JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL BRELOT

Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 1-32.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités;

PAR MARCEL BRELOT.

I. — Introduction.

1. Depuis le renouveau, ces vingt dernières années, de la théorie des fonctions harmoniques et du potentiel, on a introduit d'abord, sous forme générale, les instruments de base appelés alors « capacité » et « ensemble de capacité nulle » (Wiener et de La Vallée Poussin). Mais parce qu'ils ressemblent à une mesure intérieure et aux ensembles de mesure intérieure nulle, ils n'étaient pas très bien adaptés au sujet. D'où l'apparition d'une capacité « *extérieure* » (¹), de l'ensemble « *polaire* » (²) (partie d'ensemble des infinis d'une fonction sous-harmonique) et de divers ensembles « négligeables » (²). Récemment H. Cartan (³) montra l'identité des ensembles polaires et des ensembles de capacité extérieure nulle; il prouva aussi que dans le théorème de convergence des potentiels ou fonctions sous-harmoniques, un certain ensemble exceptionnel n'est pas seulement comme on savait, de mesure ordinaire nulle (Szpilrajn-Radò) ou même de capacité intérieure nulle (⁴) (c'est-à-dire de

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 209, déc. 1939, p. 828 et indépendamment, A. F. MONNA, *Proc. Kon. Ned. Akad. Amsterdam*, vol. 43. janv. 1940, p. 84.

(²) *Bull. Sc. Math.*, mars-avril 1941, noté BS 1.

(³) H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 214, 1942, p. 944. Note de résultats dont le développement est paru au cours de l'impression dans le *Bull. Soc. Math.*, 73, 1945, p. 74.

(⁴) *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, nov. 1938, p. 836.

capacité nulle au sens primitif) mais même de capacité extérieure nulle, c'est-à-dire *polaire*, comme on pouvait l'espérer. Il donnait même cette convergence avec des ordonnés filtrants au lieu de suites monotones et dans ce résultat plus puisssant, l'ensemble exceptionnel est alors précisé au maximum.

Il convient donc de reprendre certaines parties de la théorie des fonctions sous-harmoniques à partir de ce résultat définitif qui s'exprime sans la notion de capacité et sera peut-être démontré un jour sans l'introduction préalable de celle-ci, *dont nous ne supposerons rien ici à l'avance.*

Déjà j'ai repris ainsi, auxiliairement, pour des ensembles bornés quelconques ([5]), une théorie *d'extrémale* et *d'extrémisation* développée antérieurement pour des ensembles compacts ([6]) (bornés fermés), de l'espace ordinaire. Entre temps cette théorie avait été généralisée systématiquement dans le même sens sur les ensembles, mais autrement en apparence, par A. F. Monna ([7]). On peut maintenant, comme on va voir, la reprendre avec une généralité encore plus grande (en particulier pour des ensembles *non bornés* de l'espace ordinaire à 3 dim.) et *avec la facilité que donnent la puissance du théorème définitif de convergence et la commodité des ordonnés filtrants,* tout en suivant pas à pas le schéma de mon cas primitif. Son intérêt vient de ce qu'elle contient les *divers types de balayage* plus ou moins classiques ([8]) et va se trouver comme le balayage ordinaire du complémentaire d'un compact, *en relation étroite avec la notion de capacité.* Pour en donner une idée, prenons avec De La Vallée Poussin, dans l'espace ordinaire à 3 dim., un compact E dans un domaine sphérique de frontière Σ et distribuons sur Σ des masses > 0 uniformément de façon que le potentiel vaille 1 à l'intérieur. Le balayage classique de l'ouvert infini CE donne une distribution de masses sur E, dont e total *est la capacité* de E; on sait encore que son potentiel vaut sur E, la valeur 1 quasi partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble polaire) et hors E la solution du problème de Dirichlet pour valeur 1 sur E et 0 à l'infini; et il est facile de voir que c'est même *le plus petit potentiel de masses* > 0 *majorant* 1 *sur* E *quasi partout.* Ce sont ces idées très simples qui vont être étendues à des ensembles E quelconques, surtout bornés; il s'agit de généraliser la dernière propriété pour définir une extrémisation ou balayage général du complémen-

---

([5]) *Bull. Sc. Math.*, janv.-fév., 1944, noté BS 2.

([6]) *Bull. Ac. royale de Belgique*, t. 25, 1939, p. 125, et Notes antérieures aux *C. R. Acad. Sc.* (1938) (et il était alors facile de faire l'extension au cas d'une intersection dénombrable d'ouverts). L'aspect de cette théorie pour fermés correspondant à notre présent théorème 9 avait été développé entre temps tout autrement, sous le nom d'opération régularisante, par De La Vallée Poussin (*Bull. Ac. royale de Belgique*, nov. 1938).

([7]) A. F. Monna, *Proc. Kon. Ned. Akad.*, vol, 42, oct. 1939, noté (I); vol. 43, janv. 1940, (*loc. cit.*) (II) et avril 1940 (III); vol. 44, janvier 1941 (IV); notes sommaires, de vérification souvent difficile, et que je n'ai pas examinées en détail.

([8]) *Voir* quelques points d'historique récent dans BS 2.

taire (*qui n'est pas borné*), *puis de passer comme conséquence, à la notion de la capacité*.

Tout cela sera développé *dans le cadre de la théorie générale des minorantes sous-harmoniques* d'une fonction. On se basera seulement sur le théorème de convergence précité, la représentation potentielle des fonctions sous-harmoniques et la théorie directe du problème de Dirichlet. On introduira essentiellement, à partir d'une certaine fonction sous-harmonique, *une* extrémale (comme dans BS 2) et *une* capacité « directe » correspondante, puis des notions auxiliaires correspondant à l'approximation des ensembles par des ouverts contenants ou fermés contenus, tout cela avec une généralité englobant le point de vue de Vasilesco dans son étude de la capacité — $\mathcal{V}$ (9) (où $\mathcal{V}$ est borné).

On obtiendra en particulier dans le cas le plus classique, au fond, comme A. F. Monna, des *caractérisations* simples et directes des *capacités* connues (*intérieure et extérieure*) et de distributions capacitaires correspondantes, la capacité extérieure étant justement alors notre capacité « directe ». Cela permettra de compléter une étude des transformations continues en théorie du potentiel (10) et aussi, ce qui était à l'origine des présentes recherches, une adaptation *directe* à l'effilement *général* de la récente démonstration (BS 2) du critère de Wiener. Mais on laissera de côté ici l'aspect « potentiel » plus important comportant l'étude des intégrales d'énergie et de Gauss, et les convergences de distribution de masses dans les approximations d'ensemble. Car ce point de vue, déjà traité par Frostman et De La Vallée Poussin pour le balayage classique, puis avec plus ou moins de généralité par Monna et Vasilesco (*loc. cit.*), vient d'être repris par H. Cartan dans d'importants travaux parallèles en cours avec des hypothèses où rentre sans doute notre étude.

Le présent Mémoire ne sera donc surtout qu'une *introduction sous-harmonique*, d'ailleurs incomplète et assez peu originale, *sur le balayage généralisé* et ses conséquences. Mais il montrera sans doute la prédominance de la capacité extérieure et des ensembles polaires, de sorte que si l'on voulait n'indiquer que l'essentiel, on pourrait dire en ce sens capacité tout court en revenant ainsi au langage primitif avec un sens mieux adapté. On verra aussi incidemment sur quelques points le rôle intéressant des ensembles *absolument négligeables* dont il faudrait bien savoir s'ils sont identiques aux ensembles polaires.

On pourra se placer dans l'espace euclidien R_τ à $\tau \geqq 2$ dim., mais comme on a fait systématiquement, dans un mémoire de base (11) fixant terminologie et notations, l'extension de la théorie des fonctions harmoniques et sous-harmo-

(9) VASILESCO, *Bull. Sc. Math.*, mars-avril 1943.

(10) *Journ. de Math.*, fasc. 4, 1940, Mémoire noté (JM).

