JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHEL LOÈVE

Étude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 249-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__249_0>

Étude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées;

Par Michel LOÈVE.

INTRODUCTION.

Les résultats les plus importants du Calcul des Probabilités concernent les propriétés asymptotiques :

1° des suites d'événements aléatoires indépendants :

la loi des grands nombres avec le théorème de Bernoulli-Poisson;
la loi forte des grands nombres avec les théorèmes de M. Borel;
la tendance centrale avec le théorème de de Moivre;

2° des sommes de variables aléatoires indépendantes :

la loi des grands nombres obtenue par la méthode de Tchebichef;
la loi forte des grands nombres avec les résultats de M. Kolmogoroff;
la tendance centrale avec la loi dite de Laplace-Gauss.

Par contre, l'étude de la dépendance est à peine ébauchée; en fait, l'on ne connaît bien que les chaînes simples de Markoff et l'on y retrouve, sous des hypothèses assez larges, la plupart des résultats précédents. M. Fréchet qui, suivi de ses élèves (Dœblin, Fortet), a apporté une contribution importante à ces problèmes (étude des chaînes, événements liés en nombre fini, ...), a dit au Colloque des Probabilités de Genève (1936) au sujet de l'évolution récente du Calcul des Probabilités : « C'est d'abord un effort... pour se libérer de la condition d'indépendance sous laquelle ont été obtenues les propriétés fondamentales classiques ». Dès 1922, M. S. Bernstein étendait le théorème de Liapounoff à des variables qu'il appelle presque indépendantes. En 1935-36, M. Paul Lévy étudie des variables enchaînées et obtient un ensemble remarquable d'extensions, mais son hypothèse fondamentale est assez restrictive.

Nous sommes parti de l'idée que ces propriétés étant asymptotiques, il y avait lieu de tenter d'assurer leur validité par des hypothèses asymptotiques, alors que l'hypothèse de l'indépendance ne l'est pas, celle de M. Paul Lévy non plus. Nous avons cherché de plus à obtenir des propositions qui, même dans le cas de l'indépendance, seraient plus générales que certaines propositions classiques. Au lieu d'imposer des hypothèses *a priori*, nous tentons de les découvrir; bien entendu, le choix des méthodes les oriente déjà dans une certaine voie.

Ici ne figure que la deuxième partie de nos résultats. La première, déjà rédigée, concerne les événements en nombre fini et sera publiée ailleurs ([1]), de même que la troisième relative à la corrélation et aux lois limites.

Dans le premier chapitre on introduit diverses notions : ordre de grandeur et ordre infinitésimal, en probabilité ou presque certain, indépendance en moyenne, etc. On établit la condition nécessaire et suffisante de la stabilité d'une suite d'événements et l'on étudie l'ordre (au sens ci-dessus) de la fréquence. On examine ce que deviennent la relation des moyennes conditionnées et le théorème de Bayes dans le cas des suites stables. Deux groupes de critères, relatifs à la probabilité de réalisation d'une infinité d'événements, sont obtenus ensuite; les théorèmes de M. Borel sont des cas particuliers de deux de ces critères. Enfin, à titre d'introduction aux chapitres suivants, deux des résultats, que l'on y retrouvera comme cas particuliers, sont rapidement démontrés; le plus important concerne les conditions de tendance centrale et se réduit au théorème de de Moivre dans le cas de l'indépendance.

Le second Chapitre porte sur les lois des grands nombres pour des variables aléatoires liées. On a, entre autres, une extension du théorème de Glivenko (théorème fondamental de la statistique d'après Cautelli) à des épreuves liées ainsi qu'une généralisation du critère de M. Kolmogoroff pour la loi forte et ceci, même dans le cas de l'indépendance.

Le troisième Chapitre porte sur le problème central du calcul des probabilités, celui de la tendance des lois des sommes de variables aléatoires vers la loi de Moivre-Laplace (ou loi de Gauss). Par deux méthodes, celle de Lindeberg et celle des fonctions caractéristiques, convenablement modifiées, on établit un théorème qui, à notre connaissance, renferme comme cas particuliers les conditions suffisantes de tendance centrale données jusqu'ici. On obtient également la forme la plus générale de la loi des grands nombres.

Dans le quatrième et dernier Chapitre, on établit divers lemmes relatifs à des sommes de variables aléatoires liées. L'un d'eux se rattache au théorème de récurrence de Poincaré déjà examiné dans le premier Chapitre. On les applique ensuite à la notion du rayon d'activité de la liaison, due à M. S. Bernstein et l'on obtient, suivant les cas envisagés, diverses propositions dont celles de cet auteur.

([1]) Parue depuis dans les *Annales de Lyon* (1942).

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici à M. le Professeur Maurice Fréchet ma respectueuse reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse (soutenue le 21 juin 1941), pour ses observations et conseils qui m'ont été aussi utiles pour les recherches que pour la rédaction et pour les nombreuses et instructives conversations dont j'ai tiré le plus grand profit et dont je garderai le meilleur souvenir.

J'adresse également mes remerciements à MM. Henri Cartan, G. Valiron et H. Villat pour leur bienveillant accueil.

CHAPITRE I.

SUITES INFINIES D'ÉVÉNEMENTS.

Le théorème de Bernoulli, étendu par Poisson, complété par M. Borel et M. Cautelli, permet d'établir un lien entre la théorie des probabilités et l'expérience. C'est une première forme de la loi des grands nombres que l'on peut raccorder à la *loi de stabilité des fréquences statistiques*. Pourtant ce théorème comporte une hypothèse fortement restrictive; il suppose essentiellement que les événements considérés sont mutuellement indépendants. On se place ainsi dans un cas très particulier.

Nous allons rechercher les conditions aussi générales que possible, remplaçant l'indépendance, et dans lesquelles ce résultat fondamental du calcul des probabilités demeure valable, totalement ou en partie. Nous plaçant dans le cas des suites d'événements ainsi délimitées, nous examinerons ce que devient la relation des moyennes conditionnées dont le théorème de Bayes est une conséquence. Puis nous établirons des critères permettant d'étudier la probabilité de la réalisation d'une infinité d'événements et dont les théorèmes de M. Borel font partie. Enfin, nous démontrons rapidement deux des résultats relatifs aux événements et qui se présentent comme cas particuliers de propositions beaucoup plus générales qui seront obtenus dans les chapitres qui suivent. D'autres propriétés des suites d'événements y seront obtenues par l'emploi systématique des indicateurs d'événements.

Les définitions et notions, introduites dans ce premier Chapitre, seront utilisées ou étendues dans la suite.

I. — Suites stables.

Définitions. — Nous allons introduire ou préciser diverses notions relatives à l'ordre de grandeur ou l'ordre infinitésimal d'une variable aléatoire; elles seront employées ultérieurement.

Soit une suite de variables aléatoires $X_n (n = 1, 2, \ldots)$ de moyenne nulle, $\mathcal{M}(X_n) = 0$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, s'il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$(1) \qquad \Pr\left\{|X_n| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} > 1-\varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon),$$

on dira que X_n est, *en probabilité, un infiniment grand* avec n; si au lieu de (1), l'on a

$$(1') \qquad \Pr\left\{|X_{n+p}| > \frac{1}{\varepsilon},\ p = 0 \text{ et } 1 \text{ et } 2 \text{ et} \ldots\right\} > 1-\varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon),$$

on dira que X_n est, *presque certainement, un infiniment grand* avec n. Si, au contraire,

$$(2) \qquad \Pr\left\{|X_n| < \frac{1}{\varepsilon}\right\} > 1-\varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon),$$

ou

$$(2') \qquad \Pr\left\{|X_{n+p}| < \frac{1}{\varepsilon},\ p = 0 \text{ et } 1 \text{ et } 2 \text{ et} \ldots\right\} > 1-\varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon),$$

nous dirons que la suite X_n est *bornée en probabilité* (2) ou *bornée presque certainement* (2').

Soit φ_n une fonction certaine de n et $\frac{X_n}{\varphi_n}$ une suite bornée en probabilité (resp. presque certainement).

a. Si φ_n est un infiniment grand avec n, X_n sera dit d'un *ordre de grandeur en probabilité (resp. presque certainement)* au plus égal à celui de φ_n.

b. Si φ_n est un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, X_n sera dit un *infiniment petit en probabilité (resp. presque certainement)* d'un ordre au moins égal à celui de φ_n.

Supposons maintenant que $\frac{X_n}{\varphi_n}$ tende vers zéro en probabilité ou presque certainement, avec $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire que l'on ait, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(3) \qquad \Pr\left\{\left|\frac{X_n}{\varphi_n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

ou

$$(3') \qquad \Pr\left\{\left|\frac{X_{n+p}}{\varphi_{n+p}}\right| > \varepsilon,\ p = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou} \ldots\right\} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Nous dirons avec Kolmogoroff ([2], p. 53 et 58) que la suite $\frac{X_n}{\varphi_n}$ est (normalement) *stable* dans le premier cas, et *fortement stable* dans le second cas.

a. Si φ_n est un infiniment grand avec n, on dira que X_n est, en probabilité (3), ou presque certainement (3'), d'un ordre de grandeur inférieur à celui de φ_n.

b. Si φ_n est un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, on dira que X_n est un infiniment petit en probabilité (3), ou presque certainement (3′), d'un ordre supérieur à celui de φ_n.

Les définitions qui précèdent peuvent s'étendre au cas où φ_n est remplacée par une variable aléatoire Y_n; on pourrait également introduire des définitions légèrement différentes.

Fluctuation résiduelle. — Considérons une suite dénombrable d'événements A_i ($i=1, 2, \ldots$), dépendants ou non, compatibles ou non, définis sur une même catégorie d'épreuves.

Soit R_n la répétition des n premiers événements, c'est-à-dire le nombre de ceux d'entre eux qui se réalisent, et $f_n = \frac{R_n}{n}$ leur fréquence. La suite $\{A_i\}$ sera dite soit stable, soit fortement stable, s'il en est ainsi de la suite $\{f_n - \bar{f}_n\}$.

Le théorème de Bernoulli s'énonce alors ainsi : une suite d'événements *indépendants*, de probabilité p constante, est stable. Poisson a étendu ce résultat à des événements indépendants, mais de probabilités différentes. M. Borel a montré, en 1909 (1), que dans le cas de Bernoulli la stabilité est forte. Il se limite à la probabilité $p=\frac{1}{10}$, mais sa démonstration est valable pour p quelconque. Enfin le théorème de Bernoulli comporte un autre complément, lequel, avec nos définitions, s'énonce ainsi : l'ordre de l'infiniment petit $f_n - \bar{f}_n$ est, en probabilité, au moins celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Nous allons étudier f_n dans le cas général et les résultats précédents apparaîtront comme cas particuliers de ceux que nous allons obtenir.

Posons

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) = S_1(n) = n p_1(n),$$

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \Pr(A_i A_j) = S_2(n) = C_n^2 p_2(n),$$

où $p_1(n)$ et $p_2(n)$ ont la signification de probabilités ($\geqq 0$, $\leqq 1$). On a

$$\mathfrak{M}(R_n) = S_1(n), \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{M}(f_n) = p_1(n),$$

puis

$$\mathfrak{M}(R_n - \bar{R}_n)^2 = 2\,S_2(n) + S_1(n) - S_1^2(n),$$

d'où

$$\sigma_n^2 = \mathfrak{M}(f_n - \bar{f}_n)^2 = p_2(n) - p_1^2(n) + \frac{p_1(n) - p_2(n)}{n}. \tag{4}$$

Dans le cas de Bernoulli, $p_2(n) - p_1^2(n) = p^2 - p^2 = 0$, et l'on peut dire que la quantité

$$d_n^2 = p_2(n) - p_1^2(n) \tag{5}$$

mesure, en quelque sorte, l'écart entre le cas général et celui de Bernoulli. Nous l'appellerons fluctuation résiduelle $\Big($quand $n \to \infty$, d_n^2 est la partie principale de σ_n^2 si $d_n^2 > \alpha > 0$, α constante ou si d_n^2 est un infiniment petit mais d'ordre inférieur à celui de $\frac{p_1(n) - p_2(n)}{n}\Big)$ sans présumer de son signe.

Avant d'aller plus loin, faisons une remarque qui présente, peut-être, quelque intérêt.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit; pour $n > N(\varepsilon)$ suffisamment grand

$$|\sigma_n^2 - [p_2(n) - p_1^2(n)]| = \frac{|p_1(n) - p_2(n)|}{n} < \varepsilon.$$

Par suite,

$$p_2(n) - p_1^2(n) > -\varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon)$$

ou

$$p_2(n) > p_1^2(n) - \varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon). \tag{6}$$

Ce résultat si simple renferme, comme cas particulier, un complément, apporté par M. Khintchine [2], au théorème de récurrence de Poincaré [1] (1), ainsi que les généralisations données par MM. Visser [1], [2] et Gillis [1]. En termes de probabilité, l'hypothèse commune à ces deux derniers auteurs est que

$$\Pr(A_i) > p > 0 \qquad (p \text{ const.}) \text{ pour tout } i.$$

On tire alors de (6) qu'il existe au moins 2 indices distincts i et j $(\leqq n)$ tels que l'on ait

$$\Pr(A_i A_j) > p^2 - \varepsilon, \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon).$$

C'est le résultat de ces auteurs dont on déduit les généralisation du théorème de Poincaré.

Stabilité. — Revenons à l'examen de la stabilité de la suite A_i.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichef d'une part, une inégalité de M. Kolmogoroff ([2], p. 38 et 54) (2), d'autre part, permettent d'écrire

$$\sigma_n^2 - \varepsilon^2 < \Pr\left\{|f_n - \bar{f}_n| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}.$$

---

(1) On considère dans un espace à n dimensions un ensemble V, de mesure $m(V)$, $(> 0, < \infty)$ se trouvant dans un état de mouvement stationnaire et conservant la mesure. Après un temps i, chaque ensemble $E < V$ devient E_i et, s'il est mesurable, $m(E_i) = m(E)$, $m(E_i E_{i+K}) = m(E E_K)$, K entier quelconque. Le théorème de Poincaré signifie que si $m(E) > 0$, on a $m(EE_K) > 0$ pour une infinité de valcurs de K, et, par suite, chaque ensemble E de mesure positive coupe dans son mouvement une infinité de fois sa position primitive.

(2) $\Pr\{|X|\} \geqq \frac{\mathfrak{M}(X^2) - \varepsilon^2}{M^2}$ quand ε, M sont deux nombres certains et $|X| \leqq M$. Ici, on prend $X = f_n - \bar{f}_n$, d'où $M = 1$.

Donc, pour que la suite A_i soit stable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0.$$

Or, dans l'expression (4) de σ_n^2,

$$\frac{1}{n}|p_1(n) - p_2(n)| \leqq \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Par suite, cette condition est équivalente à

$$\boxed{d_n^2 \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.}$$

On peut convenir de dire qu'une telle suite est asymptotiquement bernoullienne.

De plus, l'inégalité de B.-T. qui peut s'écrire

$$\Pr\left\{\frac{|f_n - \bar{f}_n|}{\sigma_n} > \frac{1}{\varepsilon}\right\} < \varepsilon^2, \qquad \text{donc} \qquad < \varepsilon \text{ dès que } \varepsilon < 1,$$

montre qu'en probabilité, l'ordre de l'infiniment petit $f_n - \bar{f}_n$ est, pour une suite stable, au moins égal à celui de σ_n.

Introduisons d_n (ici réel, $\geqq 0$) que nous supposons dans la suite infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

Lorsque $nd_n^2 \to \infty$ avec n, σ_n et d_n sont des infiniment petits équivalents; $d_n^2 = p_2(n) - p_1^2(n)$ pour n assez grand et d_n est d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$; $f_n - \bar{f}_n$ est ainsi un infiniment petit en probabilité, au moins de l'ordre de d_n et n'est pas nécessairement d'ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, comme dans le cas de Bernoulli.

Lorsque $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nd_n^2 = \infty$, on peut extraire de la suite des f_n une suite partielle $\{f_{n_i}\}$ telle que $n_i d_{n_i}^2 \to \infty$ avec i, et ce qui précède s'applique à cette suite.

Stabilité forte. — Lorsque $nd_n^2 < C < \infty$ (C constante indépendante de n), la suite A_i est fortement stable, comme le montre le raisonnement suivant :

On a

$$(7) \qquad \Pr\{|f_{\nu^2} - \bar{f}_{\nu^2}| > \varepsilon\} < \frac{\sigma_{\nu^2}^2}{\varepsilon^2} \qquad (\nu > 0 \text{ entier quelconque})$$

et

$$n\sigma_n^2 < C + |p_1(n) - p_2(n)| < C + 1.$$

D'où

$$\frac{\sigma_{\nu^2}^2}{\varepsilon^2} < \frac{C+1}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{\nu^2}.$$

Par suite, le second membre de (7) est le terme général d'une série convergente. On sait qu'alors, en vertu du théorème de Borel-Cautelli, la suite des $f_{\nu^2} - \overline{f}_{\nu^2}$ obéit à la loi forte des grands nombres. Soit maintenant $n > 0$ un entier quelconque. On peut toujours trouver un ν tel que $\nu^2 \leqq n < (\nu+1)^2$, donc

$$n' = n - \nu^2 \text{ est compris entre } 0 \text{ et } 2\nu \qquad (0 \leqq n' \leqq 2\nu).$$

On en tire

$$f_{\nu^2+n'} - f_{\nu^2} = \frac{R_{\nu^2+n'}}{\nu^2+n'} - \frac{R_{\nu^2}}{\nu^2} < \frac{R_{\nu^2+n'} - R_{\nu^2}}{\nu^2} \leqq \frac{n'}{\nu^2} \leqq \frac{2}{\nu} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{\nu},$$

et la suite $\{f_n - \overline{f}_n\}$ obéit à la loi forte des grands nombres. On peut alors écrire, pour n assez grand,

$$\Pr\left\{ \frac{|f_{n+p} - \overline{f}_{n+p}|}{\sigma_{n+p}} > \frac{1}{\varepsilon},\ p = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou} \ldots \right\} < \varepsilon^2 \qquad (< \varepsilon \text{ pour } \varepsilon < 1).$$

Précisons l'ordre de l'infiniment petit presque certain $f_n - \overline{f}_n$. On a supposé que $nd_n^2 < C < \infty$ et, par suite, les 2 parties de σ_n^2 sont des infiniment petits d'ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{n}$.

Si, de plus

$$|nd_n^2| > c > 0 \ (c \text{ const.}) \qquad \text{ou} \qquad \varliminf_{n\to\infty} |p_1(n) - p_2(n)| = a > 0,$$

σ_n^2 est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. En effet, dans le premier cas, c'est d_n^2 qui est de cet ordre, dans le second cas c'est $\frac{p_1(n) - p_2(n)}{n}$ qui l'est.

Par suite $f_n - \overline{f}_n$ est presque certainement un infiniment petit, au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si,

$$\varliminf_{n\to\infty} |nd_n^2| = 0 \qquad \text{et} \qquad \varliminf_{n\to\infty} |p_1(n) - p_2(n)| = 0,$$

σ_n^2 est, au moins, pour une suite partielle des valeurs de n, un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de $\frac{1}{n}$. Donc, pour cette suite, $f_n - \overline{f}_n$ est presque certainement un infiniment petit au moins d'ordre supérieur à celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dans le cas particulier où, en même temps que $d_n^2 \to 0$ avec $\frac{1}{n}$ on a $p_1(n) - p_2(n) \to 0$, les événements sont, en *moyenne*, asymptotiquement presque certains ou presque impossibles au sens suivant :

$$p_1(n) - p_2(n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad d_n^2 \to 0$$

entraînent

$$p_1(n)[1-p_1(n)] \to 0.$$

Ainsi $p_1(n)$ et $p_2(n)$ tendent tous deux, soit vers 1, soit vers zéro (¹).

Résumons les résultats essentiels :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'événements soit stable est qu'elle soit asymptotiquement bernoullienne, c'est-à-dire, que l'on ait*

$$d_n^2 = p_2(n) - p_1^2(n) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

De plus :

lorsque $nd_n^2 \to \infty$ avec n, $f_n - \bar{f}_n$ est, en probabilité, un infiniment petit au moins de l'ordre de d_n;

lorsque $nd_n^2 < C < \infty$, la stabilité est forte et $f_n - \bar{f}_n$ est presque certainement, au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

En supposant les événements indépendants, on retrouve le théorème de Bernoulli ($d_n = 0$) et celui de Poisson ($nd_n^2 \leqq 1$).

II. — L'indépendance en moyenne et les moyennes conditionnées.

L'indépendance en moyenne. — Lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes m à m, on a

$$(8) \qquad \mathfrak{M}(X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_r}) = \mathfrak{M}(X_{i_1})\,\mathfrak{M}(X_{i_2})\ldots\mathfrak{M}(X_{i_r}) \qquad (r=1, 2, \ldots, m)$$
$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqq n).$$

Mais cet ensemble de relations n'est pas suffisant à moins qu'il ne s'agisse des événements (²), c'est-à-dire à moins que les X_i ne soient des indicateurs,

$$X_i \begin{cases} = 1, & \text{si } A_i \text{ a lieu,} \\ = 0, & \text{si } A_i \text{ n'a pas lieu.} \end{cases}$$

Nous dirons des variables aléatoires satisfaisant à (8) qu'elles sont indépendantes m à m *en moyenne*. Remarquons que pour que des variables aléatoires

(¹) M. Fréchet observe que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des probabilités en moyenne vers 1 (resp. zéro) au sens précédent est que $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\omega}_n(\varepsilon) = 0$ pour chaque valeur fixe de $\varepsilon (> 1, < 0)$, $\bar{\omega}_n(\varepsilon)$ étant la fréquence de ceux des n premiers événements dont les probabilités sont $< 1 - \varepsilon$ (resp. $> \varepsilon$).

