iiint_D u_k(y, t')\, \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\,\delta y \\ &\times \iiint_D u_i(z, 0)\,\delta z \iiint_D e^{-\frac{r'^2}{4\nu t}} T_{ij}(x-y, t-t')\,\delta x \\ &+ \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \iiint_D u_k(y, t')\, \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\,\delta y \iiint_D u_m(z, t'')\, \frac{\partial u_l(z, t'')}{\partial z_m}\,\delta z \\ &\times \iiint_D T_{ij}(x-y, t-t')\, T_{il}(x-z, t-t'')\,\delta x. \end{aligned}$$

(1) *Acta Mathematica*, **63**, p. 218.

(Pour le premier terme du second membre, le calcul a été fait dans l'étude relative aux équations de Stokes.)

$\mathcal{J}^2(t)$ se compose donc de trois termes. Mais on peut se borner à majorer le premier et le troisième, en utilisant l'inégalité sans numéro du bas de la page 197 du Mémoire déjà cité de M. Leray, inégalité déduite de celle de Schwarz : si $U(x) = V_1(x) + V_2(x)$, on a

$$\left[\iiint_D U^2(x)\,\delta x\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \left[\iiint_D V_1^2(x)\,\delta x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\iiint V_2^2(x)\,\delta x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La relation (1) ci-dessus montre que $u_i(x, t)$ est la somme de deux termes dont on retrouve les intégrales des carrés, prises dans l'espace où varie le point x, dans la formule (2) (premier et troisième termes de cette formule).

Nous avons donc

$$(3)\quad \mathcal{J}(t) \leqq \frac{1}{(8\pi\nu t)^{\frac{3}{4}}}\left[\iiint_D\iiint_D e^{-\frac{\rho^2}{8\nu t}} u_i(y, 0)\, u_i(z, 0)\,\delta y\,\delta z\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left[\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \iiint_D u_k(y, t') \frac{\partial u_j(y, t')}{\partial y_k}\,\delta y\right.$$
$$\left.\times \iiint_D u_m(z, t'') \frac{\partial u_l(z, t'')}{\partial z_m}\,\delta z \iiint_D T_{ij}(x-y, t-t')\, T_{il}(x-z, t-t'')\,\delta x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La majoration du deuxième terme de la formule (2) n'offre d'ailleurs pas de difficultés spéciales et peut se faire d'une façon assez analogue à celle du troisième terme, qui est faite ci-dessous.

Pour le premier terme du second membre de (3), l'étude complète en a été faite dans le cas des équations de Stokes, les formes extérieures dérivant d'un potentiel.

En admettant que l'on ait

$$(4)\quad [u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)]^{\frac{1}{2}} < \frac{U}{(1+\beta R)^{\frac{3}{2}+\alpha}}, \qquad R = (x_i x_i) \quad \left(\beta > 0; \qquad 0 < \alpha < \frac{3}{2}\right);$$

on a vu que ce premier terme tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, comme $\frac{1}{t^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Pour le second terme de (3), nous remplaçons $T_{ij}(x-y, t-t')$, $T_{il}(x-z, t-t'')$ par les majorantes connues :

$$(5)\quad \begin{cases} |T_{ij}(x-y, t-t')| < \dfrac{A}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}}, \\ |T_{il}(x-z, t-t'')| < \dfrac{A}{[r'^2+\nu(t-t'')]^{\frac{3}{2}}} \quad (^1), \end{cases}$$

(1) *Voir* le Mémoire précité de M. Leray dans les *Acta*, p. 212.

où les A désignent, comme il est dit au paragraphe **1**, des constantes numériques, sans dimension, dont les valeurs ne sont pas précisées.