(11) *Annales de l'École Norm. sup.*, t. 61, 1944, Mémoire noté (AN).

niques *dans l'espace rendu compact* $\overline{R}_\tau$ *par adjonction d'un point à l'infini* $\mathcal{R}_\tau$, *on se placera même dans* $\overline{R}_\tau$ en raisonnant directement dans cet espace. L'étude que nous ferons directement *dans un ouvert* (de $\overline{R}_\tau$) *de complémentaire non polaire* avec potentiels ayant comme noyau la fonction de Green ne présentera pas de différence entre le cas du plan et des espaces supérieurs et les raisonnements seront les mêmes que dans *le cas particulier classique de* R_τ ($\tau \geqq 3$). (On sait que le point $\mathcal{R}_\tau$ forme alors un ensemble, noté aussi $\mathcal{R}_\tau$, non polaire et que la fonction de Green de R_τ se réduit à h(MP) ou $\frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^{\tau-2}}$.) On pourra ensuite examiner certains problèmes pour R_2 ou pour l'espace $\overline{R}_\tau$ pointé.

II. — Minorantes sous-harmoniques. Généralités.

2. Renvoyant dans (AN) aux définitions générales dans $\overline{R}_\tau$ d'ensemble polaire, de quasi partout, de fonction quasi sous-harmonique, etc., soulignons-en les propriétés suivantes essentielles ici.

A. Soit l'ensemble E polaire dans ω ouvert (de $\overline{R}_\tau$) de complémentaire $C\omega$ non polaire. Il existe dans ω une fonction sous-harmonique $\leqq 0$ valant $-\infty$ sur E et une valeur arbitraire < 0 en un point arbitrairement choisi hors E.

B. L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sous-harmoniques dans un ouvert ω (de $\overline{R}_\tau$), uniformément bornées supérieurement localement (c'est-à-dire sur tout compact contenu) est quasi sous-harmonique ([12]).

([12]) C'est l'extension à $\overline{R}_\tau$ du théorème de convergence (qui s'exprime de manière équivalente avec un ordonné filtrant croissant) donné par H. Cartan dans R_τ et même dans des hypothèses bien plus générales.

On sait que la théorie complète du problème de Dirichlet (*voir* AN et antérieurement *Acta Szeged,* 1939) peut se faire sans usage de potentiel (BS 1) et sans le théorème B ou même sans aucun théorème de convergence pour suites croissantes de fonctions sous-harmoniques. Il me paraît alors intéressant de déduire de ce problème généralisé de Dirichlet un théorème voisin de (B) :

En n'utilisant que des sphères on savait démontrer (Szpilrajn-Radò) que l'enveloppe d'une suite était presque sous-harmonique et l'on pourrait étendre cela à une famille non dénombrable. En se servant de domaines généraux on va voir que l'enveloppe supérieure de (B) ne diffère d'une fonction sous-harmonique que sur un ensemble *absolument négligeable.*

Cela résulte aussitôt du théorème suivant :

Soit dans un domaine ω, *une fonction* v *bornée supérieurement localement telle que sur tout ouvert* $\delta[\overline{\delta} \subset \omega]$ *on ait* $v \leqq \overline{H}_v^\delta$. *Alors* v *vaut* $-\infty$ *ou ne diffère d'une fonction sous-harmonique* (*d'ailleurs majorante et unique*) *que sur un ensemble* absolument négligeable.

L'enveloppe supérieure de v et K = const. satisfera à la même condition et il suffira

On notera $\hat{u}$ la régularisée d'une fonction quasi sous-harmonique u (fonction sous-harmonique unique égale à u quasi partout).

On verra aussi le rôle important de (C), d'ailleurs indépendant de (B) :

(C) [13] Soient u sous-harmonique dans $\omega \neq \overline{R}_\tau$, et δ ouvert $[\delta \subset \omega]$. Si u est bornée inférieurement (même seulement sur $\dot{\delta}$), sa plus petite majorante harmonique dans δ vaut H_u^δ.

---

donc, en faisant tendre K vers $-\infty$ par valeurs entières, de démontrer le théorème pour un v borné inférieurement. Soit alors w la fonction égale en chaque point à la lim. sup. en ce point de v; w est semi-continue supérieurement et sous-harmonique puisque dans δ, $w \leqq \underline{H}_v^\delta \leqq H_w^\delta$. La plus petite majorante harmonique de w dans δ est $\leqq \underline{H}_v^\delta$ et d'autre part, puisque w est localement bornée, elle vaut H_w^δ, d'après la proposition (C) du texte qui ne se démontre actuellement que grâce à la représentation potentielle. Ainsi $H_w^\delta \leqq \underline{H}_v^\delta$ avec $v \leqq w$. D'où $\overline{H}_{w-v} \leqq H_w - \underline{H}_v \leqq 0$ puis $\overline{H}_{w-v} = 0$ d'où résultera la propriété annoncée.

On sait que les ensembles absolument négligeables contiennent les ensembles polaires et sont intérieurement polaires. S'ils étaient polaires, le résultat précédent serait le théorème B.

[13] Plus généralement (énoncé C′), la différence des deux majorantes est nulle si (et seulement si) les masses associées à u ne chargent pas l'ensemble des points-frontière irréguliers de δ.

Cela résulte aussitôt de l'expression de la différence (*voir* AN, n° 21). (C) résulte alors de la propriété suivante (d'ailleurs caractéristique) des compacts polaires (Frostman) qu'on étend ici à $\overline{R}_\tau$:

(P) *Si un compact polaire* E *porte une distribution de masses* $\mu \geqq 0$ *non nulle, le potentiel-*h_Q (Q *hors* E) u *est non borné au voisinage de* E (*et même infini en un point de* E).

Car si ν est une distribution $\geqq 0$ au voisinage de E, de potentiel-h_Q, soit v égal à $+\infty$ sur E :

$$\int u\, d\nu = \int v\, d\mu = +\infty.$$

Pour préciser selon la parenthèse, rappelons (cela peut se voir dans $\overline{R}_\tau$ à partir du théorème 5 de BS 1) que l'on peut choisir ν ne chargeant que E; u sera donc non bornée sur E. Si u était finie sur le noyau fermé de masses de μ, soit $E_0 \subset E$, elle serait bornée sur un compact partiel E_1, voisinage sur E_0 d'un point P de E_0 (à cause de sa semi-continuité). Alors E_1, compact polaire, porterait une masse > 0 de potentiel borné sur lui.

Remarque. — Rappelons que (C′) peut servir à approfondir le *principe du maximum* de Maria-Frostman. *Voir* dans (*Bull. Sc. Math.*, juin-juillet, 1940) le théorème (β) qui s'adapte dans $\overline{R}_\tau$. Soulignons seulement le résultat partiel suivant, qui peut se déduire de (C) :

Si dans Ω ouvert (CΩ non polaire) un compact E est chargé d'une distribution $\mu \geqq 0$, le potentiel-G_Ω (*voir* plus loin n° 8) de μ est majoré par sa borne supérieure sur E.

On peut d'ailleurs passer au cas de E fermé dans Ω, puis de E *quelconque* (de Ω), dont l'adhérence porterait toute la masse.

3. On a encore peu étudié les minorantes sous-harmoniques d'une fonction. Les premiers résultats notables (Sjöberg) ([14]) sur ce sujet (donnés dans le plan) sont contenus dans l'étude suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit dans un ouvert Ω de $\overline{R}_\tau$ une fonction f bornée supérieurement localement et minorée par une fonction sous-harmonique* ([15]).

La famille Σ des fonctions sous-harmoniques dans Ω majorées par f admet une enveloppe supérieure quasi sous-harmonique Σ_f ([16]).

La famille $\mathfrak{S}$ des fonctions sous-harmoniques dans Ω majorées par f quasi-partout admet une enveloppe supérieure $\mathfrak{S}_f$ sous-harmonique qui est aussi la plus grande d'entre elles, dite extrémale.

De plus $\Sigma_f \leqq \widehat{\Sigma}_f \leqq \mathfrak{S}_f$.

Enfin si $C\Omega$ n'est pas polaire, $\mathfrak{S}_f$ vaut $\widehat{\Sigma}_f$ partout et vaut Σ_f là où $\mathfrak{S}_f \leqq f$.

La première partie vient de (B) et l'on voit que $\widehat{\Sigma}_f \in \mathfrak{S}$. Si $C\Omega$ n'est pas polaire, (A) montre que toute fonction u de $\mathfrak{S}$ donc majorée par Σ_f là où $u \leqq f$ donc majorée partout par $\widehat{\Sigma}_f$.