(²) S. Bernstein [**1**], cité par Kolmogoroff ([**2**], p. 10).

indépendantes $m-1$ à $m-1$ en moyenne le soient m à m, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathfrak{M}(X_{i_1}-\overline{X}_{i_1})(X_{i_2}-\overline{X}_{i_2})\ldots(X_{i_m}-\overline{X}_{i_m})=0 \qquad (1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_m\leqq n). \tag{9}$$

En effet, développé, le premier membre est égal à

$$\mathfrak{M}\left\{X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_m}-\sum\overline{X}_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_m}+\sum\overline{X}_{i_1}\overline{X}_{i_2}X_{i_3}\ldots X_{i_m}+\ldots+(-1)^m\overline{X}_{i_1}\ldots\overline{X}_{i_m}\right\}.$$

A cause de l'indépendance supposée, $m-1$ à $m-1$, en moyenne, cette expression égale

$$\mathfrak{M}(X_{i_1}\ldots X_{i_m})+[-C_m^1+C_m^2-\ldots+(-1)^m C_m^m]\overline{X}_{i_1}\overline{X}_{i_2}\ldots\overline{X}_{i_m},$$

donc égale

$$\mathfrak{M}(X_{i_1}\ldots X_{i_m})-\mathfrak{M}(X_{i_1})\ldots\mathfrak{M}(X_{i_m}).$$

La condition (9) conduit à la généralisation de la notion de l'orthogonalité des variables aléatoires : on dira que $Y_1, \ldots, Y_n$ sont orthogonales m à m, si

$$\mathfrak{M}(Y_{i_1}\ldots Y_{i_r})=0 \qquad (r=1, 2, \ldots, m),$$
$$(1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_m\leqq n),$$

et la remarque ci-dessus montre qu'il y a équivalence entre l'indépendance m à m en moyenne des $X_1, \ldots, X_n$ et l'orthogonalité m à m des $X_1-\overline{X}_1, \ldots, X_n-\overline{X}_n$ (pour $n=2$ on retrouve bien l'équivalence connue).

En nous limitant à deux variables aléatoires X_n et Y_n, supposons qu'elles dépendent d'un même paramètre n, de manière que, lorsque $n\to\infty$,

$$\mathfrak{M}(Y_n^2)-\mathfrak{M}^2(Y_n)\to 0$$

et

$$\mathfrak{M}(X_n^2)-\mathfrak{M}^2(X_n)<b^2.$$

L'inégalité de B.-T.

$$\Pr\{|Y_n-\overline{Y}_n|>\varepsilon\}<\frac{1}{\varepsilon^2}\mathfrak{M}(Y_n-\overline{Y}_n)^2$$

montre que $Y_n-\overline{Y}_n\to 0$, en probabilité. L'inégalité de Schwarz

$$\mathfrak{M}^2\{(X_n-\overline{X}_n)(Y_n-\overline{Y}_n)\}\leqq\mathfrak{M}\{(X_n-\overline{X}_n)^2\}\mathfrak{M}\{(Y_n-\overline{Y}_n)^2\}<b^2\mathfrak{M}(Y_n-\overline{Y}_n)^2\},$$

montre que

$$\mathfrak{M}\{(X_n-\overline{X}_n)(Y_n-\overline{Y}_n)\}\to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

et par suite

$$\mathfrak{M}(X_nY_n)-\mathfrak{M}(X_n)\mathfrak{M}(Y_n)\to 0.$$

On peut dire que, sous les hypothèses faites, X_n et Y_n sont asymptotiquement indépendantes en moyenne, d'où :

Lemme. — *Si 2 variables aléatoires, fonctions d'un même paramètre certain n, varient, lorsque $n \to \infty$, de manière que la fluctuation de l'une demeure bornée et celle de l'autre tende vers zéro, elles sont asymptotiquement indépendantes en moyenne.*

Les moyennes conditionnées et la stabilité. — Appliquons ce lemme d'une suite stable d'événements $\{A_i\}$. Soit X_n une variable aléatoire, fonction des événements $A_1, \ldots, A_n$ (c'est-à-dire sa loi de probabilité dépend des résultats connus des épreuves faites sur $A_1, \ldots, A_n$) et dont la fluctuation à priori demeure bornée lorsque n croît. Le lemme s'applique à X_n et à la fréquence f_n des n premiers événements puisque, comme on l'a vu,

$$\mathfrak{M}(f_n^2) - \mathfrak{M}^2(f_n) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n} \text{ à cause de la stabilité de } \{A_i\}.$$

$$\mathfrak{M}(X_n)\,\mathfrak{M}(Y_n) - \mathfrak{M}(X_n Y_n)$$

devient

$$\mathfrak{M}(X_n)\,\mathfrak{M}(f_n) - \mathfrak{M}\left(X_n \frac{R_n}{n}\right),$$

où

$$\mathfrak{M}(f_n) = p_1(n) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}(X_n R_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_n I_i),$$

I_i étant l'indicateur de A_i.

Par suite,

$$\mathfrak{M}(X_n I_i) = \mathfrak{M}\{I_i \mathfrak{M}_{I_i}(X_n)\} = \Pr(A_i)\,\mathfrak{M}_{A_i}(X_n),$$

et la relation donnée par le lemme s'écrit

$$\boxed{\mathfrak{M}(X_n)\,p_1(n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\,\mathfrak{M}_{A_i}(X_n) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.} \tag{10}$$

C'est l'extension au cas d'une suite stable d'événements liés, de la relation des moyennes conditionnées, laquelle n'est valable que dans le cas des événements incompatibles et épuisant la certitude (Fréchet, [1], p. 128).

Si l'on suppose que $X_n = X$ est indépendante de n et de plus que

$$\frac{\mathfrak{M}(f_n^2)}{\mathfrak{M}^2(f_n)} \to 1, \qquad \text{lorsque } \frac{1}{n} \to 0$$

(hypothèse plus restrictive que celle de la stabilité puisqu'elle entraîne la stabilité alors que l'inverse n'a pas nécessairement lieu), on retrouve, en appliquant le lemme à X et $\frac{f_n}{\overline{f_n}}$, la relation

$$\mathfrak{M}(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\, \mathfrak{M}_{A_i}(X)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)},$$

établie par Khintchine, lequel en généralisait une autre due à Kolmogoroff [1].

Revenons au cas général et plaçons-nous dans l'hypothèse où X_n est l'indicateur d'un événement E_n. La relation (10) subsiste, car la fluctuation de X_n est bornée, et peut s'écrire

$$\Pr(E_n)\, p_1(n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr_{A_i}(E_n) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Ceci correspond à la relation classique

$$\Pr(E) = \sum_{1}^{n} \Pr(A_i) \Pr_{A_i}(E),$$

valable seulement lorsque les $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements incompatibles et épuisant la certitude.

Enfin, comme

$$\Pr(A_i E_n) = \Pr(E_n) \Pr_{E_n}(A_i) = \Pr(A_i) \Pr_{A_i}(E_n),$$

l'on a, en supposant

$$\varliminf_{n \to \infty} p_1(n) > 0,$$

$$\frac{\Pr(A_i) \Pr_{A_i}(E_n)}{\Pr_{E_n}(A_i)} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr_{2A_i}(E_n)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

ce qui correspond au théorème de Bayes.

En faisant des hypothèses supplémentaires, on peut évidemment mettre ces différentes relations sous des formes plus voisines des relations classiques.

III. — Réalisation d'une infinité d'événements.

Probabilité. — Désignons par

$$P_{\nu,n} = \Pr(A_{\nu+1} + \ldots + A_{\nu+n}),$$

la probabilité de réalisation de l'un au moins des événements $A_{\nu+1}, \ldots, A_{\nu+n}$, $P_{\nu,n}$ ne peut décroître quand n croît; comme $0 \leqq P_{\nu,n} < 1$, la limite P_ν de $P_{\nu,n}$

pour n infini est bien déterminée et comprise entre zéro et 1

$$P_\nu = \lim_{n \to \infty} P_{\nu,n}.$$

P_ν représente la probabilité pour que l'un au moins des événements A_i d'indice $i > \nu$ se réalise. Cette fonction de ν ne peut croître quand ν croît; comme $1 \geqq P_\nu \geqq 0$, la limite P de P_ν pour ν infini est bien déterminée et comprise entre zéro et 1.

$$P = \lim_{\nu \to \infty} P_\nu.$$

P représente la probabilité pour que l'un au moins des A_i ait lieu pour $\nu > N$, N étant aussi grand que l'on veut. C'est donc la probabilité de la réalisation d'une infinité des A_i et l'on a

$$P = \lim_{\nu \to \infty} \lim_{n \to \infty} \Pr(A_{\nu+n} + \ldots + A_{\nu+n}). \tag{11}$$

Cette formule représente une extension insignifiante de celle de Kolmogoroff ([2], note p. 315), dans laquelle les événements A_i sont spécifiés.

Premier groupe de critères. — M. Cautelli a étendu à l'aide de l'inégalité de Boole, au cas des A quelconques, le théorème suivant, démontré par M. Borel (pour les A_i indépendants) dans son célèbre mémoire qui a fondé la théorie des probabilités dénombrables [1].

Si $\Pr(A_i)$ est le terme général d'une série convergente, la probabilité P de la réalisation d'une infinité des A_i est nulle.

Or, l'inégalité de Gumbel [1] qui peut s'écrire

$$1 - \Pr(A_1 \ldots A_n) \leqq \frac{C_n^r - \sum \Pr(A_{i_1} \ldots A_{i_r})}{C_{n-1}^{r-1}} \quad r \leqq n \qquad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n, \tag{12}$$

généralise celle de Boole. Il est donc naturel de chercher ce que devient le théorème ci-dessus lorsqu'on utilise cette nouvelle inégalité.

Transformons (12), on a

$$1 - \Pr(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \Pr(\overline{A}_{i_1} + \ldots + \overline{A}_{i_k}),$$

et le nombre de termes sous $\sum$ est C_n^r; l'inégalité s'écrit donc

$$\Pr(\overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n) \leqq \frac{\Pr(\overline{A}_{i_1} + \ldots + A_{i_r})}{C_{n-1}^{r-1}}.$$

Supprimons les barres et appliquons aux événements $A_{\nu+1}, \ldots, A_{\nu+n}$, on obtient

$$\Pr(A_{\nu+1} + \ldots + A_{\nu+n}) \leqq \frac{\sum \Pr(A_{\nu+i_1} + \ldots + A_{\nu+i_r})}{C_{n-1}^{r-1}}.$$

Posons

$$p_{\nu,n}(r) = \frac{1}{C_n^r} \sum \Pr(A_{\nu+i_1} + \ldots + A_{\nu+i_r});$$

ces moyennes des quantités comprises entre zéro et 1 sont également comprises entre zéro et 1.

Finalement, l'on a

$$P_{\nu,n} \leqq \frac{n}{r} p_{\nu,n}(r). \tag{13}$$

Nous pouvons prendre pour r soit un entier fixe, soit un entier fonction de ν et de n, à condition bien entendu d'avoir $r < n$.

Faisons croître indéfiniment n puis ν; (13) donne immédiatement en vertu de (11),

$$P \leqq \varliminf_{\nu \to \infty} \varliminf_{n \to \infty} \frac{n}{r} p_{\nu,n}(r). \tag{14}$$

Et nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Soit* A_i, $i = 1, 2, \ldots$ *une suite d'événements dépendants ou non, compatibles ou non. Lorsque, pour un entier* $r \leqq n$, *fixe ou fonction de* n *et de* ν, *on a*

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \varliminf_{n \to \infty} \frac{n}{r} p_{\nu,n}(r) \leqq p;$$

la probabilité P *pour que les* A_i *se réalisent une infinité de fois est* $\leqq p$.

Pour $r = 1$ et $p = 0$ on retrouve le théorème de Borel-Cautelli. Mais il y a plus, car l'infinité des critères suivant les valeurs de r peut être ordonnée. En effet, M. Fréchet a montré que l'inégalité de Gumbel fait partie d'une échelle d'inégalités ([3], p. 62), laquelle, après transformations analogues à celles qui nous ont conduit à (13), peut s'écrire

$$0 \leqq \frac{n}{n} p_{\nu,n}(n) \leqq \frac{n}{n-1} p_{\nu,n}(n-1) \leqq \ldots \leqq \frac{n}{r+1} p_{\nu,n}(r+1) \leqq \frac{n}{r} p_{\nu,n}(r) \leqq \ldots \leqq 1. \tag{15}$$

Les critères obtenus forment donc une *échelle de critères* d'autant plus larges que r est plus grand ou croît plus rapidement (on peut prendre, par exemple $r = \log\log n$ ou $r = \log n$ etc., le [ ] désignant la partie entière). Ainsi, si l'on cherche à prouver que $P = 0$ et que le critère correspondant à une certaine valeur de r ne réussit pas, celui pour r plus grand peut réussir, alors que l'inverse n'est pas possible.

Second groupe de critères. — M. Borel a également démontré le théorème suivant : Si les A_i sont indépendants et $\Pr(A_i)$ est le terme général d'une série convergente, la probabilité de la réalisation d'une infinité des A_i est égale à 1.

Or M. Fréchet a montré que ([3], p. 63)

$$(16)\quad 1-\Pr(A_1\ldots A_n) \geqq \frac{C_n^r - \sum \Pr(A_{i_1}\ldots A_{i_r})}{C_n^r} \qquad (r \leqq n_1;\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n).$$

En passant aux événements $\overline{A}_i$, elle devient

$$\Pr(\overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n) \geqq \frac{\sum \Pr(\overline{A}_{i_1} + \ldots + \overline{A}_{i_r})}{C_n^r},$$

puis, en supprimant les barres et appliquant aux événements $A_{\nu+1}, \ldots, A_{\nu+n}$,

$$\Pr(A_{\nu+1} + \ldots + A_{\nu+n}) \geqq \frac{\sum \Pr(A_{\nu+i_1} + \ldots + A_{\nu+i_r})}{C_n^r}$$

ou

$$P_{\nu,n} \geqq p_{\nu,n}(r).$$

De la même façon que pour (14), on en déduit que

$$(17)\qquad \boxed{P \geqq \varlimsup_{\nu\to\infty}\ \varlimsup_{n\to\infty} p_{\nu,n}(r).}$$

Et nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Soit* $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ *une suite d'événements dépendants ou non, compatibles ou non. Lorsque, pour un entier* $\leqq n$, *fixe ou fonction de* n *et de* ν, on a

$$\varlimsup_{\nu\to\infty}\ \varlimsup_{n\to\infty} p_{\nu,n}(r) \geqq p,$$

la probabilité P *pour que les* A_i *se réalisent une infinité de fois est* $\geqq p$. Comme les inégalités de M. Fréchet forment une échelle, laquelle, après transformation, peut s'écrire

$$0 \leqq p_{\nu,n}(1) \leqq \ldots \leqq p_{\nu,n}(r) \leqq p_{\nu,n}(r+1) \leqq \ldots \leqq p_{\nu,n}(n),$$

les critères obtenus forment aussi une échelle suivant les valeurs de ... Lorsque les événements sont indépendants

$$1 - p_{\nu,n}(n) = \Pr(\overline{A}_{\nu+1}\ldots\overline{A}_{\nu+n}) = \sum_{\nu+1}^{\nu+n} [1 - \Pr(A_i)],$$

et l'on retrouve, avec $p = 1$ et $r = n$, le théorème de M. Borel. M. Borel a, d'ailleurs, indiqué [2] que son théorème s'étendait au cas de dépendance, si l'on supposait qu'il existait des nombres p'_i et p''_i tels que

$$(18)\qquad 0 < p'_i < \Pr_a(A_i) < p''_i < 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_1^\infty p_i = \infty, \qquad \sum_1^\infty p''_i = \infty,$$

$Pr_a(A_i)$ désignant la probabilité conditionnelle de A_i connaissant certains des résultats des épreuves relatives à $A_1, \ldots, A_{i-1}$ et (18) ayant lieu quelles que soient les épreuves connues et les résultats réalisés. Or il est facile de supprimer toute hypothèse sur une borne supérieure p_i''. En effet,

$$\Pr(\overline{A}_{\nu+1}\ldots\overline{A}_{\nu+n}) = \Pr(\overline{A}_{\nu+1})\Pr_{\overline{A}_{\nu+1}}(\overline{A}_{\nu+r})\ldots\Pr_{\overline{A}_{\nu+1}\ldots\overline{A}_{\nu+n-1}}(\overline{A}_{\nu+n}).$$

Si $\Pr_a(A_i) > p_i' > 0$, on a

$$\Pr_a(\overline{A}_i) < 1 - p_i' < 1$$

et, par suite,

$$\Pr(\overline{A}_{\nu+1}\ldots\overline{A}_{\nu+n}) \leqq \sum_{\nu+1}^{\nu+n}(1 - p_i'). \tag{19}$$

Lorsque $\sum_1^\infty p_i' = \infty$, le second membre de (19) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et $p = 1$.

Remarque. — La même méthode permet d'obtenir d'autres critères en partant d'autres inégalités. On peut, par exemple, utiliser les inégalités que nous avons établies ailleurs (Loève, *Annales de Lyon*, 1942) et qui généralisent celles que nous venons d'employer.

Champ d'application. — Lorsque les événements A_i sont *incompatibles*, on a évidemment $P = 0$; d'ailleurs le théorème de Borel-Cautelli le montre puisque

$$\sum_1^\infty \Pr(A_i) \leqq 1.$$

Lorsque les événements A_i sont *indépendants*, les deux théorèmes de M. Borel permettent de conclure à la valeur de P dans tous les cas :

$$\text{si } \sum_1^\infty \Pr(A_i) < \infty, \qquad \text{on a} \qquad P = 0$$

et

$$\text{si } \sum_1^\infty \Pr(A_i) = \infty, \qquad \text{on a} \qquad P = 1.$$

Dans le cas général des événements *dépendants et compatibles*, on ne peut conclure avec le théorème de B.-C. que si $\sum_1^\infty \Pr(A_i) < \infty$. C'est donc ici que les critères établis sont utiles. Formons un exemple, presque évident, où les théorèmes de Borel ne s'appliquent plus, alors que ces critères, convenablement choisis, réussissent.

Soit une suite d'événements $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ et supposons que

$$\sum_{i=1}^\infty \Pr(A_i) = \infty, \qquad \text{avec } \Pr(A_n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n} \left[\text{par ex. } \Pr(A_n) = \frac{1}{n}\right].$$

Le théorème de B.-C. ne donne aucun renseignement sur la valeur de P. Appliquons alors l'un des critères généraux pour $r = n$ ou $n - 1$ ou $n - 2$ et, en général, pour toute valeur de r telle que $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{n}{r} < \infty$. On a, pour $r = n$, par exemple,

$$\Pr(A_{\nu+1} + \ldots + A_{\nu+n}) = \Pr(A_{\nu+1})$$

et

$$\lim_{\nu \to \infty} \lim_{n \to \infty} \Pr(A_{\nu+1}) = \lim_{\nu \to \infty} \Pr(A_{\nu+1}) = 0.$$

Par suite,

$$P = 0.$$

On voit d'ailleurs que dans le cas simple de l'inclusion $(A_1 \supset A_2 \supset \ldots)$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $P = p$ est que $Pr(A_n) \to p$ avec $\frac{1}{n}$, comme il fallait s'y attendre.

IV. — La tendance centrale.

Nous établissons ici deux des résultats que l'on retrouvera plus loin comme cas particuliers de résultats beaucoup plus généraux.

Loi des grands nombres. — Soient les variables aléatoires

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si } A_i \text{ a lieu;} \\ 0, & \text{si } A_i \text{ n'a pas lieu;} \end{cases} \qquad \text{donc} \quad \overline{X}_i = \Pr(A_i),$$

$$S_i = X_i + \ldots + X_i,$$

et $\Pr'(A_i)$, la probabilité pour que A_i ait lieu connaissant la répétition des événements $A_1, \ldots A_{i-1}$, « sup. » désignant la borne supérieure d'une telle quantité lorsque cette répétition varie.

On établit aisément que

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(R_n - \overline{R}_n)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i - \overline{X}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(S_{i-1} - \overline{S}_{i-1})(X_i - \overline{X}_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\Pr(\overline{A}_i) + 2n\sum_{i=1}^{n} \sup|\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)| \\ &\leq n\left[\frac{1}{4} + 2\sum_{i=1}^{n} \sup|\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)|\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathfrak{M}(f_n - \overline{f}_n)^2 < \frac{1}{4n} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \sup|\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)|.$$

Lorsque $n \to \infty$, la condition

$$(20) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sup |\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}$$

entraîne donc

$$\mathfrak{M}(f_n - \bar{f}_n)^2 \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef montre qu'alors la suite des A_i est stable.

On vérifie aisément que, comme il faut s'y attendre (p. 5), la condition (20) entraîne $d_n^2 \to 0$.

Loi de Moivre-Laplace. — Posons

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\Pr(\bar{A}_i),$$

et supposons, dans ce qui suit, que $s_n \to \infty$ avec n.

Soient $F_{n,i}(x)$ la fonction de répartition de $\frac{X_i}{s_n}$ $(i \leq n)$ et $F'_{n,i}(\xi)$ la fonction de répartition de $\frac{X_i}{s_n}$, lorsqu'on connaît la répétition des événements $A_1, \ldots, A_{i-1}$. On calcule immédiatement

$$m_{n,i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, dF_{n,i}(\xi) = \frac{1}{s_n}\mathfrak{M}(X_i - \bar{X}_i) = 0,$$

$$m'_{n,i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, dF'_{n,i}(\xi) = \frac{1}{s_n}\mathfrak{M}'(X_i - \bar{X}_i) = \frac{1}{s_n}[\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)],$$

$$\sigma_{n,i}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \, dF_{n,i}(\xi) = \frac{1}{s_n^2}\mathfrak{M}(X_i - \bar{X}_i)^2 = \frac{\Pr(A_i)\Pr(\bar{A}_i)}{s_n^2},$$

$$\sigma'^2_{n,i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi) = \frac{1}{s_n^2}[\Pr'(A_i) - 2\Pr(A_i)\Pr'(A_i) + \Pr^2(A_i)].$$

Soit $G_{n,i}(x) = \Pr(Y_{n,i} < x)$, où $Y_{n,i}$ est une variable aléatoire laplacienne ayant les deux premiers moments respectivement égaux à ceux de $\frac{X_i - \bar{X}_i}{s_n}$, c'est-à-dire à $m_{n,i}(=0)$ et $\sigma_{n,i}^2$.