Provisoirement, nous posons, pour alléger l'écriture,

$$[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}} = u, \qquad [\nu(t-t'')]^{\frac{1}{2}} = v,$$

Nous appliquons, au second terme de (3), l'inégalité de Schwarz :

$$\left[\iiint_D T_{ij}(x-y,\, u)\, T_{il}(x-z,\, v)\,\delta x\right]^2 < A\iiint_D \frac{\delta x}{(r^2+u^2)^3}\iiint_D \frac{\delta x}{(r^2+v^2)^3}$$
$$= A\int_0^\infty \frac{r^2\,dr}{(r^2+u^2)^3}\int_0^\infty \frac{r^2\,dr}{(r^2+v^2)^3} = \frac{A}{u^3v^3},$$

d'où

$$(6) \qquad \left|\iiint_D T_{ij}(x-y,\, t-t')\, T_{il}(x-z,\, t-t'')\,\delta x\right| < \frac{A}{\nu^{\frac{3}{2}}(t-t')^{\frac{3}{4}}(t-t'')^{\frac{3}{4}}}.$$

Le second terme de (3) est donc inférieur à

$$\frac{A\mathcal{J}(o)}{\nu^{\frac{3}{4}}}\left[\int_0^t \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{(t-t')^{\frac{3}{4}}}\int_0^t \frac{\mathcal{Y}(t'')\,dt''}{(t-t'')^{\frac{3}{4}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{A\mathcal{J}(o)}{\nu^{\frac{3}{4}}}\int_0^t \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{(t-t')^{\frac{3}{4}}}.$$

Or [*cf.* le Mémoire précité de M. Leray, inégalités (6.7), p. 247], nous avons

$$\mathcal{Y}(t') < \frac{A\mathcal{J}(o)}{(\nu t')^{\frac{1}{2}}}, \qquad \text{pour } t' > A\,\frac{\mathcal{J}^4(o)}{\nu^3} = t_1.$$

Par suite, pour $t > t_1$,

$$\int_0^t \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} < \int_0^{t_1} \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} + \frac{A\mathcal{J}(o)}{\nu^{\frac{3}{4}}}\int_{t_1}^t \frac{dt'}{t'^{\frac{1}{2}}(t-t')^{\frac{3}{4}}}.$$

Pour le premier terme du second membre,

$$\int_0^{t_1} \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} < \frac{1}{[\nu(t-t_1)]^{\frac{3}{4}}}\int_0^{t_1} \mathcal{Y}(t')\,dt',$$

$$\left[\int_0^{t_1} \mathcal{Y}(t')\,dt'\right]^2 < t_1\int_0^{t_1} \mathcal{Y}^2(t')\,dt' < \frac{t_1}{2\nu}\,\mathcal{J}^2(o),$$

$\displaystyle\int_0^{t_1} \frac{\mathcal{Y}(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}$ tend donc vers zéro, avec $\frac{1}{t}$, au moins comme $\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$.

Pour le second terme, en posant $t' = t(1-\xi^4)$, nous avons

$$\int_{t_1}^t \frac{dt'}{t'^{\frac{1}{2}}(t-t')^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{t^{\frac{1}{4}}}\int_0^{\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}} \frac{d\xi}{(1-\xi^4)^{\frac{1}{2}}} < \frac{4}{t^{\frac{1}{4}}}\int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le second terme du second membre de l'inégalité (3) est donc, pour t suffisamment grand, inférieur à

$$\frac{A\mathcal{J}^2(0)}{\nu^{\frac{5}{4}}t^{\frac{1}{4}}}.$$

Finalement, en groupant les résultats pour les deux termes du second membre de cette inégalité (3), si $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, $\mathcal{J}(t)$ tend vers zéro, au moins comme $\frac{1}{t^{\frac{\alpha}{2}}}$ et, si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathcal{J}(t) \to 0$, au moins comme $\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}$.

Dans le cas où les mouvements du liquide seraient turbulents au sens de M. Leray, on sait [*cf.* le Mémoire précité de M. Leray, p. 246, formule (6.4)] que toutes les époques singulières seraient antérieures à une époque finie, qui ne dépend que de l'énergie cinétique initiale du liquide et de sa viscosité. On pourrait donc toujours reporter l'origine du temps à un instant tel que les mouvements soient réguliers pour $t > 0$, mais alors, il faudrait supposer, pour que les conclusions ci-dessus restent valables, qu'on peut choisir cet instant initial, de façon que l'inégalité (4) ci-dessus soit satisfaite.