Pour achever, prenons ω ouvert quelconque dans Ω, tel que $C\omega$ soit non polaire. Les fonctions de $\mathfrak{S}$ sont majorées par l'extrémale pour ω, donc uniformément bornées supérieurement localement; leur enveloppe est quasi sous-harmonique, majorée dans ω par l'extrémale précédente; donc elle n'est $> f$ dans Ω que sur un ensemble polaire; de même sa régularisée qui appartient donc à $\mathfrak{S}$.

([14]) Nils SJÖBERG, 9e *Congrès des math. Scand.* (Helsingfors, août 1938, p. 309, 1939). Après un résultat partiel basé sur la représentation conforme, l'auteur démontre très succinctement et indépendamment, semble-t-il, pour un domaine plan et une fonction finie continue bornée inférieurement, l'existence d'une plus grande minorante sous-harmonique d'ailleurs continue (ce qui est généralisé dans notre théorème 2). Puis il donne, dans le cercle, une condition suffisante sur une fonction pour que ses minorantes sous-harmoniques soient bornées supérieurement localement.

([15]) On se limite, en vue de nos applications, à ces conditions faciles à élargir plus ou moins. L'important serait un critère pour que les minorantes sous-harmoniques soient localement bornées supérieurement dans leur ensemble.

([16]) On pourrait comme Carathéodory dans un cas particulier (*Am. J. of Math.*, vol. 59, 1937, p. 724), considérer aussi la sous-famille des fonctions harmoniques. Mais son enveloppe supérieure U diffère en général de Σ_f *même avec bien des restrictions de régularité sur f* (par exemple f pourvue de dérivées continues d'ordre p dans un ouvert ω contenant $\overline{\Omega}$ de R_τ). Sinon en chaque point M_0 on trouverait au voisinage, grâce à une extraction de suite, une fonction harmonique $\leqq U$ mais égale à U en M_0. En imaginant (par des médiations) u_n sous-harmonique du type régulier considéré dans ω, décroissant vers u sous-harmonique finie discontinue en un point M_0. on obtiendrait (à l'aide d'une extraction de suite) une fonction harmonique au voisinage de M_0 minorant u mais l'égalant en M_0 ce qui contredit la discontinuité.

Parmi les *propriétés* évidentes soulignons :

a. Si $f = f_1$ quasi partout $\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{f_1}$;

b. $\mathcal{S}_f(\mathrm{P}) \leqq \limsup_{\mathrm{M} \to \mathrm{P}} f(\mathrm{M})$;

c. si f_n du type de f tend en décroissant vers f, $\mathcal{S}_{f_n} \to \mathcal{S}_f$. Si ω_n ouvert croissant tend vers Ω, l'extrémale pour ω_n tend (en décroissant) vers l'extrémale pour Ω.

4. *Cas de semi-continuité.* — Si f est semi-continue inférieurement, Σ_f est l'enveloppe supérieure des Σ_φ pour les φ (du type f, il en existe) continues et $\leqq f$, et même *l'enveloppe supérieure des fonctions continues de la famille* Σ [17]; elle est donc semi-continue inférieurement.

Arrivons au résultat de Sjöberg très étendu comme suit :

Théorème 2. — *Si f est semi-continue supérieurement, $\Sigma_f = \mathcal{S} \leqq f$ et $\mathcal{S}_f$ est fonction maxima de Σ (plus grande minorante sous-harmonique); elle est continue si f l'est.*

C'est aussi l'enveloppe inférieure des $\mathcal{S}_\varphi$ où φ est finie continue $\geqq f$ et même la limite de S_{φ_n} pour une suite décroissante φ_n de telles φ tendant vers f.

Voyons maintenant ce que donne l'approximation par des fonctions semi-continues. D'abord Σ_f est l'enveloppe supérieure des Σ_ψ pour les ψ (du type de f) semi-continues supérieurement et $\leqq f$. Passons à la semi-continuité inférieure.

Lemme 1. — *Soient u sous-harmonique dans ω, δ ouvert $\neq \overline{\mathrm{R}}_\tau$, tel que $\bar{\delta} \subset \omega$ et sur $\overset{*}{\delta}$ une fonction φ résolutive pour δ. Si dans δ, $u \leqq \mathrm{H}_\varphi^\delta$, u n'est $> \varphi$ sur $\overset{*}{\delta}$ que sur un ensemble négligeable relativement à δ.*

En considérant que l'enveloppe supérieure de φ et de $(-n)$, on se ramène grâce au passage $n \to \infty$, au cas où φ est bornée inférieurement par une constante K. On pourra alors en conservant les hypothèses remplacer u par son enveloppe supérieure avec une constante $\leqq \mathrm{K}$.

Traitons donc le cas de u bornée inférieurement. De l'inégalité $u \leqq \mathrm{H}_\varphi^\delta$ résulte que H_φ majore la plus petite majorante harmonique de u dans δ qui vaut alors H_u^δ (d'après C, n° **2**). D'où $\mathrm{H}_u^\delta \leqq \mathrm{H}_\varphi^\delta$ ou $\mathrm{H}_{u-\varphi}^\delta \leqq 0$.

Il suffira donc de s'appuyer sur la remarque suivante que nous allons établir :

---

[17] On pourra majorer une fonction u de Σ par une fonction sous-harmonique $v \leqq 0$ continue telle $v \leqq f + \varepsilon$ et $v - \varepsilon$ appartiendra à Σ. En effet l'ensemble ω_0 où $f > -\infty$ est ouvert et l'on pourra s'aider d'un quadrillage irrégulier convenable sur ω_0 avec remplacement de u dans les mailles par les fonctions de Wiener puis réitérant l'opération avec deux autres quadrillages pour faire disparaître les discontinuités.

Lemme 1'. — *Soit pour un ouvert* δ (de complémentaire non polaire), ψ ***réso-lutive sur*** $\overset{\star}{\delta}$; ***la borne supérieure de*** H^{δ}_{ψ} ***majore*** ψ ***sauf sur un ensemble négligeable.***

En effet, si cette borne vaut λ fini, soit ψ_1 l'enveloppe inférieure de ψ et λ. Toute fonction sous-harmonique ou $-\infty$ dans chaque domaine composant, bornée supérieurement, de lim. sup. à la frontière majorée par ψ est $\leqq \lambda$, donc $\leqq H_{\psi_1}$ d'où $H_{\psi} \leqq H_{\psi_1}$. Comme $\psi = \psi_1 + (\psi - \lambda)^+$, on conclut $H_{(\psi-\lambda)^+} = 0$, d'où le résultat.

Théorème 3. — *Considérons* (toujours pour la fonction intiale f dans Ω) *les fonctions* θ *semi-continues inférieurement, séparément bornées supérieurement localement* ([18]) *et majorant* f. *Les* $\mathcal{S}_\theta$ *admettent une enveloppe inférieure* $\mathcal{I}_f$ *sous-harmonique* $\geqq \mathcal{S}_f$; $\mathcal{I}_f$ *est la plus grande de la famille* $\mathcal{I}$ *des fonctions sous-harmoniques u dans* Ω *telles que, dans tout ouvert* $\delta \neq \overline{R}_\tau$ *avec* $\overline{\delta} \subset \Omega$ *on ait* $u \leqq \overline{H}^{\delta}_f$; *on a même*

$$H^{\delta}_{\mathcal{I}_f} \leqq \overline{H}^{\delta}_f.$$

D'abord les $\mathcal{S}_\theta$ formant un ordonné filtrant décroissant, $\mathcal{I}_f$ est sous-harmonique. Puis, comme $\mathcal{S}_\theta$ n'est $> \theta$ que sur un ensemble polaire :

$$H^{\delta}_{\mathcal{S}_\theta} \leqq H^{\delta}_\theta, \quad \text{d'où} \quad H^{\delta}_{\mathcal{I}_f} \leqq H^{\delta}_\theta; \quad \text{enfin} \quad H_{\mathcal{I}_f} \leqq \overline{H}^{\delta}_f \quad ({}^{18bis}).$$

Voyons enfin que si $u \leqq \overline{H}^{\delta}_f$, on a $u \leqq \mathcal{I}_f$. Il suffit de voir que tout θ majore u quasi partout. L'ensemble où $u > \theta$ est réunion dénombrable de compacts, mais aussi absolument négligeable d'après le lemme 1 puisque $u \leqq H^{\delta}_\theta$; il est donc bien polaire.