Employons les lemmes énoncés page 41 et omettons d'abord, pour simplifier l'écriture, le premier indice n. En posant

$$\Phi_i(x) = \Pr(Y_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x),$$

on a

$$P'_i(x) = \Pr'(X_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(x - \xi)\, dF'_i(\xi)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi_i(x) - \xi\Phi'_i(x) + \frac{\xi^2}{2!}\Phi''_i(x) + K_3\theta\frac{\xi^3}{3!}\right] dF'_i(\xi), \qquad |\theta(x, \xi)| \leq 1.$$

D'où

$$P'_i(x) = \Phi_i(x) - m'_i \Phi'_i(x) + \sigma'^2_{n,i} \frac{\Phi''_i(x)}{2} + \frac{k_3}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\xi^3 \, d\,F'_i(\xi).$$

De même

$$P_i(x) = \Pr(Y_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) = \Phi_i(x) + \sigma^2_{n,i} \frac{\Phi''_i(x)}{2} + \frac{k_3}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\xi^3 \, d\,G_i(\xi).$$

On en tire aisément

$$|\delta'_i(x)| = |P'_i(x) - P_i(x)| < m'_i k_1 + \frac{1}{2}(\sigma'^2_i - \sigma^2_1) k_2 + \frac{k_3}{6} \left(\frac{4\sigma^3_1}{\sqrt{2\pi}} + \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^3 d\,F'_i(\xi) \right).$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta_i(x) = & \quad \Pr(X_1 + \ldots + X_{i-1} + X_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) \\ & - \Pr(X_1 + \ldots + X_{i-1} + Y_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - \xi) \, d\Pr(X_1 + \ldots + X_{i-1} < \xi). \end{aligned}$$

On en tire

$$\Delta(x) = \Pr(X_1 + \ldots + X_n + \alpha Z < x) - \Pr(Y_1 + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(x)$$

et

$$\Delta_i(x) \leqq \sup |\delta'_i(x)|.$$

D'où l'on déduit, en rétablissant le premier indice n,

$$|\Delta_n(x)| \leqq k_1 \sum_{i=1}^{n} \sup |m'_{n,i}| + k_2 \sum_{i=1}^{n} \sup |\sigma'^2_{n,i} - \sigma^2_{n,i}| + \frac{k_3}{6 s_n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma'^2_{n,i} \right).$$

Supposons que

$$\underline{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \sup |\Pr'(A_i) - \Pr(A_i)| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.} \tag{21}$$

Le terme en k_1 tend alors vers zéro. On vérifie sans difficulté qu'il en est de même pour les termes en k_2 et en k_3 et que, par suite, *la loi de* $\frac{R_n - \overline{R_n}}{s_n}$ *tend vers la loi de Moivre-Laplace réduite lorsque* $\underline{n \to \infty}$.

Remarquons que lorsque les événements A_i sont mutuellement indépendants, les termes en k_1 et k_2 disparaissent pour tout n, et l'on a ainsi une démonstration très simple, par la méthode de Lindeberg, du théorème de de Moivre sans que l'on ait besoin de la formule de Stirling.

CHAPITRE II.

LOIS DES GRANDS NOMBRES.

La méthode de Tchebichef, laquelle dans le cas de variables aléatoires indépendantes donne si simplement le théorème de Bernoulli et ses généralisations, se base, comme on le sait, sur deux relations :

l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef

$$\Pr\{|S-\bar{S}|>c\}<\frac{\sigma^2(S)}{c^2},$$

où $\bar{S}$ est une constante quelconque, $\sigma(S)$ son écart quadratique moyen et $c>0$ une constante arbitraire,

l'égalité de Bienaymé

$$\sigma^2(S_n)=\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n),$$

où

$$S_n=X_1+\ldots+X_n,$$

et les variables aléatoires X_i, $i=1, 2, \ldots, n$ sont mutuellement indépendantes. M. Kolmogoroff ([2], p. 54) a observé que l'égalité précédente et, par suite, la méthode de Tchebichef, demeurent valables si l'on remplace l'hypothèse de l'indépendance par celle de la non-corrélation, c'est-à-dire si

$$\mathfrak{M}(X_i-\bar{X}_i)(X_k-\bar{X}_k)=0 \qquad (1\leq i<k\leq n).$$

M. Paul Lévy [2], [3] a étendu divers résultats relatifs aux variables aléatoires indépendantes à un cas où les variables aléatoires sont non corrélées et a obtenu ainsi un ensemble important de généralisations.

En désignant par $\mathfrak{M}_{i-1}(X_i)$ la moyenne de X_i, évaluée lorsqu'on connaît les valeurs réalisées de $X_1, \ldots, X_{i-1}$, son hypothèse essentielle s'écrit

$$\text{(P. L.)} \qquad \mathfrak{M}_{i-1}(X_i)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

quelles que soient ces valeurs réalisées.

M. S. Bernstein (1937) a également montré que cette hypothèse entraîne l'égalité de Bienaymé et a étendu à ce cas l'inégalité importante qu'il avait établie pour des variables aléatoires indépendantes (Fréchet [1], p. 131).

Nous allons introduire des hypothèses moins restrictives qui nous permettront d'obtenir des relations asymptotiquement équivalentes (en un sens qui sera précisé) à l'égalité de Bienaymé. Celles-ci nous permettront d'appliquer la méthode de Tchebichef à des variables aléatoires liées sous des hypothèses plus larges que celles qui ont été utilisées, notamment par M. P. Lévy. Ensuite nous établirons une relation asymptotiquement équivalente à celle de M. Kolmogoroff [1] et nous l'utiliserons pour étendre, dans plusieurs directions, les résultats connus relatifs à la loi forte des grands nombres. En particulier, nous obtenons une extension aux épreuves liées du théorème de Glivenko que M. Cautelli a qualifié de théorème fondamental de la statistique.

I. — Loi ordinaire des grands nombres.

Notations. — Considérons le tableau suivant de variables aléatoires à deux indices, généralement liées :

$$(T) \quad \begin{cases} X_{1,1} \\ X_{2,1} \quad X_{2,2} \\ \dots \quad \dots \\ X_{n,1} \quad X_{n,2} \quad X_{n,3} \quad \dots \quad X_{n,n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{cases}$$

La $n^{\text{ième}}$ ligne renferme n variables aléatoires. Cette restriction n'est pas essentielle, car ce qui suivra demeure valable si la $n^{\text{ième}}$ ligne renferme e_n variables aléatoires et $e_n \to \infty$ avec n.

Posons

$$S_{n,\nu} = X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,\nu},$$

et supposons dans *toute la suite de ce travail* (pour simplifier l'écriture) que les moyennes de toutes les variables du tableau soient nulles

$$(1) \qquad (X_{n,i}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots).$$

Par suite,

$$\mathfrak{M}(S_{n,\nu}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

S'il n'en était pas ainsi, il suffirait, dans la suite, de remplacer $X_{n,i}$ par $X_{n,i} - \mathfrak{M}(X_{n,i})$ et, par conséquent, $S_{n,\nu}$ par $S_{n,\nu} - \mathfrak{M}(S_{n,\nu})$.

Nous désignerons par $\mathfrak{M}'(X_{n,i})$ *la moyenne de* $X_{n,i}$ *évaluée lorsqu'on connaît la valeur réalisée de* $S_{n,i-1}$ et par $\sup \mathfrak{M}(X_{n,i})$ la borne supérieure de cette quantité lorsque la valeur réalisée de $S_{n,i-1}$ varie. Pour $i = 1$, $S_{n,0}$ et $\mathfrak{M}'(X_{n,1})$ n'ont pas de sens ; par convention nous prendrons $S_{n,0} = 0$ et $\mathfrak{M}'(X_{n,1}) = \mathfrak{M}(X_{n,1})$ ($= 0$ ici).

Indépendance en moyenne. — Nous avons vu que deux variables aléatoires $X_{n,i}$ et $X_{n,k}$, $i \neq k$, sont indépendantes en moyenne [ou, ici, orthogonales à cause de (1)] si $\mathfrak{M}(X_{n,i} X_{n,k}) = 0$; il en est ainsi, en particulier, si $X_{n,i}$ et $X_{n,k}$ sont indépendantes. Nous avons indiqué que l'on pouvait élargir cette notion ; ici les deux suites de variables aléatoires $X_{n,i}$ et $X_{n,k}$, i et k fixes et $n = 1, 2, \dots,$

($i^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ colonnes de T) sont asymptotiquement indépendantes en moyenne, si

$$\mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,k}) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

On dira que l'ensemble des variables aléatoires $X_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n^{\text{ième}}$ ligne de T) est un *ensemble* de *variables aléatoires* asymptotiquement indépendantes en moyenne ou ensemble AI_m, si

$$(\mathrm{AI}_m) \qquad \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j}) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

ou bien, si

$$(\mathrm{AI}'_m) \qquad \frac{\displaystyle\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Il n'est pas nécessaire d'introduire des dénominations distinctes car, dans la suite, on reconnaîtra immédiatement dans lequel des deux cas l'on se trouve.

Enfin, cet *ensemble* sera dit en indépendance asymptotique complète du premier ordre ou ensemble AI_1, si

$$(\mathrm{AI}_1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Lemme. — On a

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq m} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j}) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}[(X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,i-1})X_{n,i}] = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}\,|\,S_{n,i-1}\,\mathfrak{M}'(X_{n,i})\,|.$$

Or

$$|\,\mathfrak{M}[S_{n,i-1}\,\mathfrak{M}'(X_{n,i})]\,| \leqq \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|\,\mathfrak{M}\,|(S_{n,i-1})|.$$

Donc

Lemme A. — Pour $m < n$

$$(\mathrm{A}) \qquad \left|\sum_{1 \leqq i < j \leqq m} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j})\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}[S_{n,i-1}\,\mathfrak{M}'(X_{n,i})]\right| \leqq \operatorname*{Max}_{i<m} \mathfrak{M}\,|S_{n,i-1}| \sum_{i=1}^{m} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|$$

Égalité de Bienaymé asymptotique. — Ce lemme montre que si

$$(2) \qquad \operatorname*{Max}_{i \leqq n} \mathfrak{M}\,|\,S_{n,i-1}\,|$$

reste borné lorsque $n \to \infty$, la relation (AI_1) entraîne (AI_m). Alors

$$(3) \qquad \left|\mathfrak{M}(S_{n,n}^2) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)\right| < 2\left|\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j})\right| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

et l'on a ainsi une extension de l'égalité de Bienaymé. Nous allons montrer que la condition

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) < L^2 \qquad (\text{L const. finie}),$$

jointe à (AI_1) entraîne (2), donc (3).

Soit $\nu(n)$ une valeur de $i-1$, variant entre 1 et $n-1$, pour laquelle $\mathfrak{M}\,|S_{n,i-1}|$ atteint son maximum. La relation (A), où l'on pose $m=\nu(n)$, s'écrit

$$\left|\sum_{1\leq i<j\leq\nu} \mathfrak{M}(X_{n,i}X_{n,j})\right| \leq \mathfrak{M}\,|(S_{n,\nu})|\left[\sum_{i=1}^{\nu} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|\right].$$

Or

$$\mathfrak{M}\,|S_{n,\nu}| \leq \sqrt{\mathfrak{M}(S_{n,\nu}^2)},$$

donc

$$(5) \qquad \left|\mathfrak{M}(S_{n,\nu}^2) - \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)\right| < 2\sqrt{\mathfrak{M}(S_{n,\nu}^2)}\left[\sum_{i=1} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|\right].$$

Par hypothèse,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

a fortiori

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

De même, à cause de (4)

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) < L^2 < \infty \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Il résulte alors de (5) que $\mathfrak{M}(S_{n,\nu}^2)$ reste bornée lorsque $n\to\infty$ et, par suite, il en est de même pour $\underset{i\leq n}{\operatorname{Max}}\,\mathfrak{M}\,|S_{n,i-1}|$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème B. — *Lorsque*

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) < L^2 < \infty \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \qquad (\text{L const.}),$$

on a

$$\mathfrak{M}(S_{n,n}^2) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Cas particuliers. — Posons

$$X_{n,i} = \frac{X_i}{a_n} \quad (a_n > 0 \text{ certain}), \qquad S_n = X_1 + \ldots + X_n\,;$$

le théorème s'énonce : on choisit les a_n de manière que, lorsque $n \to \infty$, on ait

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0,$$

et $\frac{1}{a_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i^2)$ reste borné, alors

$$\frac{1}{a_n^2}\left[\mathfrak{M}(S_n^2) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i^2)\right] \to 0.$$

Si l'on peut prendre $a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_1^2)$, la seconde condition est automatiquement remplie.

Si l'on suppose de plus $\sup|\mathfrak{M}'(X_i)| = 0$, pour tout i, on a évidemment

$$\frac{\mathfrak{M}(S_n^2)}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i^2)} = 1 \qquad \text{pour tout } n.$$

Cette hypothèse est sûrement satisfaite si l'on se place dans le cas (P. L.) (P. Lévy [2]).

Généralisations. — Ce qui précède est susceptible de diverses généralisations.

Par exemple, on établit la relation algébrique suivante pour q entier positif

$$S_{n,n}^q = C_q^1 \sum (S_{n,i-1}^{q-1} X_{n,i}) + C_q^2 \sum (S_{n,i-1}^{q-2} X_{n,i}^2) + \ldots + C_q^{q-1} \sum (S_{n,i-1} X_{n,i}^{q-1}) + \sum X_{n,i}^q,$$

d'où la relation correspondante entre les valeurs moyennes. Puis, lorsque $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(S_{n,i-1}^{q-1} X_{n,i}) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(S_{n,i-1}^{q-1})\, \mathfrak{M}(X_{n,i}) \to 0,$$

si

$$\sum_{i=1}^{n} |\sup \mathfrak{M}'(X_{n,i}) - \mathfrak{M}(X_{n,i})| \to 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname*{Max}_{i \leqq n} \mathfrak{M}|S_{n,i-1}^{q-1}| < L \to \infty \qquad \text{pour tout } n.$$

De même

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(S_{n,i-1}^{q-2} X_{n,i}^2) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(S_{n,i-1}^{q-2})\, \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \to 0,$$

si

$$\sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_{n,i}^2) - \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)| \to 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname*{Max}_{i<n} \mathfrak{M}|S_{n,i-1}^{q-2}| < L' < \infty \qquad \text{pour tout } n, \text{ etc.}$$

Méthode de Tchebichef. — *Dans les conditions de validité du théorème* B, la relation obtenue peut s'écrire

$$\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)+\varepsilon_n, \qquad \text{où } \varepsilon_n\to 0 \text{ avec } \frac{1}{n},$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef devient

$$\Pr\{|S_{n,n}|>c\}<\frac{1}{C^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)+\varepsilon_n\right] \tag{6}$$

($c>0$ const. arbitraire). On a alors les mêmes conséquences que pour les variables aléatoires à 1 indice et mutuellement indépendantes.

1. L'inégalité (6) s'écrit

$$\Pr\{|S_{n,n}|>C\}<\frac{L^2+\varepsilon_n}{C^2}.$$

Posons $C=\frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{L^2+\varepsilon_n}{C^2}$ sera $<\varepsilon$ pour $\varepsilon<\frac{1}{L^2+\varepsilon_n}$ et, par suite,

$$\Pr\left\{|S_{n,n}|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}<\varepsilon.$$

Ainsi,

Théorème C. — *Lorsque*

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|\to 0 \qquad \textit{avec } \frac{1}{n} \textit{ et } \sum_{1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$$

reste bornée, la suite $\{S_{n,n}\}$ *est bornée en probabilité.*

2. Supposons que $\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)\to 0$ avec $\frac{1}{n}$. Le second membre de (6) $\to 0$ avec $\frac{1}{n}$, quel que soit $c>0$ fixe, et nous pouvons énoncer :

Théorème D. — *Lorsque, pour* $n\to\infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|\to 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)\to 0,$$

la suite $\{S_{n,n}\}$ *est stable.*

Cas particuliers. — Prenons $X_{n,i}=\frac{X_i}{a_n}$, $a_n>0$ certain, $\mathfrak{M}(X_i)=0$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$. On a, lorsqu'on choisit les a_n de manière que, pour $n\to\infty$,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_i)|\to 0.$$

C'. Si

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_i^2) < L^2 < \infty,$$

alors la suite $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ est bornée en probabilité.

Si

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_i^2) \to 0,$$

alors la suite $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ est stable.

Supposons, en particulier, les X_i indépendants entre eux et $a_n = n$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_i)| = 0 \qquad \text{pour tout } n$$

et la suite $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ est donc stable dès que l'on sait que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_i^2) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n};$$

c'est le célèbre théorème de Tchebichef et le théorème précédent se présente comme une extension naturelle de ce résultat classique.

Application aux événements. — Soit $\{A_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$ une double suite d'événements dépendants ou non, compatibles ou non. Désignons par $R_{n,n}$ la répétition des événements $A_{n,1}, \ldots, A_{n,n}$ et par $f_{n,n}$ leur fréquence. $\Pr'(A_{n,i})$ représentera la probabilité de $A_{n,i}$ lorsqu'on connaît le nombre des événements $A_{n,1}, \ldots, A_{n,i-1}$ réalisés. Enfin

$$I(A_{n,i}) = \begin{cases} 1, & \text{si } A_{n,i} \text{ a lieu;} \\ 0, & \text{si } A_{n,i} \text{ n'a pas lieu.} \end{cases}$$

Posons

$$X_{n,i} = \frac{I(A_{n,i}) - \Pr(A_{n,i})}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$\mathfrak{M}(X_{n,i}) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2) &= \frac{1}{n}\Pr(A_{n,i})[1-\Pr(A_{n,i})]^2 + \frac{1}{n}[1-\Pr(A_{n,i})][\Pr(A_{n,i})]^2 \\ &= \frac{1}{n}\Pr(A_{n,i})[1-\Pr(A_{n,i})] \leq \frac{1}{4n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \leq \frac{1}{4}.$$

D'autre part,

$$S_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(R_{n,n} - \overline{R}_{n,n}) = \sqrt{n}(f_{n,n} - \overline{f}_{n,n})$$

et C donne : lorsque

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sup |\Pr'(A_{n,i}) - \Pr(A_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

$f_{n,n} - \overline{f}_{n,n}$ est en probabilité un infiniment petit au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Posons maintenant

$$X_{n,i} = \frac{I(A_{n,i}) - \Pr(A_{n,i})}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}} \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

On a

$$\mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \leq \frac{1}{4n^{1+2\alpha}},$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \leq \frac{1}{4n^{2\alpha}} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

D'autre part,

$$S_{n,n} = n^{\frac{1}{2}-\alpha}(f_{n,n} - \overline{f}_{n,n}),$$

et D donne

Lorsque

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \sup |\Pr'(A_{n,i}) - \Pr(A_{n,i})| \to 0 \qquad \textit{avec } \frac{1}{n} \ (\alpha > 0),$$

la suite des $n^{\frac{1}{2}-\alpha}(f_{n,n} - \overline{f}_{n,n})$ *est stable.*

Ainsi la condition la plus large permettant d'affirmer la stabilité de la suite des $f_{n,n} - \overline{f}_{n,n}$ s'obtient pour $\alpha = \frac{1}{2}$; c'est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup |\Pr'(A_{n,i}) - \Pr(A_{n,i})| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

On peut dire que lorsqu'on donne à α des valeurs allant de zéro à $\frac{1}{2}$, on a une suite de conditions assurant pour des événements liés des théorèmes analogues au théorème de Bernoulli-Poisson. Pour $\alpha = 0$, le théorème est sauvegardé en sa totalité. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on n'assure plus que la stabilité.

II. — Loi forte des grands nombres.

Autre forme de l'égalité de Bienaymé asymptotique. — Nous allons établir le théorème suivant analogue au théorème B.

THÉORÈME B'. — *Lorsque les* $X_{n,i}$ *forment un ensemble* AI_1 *et*

$$\max_{i \leqq n} \mathfrak{M}(S^2_{n,i}) > \alpha^2 > 0, \tag{7}$$

α constante, pour n assez grand, on a

$$\frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,n})}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} \to 1, \qquad \textit{lorsque } n \to \infty. \tag{B'}$$

D'après (A),

$$\left| \frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,m})}{\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} - 1 \right| \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M} \,|\, (S_{n,i-1})\, \mathfrak{M}' X_{n,i} \,|}{\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} \leqq \frac{\max_{i < m} \mathfrak{M} \,|\, S_{n,i-1} \,|}{\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} \sum_{i=1}^{m} \sup |\, \mathfrak{M}'(X_{n,i}) \,|. \tag{8}$$

Pour $m = \nu(n)$, ν ayant même signification que dans le théorème B,

$$\left| \frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,\nu})}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} - 1 \right| \leqq \frac{\sqrt{\mathfrak{M}(S^2_{n,\nu})}}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} \sum_{i=1}^{\nu} \sup |\, \mathfrak{M}'(X_{n,i}) \,| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\alpha} \frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,\nu})}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})},$$

où $\varepsilon_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$, à cause de (AI_1).