On notera que si f est sous-harmonique, $\mathcal{S}_f = \mathcal{I}_f = f$.

5. Remarque 1. — Introduisons la famille $\mathcal{S}'$ des fonctions sous-harmoniques majorées par f à peu près partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble intérieurement polaire).

$\mathcal{I}$ *contient* $\mathcal{S}'$. *Il y a identité si f est définie à partir de deux fonctions boréliennes du type f, soit* f_1 *et* f_2 ($f_1 \leqq f_2$) *comme étant égale à* f_1 *sur une partie* α *de* Ω *et à* f_2 *sur l'autre;* alors $\mathcal{I}_f$ appartient à $\mathcal{S}'$.

La première partie se voit en remarquant que l'ensemble où u de $\mathcal{S}' > \theta$ est réunion dénombrable de compacts et intérieurement polaire donc polaire; d'où $u \leqq \mathcal{S}_\theta$ puis $u \leqq \mathcal{I}_f$.

([18]) Ou encore bornées localement, ce qui ne change pas l'enveloppe inférieure qui suit.

([18bis]) On remarque, pour conclure, qu'une fonction sur $\overset{\star}{\delta}$, bornée, semi-continue inférieurement et $\geqq f$ peut se prolonger dans ω en une fonction $\geqq f$, semi-continue inférieurement, localement bornée.

Pour voir la seconde partie, prenons un domaine δ et sur $\overset{*}{\delta} \cap \alpha$ un ensemble borélien E dont la différence avec α soit intérieurement négligeable. Soit sur $\overset{*}{\delta}$ la fonction borélienne $\varphi \geqq f$ égale à f_1 sur E, à f_2 ailleurs. Si $u \in \mathcal{J}$, on aura $u \leqq H_\varphi^\delta$. Alors d'après le lemme 1, sur δ, u est majorée par φ sauf sur un ensemble négligeable, donc par f sauf sur un ensemble intérieurement négligeable. Cela s'étend à tout ouvert du type δ. Alors dans Ω, u sera bien majoré par f sauf sur un ensemble intérieurement polaire.

Remarque 2. — Considérons la famille $\mathcal{Y}$ des fonctions sous-harmoniques u dans Ω telles que dans tout δ précédent on ait $u \leqq \underline{H}_f^\delta$. Il y en a une maxima soit $\mathcal{Y}_f$ (la régularisée de l'enveloppe supérieure).

Ces fonctions sont aussi les fonctions sous-harmoniques majorées par f sauf sur ensemble absolument négligeable : en effet soit sur $\overset{*}{\delta}$, φ borélienne $\leqq f$ telle que $H_\varphi^\delta = \underline{H}_f^\delta$. Le lemme montre que u n'est $> \varphi$ donc $> f$ que sur un ensemble négligeable. Réciproquement la seconde condition pour une fonction sous-harmonique u entraîne, si u' est l'enveloppe inférieure de u et f sur $\overset{*}{\delta}$,

$$u \leqq H_u^\delta = H_{u'}^\delta \leqq \underline{H}_f^\delta$$

et cela montre de plus que

$$H_{\mathcal{J}_f}^\delta \leqq \underline{H}_f^\delta$$

Résumons :

$$\Sigma \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{J},$$

d'où pour les enveloppes supérieures :

$$\Sigma_f \leqq \mathcal{S}_f \leqq \mathcal{Y}_f \leqq \mathcal{S}'_f \leqq \mathcal{J}_f.$$

On retiendra que si f est borélienne, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{Y}$ coïncident; en cas d'identité des ensembles polaires et absolument négligeables, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Y}$ coïncideraient.

Enfin on montrera que si deux fonctions f coïncident sauf sur un ensemble absolument négligeable, il y a identité des deux familles correspondantes $\mathcal{J}$, $\mathcal{Y}$ ou $\mathcal{S}'$.

III. — Extrémisation d'une fonction sous-harmonique sur un ensemble. Extrémisation des masses.

6. Particularisons le problème précédent en vue de retrouver et d'élargir des théories connues. Nous traiterons un cas fondamental auquel peuvent se ramener des cas plus étendus par certains côtés.

Fixons dans $\overline{R}_\tau$ un ouvert Ω de complémentaire non polaire (en particulier R_τ si $\tau \geqq 3$) et soit u sous-harmonique $\leqq 0$ dans Ω. Relativement à l'ensemble E de Ω, on notera φ_u^E la fonction égale à o dans E, à u ailleurs et $\Omega - E$ ou $C_\Omega E$ le complémentaire de E relatif à Ω.

Définition. — On appellera extrémale de u pour E [19], l'extrémale $\mathcal{S}_{\varphi_u^E}$ (relative à Ω), c'est-à-dire la plus grande fonction sous-harmonique $\leqq 0$ dans Ω majorée par u quasi partout hors E [20].

On la notera $\mathcal{E}_u^E$ ou brièvement $\mathring{u}$ pour E bien fixé. Le passage de u à $\mathcal{E}_u^E$ s'appellera *extrémisation* de u sur E.

Premières propriétés. — *a.* $\mathcal{E}_u^E$ majore u, vaut u quasi partout hors E et u en tout point où CE est non effilé [21]; elle vaut d'ailleurs $\Sigma_{\varphi_u^E}$ sur E, et même hors E là où elle vaut u; enfin $\mathcal{E}_u^E$ est harmonique à l'intérieur de E.

b. $\mathcal{E}_u^E$ croît avec u et E; de plus si $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{E}_u^E - \varepsilon \leqq \mathcal{E}_{u-\varepsilon}^E,$$

de sorte que si deux u satisfont à $|u_1 - u_2| \leqq \varepsilon$, on aura

$$|\mathring{u}_1 - \mathring{u}_2| \leqq \varepsilon.$$

c. Les propriétés de $\mathcal{S}_f$ ou le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire, donnent aussitôt :

L'altération de E d'un ensemble polaire conserve l'extrémale.

Si u et v coïncident quasi partout hors E, $\mathring{u} = \mathring{v}$; en particulier si $E_1 \supset E$,

$$\mathcal{E}_u^{E_1} = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_u^E}^{E_1},$$

ce qui contient pour $E = E_1$ la propriété *d'invariance par itération*.

Si u_n décroît vers u, c'est-à-dire tend en décroissant vers u, $\mathcal{E}_{u_n}^E$ décroît vers $\mathcal{E}_u^E$ [22].

Pour un ensemble défini ou dénombrable de E_n

$$\Sigma \mathcal{E}_u^{E_n} \leqq \mathcal{E}_u^{\cap E_n}.$$

---

[19] Dans son étude, Monna (III) considère en somme le cas de $\overline{E}$ borné contenu dans Ω de R_3. Dans ce cas notre extrémale n'est autre, après réflexion, que son extrémale intérieure dont il donne les propriétés principales du présent chapitre (calquées sur le cas de E compact) à une restriction près de mesurabilité pour ce qui concerne le n° **12**.

[20] Car une fonction sous-harmonique, $\leqq 0$ quasi partout ou encore à peu près partout ou même seulement presque partout dans R_τ est partout $\leqq 0$.

[21] On sait que si un ensemble α est non effilé en P, toute fonction sous-harmonique au voisinage de P vaut en P sa lim. sup. en P sur α.

[22] Extension à un ordonné filtrant décroissant de E fermé dans Ω, car l'extrémale de chacun vaut u hors de l'ensemble.

d. Si E est *fermé dans* Ω, $\mathcal{E}_u^E$ est la plus grande minorante sous-harmonique de φ_u^E et vaut u hors E.

Si E est ouvert, $\mathcal{E}_u^E$ vaut dans E la fonction de Wiener H_ψ^E où ψ vaut u sur $\overset{*}{E} \cap \overset{*}{\Omega}$ et o sur $\overset{*}{E} \cap \overset{*}{\Omega}$.

e. Si u est *continue* (finie *ou non*), $\mathcal{E}_u^E$ vaut l'enveloppe supérieure Φ des $\mathcal{E}_u^F$ pour les F fermés dans Ω, contenus dans E à un ensemble polaire près, c'est-à-dire encore la limite de $\mathcal{E}_u^F$ croissante selon l'ordonné filtrant des F.

Car l'ensemble E_1 où $\mathcal{E}_u^E - \varepsilon \geqq u (\varepsilon > 0)$ est du type F précédent d'où

$$\mathcal{E}_u^E - \varepsilon \leqq \mathcal{E}_u^{E_1} \leqq \Phi \qquad \text{puis} \qquad \mathcal{E}_u^E \leqq \Phi.$$

On verra de manière analogue que pour u continue *et finie*, $\Sigma_{\varphi_u^E}$ est limite analogue et enveloppe des $\mathcal{E}_u^{F'}$ pour les F′ fermés dans Ω et contenus dans E.

f. $\mathcal{E}_u^E$ est fonctionnelle *additive* de u, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}_{u_1+u_2}^E = \mathcal{E}_{u_1}^E + \mathcal{E}_{u_2}^E,$$

C'est évident pour E ouvert d'après l'interprétation de $\mathcal{E}_u^E$ comme fonction de Wiener. On passe au cas de E fermé dans Ω par une suite d'ouverts décroissants. On voit alors par (*e*) l'additivité pour des u continues; on obtient le cas général grâce au lemme :

Lemme 2. — *Étant donné $u \leqq 0$ sous-harmonique dans un ouvert (en particulier Ω) on peut former une suite de fonctions analogues mais continues (et même finies) tendant en décroissant vers u* [23].

g. Si u est harmonique $\leqq 0$ et bornée dans Ω, tendant vers o sur $\overset{*}{E} \cap \overset{*}{\Omega}$ sauf sur un ensemble négligeable pour Ω, $\bar{u} = u$.

On considérera pour chaque fermé dans Ω de E, les ouverts (de Ω) le contenant sans point-frontière sur $\overset{*}{\Omega} \cap \overset{*}{CE}$.

7. Extensions. — Si l'on considère Ω ouvert quelconque et $\bar{E} \subset \Omega$, enfin u sous-harmonique quelconque dans Ω, on introduira un ouvert Ω_1 tel que $\bar{E} \subset \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$; si la constante K majore u dans Ω_1, $u - K$ y sera $\leqq 0$ et l'extrémale $\mathcal{E}_{u-K}^E$ relative à Ω_1, prolongée par $u - K$ hors Ω_1, puis augmentée de K est alors indépendante de Ω_1 et K et identique à $\mathcal{E}_u^E$ lorsque cette extrémale peut être définie; c'est la plus grande fonction sous-harmonique dans Ω, $\leqq u$ quasi partout hors E; on l'appellera encore extrémale de u

(23) On peut commencer par former une suite de fonctions finies continues $\leqq 0$ décroissant vers u puis utiliser la construction de la note 17. On peut aussi dans l'hypothèse de l'ouvert Ω procéder avec une médiation spatiale, puis hors d'un compact de Ω avec un prolongement par une fonction de Wiener convenable.

pour E relativement à Ω. C'est ainsi que la théorie a été déjà étudiée (BS 2) pour Ω borné et $\bar{E} \subset \Omega$.

Transposition immédiate de la théorie aux fonctions sur-harmoniques par changement de signe et de sens d'inégalité. Même dénomination d'extrémale.

8. Extrémisation des masses. Définition. — Revenant désormais aux hypothèses initiales, considérons plus spécialement les fonctions sous-harmoniques $\leqq 0$ *admettant une plus petite majorante harmonique nulle*. On sait (AN) que *ce sont* les fonctions $v_\mu(P) = \int G_\Omega^P(M) d\mu(M)$ dites potentiels-G où μ est une mesure de Radon $\leqq 0$ dans Ω (distribution de masse), $G_\Omega^P(M)$ (ou brièvement G^P) la fonction de Green de Ω supposée sommable (c'est-à-dire d'intégrale finie) en un point au moins de chacun des domaines composants de Ω; μ est d'ailleurs déterminé par le potentiel.

L'extrémale $\mathcal{E}_{v_\mu}^E$ ou $\mathring{v}_\mu$ majorant v_μ admet donc aussi une plus petite majorante harmonique nulle; c'est donc le potentiel-G d'une distribution $\mathring{\mu}$ dite extrémisée. Le passage de μ à $\mathring{\mu}$ s'appellera *extrémisation* des masses μ pour E, ou encore *balayage* de E ou balayage *sur* $C_\Omega E$; c'est une opération additive.

Mêmes définitions et notations avec des masses $\geqq 0$. On notera ε_P la distribution réduite à la masse $+1$ en P. On verra le rôle essentiel de $\mathring{\varepsilon}_P$ et $\mathring{G}_\Omega^P(M)$ relatifs à un E fixé.

9. Critère fondamental d'effilement. — L'effilement d'un ensemble α en P (de Ω) non isolé de $\alpha \cup P$, équivaut à l'existence d'un potentiel-G de masses $\leqq 0$, soit u, tel que

$$\limsup_{M \to P,\ M \neq P,\ M \in \alpha} u(M) < u(P)$$

et aussi à l'existence d'un potentiel analogue v tel que

$$v(P) \text{ fini}, \qquad v(M) \to -\infty \qquad (M \to P,\ M \neq P,\ M \in \alpha) \quad (^{24}).$$

Théorème 4. — *Soit dans Ω, u sous-harmonique $\leqq 0$ dont la valeur en* P *soit finie et plus petite* [24bis] *que la borne inférieure de u hors de tout voisinage de* P. *Pour que l'ensemble α de Ω soit effilé en* P *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}_u^{\Omega-\alpha}(P) > u(P)$ [25].

---

[24] La première partie est à peu près la définition fondamentale de l'effilement, la seconde est une propriété donnée dans BS 2 (théorème 1) *avec une petite adaptation pour inclure le cas de* P *en* $\mathcal{R}_\tau$.

[24bis] Plus petit, plus grand seront toujours pris au sens ordinaire ($<$ ou $>$), c'est-à-dire dans le sens *strict* de Bourbaki.

[25] Nous reprenons sommairement, à peu près, la démonstration donnée dans BS 2 (théorème 4). J'ajoute sur les épreuves que la restriction « $u(P)$ finie » est essentielle, mais que, si $P \not\in \mathcal{R}_\tau (\tau \geqq 3)$, un autre critère (nécessaire et suffisant) est qu'il existe v sous-harmonique $\leqq 0$ infinie en P et d'extrémale finie en P, comme on pourra le démontrer plus loin. Même énoncé avec effilement intérieur et extrémale extérieure introduite plus loin.

On sait déjà que la condition est suffisante. Voyons la nécessité et examinons seulement le cas non immédiat où P est hors α et non isolé de $\alpha \cup P$. Si α est effilé en P, il existe w sous-harmonique bornée dans Ω telle que

$$\limsup_{M \to P,\, M \in \alpha} w < \gamma < w(P) \quad (^{26})$$

Alors considérons la fonction $\varphi(M) = u(P) + K[w(M) - \gamma]$ avec $K > 0$. Pour K assez petit, $\varphi(M) < u(M)$ sur α d'où

$$\mathcal{E}_u^{\Omega-\alpha} \geqq \varphi \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_u^{\Omega-\alpha}(P) \geqq \varphi(P) > u(P).$$

Remarque. — Un raisonnement analogue donne le second critère [27] :

Soit u sous-harmonique < 0, et bornée au voisinage de P. Pour que α soit effilé en P, il faut et suffit que pour un voisinage δ convenable de P, $\mathcal{E}_u^{\Omega-\alpha\cap\delta}(P)$ soit arbitrairement voisin de 0.

La condition est évidemment suffisante. Supposons l'effilement. Examen immédiat si P est isolé de $\alpha \cup P$. Sinon on conclut en prenant le v du rappel préliminaire (début du n° 9), puis considérant λv arbitrairement petit en P avec λ et qui dans un voisinage δ de P sur α sera majoré par u.

10. Lemme 3. — *Il existe dans Ω une fonction sous-harmonique $V < 0$ bornée continue telle que pour tout point $P \in \Omega$, V soit la somme de deux fonctions sous-harmoniques $\leqq 0$ dont l'une est en P, finie et (strictement) plus petite que sa borne inférieure hors tout voisinage de P* [28].