Donc

$$\frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,\nu})}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} \to 1, \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{9}$$

Posons, dans (7), $m = n$ et remarquons que

$$\frac{\max_{i \leqq n} \mathfrak{M} \,|\, S_{n,i-1} \,|}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})} < \frac{1}{\alpha} \frac{\mathfrak{M}(S^2_{n,\nu})}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X^2_{n,i})}.$$

La relation devient

$$\left| \frac{\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)} - 1 \right| \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}\,|\, S_{n,i-1}\mathfrak{M}'(X_{n,i})\,|}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)} < \frac{\varepsilon_n}{\alpha} \frac{\mathfrak{M}(S_{n,\nu}^2)}{\sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)}.$$

D'où le théorème énoncé, en tenant compte de (9).

Variantes. — **1.** La condition $\operatorname*{Max}_{i \leq n} \mathfrak{M}(S_{n,i}^2) > \alpha^2 > 0$ est entraînée par

$$(7') \qquad \operatorname*{Max}_{i \leqq n} \mathfrak{M}\,|\, S_{n,i-1}\,| > \alpha > 0.$$

2. Cette même condition peut être remplacée par

$$(7'') \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,}^2) > \alpha'^2 > 0$$

pour n assez grand, α' constante, comme on le vérifie aisément en reprenant la démonstration.

Corollaire. — On a, dans les conditions de validité du théorème,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}\,|\, S_{n,i-1}\mathfrak{M}'(X_{n,i})\,|}{\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)} \leqq \frac{\varepsilon'_n}{\alpha}, \qquad \text{où } \varepsilon'_n \,|\, \varepsilon_n \to 1 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Égalité de Kolmogoroff asymptotique. — Au lieu d'évaluer les moments *a priori*, on peut avoir à les évaluer *a posteriori*, c'est-à-dire connaissant la réalisation d'un certain événement H, par exemple, les valeurs réalisées de $X_{n,1} \ldots X_{n,k}$ ou bien la valeur de $S_{n,k'}$. Ceci revient à modifier (en la restreignant) la catégorie d'épreuves C sur laquelle sont définies les variables aléatoires. Mais sur cette nouvelle catégorie d'épreuves C_H, les résultats qui précèdent demeurent valables en introduisant, bien entendu, sur C_H les hypothèses correspondant à celles qui étaient admises sur C. Les moyennes évaluées sur C_H seront désignées par $\mathfrak{M}_H$.

Nous pouvons, maintenant, étendre la remarquable inégalité de M. Kolmogoroff à un ensemble AI_1. Soient les événements

$$(11) \qquad \begin{cases} H : \operatorname*{Max}_{k \leqq n} |\, S_{n,k}\,| > C & (C > 0), \\ H_i : \operatorname*{Max}_{k \leqq i-1} |\, S_{n,k}\,| < C \quad \text{et} \quad |\, S_{n,i}\,| > C & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On a

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

et les H_i étant incompatibles

$$\Pr(H) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i).$$

D'autre part,

$$(12) \qquad \Pr(H)\mathfrak{M}_H(S^2_{n.n}) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i)\mathfrak{M}_{H_i}(S^2_{n,n}).$$

Comme

$$S^2_{n,n} = S^2_{n,i} + X^2_{n,i+1} + \ldots + X^2_{n,n} + 2[S_{n,i}X_{n,i+1} + \ldots + S_{n.n-1}X_{n,n}],$$

on a

$$\mathfrak{M}_{H_i}(S^2_{n,n}) = \mathfrak{M}_{H_i}(S^2_{n,i}) + \sum_{j=i+1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(X^2_{n,j}) + 2\sum_{j=i+1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})$$

$$\geqq C^2 + 2\sum_{j=i+1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j}).$$

Portons dans (12) qui devient

$$(13) \qquad \Pr(H)\mathfrak{M}_H(S^2_{n,n}) \geqq C^2\Pr(H) + 2\sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i)\left[\sum_{j=i+1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})\right].$$

Or, le second terme du membre droit peut s'écrire (sans le facteur 2)

$$k = \sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i)\left[\sum_{j=i+1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})\right]$$

$$= \sum_{=1}^{n} \Pr(H_i)\left[\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})\right] - \sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i)\left[\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})\right] = k_1 - k_2.$$

Bornons k_1 :

$$k_1 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \Pr(H_i)\mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}X_{n,j})\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,j-1}X_{n,j}).$$

Posons

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})| = \varepsilon'_n.$$

Les variables aléatoires $X_{n,i}$ forment un ensemble AI_1, donc $\varepsilon_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$. Un ensemble AI_1 sur la catégorie d'épreuves C est, *a fortiori*, ensemble AI_1 sur la catégorie d'épreuves C_H, où H est défini par (11), comme on le voit immédiatement en se reportant à la définition de $\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})|$. Le théorème B′ s'applique donc sur C_H avec $a = C$, et l'on a

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{M}_H(S_{n,j-1}X_{n,j})}{\mathfrak{M}_H(S^2_{n,n}} < \frac{\varepsilon''_n}{C}, \qquad \text{où } \frac{\varepsilon''_n}{\varepsilon'_n} \to 1, \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Par suite,

$$|k_1| = \Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2)\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{M}_H(S_{n,j-1}X_{n,j})\right|}{\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2)} < \Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2)\frac{\varepsilon_n''}{C}.$$

Bornons k_2 :

$$|k_2| = \left|\sum_{i=1}^{n}\Pr(H_i)\left[\sum_{j=1}^{i}\mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j})\mathfrak{M}'(X_{n,j})\right]\right|.$$

Puisque $j \leqq i$ dans cette expression,

$$|\mathfrak{M}_{H_i}(S_{n,j-1}\mathfrak{M}'(X_{n,j})| < \operatorname*{Max}_{j\leqq i}\mathfrak{M}|S_{n,j-1}|\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,j})| < C\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,j})|.$$

Donc,

$$|k_2| < C\sum_{i=1}^{n}\Pr(H_i)\left[\sum_{j=1}^{i}\sup|M'(X_{n,j})|\right] < C\varepsilon_n'\Pr(H).$$

Finalement

$$|k| < \frac{\varepsilon_n''}{C}\Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2) + C\varepsilon_n'\Pr(H).$$

Portons dans (13); on obtient

$$\Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2) \geqq C^2\Pr(H) - 2|k| \geqq C^2\Pr(H) - \frac{2\varepsilon_n''}{C}\Pr(H)\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2) - 2C\varepsilon_n'\Pr(H).$$

D'où, en supposant $\Pr(H) \neq 0$,

$$\mathfrak{M}_H(S_{n,n}^2) \geqq C^2\frac{1 - \dfrac{2\varepsilon_n}{C}}{1 + \dfrac{2\varepsilon_n''}{C}},$$

donc,

$$\text{(E)} \qquad \Pr(H) \leqq \frac{\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)}{C^2}\,\frac{1 + \dfrac{2\varepsilon_n''}{C}}{1 - \dfrac{2\varepsilon_n}{C}}.$$

Pour $C > 0$ fixe, le second facteur du membre droit peut s'écrire $1 + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$. La borne ainsi obtenue pour $\Pr(H)$ est évidemment valable si $\Pr(H) = 0$. Et nous pouvons énoncer :

Théorème E. — *Lorsque, pour* $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(X_{n,i})| \to 0,$$

on a

$$\Pr\left\{\operatorname*{Max}_{k\leqq n}|S_{n,k}| \geqq C\right\} \leqq \frac{\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)}{C^2}(1 + \varepsilon_n) \quad (C > 0 \text{ fixe}), \qquad \varepsilon_n \to 0, \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

Cas particuliers. — Soit $X_{n,i} = \frac{X_i}{a_n}$; $a_n > 0$ certain, $S_n = X_1 + \ldots = X_n$ (E) devient, en choisissant les a_n de manière que l'on ait, pour $n \to \infty$,

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0, \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

on obtient

$$\Pr\left\{ \operatorname*{Max}_{k \leq n} |S_k| \geq C a_n \right\} \leq \frac{\mathfrak{M}(S_n^2)}{a_n^2} \frac{1 + \varepsilon_n}{C^2}, \qquad \text{où } \varepsilon_n \to 0, \text{ avec } \frac{1}{n}. \tag{15}$$

1. Prenons $a_n^2 = \mathfrak{M}(S_n^2)$; (15) s'écrit

$$\Pr\left\{ \operatorname*{Max}_{k \leq n} |S_k| \geq C\sqrt{\mathfrak{M}(S_n^2)} \right\} \leq \frac{1 + \varepsilon_n}{C^2}, \tag{16}$$

extension directe de l'inégalité de M. Kolmogoroff, que l'on retrouve en supposant l'indépendance mutuelle des X_i, laquelle entraîne $\varepsilon_n = 0$ pour tout n.

2. $\varepsilon_n = 0$, pour tout n, dans (16), si l'on suppose $\sup |\mathfrak{M}'(X_i)| = 0$ pour tout i. Cette hypothèse est sûrement satisfaite dans le cas (P. L.) (P. Lévy [2]).

Loi forte des grands nombres. — Supposons toujours que les $X_{n,i}$ forment un ensemble AI_1 et de plus que $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$ reste bornée par une constante L^2 finie, donc les théorèmes B et E s'appliquent.

Désignons par a la partie entière d'une quantité $a > 0$. Prenons pour n les valeurs $n = n_\nu = [q^\nu]$, ($\nu = 1, 2, \ldots, q > 1$) quelconque, et pour C les valeurs $n^{\gamma'}$ avec $0 < \gamma' < \gamma$ quelconque.

Les relations (B) et (E) donnent alors

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n^\gamma} \operatorname*{Max}_{k \leq n_\nu} |S_{n,k}| \geq \frac{1}{n^{\gamma-\gamma'}} \right\} \leq \frac{L^2 + \varepsilon'_n}{n^{2\gamma'}} (1 + \varepsilon_n), \qquad \text{où } \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon'_n \end{matrix} \right\} \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

Le second membre est, avec la valeur choisie de n_ν, le terme général d'une série convergente et le théorème de Borel-Cautelli s'applique. Par suite, pour $\varepsilon > 0$ quelconque et ν suffisamment grand

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n_{\nu+p}} \operatorname*{Max}_{k \leq n_{\nu+p}} |S_{n,k}| > \varepsilon, \ p = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } \ldots \right\} < \varepsilon,$$

et la suite des $\frac{1}{n_\nu^\gamma} \operatorname*{Max}_{K \leq n} |S_{n,K}|$ est fortement stable.

Pour pouvoir étudier les sommes $S_{n,n}$, où $n_{\nu-1} \leq n < n_\nu$, nous allons particulariser. Supposons $X_{n,i} = \frac{X_i}{a_n}$ ($a_{n+1} \geq a_n > 0$. Le résultat précédent devient

$$\frac{1}{n_\nu^\gamma} \frac{1}{a_n} \operatorname*{Max}_{k \leq n_\nu} |S_k| \to 0 \qquad \text{presque certainement.}$$

Or,

$$S_n \leqq \operatorname*{Max}_{k \leqq n} |S_k|$$

et

$$\frac{1}{n_\nu^\gamma} > \frac{1}{n^\gamma q^\gamma}, \qquad \frac{1}{a_{n_\nu}} \geqq \frac{1}{a_{[nq]}}.$$

Donc

$$\frac{S_n}{a_{[nq]} n^\gamma} \to 0 \qquad \text{presque certainement.}$$

Théorème F. — *Lorsqu'on choisit les* $a_{n+1} \geqq a_n > 0$ *de manière que pour* $n \to \infty$ $\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n \sup \mathfrak{M}'(X_i) \to 0$ *et* $\frac{1}{a_n^2} \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}(X_i^2)$ *reste bornée, alors* $\frac{S_n}{a_{[nq]} n^\gamma}$ *converge avec* $\gamma > 0$ *et* $q - 1 > 0$ *quelconques.*

Cas particuliers. — Lorsque $|X_i| < L$ const. finie, pour tout i, on peut prendre $a_n^2 = nL^2$ si

$$(17) \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0, \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Alors $\frac{S_n}{n^{\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma}} \to$ presque certainement et par suite $\frac{S_n}{n} \to 0$ presque certainement.

Si $\sup |\mathfrak{M}'(X_i)| = 0$ pour tout i, (17) a évidemment lieu; cette hypothèse est sûrement satisfaite dans le cas (P. L.) (P. Lévy [3]). On peut, d'une façon plus générale, prendre $a_n^2 = n^{1+2\beta} L^2$, où $\beta > 0$, si

$$\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}} \sum_{i=1}^n \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0.$$

Alors $\frac{S_n}{n^{\beta+\gamma+\frac{1}{2}}} \to 0$ presque certainement et par suite, $\frac{S_n}{n} \to 0$ presque certainement pour $\beta < \frac{1}{2}$.

2. *Événements.* — Supposons $X_i = o(A_i) - \Pr(A_i)$, les $A_i (i = 1, 2, \ldots)$ étant des événements. On a $|X_i| \leqq 1$ et l'on peut donc énoncer :

Lorsque pour $n > \infty$

$$\underline{\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}} \sum_{i=1}^n \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0,}$$

la suite A_i *est fortement stable pour* $\beta < \frac{1}{2}$ *et* $f_n - \overline{f}_n$ *est, presque certainement, un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de* $n^{\frac{1}{2}-\beta-\gamma}$, *où* $\gamma > 0$ *est aussi petit que l'on veut.*

Pour $\beta = 0$, on a un résultat aussi voisin que possible de celui de Bernoulli-Poisson. Pour $\beta = \frac{1}{2} - \gamma$, on a encore la stabilité forte.

3. Appliquons au théorème de Glivenko [1], [2] que M. Cautelli a qualifié de théorème fondamental de la statistique (1. p. 10).

Soient une variable aléatoire X et $X_1, \ldots, X_n$ ses valeurs dans n épreuves dépendantes ou non. Désignons par $A_i(x)$ l'événement

$$A_i(x) : X_i < x \qquad (x \text{ nombre certain fixé}).$$

La probabilité de $A_i(x)$ évaluée *a priori* n'est autre que la fonction de répartition $F(x)$ de X; la fréquence $F^{(n)}(x)$ des événements $A_i(x)$ dans les n épreuves est dite valeur empirique de $F(x)$ dans ces épreuves. Le résultat qui précède devient ici, en prenant $\beta = \frac{1}{2} - \gamma$ et désignant par $F'_i(x)$ la fonction de répartition sur la première épreuve, le nombre des événements $A_1(x), \ldots, A_{i-1}(x)$ étant connu :

Lorsque

$$\frac{1}{n^{1-\gamma}} \sum_{i=1}^{n} \sup | F'_i(x) - F_i(x) | \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n} \qquad (\gamma > 0 \text{ fixe})$$

aussi petit que l'on veut, on a

$$F^{(n)}(x) - F(x) \to 0 \quad \text{presque certainement.} \tag{18}$$

Ce résultat permet d'étendre le théorème de Glivenko aux épreuves sur X liées conformément à l'hypothèse ci-dessus. En effet, la démonstration de ce théorème, donnée par M. Fréchet (2, p. 260-261) pour les épreuves indépendantes, s'applique en tenant compte de (18) et l'on peut énoncer :

Théorème G. — *Lorsque, pour $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n^{1-\gamma}} \sum_{i=1}^{n} \sup | F'_i(x) - F(x) | \to 0 \qquad (\gamma > 0 \text{ fixe}),$$

la probabilité pour que la fonction aléatoire $F^{(n)}(x)$ *converge, lorsque n croît, vers la fonction certaine* $F(x)$ *uniformément sur tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$ *est égale à l'unité.*

Nous croyons que ce résultat présente un intérêt pratique.

Critère. — Nous allons, par une méthode qui s'inspire directement de celle de M. Kolmogoroff [3], établir un critère pour la loi forte des grands nombres, et ceci, dans deux directions à la fois. Les variables aléatoires $\frac{X_i}{a_n}$, à moyenne nulle, au lieu d'être mutuellement indépendantes, seront un ensemble AI_1. De plus, la suite $\{a_n\}$, au lieu d'être celle des entiers positifs, sera seulement supposée non décroissante et telle que l'on puisse en extraire une suite $\{a_{n_i}\}$ où $\frac{a_{n_i}}{a_{n_{i+1}}} \to \alpha > 0$ fixe, lorsque $i \to \infty$. Remarquons que si $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ et $a_n \to \infty$, comme c'est le cas pour la suite $\{n\}$, on peut toujours extraire d'une telle suite une suite partielle $\{a_{n_i}\}$ telle que $\frac{a_{n_i}}{a_{n_{i+1}}} \to \alpha$, α étant un nombre *arbitraire* compris entre 0 et 1.

Nous utiliserons le lemme banal suivant :

Lemme. — *Lorsque, pour $n \to \infty$, $\frac{b_n}{b_{n+1}} \to \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, $b_n > 0$, on a*

$$\sum_{i \geq k} \frac{1}{b_i^2} < B \frac{1}{b_{k+1}^2},$$

où $B > 0$ est un nombre borné et k assez grand.

Nous n'en donnons pas la démonstration.

Passons au critère.

Théorème H. — *Lorsqu'on choisit les a_n de manière que*

(α) $$\underline{0 < a_n < a_{n+1}}$$

et il existe une suite a_{n_i} telle que $\frac{a_{n_i}}{a_{n_{i+1}}} \to \alpha > 0$ fixe lorsque $i \to \infty$;

(β) $$\underline{\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_i)| \to 0, \qquad \text{avec } \frac{1}{n} |\mathfrak{M}(X_i) = 0|,}$$

(γ) $$\underline{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{a_i^2} < \infty, \qquad \text{en posant } \sigma_i^2 = \mathfrak{M}(X_i^2),}$$

alors $\frac{S_n}{a_n}$, $\to 0$ avec $\frac{1}{n}$ presque certainement.

On a, $C > 0$ étant un nombre certain fixe,

$$P_i = \Pr\left\{ \frac{|S_n|}{a_n} > C, \quad \text{pour au moins un } n \text{ tel que } n_i \leq n < n_{i+1} \right\}$$
$$\leq P'_i = \Pr\{ |S_n| > C a_{n_i} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \}.$$

En posant $P_N = \Pr\left\{ \frac{|S_n|}{a_n} > \varepsilon \text{ pour au moins un } n \geq N \right\}$,

$$P_N \leq \sum_{i=\nu}^{+\infty} P_i \leq \sum_{i=\nu}^{+\infty} P'_i, \qquad \text{avec } a_{n_\nu} \leq a_N < a_{n_{\nu+1}}.$$

Or, on voit aisément que, pour i assez grand,

$$P'_i \leq \frac{A}{C^2} \frac{1}{a_{n_i}^2} \sum_{j<n_{i+1}} \sigma_j^2,$$

A constante finie indépendante de i.
Donc,

$$P_N \leq \frac{A}{C^2} \sum_{i \geqq \gamma} \frac{1}{a_{n_i}^2} \left[\sum_{j<n_{i+1}} \sigma_j^2 \right] < \frac{A}{C^2} \sum_{k \geqq \gamma} \left[\sum_{i \geqq k} \frac{1}{a_{n_i}^2} \right] \left[\sum_{n_k \leqq j < n_{k+1}} \sigma_j^2 \right].$$

D'après le lemme

$$\sum_{i>k} \frac{1}{a_{n_i}^2} \leq \frac{A'}{a_{n_{k+1}}^2}, \quad \text{pour } k \text{ suffisamment grand} \quad (A' \text{ constante finie}).$$

Par suite,

$$P_N \leq \frac{AA'}{C^2} \sum_{k \geqq \nu} \left[\frac{1}{a_{n_{k+1}}^2} \sum_{n_k \leqq j < n_{k+1}} \sigma_j^2 \right] \leq \frac{AA'}{C^2} \sum_{j \geqq n_\nu} \frac{\sigma_j^2}{a_j^2}, \quad \text{pour } \nu \text{ assez grand.}$$

Quand $N \to \infty$, $n_\nu \to \infty$ et le dernier membre tend vers zéro, donc $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ presque certainement avec $\frac{1}{n}$.

Cas particuliers. — 1. Lorsque $a_n = n$, on a, sous les hypothèses (β) et (γ), une convergence presque certaine des X_i, en moyenne arithmétique. Si l'on suppose que sup $|\mathfrak{M}'(X_i)| = 0$ pour tout i, (β) a lieu; cette hypothèse est sûrement remplie dans le cas (P. L.) (P. Lévy [3]).

2. Lorsque les X_i sont indépendantes, on a le critère de M. Kolmogoroff pour $a_n = n$. Pour $a_n \neq n$, on a son extension immédiate.

M. Kolmogoroff a montré par un exemple [3] qu'à toute suite divergente $\sum_n \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2$, on peut faire correspondre une suite des X_i, $\mathfrak{M}(X_i) = 0$, ne convergeant pas presque certainement vers zéro en moyenne arithmétique. On voit immédiatement, en modifiant cet exemple d'une manière évidente (n remplacé par a_n), qu'à toute suite divergente $\sum_n \left(\frac{\sigma_n}{a_n}\right)^2$ correspond de même une suite de variables aléatoires X_i avec $\mathfrak{M}(X_i) = 0$ telle que $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ ne converge pas presque certainement vers zéro.

CHAPITRE III.

TENDANCE CENTRALE.

On connaît le rôle fondamental, en théorie des probabilités et en statistique, de la loi de Moivre-Laplace, ou loi de Gauss, ou loi limite centrale. On l'obtient, sous des hypothèses assez larges, comme loi limite de sommes de variables aléatoires convenablement normées lorsque le nombre de celles-ci croît indéfiniment.

Indépendance. — Premier stade : De Moivre est le premier à avoir établi, en 1732, ce résultat dans le cas de Bernoulli. Laplace en a montré (1780) la généralité et l'importance et a posé le problème sous une forme beaucoup plus large que ne l'a fait, après lui, Gauss.

Deuxième stade : Tchebichef, puis Markoff en ont donné une démonstration rigoureuse. Mais ils supposent essentiellement l'existence des moments de tous les ordres des variables aléatoires considérées.

Troisième stade : En 1901, Liapounoff démontre le théorème limite central en ne supposant que l'existence de trois premiers moments, puis seulement des moments d'ordre 1, 2 et 2 +, > 0 fixe quelconque. En 1920 et 1922, Lindeberg, par une méthode qui s'apparente à celle de Liapounoff, peut n'admettre que l'existence des deux premiers moments. En 1922 et 1923, M. Paul Lévy, utilisant la fonction caractéristique que l'on peut faire remonter à Cauchy et Lagrange, donne une démonstration particulièrement élégante sous les mêmes hypothèses. Enfin, en 1934 et 1935, M. Paul Lévy et M. W. Feller donnent, toujours dans le cas de l'indépendance, les conditions nécessaires et suffisantes de tendance centrale. Ils ne supposent plus, *a priori*, l'existence des moments. De plus, alors que leurs prédécesseurs (*voir* pourtant S. Bernstein, ci-après) ont toujours employé comme facteurs normants les écarts-types des sommes des variables aléatoires considérées, eux ne s'y limitent plus. Ces résultats ont été obtenus par W. Feller, en utilisant la méthode des fonctions caractéristiques et, par M. P. Lévy, par des considérations très fines de probabilité.

Dépendance. — En 1926 M. S. Bernstein [2] démontre et développe un ensemble de résultats qu'il a publiés en 1922 et qui daterait de 1917. Dans ce Mémoire on trouve quelques-unes des idées les plus importantes qui ont été à la base du développement consécutif de la théorie des probabilités. La méthode employée systématiquement est celle des fonctions caractéristiques. On y établit le théorème limite central pour des variables aléatoires que M. S. Bernstein appelle presque indépendantes; il suppose l'existence des trois premiers moments.

En 1935-1936, M. P. Lévy établit un théorème moins général que celui de M. S. Bernstein, mais par la méthode de Lindeberg.

Nous allons établir le théorème limite central pour des variables aléatoires liées ou non, sous des hypothèses aussi larges que possibles. Le théorème fondamental que nous obtenons renferme comme cas particuliers toutes les propositions obtenues, depuis 1900, et relatives aux conditions suffisantes de tendance centrale. Nous le ferons par les deux méthodes précitées et convenablement modifiées. Remarquons que nous avons ainsi, entre autres, une démonstration directe, par la méthode de Lindeberg, des conditions suffisantes les plus larges dans le cas de l'indépendance, obtenues par Feller à l'aide des fonctions caractéristiques. De plus, nous obtenons la loi des grands nombres, pour des variables aléatoires liées ou non, dont on déduit comme conséquences les résultats les plus généraux, relatifs aux variables aléatoires indépendantes, établis par Kolmogoroff puis élargis par Feller.

I. — Loi de Moivre-Laplace.

Problème et méthode. — Considérons la suite de sommes de variables aléatoires $S_{1,1}$, $S_{2,2}$, ...

$$S_{n,n} = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les $X_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, étant des variables aléatoires généralement liées. Soient, d'autre part, des variables laplaciennes $Y_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$, indépendantes entre elles ainsi que des $X_{n,i}$, avec

$$\mathfrak{M}(Y)_{n,i} = 0, \qquad \mathfrak{M}(Y_{n,i}^2) = \sigma_{n,i}^2$$

et puisqu'elles sont laplaciennes,

$$\mathfrak{M}\,|Y_{n,i}|^3 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma_{n,i}^3. \tag{1}$$

Posons

$$U_{n,n} = Y_{n,1} + Y_{n,2} + \ldots + Y_{n,n}.$$

Nous allons évaluer une borne supérieure de l'erreur commise sur la fonction de répartition de $S_{n,n}$ si l'on en remplace les termes par les termes correspondants de $U_{n,n}$. Cette méthode, due à Lindeberg [1] et perfectionnée par M. Paul Lévy [1], se base sur l'emploi d'une variable aléaloire auxiliaire Z qui *régularise* la fonction de régularisation étudiée et dont l'introduction remonte à Liapounoff [1]. Cette *régularisation* sans *déformation* sensible de la fonction de régularisation s'exprime par les deux lemmes suivants (*voir* pour démonstration détaillée Hadamard [1]), dus à Liapounoff :

Lemme I. — *Soient Z et Z′ deux variables aléatoires indépendantes dont la première est bornée. On peut choisir α suffisamment petit pour que la loi de $\alpha Z + Z'$ diffère aussi peu que l'on veut* (¹) *de la loi de Z.*

Lemme II. — *Si, de plus, la fonction de régularisation de αZ admet des dérivées de trois premiers ordres bornées en valeur absolue par k_1, k_2 et k_3 respectivement, la fonction de régularisation de $\alpha Z + Z'$ admet également des dérivées de trois premiers ordres bornées par les mêmes quantités.*

Les conditions à imposer aux $X_{n,i}$ pour que la loi limite, pour $n \to \infty$, des $S_{n,n}$ existe et soit laplacienne, apparaîtront naturellement. Nous éviterons donc de faire des hypothèses préliminaires sur les $X_{n,i}$, en particulier, nous ne supposerons pas l'existence des moments.

Borne. — Le premier indice n ne sera pas marqué dans ce paragraphe, étant bien entendu qu'il ne s'agit que d'une simplification d'écriture. Les probabilités relatives à X_i lorsqu'on connaît S_{i-1} seront accentuées, les probabilités *a priori* ne le seront pas. Le préfixe *sup* indiquera la borne supérieure des quantités accentuées, relatives à X_i, lorsque la valeur réalisée de S_{i-1} varie.

Soit

$$F_i(x) = \Pr(X_i < x),$$

$\Pr'(X_i < x)$ représente la probabilité pour que l'on ait $X_i < x$, évaluée sur la catégorie d'épreuves où l'on connaît la valeur réalisée de S_{i-1}.

Posons

$$G_i(x) = \Pr(Y_i < x)$$

et

$$\Phi_i(x) = \Pr(Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x).$$

D'après le lemme II, on peut écrire (Φ' et Φ'' représentant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de Φ)

$$\Phi_i(x-\xi) = \Phi_i(x) - \xi\Phi_i'(x) + \frac{\xi^2}{2!}\Phi_i''(x) + k_3\frac{\Theta\xi^3}{3!}, \qquad |\Theta(x,\xi)| < 1,$$

$$|\Phi_i'(x)| \leq k_1 \; |\Phi_i''(x)| \leq k_2, \qquad |\Phi_i'''(x)| \leq k_3,$$

et k_1, k_2, k_3 sont indépendants de i.

On a donc, $\varepsilon < 0$ étant quelconque,

$$\begin{aligned} P_i'(x) &= \Pr'(X_i + Y_{i+1} + \ldots + Y_n + \alpha Z < x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i(x-\xi)\, dF_i'(\xi) = \int_{|\xi|>\varepsilon} \Phi_i(x-\xi)\, dF_i'(\xi) \\ &\quad + \int_{|\xi|\leq\varepsilon}\left[\Phi_i(x) - \xi\Phi_i'(x) + \frac{\xi^2}{2!}\Phi_i''(x) + k_3\Theta\frac{\xi^3}{3!}\right] dF_i'(\xi). \end{aligned}$$

Ces intégrales existent, Φ_i et F_i' étant des fonctions de répartition.

(¹) *Voir* l'*o. c.*, pour la signification précise, ainsi que pour l'application que nous en ferons à la fin de la démonstration du théorème fondamental.

En remplaçant

$$\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} d\,F'_i(\xi) \quad \text{par la quantité égale} \quad 1-\int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F'_i(\xi),$$

on obtient

$$P'_i(x)=\int_{|\xi|>\varepsilon}[\Phi_i(x-\xi)-\Phi_i(x)]\,d\,F'_i(\xi)+\Phi_i(x)-\Phi_i(x)\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi\,d\,F'_i(\xi)$$
$$+\frac{\Phi''(x)}{2}\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)+\frac{k_3}{6}\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\theta\xi^3\,d\,F'_i(\xi).$$

D'autre part,

$$P_i(x)=\Pr(Y_i+Y_{i+1}+\ldots+Y_n+\alpha Z<x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_i(x-\xi)\,d\,G_i(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Phi_i(x)-\xi\Phi'_i(\xi)+\frac{\xi^2}{2}\Phi''_i(\xi)+k_3\Theta\frac{\xi^3}{3!}\right]d\,G_i(x)$$
$$=\Phi_i(x)+\frac{\Phi''(x)}{2}\sigma_i^2+\frac{k_3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\xi^3\,d\,G_i(x),$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\,dG_1(x)=\mathfrak{M}(Y_1)=0$, par hypothèse.

Formons la différence

$$\delta'_i(x)=P'_i(x)-P_i(x)$$
$$=\int_{|\xi|>\varepsilon}[\Phi(x-\xi)-\Phi_i(x)]\,d\,F'_i(\xi)-\Phi'_i(x)\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi\,d\,F'_i(\xi)$$
$$+\frac{\Phi''_i(x)}{2}\left[\int_{|\xi|>\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)-\sigma_i^2\right]+\frac{k_3}{6}\left[\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\theta\xi^3\,d\,F'_i(\xi)-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\xi^3\,d\,G_i(x)\right].$$

Par suite, et en utilisant (1), on obtient pour $\delta'_i(x)$ une borne indépendante de x,

$$|\delta'_i(x)|\leqq\delta'_i=\int_{|\xi|>\varepsilon}d\,F'_i(\xi)+k_1\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi\,d\,F'_i(\xi)\right|+\frac{k_2}{2}\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)-\sigma_i^2\right|$$
$$+\frac{k_3}{6}\varepsilon\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_1(\xi)+\frac{k_3}{6}\frac{4\sigma_i}{\sqrt{2\pi}}.$$

Passons à

$$\Delta_i(n)=\Pr(X_1+\ldots+X_{i-1}+X_i+Y_{i+1}+\ldots+Y_n+\alpha Z<x$$
$$-\Pr(X_1+\ldots+X_{i-1}+Y_i+Y_{i+1}+\ldots+Y_n+\alpha Z<x,$$

ou

$$\Delta_i(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'_i(x-\xi)\,d\Pr(X_1+\ldots+X_{i-1}<\xi).$$

Donc

$$|\Delta_i(x)|\leqq\sup\delta'_i=\Delta_i=\sup\int_{|\xi|>\varepsilon}d\,F'_i(\xi)+k_1\sup\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi\,d\,F'_i(\xi)\right|$$
$$+\frac{k_2}{2}\sup\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)-\sigma_i^2\right|+\frac{k_3}{6}\varepsilon\sup\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)+\frac{k_3}{6}\frac{4\sigma_i^3}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous pouvons maintenant borner

$$\Delta(x) = \Pr(X_1 + \ldots + X_n + \alpha Z < x) - \Pr(Y_1 + \ldots + Y_n + \alpha Z < x)$$

par une quantité indépendante de x, car

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(x).$$

Donc, en rétablissant partout le premier indice n,

$$\boxed{\begin{aligned} |\Delta_n(x)| \leq \Delta_n = & \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) + k_1 \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi\, d\,F'_{n,i}(\xi) \right| \\ & + \frac{1}{2} k_2 \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i} \right| \\ & + \frac{k_3}{6} \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) + \frac{k_3}{6} \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Max}_{i\leq n} \sigma_{n,i} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} \end{aligned}}$$

Théorème fondamental. — Cherchons des conditions suffisantes pour que $\Delta_n(x)$ tende vers zéro, avec $\frac{1}{n}$, uniformément par rapport à x. Il suffit que Δ_n tende vers zéro. Nous supposons en premier lieu que, pour $n \to \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, les trois premiers termes de Δ_n tendent vers zéro

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leq\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0,$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi\, d\,F'_{n,i}(\xi) \right| \to 0,$$

et

(3) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i} \right| \to 0.$$

D'après (3)

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) - \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leq\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i} \right| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Donc, si l'on suppose, en outre, que

(4) $$\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} = \sigma^2_n \to \sigma^2 \text{ fixe} \qquad (0 < \sigma < \infty)$$

on a, pour n assez grand,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, d\, F'_{n,i}(\xi) < \sigma^2 + \varepsilon',$$

où ε' est aussi petit que l'on veut.

Alors le quatrième terme de Δ_n, c'est-à-dire $\frac{k_3}{6}\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi)$ est aussi petit que l'on veut avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. (3) entraîne, *a fortiori*,

$$\sigma_{n,i}^2 - \sup \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, d\, F'_{n,i}(\xi) < \sup \left| \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, d\, F'_{n,i}(\xi) - \sigma_{n,i}^2 \right| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}$$

uniformément par rapport à i. Or,

$$\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, d\, F'_{n,i}(\xi) \leqq \varepsilon^2,$$

donc $\underset{i<n}{\text{Max}}\, \sigma_{n,i}$ est aussi petit que l'on veut, pour n grand, lorsqu'on prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Enfin, le lemme II montre que l'influence de αZ sur la loi de $S_{n,n}$ peut être rendue, à son tour, aussi faible que l'on veut par un choix convenable de α. Et nous pouvons énoncer :

Théorème fondamental. — *La loi de* $S_{n,n}$ *tend vers la loi de Moivre-Laplace à moyenne* 0 *et à fluctuation* σ^2 *quand, pour* $n \to \infty$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$,

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} d\, F'_{n,i}(\xi) \to 0,$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi \, d\, F'_{n,i}(\xi) \right| \to 0,$$

et, pour chaque valeur de ε, *s'il existe des quantités* $\sigma_{n,i}^2$ *telles que*

(3) $$\sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2 \, d\, F'_{n,i}(\xi) - \sigma_{n,i}^2 \right| \to 0,$$

(4) $$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{n,i}^2 \to \sigma^2 \text{ fixe} \qquad (0 < \sigma < \infty).$$

Remarque. — Si $\sigma = 0$, il existe une loi limite, mais celle-ci est dégénérée à l'origine. Nous examinerons ce cas, en détail, plus loin..

Cas particulier. — Posons $X_{n,i}=\frac{X_i}{a_n}$, $a_n>0$, $\mathfrak{M}(X_i)=0$. Le théorème devient :

La loi de $\frac{S_n}{a_n}$ *tend vers la loi de Moivre-Laplace à valeur moyenne* 0 *et à fluctuation* σ^2 *quand, pour* $n\to\infty$ *et pour tout* $\varepsilon>0$

$$\sum_{i=1}^{n}\sup\left|\int_{|\xi|>\varepsilon a_n} d\,F'_i(\xi)\right|\to 0,\qquad \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\sup\left|\int_{|\xi|<\varepsilon a_n}\xi\,d\,F'_i(\xi)\right|\to 0,$$

et pour chaque valeur de ε, *il existe des quantités* σ_i^2 *telles que*

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sup\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon a_n}\xi^2\,d\,F'_i(\xi)-\sigma_i^2\right|\to 0,\qquad \frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\to\sigma^2 \text{ fixe}\qquad (0<\sigma<\infty).$$

Indépendance. — Supposons les $X_{n,i}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) indépendantes entre elles, et choisissons $\sigma_{n,i}^2=\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,dF'_{n,i}(\xi)$ de manière à satisfaire à (3). Le théorème devient :

Pour que la loi de $S_{n,n}$ *tende vers la loi de Moivre-Laplace (à moyenne* 0*), il suffit que l'on ait, lorsque* $n\to\infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F_{n,i}(\xi)\to 0,\qquad \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} d\,F_{n,i}(\xi)\right|\to 0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F_{n,i}(\xi)\to\sigma^2.$$

Prenons des variables aléatoires à un indice X_i avec $\mathfrak{M}(X_i)=0$ et posons $X_{n,i}=\frac{X_i}{a_n}$ ($a_n>0$) certain et $\sigma=1$. L'énoncé ci-dessus devient celui du théorème de Feller [1] que ce dernier a établi au moyen des fonctions caractéristiques. Ainsi nous en avons une démonstration plus directe. On pourrait d'ailleurs transcrire la démonstration du théorème fondamental pour ce cas beaucoup plus simple. Remarquons qu'en un sens, précisé par Feller, les hypothèses faites deviennent, non seulement des conditions suffisantes mais encore des conditions nécessaires de tendance centrale. Ainsi, dans le cas particulier de l'indépendance, le théorème fondamental en donne le meilleur critère possible.

Autre démonstration. — Revenons au cas général et posons

$$\int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi)=\mu'_{n,i},\qquad \int_{|\xi|\leqq\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi)=\nu'_{n,i},$$

$$\int_{|\xi|\leqq\varepsilon}\xi^2\,d\,F'_{n,i}(\xi)=\sigma_{n,i}^2+\eta'_{n,i}.$$

Les hypothèses du théorème fondamental s'énoncent alors :

Lorsque $n \to \infty$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup \mu'_{n,i} \to 0,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup \nu'_{n,i} \to 0,$$

et il existe des $\sigma^2_{n,i}$ tels que

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup \eta'_{n,i} \to 0,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} = \sigma^2_n \to \sigma^2 \qquad (0 < \sigma < \infty).$$

Nous allons démontrer rapidement, par la méthode des fonctions caractéristiques, que ces conditions suffisent pour assurer la tendance centrale de $S_{n,n}$.

En omettant provisoirement les indices n et i, Θ désignant une quantité bornée quand t varie et $\mathfrak{M}'$ ayant la signification définie p

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}'(e^{itX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} d\,F(\xi) = \int_{|\xi| \leq \varepsilon} e^{it\xi} d\,F'(\xi) + \int_{|\xi| > \varepsilon} e^{it\xi} d\,F'(\xi) \\
&= \int_{|\xi| > \varepsilon} e^{it\xi} d\,F'(\xi) + \int_{|\xi| \leq \varepsilon} d\,F'(\xi) + it \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi\, d\,F'(\xi) - \frac{t^2}{2} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi^2 dF'(\xi) \\
&\qquad + \frac{t^3}{6} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \Theta \xi^3 dF'(\xi) \\
&= \int_{|\xi| > \varepsilon} (e^{it\xi} - 1)\, d\,F'(\xi) + 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 - \frac{t^2}{2}\eta' + it \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi\, d\,F'(\xi) \\
&\qquad + \frac{t^3}{6} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \Theta \xi^3 d\,F'(\xi).
\end{aligned}$$

Donc, en rétablissant les indices

$$\mathfrak{M}'(e^{itX_{n,i}}) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2_{n,i} + \delta'_{n,i}$$

avec, pour $|t| \leq T$ quelconque fini

$$|\delta'_{n,i}| \leq \Delta'_{n,i} = 2\mu'_{n,i} + T\,|\nu'_{n,i}| + \frac{m^2}{2}|\eta'_{n,i}| + \frac{T^3}{6}\varepsilon(|\eta'_{n,i}| + \sigma^2_{n,i}).$$

D'où,

$$\mathfrak{M}(e^{itS_{n,i}}) = \mathfrak{M}(e^{itS_{n,i-1}} e^{itX_{n,i}}) = \mathfrak{M}[e^{itS_{n,i-1}} \mathfrak{M}'(e^{itX_{n,i}})] = \left(1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2_{n,i}\right)\mathfrak{M}(e^{itS_{n,i-1}}) + \Delta_{n,i},$$

où

$$\Delta_{n,i} = \mathfrak{M}(e^{itS_{n,i-1}} \delta'_{n,i})$$

et, par suite,

$$|\Delta_{n,i}| \leq \sup \Delta'_{n,i} = \delta_{n,i}.$$

A partir d'ici il suffit de rappeler (mais avec deux indices) la fin de la démonstration du lemme fondamental de M. S. Bernstein ([2], p. 23). En posant

$$\varphi_{n,t} = \left(1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{n,1}^2\right)\cdots\left(1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{n,t}^2\right),$$

on a

$$\mathfrak{M}(e^{it\mathrm{S}_{n,n}}) = \varphi_{n,n} + \varphi_{n,n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\Delta_{n,t}}{\varphi_{n,t}}.$$

Comme $\left|\frac{\varphi_{n.n}}{\varphi_{n.t}}\right| < 1$, il en résulte que

$$|\mathfrak{M}(e^{it\mathrm{S}_{n,n}}) - \varphi_{n\,n}| < \sum_{t=1}^{n}\delta_{n,t}.$$

D'autre part, on a vu dans la première démonstration que $\operatorname*{Max}_{i \leqq n} \sigma_{n.i}$ est aussi petit que l'on veut avec ε, quand $n \to \infty$.

D'après les hypothèses faites, on a alors pour $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{n.i} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{n,n} \to e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(e^{it\mathrm{S}_{n,n}}) = e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Introduction des moments. — Supposons l'existence des $\mathfrak{M}'(\mathrm{X}_{n,i})$ et $\mathfrak{M}'(\mathrm{X}_{n,i}^2)$ ainsi que celle des $\mathfrak{M}(\mathrm{X}_{n,i})$ et $\mathfrak{M}(\mathrm{X}_{n,i}^2)$. Nous poserons $\mathfrak{M}(\mathrm{X}_{n,i}) = 0$, pour simplifier l'écriture.