On peut partir d'une fonction $U < 0$ sous-harmonique continue dans Ω, possédant hors $\mathcal{R}_\tau$ des dérivées secondes continues et un $\Delta U > 0$ (par exemple du type $\int G_\Omega(M, S)\, d\mu(S)$ où μ est une distribution de masses < 0 dans $\Omega \cap C\mathcal{R}_\tau$ à densité < 0 convenable). Essayons de faire la décomposition pour $P \not\in \mathcal{R}_\tau$. Introduisons $\overline{D}_P^R \subset \Omega$ et la fonction de Wiener dans $\Omega - \overline{D}_P^R$ avec valeur 0 sur $\overset{*}{\Omega}$ et -1 sur $\overset{*}{D}_P^R$; on peut la prolonger sous-harmoniquement dans Ω par une fonction sous-harmonique dans D_P^R, fonction de PM seul continue strictement croissante. La fonction ψ obtenue est bornée continue, s'annule quasi partout sur $\overset{*}{\Omega}$ et est en P plus petite que sa borne inférieure hors tout voisinage de P. Une double médiation spatiale à rayon assez petit

---

([26]) Il n'y a qu'à prendre l'enveloppe supérieure avec une constante d'une fonction u ou v de l'énoncé initial du n° 9.

([27]) Extension à divers points de vue d'un critère de régularité De La Vallée Poussin (*Bull. Ac. royale de Belgique*, juin 1938, p. 374).

([28]) Le cas de Ω borné se traite facilement de diverses manières, par exemple comme je l'ai fait, avec le *potentiel-mesure*. Rappelons que D_P^R est le domaine $PM < r$ (*voir* AN).

conserve ces propriétés et l'harmonicité hors d'un $\overline{D}_P^{R'}(R' > R)$ mais donne un laplacien continu, et une multiplication par K assez petit rend ce laplacien arbitrairement et uniformément petit. On verra alors que, pour K convenable, cette dernière fonction v majore U et que $U - v$ est sous-harmonique, ce qui réalise la décomposition cherchée de U.

Pour $\mathcal{R}_\tau \in \Omega$ et P en $\mathcal{R}_\tau$, on évite toute difficulté en formant U_1 analogue à ψ, sous-harmonique $\leqq 0$ bornée continue strictement inférieure en $\mathcal{R}_\tau$ à sa borne inférieure hors tout voisinage de $\mathcal{R}_\tau$. Ainsi $U - U_1$ permet la décomposition pour tout P de Ω. C'est une fonction V cherchée.

Applications. — *Noyau de* E. Le critère du théorème 4 s'applique à V. Donc l'ensemble des points de Ω où CE est effilé est défini par $\mathcal{E}_V^E > V$. On l'appellera *noyau* $\mathfrak{N}_E$ de E.

Propriétés : $\mathfrak{N}_E \subset \overline{E}$; $\mathfrak{N}_E \cap$ CE est polaire; $\mathfrak{N}_E$ est réunion dénombrable de fermés dans Ω ou de compacts; on a aussi $\mathfrak{N}_{\mathfrak{N}_E} = \mathfrak{N}_E$ comme il résulte du théorème suivant :

THÉORÈME 5. — $\mathcal{E}_u^E$ *vaut* $\mathcal{E}_u^{\mathfrak{N}_E}$ *et est la plus grande fonction sous-harmonique* $\leqq 0$ *majorée par* u *hors* $\mathfrak{N}_E$ (ou encore égale à u hors $\mathfrak{N}_E$).

Car $\mathcal{E}_u^E$ valant u hors $\mathfrak{N}_E$ est majorée par $\mathcal{E}_u^{\mathfrak{N}_E}$ tandis que

$$\mathcal{E}_u^{\mathfrak{N}_E} = \mathcal{E}_u^{E \cap \mathfrak{N}_E} \leqq \mathcal{E}_u^E.$$

CONSÉQUENCE. — Les diverses propriétés de $\mathfrak{N}_E$ s'étendent pour E quelconque dans $\overline{R}_\tau$ à l'ensemble des points de $\overline{R}_\tau$ où CE est effilé; car il suffit de raisonner localement. D'après cela, comme on l'a déjà souligné dans (AN), *les points d'un ensemble où il est effilé forment un ensemble polaire; ainsi l'effilement d'un ensemble en chacun de ses points caractérise les ensembles polaires.*

Base d'un ensemble α *de* Ω : ce sera

$$\mathcal{B}_\alpha = C_\Omega \mathfrak{N}_{C_\Omega^\alpha};$$

c'est l'ensemble des points de Ω où α n'est pas effilé. Les propriétés du noyau se traduisent aussitôt en propriétés de la base, dont l'utilité ressort déjà des énoncés suivants :

Si une fonction sous-harmonique est déterminée quasi partout sur α, elle est déterminée sur $\mathcal{B}_\alpha$ (elle vaut en chaque point la lim. sup. en ce point prise sur la partie de α où la fonction est donnée). Plus généralement et de même, entre fonctions sous-harmoniques, l'inégalité $u \leqq v$ est équivalente sur $\mathcal{B}_\alpha$, quasi partout sur $\mathcal{B}_\alpha$ ou quasi partout sur α.

11. Représentation intégrale de l'extrémale.

Lemme 4. — *L'extrémale pour* E *de la fonction de* M, $G^A(M)$ *en* B *vaut l'extrémale de* $G^B(M)$ *en* A, *c'est-à-dire*

$$\mathring{G}^A(B) = \mathring{G}^B(A) \qquad \text{ou} \qquad \mathring{G}^A(B) = \int \mathring{G}^A(S)\, d\mathring{\varepsilon}_B(S).$$

Il suffit de le voir pour E ouvert car on passe aussitôt à E fermé (par une suite d'ouverts) puis au cas général par (6, *e*).

Supposons d'abord A et B dans E. Alors on a dans E

$$G^A_\Omega(M) = G^A_\omega(M) + G^A_{\mathring{\Omega}}(M),$$

et de même avec B, d'où le résultat grâce à la symétrie des fonctions de Green.

On passe au cas de A et B quelconques, mais non sur $CE \cap \mathcal{R}_\tau$ si $\tau \geqq 3$; il n'y a qu'à adjoindre à E des voisinages ouverts de A et B qu'on fera tendre vers A et B dans des suites, car l'adjonction d'un ou deux points ($\neq \mathcal{R}_\tau$ si $\tau \geqq 3$) à E ne change pas les extrémales.

C'est encore évident si l'un des points A et B est hors $\overline{E}$.

Reste le cas de l'un des points, soit A, en $\mathcal{R}_\tau$ sur $\overset{\star}{E}$ pour $\tau \geqq 3$; mais alors G^A étant borné, on a dans E donc partout

$$\mathring{G}^A(M) = G^A(M),$$

tandis que le non-effilement de CE en A entraîne aussi

$$\mathring{G}^B(A) = G^B(A).$$

Conséquence. — S'il y a pour les u sous-harmoniques $\leqq 0$ une représentation intégrale $\mathring{u} = \int u(S)\, d\nu_M(S)$ en *un* point M, avec mesure de Radon $\nu_M \geqq 0$ *indépendante* de u, ν_M est nécessairement $\mathring{\varepsilon}_M$; car en prenant pour u les $(-G^A)$, on voit que ν_M et $\mathring{\varepsilon}_M$ doivent avoir même potentiel-G dans Ω.

Par suite si E est ouvert et $M \in E$, $\mathring{\varepsilon}_M$ est identique à la mesure obtenue par réduction sur Ω de la mesure harmonique relative à M et E (qui est une distribution de masse sur $\overset{\star}{E}$, en partie peut-être sur $\overset{\star}{\Omega}$).

On peut songer à partir de là pour obtenir une représentation intégrale de u dans le cas général. Nous procéderons directement, en nous basant sur le lemme suivant :

Lemme 5. — *Toute fonction* φ *finie continue dans* Ω, *nulle hors d'un compact* K *de* Ω, *peut être approchée à* ε *arbitraire près par la différence de deux potentiels* G *de masses* $\leqq 0$ *bornés continus, même égaux et harmoniques hors d'un compact convenablement fixé* [29].

[29] On peut donner une autre démonstration à partir du résultat d'approximation A' n° 12 de (AN).

On se ramène à supposer φ constant au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ si $\mathcal{R}_\tau \in \Omega$. Puis on approche φ, grâce à des médiations spatiales, par une fonction ψ de ce même dernier type mais admettant de plus les dérivées secondes continues hors $\mathcal{R}_\tau$. Alors on voit ([30]) que ψ vaut à une fonction près $\int_\Omega G^P(S)\Delta\psi\, d\sigma$ (σ mesure de Lebesgue dans R_τ) qui se décompose aussitôt selon la demande.