On dira des $\mathrm{X}_{n,i}$, $i = 1, s, \ldots, n$, qu'elles forment un ensemble à indépendance asymptotique absolue au deuxième ordre ou ensemble AI_2 si, lorsque $n \to \infty$,

(I) $$\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(\mathrm{X}_{n,i})| \to 0,$$

(II) $$\sum_{i=1}^{n}\sup|\mathfrak{M}'(\mathrm{X}_{n,i}^2) - \mathfrak{M}(\mathrm{X}_{n,i}^2)| \to 0.$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque les* $\mathrm{X}_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *forment un ensemble* AI_2, *pour que la loi de* $\mathrm{S}_{n,n}$ *tende vers la loi de Moivre-Laplace (à moyenne nulle), il suffit que pour* $n \to \infty$ *et tout* > 0,

(α) $$\sum_{i=1}^{n}\sup\int_{|\xi|>\varepsilon}\xi^2\,d\,\mathrm{F}'_{n,i}(\xi) \to 0,$$

(β) $$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}(\mathrm{X}_{n,i}) = \sigma_n^2 \to \sigma^2 \text{ fixe} \qquad (0 < \sigma < \infty).$$

En effet, la condition (1) du théorème fondamental est satisfaite car

$$\int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) < \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) < \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

La condition (2) est satisfaite car

$$\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi) = \mathfrak{M}'(X_{n,i}) - \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi),$$

$$\left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi)\right| \leqq |\mathfrak{M}'(X_{n,i})| + \left|\int_{|\xi|>\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi)\right|,$$

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi)\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X_{n,i})| + \sum_{i=1}^{n} \sup \left|\int_{|\xi|>\varepsilon} \xi\,d\,F'_{n,i}(\xi)\right|.$$

Or, le premier terme du second membre tend vers zéro à cause de (I); le second est inférieur à

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2 d\,F'_{n,i}(\xi), \quad \text{lequel} \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

La condition (3) est remplie car, en choisissant $\sigma^2_{n,i} = \mathfrak{M}(X^2_{n,i})$,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X^2_{n,i}) - \mathfrak{M}(X^2_{n,i})| - \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2\, d\,F'_{n,i}(\xi) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n} \sup \left|\int_{|\xi|\leqq\varepsilon} \xi^2\, d\,F'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i}\right| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n} \sup |\mathfrak{M}'(X^2_{n,i}) - \mathfrak{M}(X^2_{n,i})| + \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi|>\varepsilon} \xi^2\, d\,F'_{n,i}(\xi), \end{aligned}$$

et les membres extrêmes de cette double inégalité tendent vers zéro à cause de (II) et de (α).

Enfin, la condition (4) est équivalente à (β) à cause du choix de $\sigma^2_{n,i} = \mathfrak{M}(X^2_{n,i})$.

Cas particuliers. — Prenons des variables aléatoires X_i, $i = 1, 2, \ldots$, avec $\mathfrak{M}(X_i) = 0$ et posons $s^2_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X^2_i)$. [On pourrait prendre $s^2_n = \mathfrak{M}(S^2_n)$, les résultats qui suivent subsisteraient avec $\sigma_n \to 1$.]

Forme Lindeberg. — Pour $X_{n,i} = \frac{X_i}{S_n}$, la condition (β) est automatiquement satisfaite avec $\sigma_n = \sigma = 1$ et (α) est équivalente à

$$(L_1) \qquad \frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sup\int_{|\xi|>\varepsilon s_n}\xi^2\,d\,F_i'(\xi)\to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Cette condition se réduit à celle de Lindeberg lorsque les X_i sont mutuellement indépendantes. Nous avons ainsi un résultat analogue pour des variables aléatoires liées satisfaisant à (I) et (II) qui deviennent ici. Lorsque $n\to\infty$,

$$(L_2) \qquad \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}\sup\mathfrak{M}'(X_i)\to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sup\mathfrak{M}'(X_2^i)-\mathfrak{M}(X_i^2)\to 0.$$

Forme Liapounoff. — Supposons maintenant que les $\mathfrak{M}'|X_i|(i=1, 2, \ldots)$ existent pour une certaine valeur de $k>2$ et que

$$(L_1') \qquad \frac{1}{S_n^k}\sum_{i=1}^{n}\sup\mathfrak{M}'|X_i|^k\to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Nous avons alors

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sup\int_{|\xi|>\varepsilon s_n}\xi^2\,d\,F_i'(\xi)\leq\frac{1}{\varepsilon^{k-2}s_n^k}\sum_{i=1}^{n}\sup\int_{|\xi|>\varepsilon s_n}|\xi_k|^k\,d\,F_i'(\xi)$$
$$\leq\frac{1}{\varepsilon^{k-2}s_n^k}\sum_{i=1}^{n}\sup\mathfrak{M}'|X_i|^k\to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Donc (L_1') entraîne (L_1) et, par suite, (L_1') et (L_2) assurent la tendance centrale de $S_{n,n}$. La condition (L_1') se réduit à celle de Liapounoff pour les X_i mutuellement indépendantes.

Pour $k=3$, ce résultat a été obtenu par M. S. Bernstein sous des hypothèses un peu plus restrictives.

Les hypothèses de M. P. Lévy réalisent les conditions (L_1) et (L_2), non plus avec $n\to\infty$, mais, pour tout n fini. En effet, il suppose :

1° que $\mathfrak{M}_{i-1}(X_i)=\mathfrak{M}(X_i)=0$, $\mathfrak{M}_{i-1}(X_i^2)=\mathfrak{M}(X_i^2)=0$, d'où (L_2);

2° que pour chaque valeur de >0, $\frac{|X_i|}{S_n}<\varepsilon$ pour tout $i\leq n$ et n suffisamment grand, d'où (L_1).

Application aux événements. — Soit A_i une suite d'événements liés ou non. Posons

$$X_i = 1(A_i)-\Pr(A_i), \qquad R_n-\overline{R}_n = S_n,$$
$$s_n^2=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_i-\overline{X}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\Pr(A_i)\Pr(\overline{A}_i),$$

et supposons que $s_n\to\infty$ avec n.

Les variables aléatoires bornées X_i satisfont alors à (L_1). Les conditions (L_2) deviennent ici :

$$\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}\sup|\operatorname{Pr}'(A_i)-\operatorname{Pr}(A_i)|\to 0,$$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\sup|[\operatorname{Pr}'(A_i)-\operatorname{Pr}(A_i)][1-2\operatorname{Pr}(A_i)]|\to 0.$$

Comme $s_n\to\infty$ et $|1-2\operatorname{Pr}(A_i)|<1$, la seconde de ces conditions est remplie dès que la première l'est. Ainsi

THÉORÈME. — *Lorsque, pour $n\to\infty$*

$$\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}\sup|\operatorname{Pr}'(A_i)-\operatorname{Pr}(A_i)|\to 0,$$

la loi de $\frac{R_n-\overline{R}_n}{s_n}$ *tend vers la loi de Moivre-Laplace réduite.*

Remarque. — Si $\operatorname{Pr}(A_i)=p$, constante différente de 0 et 1, $s_n^2=npq$ et sous la condition

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sup|\operatorname{Pr}'(A_i)-p|\to 0,$$

on a une extension directe du théorème de Moivre.

II. — Dégénérescence.

VARIABLES ASYMPTOTIQUEMENT NÉGLIGEABLES. — I. Commençons par la recherche des conditions dans lesquelles un terme $X_{n,k}$, k fixe, $(n=k, k+1, \ldots)$ des sommes $S_{n,n}$ (la $k^{\text{ième}}$ colonne du tableau T du chapitre III) ne modifie pas leur loi limite pour $n\to\infty$. Dans le cas de l'indépendance, il en est ainsi si ce terme tend vers zéro, en probabilité. Mais s'il y a dépendance, rien ne permet, *a priori*, de le négliger, car si sa propre contribution à $S_{n,n}$ devient négligeable, il semble qu'il peut ne pas en être ainsi quant à son influence possible sur les autres termes des $S_{n,n}$. Nous allons voir pourtant que l'on peut agir comme dans le cas de l'indépendance.

Soient A, B, C des événements liés ou non et U l'événement certain.

On a

$$\operatorname{Pr}(AB)=\operatorname{Pr}[A(U-\overline{B})]=\operatorname{Pr}(A)-\operatorname{Pr}(A\overline{B}),$$

donc

$$\operatorname{Pr}(AB)\geqq\operatorname{Pr}(A)-\operatorname{Pr}(\overline{B}).$$

Supposons

$$AB\subset C,$$

ce qui entraîne

$$\Pr(AB) \leqq \Pr(C)$$

et, par suite,

$$\Pr(C) \geqq \Pr(A) - \Pr(\overline{B}) \qquad \text{lorsque } AB \subset C.$$

Particularisons ces événements.

1. Soient X_n et Y_n deux variables aléatoires liées ou non, x et y deux nombres certains et

A : l'événement $X_n < x - y$,
B : l'événement $Y_n \leqq y$.

L'événement AB entraîne l'événement

$$C : X_n + Y_n < x,$$

donc

$$\Pr(X_n + Y_n < x) \geqq \Pr(X_n < x - y) - \Pr(Y_n > y).$$

2. Désignons maintenant par

A : l'événement $X_n + Y_n < x$,
B : l'événement $Y_n \geqq z$ (z nombre certain).

L'événement AB entraîne l'événement

$$C : X_n < x - Z,$$

donc

$$\Pr(X_n < x - Z) \geqq \Pr(X_n + Y_n < x) - \Pr(Y_n < z).$$

Nous aurons ainsi la double inégalité

$$\Pr(X_n < x - y) - \Pr(Y_n > y) \leqq \Pr(X_n + Y_n < x) \leqq \Pr(X_n < x - z) + \Pr(Y_n < Z).$$

Posons $y = c + 0$, $z = c - 0$, c nombre certain.

La relation obtenue devient

$$-\Pr(Y_n > c + 0) \leqq \Pr(X_n + Y_n < x) - \Pr(X_n + c < x \pm 0) \leqq \Pr(Y_n < c - 0).$$

$x - 0$ étant pris pour l'inégalité de gauche et $x + 0$ pour celle de droite.

Désignons par $X_n \xrightarrow{L} X$ la convergence de la loi de X_n vers celle de la variable aléatoire X lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire $\Pr(X_n < x) \to \Pr(X < x)$ sauf, peut-être, aux points de discontinuité de $\Pr(X < x)$.

Faisons croître n indéfiniment.

Lorsque $Y_n \to c$, $\Pr(Y_n < c - 0)$ et $\Pr(Y_n > c + 0)$ tendent simultanément vers zéro, donc

$$\Pr(X_n + Y_n < x) - \Pr(X_n + c < x \mp 0) \to 0.$$

Si, de plus, $X_n \xrightarrow{L} X$, alors

$$\Pr(X_n + Y_n < x) \to \Pr(X + c < x),$$

en tout point de continuité de cette fonction de x, donc

$$X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + c.$$

Si c'est $X_n + Y_n$ qui $\xrightarrow{L} X + c$, alors

$$\Pr(X_n + c < x \mp 0) \to \Pr(X + c < x),$$

en tout point de continuité de cette fonction de x,

$$X_n + c \xrightarrow{L} X + c,$$

et, par suite,

$$X_n \xrightarrow{L} X.$$

Ainsi :

Lemme. — *Lorsque, pour $n \to \infty$, $Y_n \xrightarrow{L} c$, pour que l'on ait*

$$X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + c,$$

il faut et il suffit que $X_n \xrightarrow{L} X$, et ceci, quelle que soit la liaison entre X_n et Y_n.

En particulier, lorsque $Y_n \xrightarrow{L} 0$, la loi limite de $X_n + Y_n$ est la même que la loi limite de X_n, si celle-ci existe. Par suite, lorsqu'il s'agit des lois limites des sommes de variables aléatoires *liées ou non*, on peut négliger les variables aléatoires en *nombre fini* qui tendent vers zéro (en loi). D'ailleurs, si au lieu de tendre vers zéro, elles tendent (en loi) vers des constantes déterminées, les négliger revient simplement à déplacer l'origine d'une quantité finie.

II. Si l'on peut prouver que les sommes partielles de certaines variables aléatoires, dont le nombre croît indéfiniment (une infinité de colonnes du tableau T du Chap. III), tendent vers zéro (en loi), le lemme qui précède permet de les négliger. Or la loi de Moivre-Laplace à moyenne nulle et à fluctuation nulle dégénère à l'origine. Donc, en prenant $\sigma = 0$ dans l'énoncé du théorème fondamental, on a précisément les conditions suffisantes cherchées.

Mais dans ce cas, les conditions (3) et (4) du théorème fondamental se simplifient. Écrivons-les ici : il existe de $\sigma^2_{n,i}$ telles que

$$(3') \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i} \right| \to 0$$

$$(4') \qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} \to 0.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi) \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi) - \sigma^2_{n,i} \right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \xi^2 \, dF'_{n,i}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{n,i}.$$

Donc, pour $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leqq \varepsilon} \xi^2 \, d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0.$$

Finalement, nous pouvons énoncer *la loi suivante des grands nombres :*

Théorème. — *Lorsque $n \to \infty$, pour que la loi de $S_{n,n}$ dégénère à l'origine, il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait*

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| > \varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leqq \varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leqq \varepsilon} \xi^2 \, d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0.$$

On peut démontrer ce théorème directement; les deux démonstrations du théorème fondamental se simplifient beaucoup ici.

Cas particuliers. — Posons $X_{n,i} = \frac{X_i}{a_n}$, $a_n > 0$ certain et $M(X_i) = 0$. Les conditions obtenues s'écrivent alors, pour $n \to \infty$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| > \varepsilon a_n} d\,F'_i(\xi) \to 0, \qquad \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \int_{|\xi| < \varepsilon a_n} d\,F'_i(\xi) \right| \to 0$$

et

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leqq \varepsilon a_n} \xi^2 \, d\,F'_i(\xi) \to 0.$$

En posant, de plus, l'indépendance mutuelle des X_i, on retrouve un résultat que Feller [3] a obtenu par la méthode des fonctions caractéristiques. Le résultat de Feller est une généralisation d'un théorème de Kolmogoroff que l'on retrouve en prenant $a_n = n$. Les conditions obtenues par cet auteur sont non seulement suffisantes, mais encore nécessaires, dans le cas de l'indépendance, pour que $\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{L} 0$. Ainsi nous retrouvons le meilleur critère possible dans ce cas particulier.

2. Remarquons que

$$\int_{|\xi| \leqq \varepsilon} \xi^2 \, d\,F'_{n,i}(\xi) \leqq \varepsilon \int_{|\xi| \leqq \varepsilon} |\xi| \, d\,F'_{n,i}(\xi),$$

et, par suite, les conditions du théorème énoncé ont sûrement lieu si, pour $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| > \varepsilon} d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \sup \int_{|\xi| \leqq \varepsilon} |\xi| \, d\,F'_{n,i}(\xi) \to 0.$$

CHAPITRE IV.

RAYON D'ACTIVITÉ DE LA LIAISON.

Nous établirons d'abord quelques propositions relatives aux moments des sommes des variations aléatoires généralement liées. Le lemme V se rattache à l'examen des compléments récents au théorème de récurrence de Poincaré (*voir* p. 254). Les autres seront utiles et présentent, peut-être, un certain intérêt par eux-mêmes.

M. S. Bernstein a introduit dans l'étude de la dépendance la notion du rayon d'activité ou d'intensité. En nous servant des résultats ci-dessous et de ceux du chapitre précédent nous allons l'étudier systématiquement dans la section II. Nous étendrons et généraliserons les résultats de cet auteur.

I. — Inégalités pour les moments des sommes.

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires *non négatives*, liées ou non, et

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bornes d'une différence. — Commençons par une inégalité algébrique très simple. On a, $q > 0$ étant un entier,

$$(X_1 + \ldots + X_n)^q = \sum \frac{q!}{h_1 \ldots h} X_1^{h_1} \ldots X_n^{h_n} \quad (h_i \geqq 0 \text{ entier}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i = q.$$

D'autre part, on sait que (inégalités de Minkowki)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^p \leqq \sum_{i=1}^{n} X_i^p, \qquad \text{si } 0 < p < 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^p \geqq \sum_{i=1}^{n} X_i^p, \qquad \text{si } p \geqq 1.$$

Donc, f désignant une quantité telle que $0 \leqq f < 1$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{q+f} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{q+f} \leqq \left(\sum \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} X_1^{h_1} \ldots X_n^{h_n}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^f\right).$$

En séparant dans le membre droit extrême les termes en X_i^{q+f}, on obtient

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i^{q+1} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{q+f} \leqq \sum_{i=1}^{n} X_i^{q+f} + \sum{}' \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} X_1^{h_1} \ldots X_n^{h_n} X_i^f,$$

où

$$(1')\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous } \sum' \text{ figurent } n^{q+1}-n \text{ produits des } X_i \text{ renfermant au moins deux} \\ \text{facteurs X à indices distincts; chaque facteur est, au plus, à la puissance } q \\ \text{et le degré de chaque produit est } q+f. \end{array} \right.$$

Passons aux valeurs moyennes évaluées toutes sur une même catégorie d'épreuves C. On a, immédiatement :

Lemme 1. — *Les* X_i *étant des variables aléatoires non négatives,* $q > 0$ *entier et* $0 < f < 1$, *on a*

$$(1)\qquad 0 \leq \mathfrak{M}(S_n^{q+f}) - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(X_i^{q+f}) \leq \sum' \frac{q!}{h_1!\ldots h_n!}\mathfrak{M}(X_1^{h_1}\ldots X_n^{h_n}X_i^f),$$

où les $h_i \geq 0$ *sont des entiers tels que* $\sum_{i=1}^{n} h_i = q$ *et* $\sum'$ *est définie par* (1′).

Remarque. — Si $X_1, \ldots, X_n$ font partie d'un ensemble $\mathcal{E}$ de variables aléatoires telles qu'il y en ait qui précèdent X_1, la catégorie d'épreuves C peut aussi être définie comme la catégorie initiale (donnée avant toute épreuve sur $\mathcal{E}$) à laquelle on ajoute des renseignements supplémentaires concernant certaines des épreuves portant sur des variables qui précèdent X_1. La relation (1) est toujours valable. Cette remarque, quoique évidente, nous sera fort utile.

Borne de $\mathfrak{M}(S_n^r)$. — Soit $\mathfrak{M}_x(X_i)$ la moyenne de X_i évaluée en connaissant certaines des variables X_h, $h = 1, 2, \ldots, i-1$, et $\sup \mathfrak{M}_x(X_i)$ sa borne supérieure lorsque les X_h connues et leurs valeurs réalisées varient de toutes les manières possibles.

Faisons l'hypothèse suivante :

$$(2)\qquad \sup \mathfrak{M}_x(X_i^r) < L^r \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \ (r > 0, \text{ L constante indépendante de } i).$$

L constante indépendante de i. On peut alors borner $\mathfrak{M}(S_n^r)$.

Remarquons d'abord que (2) entraîne

$$(3)\qquad \sup \mathfrak{M}_x(X_i^{r'}) < L^{r'} \quad (0 \leq r' \leq r).$$

En effet, on sait que

$$\mathfrak{M}_x(X_i^{r'}) \leq [\mathfrak{M}_x(X_i^r)]^{\frac{r'}{r}},$$

les moyennes étant évaluées sur une même catégorie d'épreuves. Donc, si l'on considère celle qui donne à $\mathfrak{M}_x(X_i^r)$ sa plus grande valeur,

$$\sup \mathfrak{M}_x(X_i^{r'}) \leq [\mathfrak{M}_x(X_i^r)]^{\frac{r'}{r}} \leq [\sup \mathfrak{M}_x(X_i^r)]^{\frac{r'}{r}} \leq L^{r'}.$$

Pour $i < k$,

$$\mathfrak{M}(X_i^{r_i} X_k^{r_k}) = \mathfrak{M}[X_i^{r_i} \mathfrak{M}_x(X_k^{r_k})],$$

$\mathfrak{M}_k(X_k^{r_k})$ calculée connaissant X_i.

On en tire, si $r_i > 0$ et $r_k > 0$ ne dépassent pas r,

$$\mathfrak{M}(X_i^{r_i} X_k^{r_k}) \leqq L^{r_i + r_k}$$

et d'une façon générale $(\ldots, 0 < r_l < r, \ldots)$,

$$\mathfrak{M}(X_i^{r_i} X_k^{r_k} X_l^{r_l} \ldots) < L^{r_i + r_k + r_l + \ldots}. \tag{4}$$

La relation (1) donne alors, en posant $r = q + f$, où $q = [r]$, partie entière de r,

$$n L^r \leqq \mathfrak{M}(S_n^r) \leqq n^{q+1} L^r.$$

En appliquant (3) et (1) à $S_n^{r'}$, on a, de même, comme conséquence de (2),

$$\mathfrak{M}(S_n^{r'}) \leqq n^{[r']+1} L^{r'} \qquad (0 \leqq r' \leqq r).$$

Donc,

LEMME II. — $\operatorname{Sup} \mathfrak{M}_X(X_i^r) \leqq L^r$, $r > 0$, L *constante indépendante de* i, *entraîne*

$$\mathfrak{M}(S_n^{r'}) \leqq n^{[r']+1} L^{r'} \quad \textit{pour tout } r' \textit{ tel que } 0 \leqq r' \leqq r.$$

Borne de $\mathfrak{M}(S_n^r)$. — Soit $q > 0$ entier et $S_n^{(\nu)} = X_{\nu+1} + \ldots + X_{\nu+n}$. Désignons par $\mathfrak{M}_S(S_n^{(\nu)})^q$ la moyenne de $(S_n^{(\nu)})^q$ évaluée en connaissant certaines des $S_{n'}^{(\mu)}$, $\mu + n' < \nu$, et par $\sup \mathfrak{M}_S(S_n^{(\nu)})^q$, sa borne supérieure lorsque les $S_{n'}^{(\mu)}$ connues et leurs valeurs réalisées varient de toutes les manières possibles.

Supposons que

$$\sup \mathfrak{M}_x(X_i^r) \leqq L^r \ldots \tag{2}$$

et

$$\sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^q \leqq A^q n^{kq} \quad \text{pour tout } \nu \text{ et tout } n \text{ avec } q > 0 \text{ entier} \qquad (k > 0 \text{ et A fixes}). \tag{5}$$

Cherchons une borne supérieure de même forme avec, au lieu de q, $r = q + f$, où $0 \leqq f \leqq 1$ (1), et, en premier lieu, une constante B indépendante de n telle que l'on ait, pour tout n,

$$\mathfrak{M}(S_n^r) \leqq B^r n^{kr}. \tag{6}$$

Cette relation a lieu pour $n = 1$, avec $B \geqq L$. Procédons par récurrence :

a. Ayant lieu pour n, elle a lieu pour mn, où m est un entier fixe $\geqq 2$, si

$$m B^r n^{kr} + A^r n^{kr}(m^{q+1} - m) < B^r (mn)^{kr},$$

(1) Remarquons que les relations des paragraphes 1 et 2 où figure f sont valables pour $f = 1$ (il suffit de se reporter aux démonstrations).

en vertu de (1), de (3) appliquée à $S_n^{(\nu)}$, et de (5). Il faut donc pouvoir choisir $B > L$ de manière à satisfaire à

$$(7) \qquad (m^{kr-1}-1)B^r \geqq (m^q - 1)A^r.$$

Par suite, si

$$m^{kr-1} - 1 > 0, \qquad \text{c'est-à-dire } \underline{kr > 1},$$

il suffit de prendre

$$B \geqq B' = \text{Max}\begin{cases} L^r, \\ \dfrac{m^q - 1}{m^{kr-1} - 1} A^r. \end{cases}$$

b. Reste à choisir $B > B'$ afin que (6) ait lieu pour $n' > 0$ *entier quelconque*. Or, on peut toujours trouver un entier $p \geqq 0$ tel que

$$m^{p-1} n \leqq n' < m^p n,$$

donc

$$mn' \geqq m^p n.$$

Par suite, les X_i étant non négatifs,

$$\mathfrak{M}(S_{n'}^r) \leqq \mathfrak{M}(S_{m^p n}^r) \leqq B'^r (m^p n)^{kr} \leqq (B'^r m^{kr}) n'^{kr}.$$

Finalement, on réalisera le résultat cherché, si $kr > 1$, en prenant

$$B = \text{Max}\begin{cases} m^{kr} L^r, \\ \dfrac{m^q - 1}{m^{kr-1} - 1} m^{kr} A^r. \end{cases}$$

La condition $kr > 1$ est sûrement remplie, pour *tout* $r < q+1$, si l'on a $k(q+1) > 1$. M. S. Bernstein a étudié au cours d'une démonstration le cas de $q = 2$ et $3k > 1$.

Ce qui précède est valable pour tout $\mathfrak{M}_s(S_n^{(\nu)})^r$ et quel que soit ν, comme il est facile de le vérifier; on a donc, avec les mêmes hypothèses,

$$(8) \qquad \sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^r \leqq B^r n^{kr}, \qquad \text{pour tout } \nu \text{ et tout } n.$$

De plus, dès que par la méthode précédente on peut passer de q jusqu'à $q+1$, on peut passer de $q+1$ à $q+2$, etc., à condition, bien entendu, d'avoir (2) pour $r = q+1$, $q+2$, etc.

Ainsi pour tout $t \geqq q$ il existe une constante C indépendante de ν et n telle que

$$\sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^t < C^t n^{kt}, \qquad \text{pour tout } \nu \text{ et tout } n,$$

pourvu que cette relation ait lieu pour $n = 1$ (avec $C = L$), ainsi que pour $t = q$, à condition que l'on ait $k(q+1) > 1$.

Reste à examiner le cas où $k(q+1) \leqq 1$. Remplaçons dans (6) k par k' tel que $k'(q+1) > 1$ (donc $k' > k$); (7) devient pour

$$\frac{1}{k'} < r \leqq q+1,$$

$$B^r(m^{k'r} - m)n^{k'r} \geqq A^r(m^{q+1} - m)n^{kr},$$

ou

$$B^r \geqq \frac{m^{q-1}}{m^{k'r-1} - 1} n^{(k-k')r}.$$

Comme $n \geqq 1$ et $k - k' < 0$, on a $n^{(k-k')r} \leqq 1$ et, par suite, on peut prendre (*a fortiori*) la même valeur pour B [mais k' remplace k dans (6) et la borne ainsi obtenue est moins bonne].

Enfin, jusqu'ici nous avons supposé dans (5) que q était entier. Cette restriction peut être supprimée car, si (5) a lieu pour un certain q non entier, elle existe, grâce à (3), pour $[q]$ et avec le même k. Ainsi,

Lemme III. —

$$\sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^q \leqq A^q n^{kq}, \quad \textit{pour tout } \nu \textit{ et tout } n$$

entraîne :

1. *si* $r \leqq q$, *alors* $\sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^r \leqq A^r n^{kr}$, *pour tout* ν *et tout* n;
2. *si* $r > q$ *et* $\sup \mathfrak{M}_x(X_i)^r \leqq L^r$,

alors

$$\sup \mathfrak{M}_s[S_n^{(\nu)}]^r \leqq B^r n^{k'r}, \quad \textit{pour tout } \nu \textit{ et tout } n,$$

B *étant une constante convenablement choisie et*

$$k' = \text{Max}\left\{\begin{array}{l} k, \\ \dfrac{1}{[q]+1} + \varepsilon \end{array}\right. \qquad (\varepsilon > 0 \textit{ arbitraire}).$$

Influence des variables aléatoires voisines. — De même que pour le lemme I nous allons établir une propriété purement algébrique de $\left(\sum_i^n X_i\right)^q n$, $q > 0$ entier et les X_i des variables aléatoires *quelconques* (nous ne les supposons plus non négatives). Il en découlera immédiatement une propriété des moments de sommes.

On a

$$\left(\sum_i^n X_i\right)^q = \sum X_{i_1}, \ldots, X_{i_q} \qquad (1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_q \leqq n).$$

Appelons distance de X_i et X_k la différence $|i-k|$ et séparons Σ en deux sommes :

Σ' qui porte sur les produits des X_i tels que tout facteur soit à une distance $\leqq d$ d'au moins un autre facteur;

Σ'' qui renferme les autres produits, c'est-à-dire ceux où un facteur au moins est à une distance $> d$ de tous les autres facteurs. Nous cherchons le nombre de termes de Σ' en suivant M. S. Bernstein qui, au cours d'une démonstration [2] a étudié le cas de q pair.

Supposons les indices $i_1, \ldots, i_q$ rangés par ordre de grandeur non décroissante et considérons d'abord $q = 2p$. Pour obtenir un terme quelconque de Σ' on peut commencer par choisir arbitrairement les indices à sous-indices pairs : $i_2, i_4, \ldots, i_{2p}$. Tout indice i_{2m+1} doit alors être, d'après la définition de Σ', à une distance $\leq d$ de l'un des deux indices i_{2m}, i_{2m+2} qui l'encadrent. Pour i_1 on n'a que d positions possibles avant i_2, donc $d+1$ positions en tout; pour i_3, d positions après i_2 au plus, d avant i_4 au plus, en tout $2(d+1)$ au plus; de même pour $i_5, \ldots, i_{2q-1}$.

Ainsi il existe au plus $(d+1)(2d+2)^{p-1}$ positions possibles pour les indices impairs lorsque les indices pairs ont été choisis. Le nombre des choix de ces derniers ne peut dépasser n^p. Enfin on peut permuter les indices i au plus de $2p$ façons.

Par suite, le nombre total de termes de Σ' ne dépasse pas

$$2p\, 2^{p-1}(d+1)^p n^p.$$

Si q est impair, $q = 2p+1$, le même raisonnement s'applique, mais il y a en plus un indice après i_{2p} à une distance $\leq d$, donc ici le nombre total de termes de Σ' ne dépasse pas

$$(2p+1)\, 2^p (d+1)^{p+1} n^p.$$

En appliquant à

$$\mathfrak{M}(S_n^q) = \mathfrak{M}\left(\sum{}' X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}\right) + \mathfrak{M}\left(\sum{}'' X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}\right),$$

on peut donc énoncer :

Lemme IV. — *Le nombre de termes du développement de* $\mathfrak{M}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^q$, $q > 0$ *entier, dans chacun desquels aucune variable n'est à une distance* $> d$ *des autres qui y figurent, ne dépasse pas* Q_q, *où*

$$\begin{aligned} Q_{2p} &= 2p!\, 2^{p-1}(d+1)^p n^p, \\ Q_{2p+1} &= (2p+1)!\, 2^p (d+1)^{p+1} n^p. \end{aligned}$$

Encore sur le théorème de Poincaré. — Nous avons montré dans l'étude des événements (Chap. I, p. 254) que l'on retrouve le complément au théorème de Poincaré, dû à Khintchine, comme conséquence particulière d'un résultat tout à fait élémentaire. Ce résultat se présente à son tour comme cas particulier d'une inégalité entre les moments des sommes.

Soient deux entiers $n \geq q > 0$.

On a

$$S_n^q = \sum \frac{q\,!}{h_1\,!, \ldots, h_k\,!} X_{i_1}^{h_1}, \ldots, X_{ki}^{h_k}, \qquad h_i \text{ entier tel que } \sum_{i=1}^{k} h_i = q.$$

Cette relation s'écrit encore

$$S_n^q = \frac{n\,!}{(n-q)!} \frac{\sum X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}}{C_n^q} + \sum_{k<q} \left(\frac{q\,!\, C_n^k}{h_1\,!, \ldots, h_k\,!} \frac{\sum X_{i_1}^{h_1}, \ldots, X_k^{h_k}}{C_n^k} \right).$$

Lorsque $n \to \infty$ et q reste fixe

$$\frac{n\,!}{(n-q)!\,n^q} \to 1,$$

tandis que

$$\frac{C_n^k q\,!}{h_1\,!, \ldots, h_k\,!\,n^q} \to 0, \qquad \text{pour chaque } k < q.$$

Alors, en supposant

$$\sup \mathfrak{M}_x |X_i^q| \leq L^q \qquad (\text{L indépendant de } i),$$

$$\mathfrak{M}\left(\frac{S_n'}{n}\right)^q = (1-\varepsilon_n)\mathfrak{M}\left(\frac{\sum X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}}{C_n^q}\right) + \varepsilon_n',$$

où $\varepsilon_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$, ainsi que ε_n'.

En effet, $\varepsilon_n = 1 - \frac{n\,!}{(n-q)!\,n^q}$ et ε_n' représente la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est le produit d'une quantité $\frac{C_n^k q\,!}{h_1\,! \ldots, h_x\,!\,n^q}$, où $k < q$, par $\frac{\Sigma X_{i_1}^{h_1}, \ldots, X_{i_k}^{h_k}}{C_n^k}$. La première tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'autre part,

$$|\mathfrak{M}(X_{i_1}^{h_1}), \ldots, X_{i_k}^{h_k})| \leq \mathfrak{M}|X_{i_1}^{h_1}, \ldots, X_{i_k}^{h_k}| \leq L^q,$$

et, par suite, la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{C_n^k} \sum \mathfrak{M}(X_{i_1}^{h_1}, \ldots, X_{i_k}^{h_k}) \leq L^q$$

demeure bornée. Ainsi :

Lemme V. — *Lorsque* $\sup_x \mathfrak{M}|X^q| < L^q$, L *indépendant de* i, $q > 0$ *entier, on a*

$$\mathfrak{M}\left(\frac{S_n}{n}\right)^q = (1-\varepsilon_n)\frac{1}{C_n^q}\sum \mathfrak{M}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}) + \varepsilon_n', \qquad \textit{où } \varepsilon_n \textit{ et } \varepsilon_n \to \textit{avec } \frac{1}{n}.$$

Dans le cas très particulier où $X_i = I(A_i)$ et $q = 2$, on retrouve le résultat, déjà donné, en remarquant que

$$\mathfrak{M}^q(f_n) \leq \mathfrak{M}(f_n^q).$$

II. — Quelques cas de tendance centrale.

A. Principes. — Nous allons appliquer les résultats du chapitre précédent, ainsi que les lemmes qui viennent d'être établis, à la recherche de quelques cas généraux de tendance centrale. Nous aurons ainsi des groupes nombreux de conditions suffisantes pour la tendance centrale. Il faut les considérer essentiellement comme illustrations du mode d'application des résultats rappelés et des idées indiquées ci-dessous.

Règles. — Soit la suite de sommes de variables aléatoires, liées ou non,

$$S_{n,n} = X_{n,1} + \ldots + X_{n\,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où l'on suppose, pour simplifier l'écriture, $\mathfrak{M}(X_{n,i}) = 0$ pour tout i et n. Nous voulons reconnaître l'existence d'une tendance centrale lorsque $n \to \infty$, ou bien trouver les conditions dans lesquelles elle a lieu.

a. On cherche s'il existe $\nu(n)$ de ces variables telles que leur somme $\sum\limits_{\nu} X_{n,i}$ tende en probabilité vers zéro ou, plus généralement, vers une constante fixe. En pratique, il s'agit de vérifier que, lorsque $n \to \infty$:

Soit $\sum\limits_{\nu} \sup \mathfrak{M}' |X_{n,i}| \to 0$, ce qui a sûrement lieu si

$$\mathfrak{M} |X_{n,i}| < L_n \quad \text{et} \quad \nu L_n \to 0.$$

Soit $\mathfrak{M}\left(\sum\limits_{\nu} X_{n,i}\right)^2 \to 0$, ce qui a sûrement lieu si $\mathfrak{M}(X_{n,i}^2) < M_n^2$ et $\nu M_n \to 0$, car l'inégalité de Schwarz permet d'écrire

$$\left|\sum_{\nu} M(X_{n,i} X_{n,j})\right| \leq \sum M^{\frac{1}{2}}(X_{n,i}^2)\, M^{\frac{1}{2}}(X_{n,j}^2) \leq \nu^2 M_n^2.$$

b. Nous avons établi (p. 300) qu'il suffit alors de montrer que les $n' = n - \nu$ autres variables aléatoires satisfont aux conditions du théorème fondamental en ne tenant compte que de leur dépendance mutuelle *et sans tenir compte de leurs liaisons avec les variables* $X_{n,i}$.

En pratique, il s'agit de vérifier que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sum_i \sup |\mathfrak{M}''(X_{n,i})| \to 0, \qquad \sum_i \sup |\mathfrak{M}''(X_{n,i}^2) - \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)| \to 0,$$

$$\sum_i \sup \mathfrak{M}'' |(X_{n,i})|^q \to 0 \qquad (q \text{ fixe} > 2)$$

$$\sum_i \mathfrak{M}(X_{n,i}^2) \to \sigma^2 \text{ fixe} \qquad (0 < \sigma < \infty),$$

où $\mathfrak{M}''(X_{n,i})$ a le sens suivant : c'est la moyenne de $X_{n,i}$ calculée en tenant uniquement compte des valeurs réalisées des sommes des variables aléatoires précédant $X_{n,i}$ et ne faisant pas partie des $\nu(n)$ variables de a.

Sommes partielles. — Mais il est possible d'aller plus loin, car rien n'empêche *d'appliquer tout ce qui précède,* non plus aux variables aléatoires $X_{n,i}$ prises isolément, mais *à des « tranches » des sommes des* $X_{n,i}$, *en remplaçant au préalable chaque tranche* $X_{n,i}+\ldots+X_{n,i+g}$ *par sa somme.*

Dans le cas des variables aléatoires mutuellement indépendantes, cette modification est sans intérêt, car ce qui intervient surtout dans la recherche de la tendance centrale ce sont les moments de $S_{n,n}$ des premiers ordres. Or, les moments de trois premiers ordres de $S_{n,n}$ ne changent pas si l'on introduit des sommes partielles et s'expriment de la même façon en fonction des moments de ces sommes :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(X_{n,i}+\ldots+X_{n,i+g}) &= \mathfrak{M}(X_{n,i})+\ldots+\mathfrak{M}(X_{n,i+g})=0,\\
\mathfrak{M}(X_{n,i}+\ldots+X_{n,i+g})^2 &= \mathfrak{M}(X_{n,i}^2)+\ldots+\mathfrak{M}(X_{n,i+g}^2),\\
\mathfrak{M}(X_{n,i}+\ldots+X_{n,i+g})^3 &= \mathfrak{M}(X_{n,i}^3)+\ldots+\mathfrak{M}(X_{n,i+g}^3).
\end{aligned}$$

Dans le cas de dépendance, au contraire, ces relations, à l'exception de la première, n'ont plus lieu en général. D'autre part, la dépendance ne joue plus entre les $X_{n,i}$ isolées, mais entre les sommes partielles que l'on considère; ceci peut atténuer ses effets et les complications des calculs qui lui sont dues.

Réduction. — Enfin, nous allons simplifier le problème. Au lieu de chercher ce que devient la loi de $S_{n,n}$ lorsque $n\to\infty$, nous étudions les lois des $\frac{S_{n,n}}{a_n}$, la suite des $a_n>0$ certains étant convenablement choisies. On la prend d'habitude de manière que ces lois soient réduites et l'on remplit ainsi automatiquement la quatrième condition de b, avec $\sigma=1$. Dans le cas de l'indépendance on a ainsi $a_n^2=\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}(X_n^2, i)$, puisqu'on suppose $\mathfrak{M}(X_{n,i})=0$. S'il y a dépendance, $a_n^2=\mathfrak{M}(S_{n,n}^2)$ est généralement différent de $\sum_{n=1}^{n}\mathfrak{M}(X_{n,i}^2)$, mais (Chap. II, p. 277) si la condition de b est satisfaite, le rapport de ces deux quantités tend vers 1 lorsque $n\to\infty$.

Rayon d'intensité de la liaison. — Dans tout ce qui suit, nous omettons, sauf mention contraire, le premier indice n des variables aléatoires $X_{n,i}$ et $S_{n,n}=X_{n,1}+\ldots+X_{n,n}$. On étudie les sommes normées $\frac{S_n}{a_n}$ de variables aléatoires X_i, avec $\mathfrak{M}(X_i)=0$, donc $\mathfrak{M}\left(\frac{S_n}{a_n}\right)=0$ et $\mathfrak{M}\left(\frac{S_n}{a_n}\right)^2=1$.

Nous allons maintenant introduire avec M. S. Bernstein une idée très naturelle. Dans la plupart des cas concrets l'influence sur une variable aléatoire des

autres variables se manifeste de moins en moins lorsqu'elles en sont de plus en plus éloignées. D'une façon plus particulière : ***nous ne supposerons rien, pour*** $|i-h| \leqq d_n$ ***nous supposerons un certain affaiblissement de la liaison pour*** $|i-h| > d_n$. **M. S. Bernstein appelle** d_n **rayon d'activité ou d'intensité. L'hypothèse essentielle est que**

$$\text{(R)} \qquad \boxed{\frac{d_n}{a_n} \to 0, \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.}$$

Ceci fait que lorsque n **croît, la dépendance joue de moins en moins (au sens que nous préciserons par la suite).**

On groupe alors les termes de S_n **comme l'indique le schéma ci-dessous :**

$$X_1 + \ldots + X_{D_n} + X_{D_n+1} + \ldots + X_{D_n+d_n} + X_{D_n+d_n+1} + \ldots + X_{7D_n+d_n} + \ldots + X_{(l_n-1)(D_n+d_n)+1} + \ldots + X_{l_nD_n+(l-1)d_n} + \ldots + X_n$$

$$G_1 = X_1 + \ldots + X_{D_n}. \qquad g_1 = X_{D_n+1} + \ldots + X_{D_n+d_n},$$

$$G_2 = X_{D_n+d_n+1} + \ldots + X_{2D_n+d_n}, \qquad g_2 = X_{2D_n+d_n+1} + \ldots + X_{2D_n+2d_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$G_{l_n} = X_{(l_n-1)(D_n+d_n)+1} + \ldots + X_{l_nD_n+(l_n-1)d_n}; \qquad g_{l_n} = X_{l_nD_n+(l_n-1)d_n+1} + \ldots + X_n.$$

D_n **et** e_n **sont choisis de manière que** g_{e_n} **ne renferme pas plus de** d_n **termes, donc**

$$(\text{I}_1) \qquad l_n(D_n + d_n) > n > l_n D_n$$

et

$$(\text{I}_2) \qquad D_n > d_n,$$

de sorte que la liaison déjà affaiblie entre les G le soit également entre les g.

Remarquons que, si l'on sait que $\sup \mathfrak{M}' |(X_i)| < L$, **indépendant de** i **et de** n, **il suffit (d'après p. 368 et sqq) de prendre** e_n **de manière que** $\frac{e_n d_n}{a_n} \to \infty$ **avec** $\frac{1}{n}$, **pour que l'ensemble des** $\frac{g_i}{a_n}$ **devienne négligeable vis-à-vis de** $\frac{S_n}{a_n}$. **On pourrait le faire dans la suite, mais il sera préférable d'obtenir le même résultat par un choix moins restrictif de** e_n, **en profitant des précisions qu'il faudra donner à la notion d'affaiblissement de la liaison au delà de** d_n.

B. ***Réalisation de la tendance centrale.*** **— Nous allons rechercher les hypothèses naturelles à imposer à la liaison au delà du rayon d'intensité pour que la tendance centrale ait lieu. Pour scinder les difficultés nous commençons par une hypothèse particulièrement commode. Rappelons que nous appliquons les principes donnés dans A et suivons pas à pas les règles** ***a*** **et** ***b*** **y énoncées.**

Premier cas. **— (H)** X_h **et** X_i **sont indépendantes lorsque** $|i-h| > d_n$.

a. **Dans ce cas**

$$\frac{\sum \mathfrak{M}(g_i g_k)}{a_n^2} = 0, \qquad \text{puisque } \mathfrak{M}(g_i g_k) = \mathfrak{M}(g_i)\,\mathfrak{M}(g_k) = 0.$$

Pour que Σg_i soit négligeable pour n très grand, il suffit donc que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{M}\left(\sum g_i\right)^2}{a_n^2} = \frac{\sum \mathfrak{M}(g_i^2)}{a_n^2} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Supposons les $\mathfrak{M}(X_i^2)$ bornés tous par L^2; alors la condition ci-dessus est vérifiée si

$$(C_1) \qquad \frac{l_n d_n^2}{a_n^2} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

b. Désignons par $\mathfrak{M}'(G_i)$ la moyenne de G_i calculée en connaissant les valeurs réalisées de $G_1 + \ldots + G_{i-1}$ et par « sup » la borne supérieure d'une telle quantité lorsque ces valeurs réalisées varient de toutes les manières possibles.