Théorème 6. — *Pour u sous-harmonique $\leqq 0$ et* E *quelconque dans* Ω

$$\mathring{u}(M) = \int \mathring{u}(S)\, d\mathring{\varepsilon}_M(S),$$

*ce qui, pour un potentiel-*G *de masses* μ *s'écrit aussi* par interversion d'intégrations

$$\mathring{u}(M) = \int \mathring{G}^M(S)\, d\mu(S).$$

Cherchons donc une représentation intégrale par voie directe à partir de la propriété d'additivité. Nous allons définir une mesure ν_M dans Ω par une fonctionnelle $\geqq 0$ additive convenable des fonctions du type $\varphi \geqq 0$ (lemme 5); reprenons pour cela une idée de A. F. Monna ([31]).

D'abord φ étant fixée $\geqq 0$, on trouvera par le lemme 5 deux suites $u_n\, v_n$ de fonctions finies sous-harmoniques $\leqq 0$ telles que $u_n - v_n$ tende uniformément vers φ. Si ε_n est la borne supérieure de $|u_n - v_n - \varphi|$ on aura

$$|(u_{n+p} - v_{n+p}) - (u_n - v_n)| = |(u_{n+p} + v_n) - (u_n + v_{n+p})| \leqq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+p},$$

d'où

$$|(\mathring{u}_{n+p} - \mathring{v}_{n+p}) - (\mathring{u}_n - \mathring{v}_n)| = |\widehat{(u_{n+p} + v_n)}^{\circ} - \widehat{(u_n + v_{n+p})}^{\circ}| \leqq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+p},$$

ce qui assure la convergence de $\mathring{u}_n - \mathring{v}_n$. On verra par des raisonnements analogues que la limite, d'ailleurs $\geqq 0$, est indépendante des suites u_n, v_n et en chaque point fonctionnelle additive de φ. Cette fonctionnelle définit donc bien une mesure de Radon ν_M et s'écrit $\int \varphi(S)\, d\nu_M(S)$.

Soit alors u sous-harmonique $\leqq 0$ finie continue et *tendant vers* zéro en tout point-frontière de Ω. L'ensemble où $u + \varepsilon \leqq 0$ ($\varepsilon > 0$) est un compact K de Ω; si f_ε, g_ε sont les enveloppes (inférieure et supérieure) de $u + \varepsilon$ et o, on a $f_\varepsilon = u - (g_\varepsilon - \varepsilon)$ différence de deux fonctions sous-harmoniques $\leqq 0$ d'où

$$\int f_\varepsilon\, d\nu_M = \mathring{u} - \widehat{(g_\varepsilon - \varepsilon)}^{\circ}.$$

([30]) Car la différence est harmonique et comme l'intégrale, bornée et s'annulant aux points-frontière réguliers, donc nulle.

([31]) A. F. Monna, *loc. cit.*, III.

Mais si ε tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$, f_ε décroît vers u, $g_\varepsilon - \varepsilon$ tend vers zéro donc aussi son extrémale, d'où à la limite

$$\mathring{u} = \int u \, d\nu_M.$$

On achève aisément si tous les points-frontière de Ω sont réguliers; grâce au lemme 2 on ramène le cas général à celui de u finie continue et ce dernier se traite en formant un u_n analogue, décroissant vers u mais s'annulant à la frontière. On l'obtient en prenant dans Ω un compact K_n sans point d'effilement, croissant vers Ω, et remplaçant dans $\Omega - K_n$, u par la fonction de Wiener correspondant à zéro sur $\overset{\star}{\Omega}$ et u sur K_n.

Écartons enfin la restriction de régularité; grâce à la dernière idée de raccordement $\left(\text{par une fonction de Wiener s'annulant quasi partout sur } \overset{\star}{\Omega}\right)$, il suffit de traiter le cas où u est un potentiel-G de masses $\leqq 0$ situées sur un compact de Ω. Or soit Ω_n ouvert croissant tendant vers Ω mais à points-frontière tous réguliers. Mettons dans ce qui suit l'indice supplémentaire n pour désigner les éléments d'extrémisation relative à $E \cap \Omega_n$ et Ω_n. Alors $(\mathring{u})_n$ tend vers $\mathring{u}$ et vaut $\int u \, d(\mathring{\varepsilon}_M)_n$. Mais si u_n est le potentiel-G_{Ω_n} des masses μ, $u - u_n$ est harmonique $\leqq 0$ et tend vers zéro; donc son extrémale $\int (u - u_n) \, d(\varepsilon_M)_n$ tend aussi vers zéro. Il reste à montrer que

$$\int u_n \, d(\mathring{\varepsilon}_M)_n \to \int u \, d\mathring{\varepsilon}_M.$$

Or l'expression s'écrit aussi $\int [\mathring{G}^M_{\Omega_n}]_n \, d\mu$ qui tend bien vers $\int \mathring{G}^M_\Omega \, d\mu$ ou $\int u \, d\mathring{\varepsilon}_M$ puisque, comme c'est facile à voir, l'extrémale de $G^M_{\Omega_n}$ pour $E \cap \Omega_n$ et Ω_n tend en croissant vers $\mathring{G}^M_\Omega$.

12. Étude de l'extrémisation des masses. — Préparons les résultats définitifs par des remarques partielles immédiates :

a. L'extrémisation laisse invariantes des masses portées par $C_\Omega \mathcal{N}_E$ (ou base de $\Omega - E$).

Car le potentiel u des masses μ satisfont à $\mathring{u} = \int \mathring{G}^P(S) \, d\mu(S)$ où $\mathring{G}^P$ vaut G_P sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$ d'où $\mathring{u} = u$ et la conservation de la distribution.

b. $\mathring{\varepsilon}_M$ ne charge pas $\mathcal{N}_E$, quel que soit M. Car partant de la fonction V du lemme 2 et utilisant l'invariance de l'extrémale par itération,

$$\mathring{V} = \int V \, d\mathring{\varepsilon}_M = \int \mathring{V} \, d\mathring{\varepsilon}_M.$$

D'où, en passant, le critère suivant à rapprocher du théorème 4 :

THÉORÈME 7. — *Pour que l'ensemble α de Ω soit non effilé en* P, *il faut et suffit que l'extrémisation pour $\Omega - \alpha$ de G^P_Ω ou encore de ε_P, les laisse invariants* ([32]) (autrement dit que le balayage de ε_P sur α ne change rien).

Car si α est non effilé, on considère G^P et l'on conclut par le lemme 3 (partie du théorème 6).

Si α est effilé, on considère ε_P et l'on conclut par la remarque précédente (*b*).

c. Si $M \in \mathcal{N}_E$, $\mathring{\varepsilon}_M$ ne charge pas les ensembles polaires (c'est-à-dire que tout ensemble polaire est de mesure-$\mathring{\varepsilon}_M$ nulle).

Comme tout ensemble polaire est contenu dans un autre polaire borélien, il suffit de voir la proposition pour tout compact α de $C_\Omega \mathcal{N}_E$ et cela résulte de ce que, au voisinage de α, $\mathring{G}^M(S)$ est borné [*voir* note (13)].

D'après *a* et *b*, $\mathring{\varepsilon}_M$ est caractérisée comme la seule distribution de masses $\geqq 0$ sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$ de potentiel-G égal à G^M sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$ (ou égal à G^M quasi partout sur $C_\Omega E$). L'unicité vient de ce que toute distribution répondant à ces conditions donne un potentiel coïncidant avec sa propre extrémale, et que l'extrémale est la même pour deux fonctions égales sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$ (ou quasi partout sur $C_\Omega E$).

On passera au cas général de $\mathring{\mu}$ en étendant *b*, ce qui résulte du théorème suivant où il suffirait de considérer pour ψ les fonctions caractéristiques de compacts.

THÉORÈME 8. — *Pour une distribution μ admettant un potentiel-*G, *on a pour toute fonction $\psi \geqq 0$ borélienne sur Ω*

$$\int \psi \, d\mathring{\mu} = \int \left(\int \psi \, d\mathring{\varepsilon}_P \right) d\mu(P).$$

En effet soit d'abord ψ, potentiel-G de masses ν. Alors le second membre vaut $\int \mathring{\psi} \, d\mu$, qui par interversion d'intégrations, donne le premier membre.