Puisque $\mathfrak{M}'(G_i)$ n'est évaluée qu'en tenant compte des variables aléatoires qui précèdent G_i à une distance $> d_n$, (H_1) entraîne

$$\mathfrak{M}'(G_i) = \mathfrak{M}(G_i) = 0.$$

Pour la même raison

$$\mathfrak{M}'(G_i^2) = \mathfrak{M}(G_i^2),$$

donc

$$\frac{1}{a_n^2} \sum |\mathfrak{M}'(G_i^2) - \mathfrak{M}(G_i^2)| = 0.$$

Reste à satisfaire à la condition

$$\frac{1}{a_n^q} \sum \sup \mathfrak{M}' |G_i|^q \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n} \qquad (q \text{ fixe} > 2).$$

Nous chercherons, soit à éliminer l'influence des variables aléatoires X_i à des distances mutuelles $\leqq d_n$, soit à borner supérieurement $\mathfrak{M}' |G_i|^q$.

Influence de variables voisines. — Nous appliquons le lemme II et supposons q entier. On a

$$\mathfrak{M}' |G_i|^q = \sum \mathfrak{M}''(X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}),$$

les moyennes étant évaluées sur une même catégorie d'épreuves. Si l'un des facteurs X_{i_k} est hors du rayon d'action des autres facteurs, le terme qui le renferme est nul.

En effet,

$$\mathfrak{M}''(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}, \ldots, X_{i_q}) = \mathfrak{M}''[X_{i_1}, \ldots, X_{i_{p-1}}, \ldots, X_{i_{p+1}}, \ldots, X_{i_q} \mathfrak{M}'''(X_{i_p})],$$

où $\mathfrak{M}'''(X_{i_p})$ est la moyenne de X_{i_p} évaluée en tenant compte des X_k telles que $|i - k| > d$. Par suite,

$$\mathfrak{M}'''(X_{i_p}) = \mathfrak{M}(X_{i_p}) = 0.$$

Le nombre de termes non nuls ne peut donc dépasser (lemme IV)

$$\frac{l(d+1)^p \mathrm{D}^p}{a^{2p}} \quad \text{si } q = 2p+1$$

ou

$$\frac{l(d+1)^{p+1} \mathrm{D}^p}{a^{2p+1}} \quad \text{si } q = 2p.$$

Supposons que $\sup \mathfrak{M}_x |\mathrm{X}_i|^q < \mathrm{L}^q$, L constante indépendante de i. Alors, d'après le lemme II, chacun des termes non nuls est $< \mathrm{L}^q$. Il suffit donc. puisque $\mathrm{D} < \frac{n}{l}$ (relation I_1), que l'on ait

$$(\mathrm{C}_2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(d+1)^{p+1} n^p}{l^{p-1} a^{2p+1}} \to 0 \quad \text{avec } \dfrac{1}{n} & \text{si } q = 2p+1 \\ \text{ou} & \\ \dfrac{(d+1)^p n_p}{l^{p-1} a^{2p}} \to 0 \quad \text{avec } \dfrac{1}{n} & \text{si } q = 2p. \end{array} \right.$$

Borne de $\mathfrak{M}' |\mathrm{G}_i|^q$, — Supposons que l'on peut borner supérieurement $\mathfrak{M}_s |\mathrm{G}_i|^q$ de la manière suivante :

$$(3) \qquad \sup \mathfrak{M}_s |\mathrm{G}_i|^q < \mathrm{B}^q \mathrm{D}_n^{kq} \qquad (k \text{ fixe, B peut dépendre de } n),$$

$\sup \mathfrak{M}' |\mathrm{G}_i|^q$ sera, *a fortiori*, bornée par le second membre de (3).

D'après le lemme III une telle forme existe certainement lorsque

$$\sup \mathfrak{M}_x |\mathrm{X}_i|^q < \mathrm{L}^q,$$

et l'on a pu trouver une borne de même forme pour

$$\sup \mathfrak{M}_s |\mathrm{X}_{i+1} + \ldots + \mathrm{X}_{i+\nu}|^{q'} \qquad (q' \leqq 1,\ i \text{ et } \nu \text{ quelconques et } kq > 1).$$

Il suffit alors pour satisfaire à (3), d'avoir

$$(\mathrm{C}'_2) \qquad \frac{\mathrm{B}^q n^{kq}}{l^{kq-1} a^q} \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Les conditions suffisantes de tendance centrale que nous venons d'obtenir sont encore très générales. Nous allons particulariser davantage.

Cas de S. Bernstein. — S. Bernstein a obtenu des conditions qu'il a appliquées à des nombreux cas concrets. Pour les obtenir, ainsi que d'autres analogues, nous allons écrire celles que nous venons de trouver pour le cas suivant :

$$(\mathrm{SB}) \qquad \mathfrak{M}(\mathrm{S}_n^2) = a_n^2 > \mathcal{A} n^{2\alpha}, \qquad d < \mathcal{D} n^{\delta}, \qquad l < \mathcal{L} n^{\lambda},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$, d'une part, α, δ, λ, d'autre part, étant des constantes indépendantes de n. Remarquons que α est nécessairement $\leqq 1$ puisque l'on a supposé $\mathfrak{M}(\mathrm{X}_i^2) < \mathrm{L}^2$.

(C_1) devient $\lambda + 2\delta - 2\alpha < 0$.

Par suite, il faudra choisir

$$(4) \qquad \lambda < 2\alpha - 2\delta,$$

et comme il faut que l'on ait $\lambda > 0$, on a la condition

$$\delta < \alpha.$$

(C_2) devient avec $q = 2p + 1$ (nous ne prenons pour q que des valeurs impaires car, comme on le voit aisément, les conditions données par $q = 2p + 1$ sont au moins aussi bonnes que celles que l'on obtient avec $q = 2p + 2$),

$$(5) \qquad (p+1)\delta + p - (p-1)\lambda - (2p+1)\alpha < 0.$$

A cause de (4), il faut donc avoir

$$(p+1)\delta + p - (2p+1)\alpha < (p-1)\lambda < (p-1)(2\alpha - 2\delta).$$

D'où la condition suivante pour que l'on puisse choisir λ satisfaisant à (4) et à (5)

$$\delta < \alpha - \frac{p}{3p-1}(1-\alpha);$$

comme $\delta > 0$, il faut encore avoir

$$\alpha > \frac{p}{4p-1}.$$

Ces conditions deviennent

$$\text{pour } q = 3: \qquad \delta < \frac{3\alpha - 1}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha > \frac{1}{3},$$

$$\text{»} \quad q = \infty: \qquad \delta < \frac{4\alpha - 1}{3} \qquad \text{et} \qquad \alpha > \frac{1}{4}.$$

(C'_2) devient (en supposant pour simplifier que B existe et est indépendant de n)

$$(6) \qquad kq - (kq-1)\lambda - q\alpha < 0.$$

Remarquons que, puisque $q > 2$, on a nécessairement $\alpha \leqq k$. A cause de (4), on doit avoir

$$q(k-\alpha) < \lambda(kq-1) < (2\alpha - 2\delta)(kq-1).$$

D'où la condition pour que l'on puisse choisir λ satisfaisant à (4) et à (6)

$$\delta < \frac{\alpha(2kq + q - 2) - kq}{2k(q-1)};$$

comme $\delta > 0$, il faut avoir

$$\alpha > \frac{kq}{2kq + q - 2}.$$

Si $q = 3$, on a ainsi les conditions

$$\delta < \alpha - \frac{3(k-\alpha)}{2(3k-1)} \qquad \text{et} \qquad \alpha > \frac{3k}{6k+1}.$$

Les bornes les moins restrictives s'obtiennent si $k = \alpha$. Ce sont

$$\delta < \alpha \quad \text{et} \quad \alpha > \frac{1}{3}.$$

Résumons :

Théorème. — *Pour que la loi de $\frac{S_n}{a_n}$ tende vers la loi réduite de Laplace, il suffit d'avoir, lorsque X_h et X_i sont indépendantes dès que $|i - h| > d_n$:*

1. $\sup \mathfrak{M}_x(X_i)^q < L^q$, L *indépendant de i et de n et, en supposant* $\mathfrak{M}(S_n^2) = a_n^2 > A^2 n^{2\alpha}$ et $d < n^\delta$.

2. *Soit*

$$\text{a.} \quad si\ q = 3, \qquad 0 < \delta < \frac{3\alpha - 1}{2},$$

$$si\ q = \infty, \qquad 0 < \delta < \frac{4\alpha - 1}{2}.$$

Soit

b. $\mathfrak{M}'|X_{i+1} + \ldots + X_{i+\nu}|^{q'} < A^{q'} \nu^{kq'}$, *pour tout i et avec $q' < q$ et $kq > 1$*

avec,

$$pour\ q = 3, \qquad 0 < \delta < \frac{\alpha(6k+1) - 3k}{2(3k-1)}.$$

Dans le cas particulier où $k = \alpha$, cette dernière condition devient

$$\delta < \alpha \quad et \quad \alpha > \frac{1}{3}.$$

On a le théorème A de S. Bernstein [2] en prenant $k = \alpha$ dans 2 *b*.

Second cas. —

X_h et X_l demeurent dépendants lorsque $|i - h| > d$

et nous avons à formuler des hypothèses affaiblissant suffisamment cette dépendance pour que la tendance centrale puisse avoir lieu.

Les conditions (C_1) et, soit (C_2), soit (C'_2), demeurent.

Mais en supplément à (C_1), il suffit d'avoir les conditions suivantes qui, comme on l'a vu, étaient satisfaites dans le premier cas :

$$(H_2) \quad \begin{cases} 1. \quad \dfrac{\sum \mathfrak{M}(g_i g_k)}{a_n^2} \to 0 \quad \text{avec } \dfrac{1}{n}, \\ 2. \quad \dfrac{1}{a_n} \sum |\mathfrak{M}'(G_i)| \to 0, \\ 3. \quad \dfrac{1}{a_n^2} \sum |\mathfrak{M}'(G_i^2) - \mathfrak{M}(G_i^2)| \to 0 \quad \text{avec } \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Si l'on veut utiliser le lemme IV, il faut ajouter à (C_2)

$$(C_2^*) \qquad \frac{1}{a_n^q} \sum{}'' \mathfrak{M}''(X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}) \to 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n},$$

Σ'' portant sur les termes du développement de $\Sigma\mathfrak{M}'\,|\,G_i\,|^q$ dans lesquels l'un des facteurs au moins est hors du rayon d'activité de tous les autres.

Posons

$$\underset{k\leq n}{\text{Max}}\ \sup|\,\mathfrak{M}_x(X_k)\,| = m_n.$$

$$\underset{k\leq n}{\text{Max}}\ \sup|\,\mathfrak{M}_x(X_iX_k) - \mathfrak{M}(X_iX_k)\,| = m'_n, \qquad |\,i-k\,| > d.$$

1. $\Sigma\mathfrak{M}(g_ig_k) = \Sigma\mathfrak{M}(X_hX_j)$, où X_h et X_j sont éloignées de plus de d et le nombre de termes du second Σ est $l(l-1)\,d^2 < l^2d^2$.

Or,

$$\mathfrak{M}(X_hX_j) = \mathfrak{M}[X_h\mathfrak{M}_{X_h}(X_j)] = m_n\mathfrak{M}|\,X_h\,| \leq m_n\mathrm{L}.$$

Donc

$$\frac{\mathfrak{M}(g_ig_k)}{a_n^2} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

lorsque

$$\frac{l_n^2d_n^2}{a_n^2}\,m_n \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

2. $\Sigma\,|\,\mathfrak{M}'(G_i)\,| \leq \Sigma\mathfrak{M}'\,|X_j\,|$ et le nombre de termes du second Σ est $l\mathrm{D} < n$. On en déduit que

$$\frac{1}{a_n}\sum \sup|\,\mathfrak{M}'(G_i)\,| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

lorsque

$$\frac{n}{a_n}\,m_n \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

3. $\Sigma\,|\,\mathfrak{M}'(G_i^2) - \mathfrak{M}(G_i^2)\,| = \Sigma\,|\,\mathfrak{M}''(X_hX_j) - \mathfrak{M}(X_hX_j)\,|$ et le nombre de termes de second membre est $l_n\mathrm{D}_n^2 < \frac{n^2}{l}\cdot$ On en déduit que

$$\frac{1}{a_n^2}\sum |\,\mathfrak{M}'(G_i^2) - \mathfrak{M}(G_i^2)\,| \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

lorsque

$$\frac{n^2}{l_na_n^2}\,m'_n \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Ainsi l'hypothèse (H_2) est satisfaite si, pour $n \to \infty$,

$$(\mathrm{H}'_2) \qquad \frac{d_n^2l_n^2}{a_n^2}\,m_n \to 0, \qquad \frac{n}{a_n^2}\,m_n \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{n^2}{la_n^2}\,m'_n \to 0.$$

Enfin, $(\mathrm{C}_2^\star)$ est satisfaite lorsque

$$\frac{n^q}{l_n^{q-1}a_n^q} \to 0 \qquad \text{avec } \frac{1}{n},$$

puisque le nombre de termes de Σ'' est $< l\mathrm{D}^q < \frac{n^q}{e^{q-1}}\cdot$

Cas de S. Bernstein. — Dans le cas (S. B.) et, en supposant

$$m_n < \frac{\mathrm{M}}{n^\mu}, \qquad m'_n < \frac{\mathrm{M}'}{n^{\mu'}},$$

M et M′ ainsi que μ et μ' étant des constantes indépendantes de n, (H'_2) devient

$$1.\quad 2\delta + 2\lambda - 2\alpha + \mu < 0; \qquad 2.\quad 1 - \alpha - \mu < 0; \qquad 3.\quad 2 - 2\alpha - \lambda - \mu' < 0.$$

1. qui s'écrit $\lambda - (2\alpha - 2\delta) + \lambda - \mu < 0$ a certainement lieu si, en plus de la condition (4), on impose à λ la condition $\lambda < \mu$;
2. a lieu si $\mu < 1 - \alpha$;
3. a lieu certainement pour $\mu' > 2 - 2\alpha$.

Enfin $(C)_2^*$ a lieu, par exemple,

$$\text{pour } q = 3, \qquad \text{si} \quad 3 - 2\lambda - 3\alpha - \mu < 0.$$

D'où la condition $3 - 3\alpha - \mu < 2\lambda < \begin{cases} 2\alpha - 2\delta \\ 2\mu \end{cases}$, vérifiée, soit si $\mu > 3 - 3\alpha$, soit si $\mu > 3 + 2\delta - 5\alpha$, soit (grâce à $\mu > 1 - \alpha$) si $\delta < 2\alpha - 1$, ce qui suppose $\alpha > \frac{1}{2}$;

$$\text{pour } q = \infty, \qquad \text{en prenant } \delta < \frac{3\alpha - 1}{2}, \qquad \text{ce qui suppose } \alpha > \frac{1}{3}.$$

Toutes les conditions imposées à m_n sont certainement satisfaisantes si

$$m_n < \mathfrak{M} e^{-n} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ fixe}).$$

Résumons :

Théorème. — *Pour que la loi de $\frac{S_n}{a_n}$ tende vers la loi de Laplace réduite, il suffit d'avoir*

$$1.\quad \sup \mathfrak{M}_x |X_i|^q < L^q$$

et, en supposant

$$\mathfrak{M}(X_n^2) = a_n^2 > \mathfrak{A}^2 n^{2\alpha}, \qquad d_n < \mathfrak{D} n^\delta, \qquad m_n < \frac{M}{n^\mu}, \qquad m'_n < \frac{M'}{n^\mu},$$

soit

$$2.\quad \mu > 1 - \alpha, \qquad \mu' > 2 - 2\alpha.$$

et

$$a.\quad \text{si } q = 3, \qquad 0 < \delta < 2\alpha - 1$$

$$\text{si } q = \infty, \qquad 0 < \delta < \frac{3\alpha - 1}{2}$$

ou

b. identique à 2*b* du théorème précédent.

Soit

$$2'.\quad \mu' > 2 - 2\alpha,$$

$$\text{si } q = 3, \qquad \mu > 3 - 3\alpha, \qquad 0 < \delta < \frac{3\alpha - 1}{2}$$

et

$$\text{si } q = \infty, \quad m > \mathfrak{M} e^{-n}, \qquad 0 < \delta < \frac{4\alpha - 1}{3}.$$

On a le théorème B. de S. Bernstein [2] en prenant avec $k = \alpha$, 2 *b*. On a un théorème analogue au théorème C. de S. Bernstein [2] en prenant 2 avec $q = \infty$ [2].

BIBLIOGRAPHIE.

BERNSTEIN (S.) :

[1] *Recherche d'un fondement axiomatique du Calcul des Probabilités* (*Soc. Math. de Kharkov*, p. 209-274).

[2] *Sur l'extension du théorème limite du Calcul des Probabilités aux sommes de quantités dépendantes* (*Math. Ann.*, **97**, 1927, p. 1-59).

BIENAYMÉ :

[1] *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi des probabilités dans la méthode des moindres carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, **37**, 1853, p. 159-184).

BOREL (E.) :

[1] *Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* (*Rend. Circ. Math. Palermo*, **27**, 1909, p. 247-271).

[2] *Sur une propriété de probabilités retatives aux fractions continues* (*Math. Ann.*, **72**, 1912, p. 578).

CAUTELLI (F.-P.) :

[1] *Considérations sur la convergence dans le Calcul des Probabilités* (*Ann. Sc. Inst. H. Poincaré*, **5**, 1935, p. 10).

FELLER (W.) :

[1] *Ueber den Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Zeitschrift*, **40**, 1935, p. 521-559).

[2] *Suite du précédent mémoire* (*Math. Zeitschrift*, **42**, 1937, p. 301-312).

[3] *Ueber das Gesetz der grossen Zahlen* (*Acta Sc. Math. de Szeged*, **8**, 1936-1937, p. 191-201).

FRÉCHET (M.) :

[1] *Recherches modernes sur le Calcul des Probabilités*, 1er livre, Gauthier-Villars, 1937).

[2] *Recherches modernes sur le Calcul des Probabilités*, 2e livre, Gauthier-Villars, 1939).

[3] *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, 1re Partie, Hermann, 1940.

[4] *Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le Calcul des Probabilités* (Colloque consacré à la théorie des probabilités, fasc. I, p. 12-23).

GILLIS :

[1] *Note on a property of measurable sets* (*Journal London Math. Soc.*, p. 139-141).

GLIVENKO (V.) :

[1] *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita* (*Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **4**, 1933, p. 92-99).

[2] *Sur la loi des grands nombres dans l'espace fonctionnel* (Colloque consacré à la théorie des probabilités, fasc. VI, p. 19-23).

GUMBEL :

[1] *Gli eventi compatibili* (*Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **9**, 1938, p. 1-38).

HADAMARD :

[1] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, **2**.

KHINTCHINE :

[1] *Sur une généralisation de quelques formules classiques* (*C. R. Acad. Sc.*, **88**, p. 532-534).

[2] *Um Verscharfung der Wiederkehrsatz de Poincaré* (Compositio I, 1935, p. 177-179).

KOLMOGOROFF :

[1] *Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhangiger Grossen* (*Math. Ann.*, **99**, 1928, p. 309-319 et **102**, 1929, p. 484-488).

[2] *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung* (*Ergebnisse der Mathematik*, II, 3, Springer, 1933).

[3] *Sur la loi forte des grands nombres* (*C. R. Acad. Sc.*, **191**, 1930, p. 910-911).

PAUL LÉVY :

[1] *Calcul des Probabilités* (Gauthier-Villars, 1925).

[2] *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées* (*Bull. Sc. Math.*, **59**, 1935, p. 84-96 et p. 109-128).

[3] *La loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées* (*Journ. de Math.*, **15**, 1936, p. 11-24).

[4] *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, (Gauthier-Villars, 1937).

LIAPOUNOFF :

[1] *Nouvelle forme du théorème sur la limite de la probabilité* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, B, 8, **12**, n° 5, 1901).

LINDEBERG, :

[1] *Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Zeitschrift*, **15**, 1922, p. 221-225).

LOÈVE :

[1] *Sur l'intégration des équations de Dirac* (*C. R. Ac. Sc.*, **198**, p. 799-801).

[2] *Sur les moyennes de la théorie de Dirac* (*C. R. Ac. Sc.*, **198**, p. 1303-1305).

[3] *Nouvelles classes de lois limites* (*C. R. Ac. Sc.*, **210**,

[4] *Sur les systèmes d'événements; applications à deux théorèmes classiques* (*C. R. Ac. Sc.*, **212**, p. 261-263).

[5] *La loi des grands nombres pour des événements liés ou des variables aléatoires liées* (*C. R. Ac. Sc.*, **212**, p. 810-813).

[6] *La loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires liées* (*C. R. Ac. Sc.*, **212**, séance du 4 juin 1941).

[7] *La tendance centrale pour des variables aléatoires liées* (*C. R. Ac. Sc.*, **212**, séance du 16 juin 1941).

POINCARÉ :

[1] *Méthodes nouvelles de Mécanique céleste*, t. 3.

TCHEBICHEF :

[1] *Des valeurs moyennes* (*Journ. de Math.*, 2e série, **12**, 1867, p. 177-184).

[2] *Sur les valeurs limites des intégrales* (*Œuvres*).

[3] *Sur les valeurs limites des sommes* (*Œuvres*).

VISSER :

[1] *On Poincaré's recurrence theorem* (*Bull. Am. Soc.*, 1936, p. 397-400).

[2] *On certain infinite sequences* (*Proc. Amsterdam*, **40**, 1937, p. 358-367).