On passe à ψ finie continue nulle hors d'un compact grâce au lemme 4; une suite décroissante donne le cas utile de ψ fonction caractéristique d'un compact. Des passages à la limite donnent d'ailleurs par récurrence transfinie le cas de $\psi \geqq 0$ borélienne, bornée nulle hors d'un compact, puis par croissance le cas général.

Nous pouvons alors conclure :

THÉORÈME 9. — *Si μ admet u comme potentiel-*G, *$\mathring{\mu}$ est la distribution unique (de même signe) sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$, dont le potentiel-*G *vaille u sur $C_\Omega \mathcal{N}_E$ (ou quasi partout*

([32]) Lorsque P est en $\mathcal{R}_\tau$ et $\tau \geqq 3$, il est intéressant de voir directement l'équivalence avec le théorème 4 considéré pour la fonction $(-G^P)$.

sur $C_\Omega E$) ou encore : le balayage sur α donne la seule distribution (de même signe) sur la base $\mathcal{B}_\alpha$ dont le potentiel-G soit le même sur $\mathcal{B}_\alpha$ (ou quasi partout sur α).

Enfin c s'étend comme b : si μ ne charge que $\mathcal{N}_E$, $\mathring{\mu}$ ne charge que $\overset{\star}{E} \cap C_\Omega \mathcal{N}_E$ ou $\widehat{C_\Omega \overset{\star}{E}} \cap \mathcal{B}_{C_\Omega E}$, et aucun ensemble polaire; la masse totale est d'ailleurs toujours conservée si $\overline{E} \subset \Omega$.

13. Variation de Ω. — Supposons $\overline{E} \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Il est évident que les extrémales d'un u relatives à Ω et Ω_1 sont égales dans Ω_1. Mais partons de μ dans Ω; les masses dans $\Omega \cap C\Omega_1$ restent invariantes dans l'extrémisation relative à Ω; les masses de Ω_1 y admettent un potentiel-G_{Ω_1} et *donnent par extrémisation pour Ω_1 la même distribution que pour Ω*. Il suffit de voir que les deux $\mathring{\varepsilon}_P$ sont les mêmes. Or G_Ω^P et $G_{\Omega_1}^P$ diffèrent dans Ω_1 d'une fonction harmonique w s'annulant quasi partout sur $\overset{\star}{\Omega} \cap \overset{\star}{\Omega}_1$ (contenant $\overline{E} \cap \overset{\star}{\Omega}$). Les extrémales de ces fonctions pour Ω et Ω_1 diffèrent aussi de w et les masses associées à ces fonctions sur-harmoniques sont bien les mêmes.

Considérons plus spécialement le cas de $\overline{E} \subset \Omega$ et des masses μ sur $\overline{E}$. Prenons un point Q hors $\overline{E}$; soient v le potentiel-h_Q de μ, puis $\mathring{v}$ l'extrémale pour E au sens étendu du numéro **9**. On verra que $\mathring{v}$ est le potentiel-h_Q de $\mathring{\mu}$ (33).

IV. — Extrémales secondaires.

14. Conservant l'hypothèse de $C\Omega$ non polaire et u sous-harmonique $\leqq 0$, cherchons ce que donne l'approximation de E contenu dans Ω par des fermés contenus ou ouverts contenants.

L'extrémale intérieure $\underline{\mathcal{E}}_u^E$. Pour tous les ensembles F fermés dans Ω contenus dans E, $\mathcal{E}_u^F$ (ou plus grande minorante sous-harmonique de φ_u^F) admet une enveloppe supérieure quasi sous-harmonique dont la régularisée peut être dite *extrémale intérieure* $\underline{\mathcal{E}}_u^E$ de u pour E.

$\underline{\mathcal{E}}_u^E \leqq \mathcal{E}_u^E$; d'après (6, e) il y a égalité si u est finie continue. Mais pour E ouvert et $\overline{E} \subset \Omega$, $\underline{\mathcal{E}}_u^E$ vaut la plus petite majorante harmonique de u dans E; cela montre qu'elle peut effectivement différer de $\mathcal{E}_u^E$ et que le passage à la limite de u_n décroissant vers u ne conserve pas toujours l'extrémale intérieure. Ce dernier point, malgré l'additivité évidente en u, empêche une représen-

(33) On sait (*voir* AN fin) que la possibilité de représentation par un potentiel-h_Q d'une fonction sous-harmonique dans $\overline{R}_\tau - Q$ ne dépend que de l'allure de u au voisinage de Q.

tation intégrale générale et peut-être tout rôle important; mais il y aurait intérêt à savoir préciser, comme dans le cas important de E ouvert (*voir* AN, n° **21**), la différence $\mathcal{E}_u^{\mathrm{E}} - \underline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$.

On peut évidemment définir pour des masses μ une extrémisation « intérieure » correspondante avec distribution $\underline{\mu}$.

15. *L'extrémale extérieure* $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$ *ou* $\overline{u}$ [34]. — On appellera ainsi l'enveloppe inférieure des $\mathcal{E}_u^{\omega}$ pour les ouverts ω de Ω contenant E, c'est-à-dire la limite de $\mathcal{E}_u^{\omega}$ décroissant selon l'ordonné filtrant des ω. Elle majore u et même $\mathcal{E}_u^{\mathrm{E}}$ et est sous-harmonique.

Un autre aspect ressort des propriétés caractéristiques suivantes :

$\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}} = \mathcal{J}_{\varphi_u^{\mathrm{E}}}$ et $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$ est la plus grande des fonctions sous-harmoniques $\leqq 0$ qui sont $\leqq u$ *à peu près partout hors* E.

La seconde partie résulte de la première et de la remarque 1 du n° **5** [35].

Quant à la première partie, soit d'abord v bornée supérieurement localement dans Ω, semi-continue inférieurement, majorant φ_u^{E}; l'ensemble où $v > -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) est un ouvert ω contenant E et $v + \varepsilon > \varphi_u^{\omega}$. Donc $\mathcal{E}_u^{\omega}$ est majoré par $\mathcal{S}_{v+\varepsilon}$ ou $\mathcal{S}_v + \varepsilon$. De même $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$, que majorent donc les $\mathcal{S}_v$ et leur enveloppe inférieure.

Inversement, soit d'après le lemme 2, u_n sous-harmonique $\leqq 0$ continue décroissant vers u. Si ω ouvert contient E, $\varphi_{u_n}^{\omega}$ est du type v précédent. Comme

$$\mathcal{E}_{\varphi_{u_n}}^{\mathrm{E}} = \mathcal{E}_{u_n}^{\omega} \rightarrow \mathcal{E}_u^{\omega},$$

on peut donc bien trouver une fonction du type v dont l'extrémale $\mathcal{S}_v$ est arbitrairement voisine en un point P fixé de $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}(\mathrm{P})$. D'où résulte que l'enveloppe inférieure des $\mathcal{S}_v$ est bien $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$.

Ce second critère suggère d'adapter la théorie de $\mathcal{E}_u^{\mathrm{E}}$ en remplaçant « quasi partout » par « à peu près partout ». On se heurte à la difficulté que la réunion même finie d'ensembles intérieurement polaires n'est pas *a priori* intérieurement polaire, ce qui rend $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$ moins maniable. Mais on pourra pour bien des points réussir par voie plus subtile. C'est ce que nous allons faire, bien que la théorie soit moins utile et moins simple que celle de l'extrémale principale. On se ramènera à n'utiliser que :

---

[34] Dans le cas qu'il traite (*voir* notre note 19), Monna en a donné sous le même nom les propriétés essentielles analogues à celles de son autre extrémale (qui est, a-t-on dit, notre extrémale principale).

[35] Ou se voit directement comme suit : Soit α un compact de $\Omega - \mathrm{E}$ où $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}} > u$; on aura donc $\mathcal{E}_u^{\Omega-\alpha} > u$ sur α ce qui exige que α soit polaire; donc $\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$ est $\leqq u$ à peu près partout hors E. Inversement soit v sous-harmonique $\leqq 0$ satisfaisant à cette condition : pour voir que $v \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^{\mathrm{E}}$ il n'y a qu'à appliquer le résultat ultérieur indépendant (γ) ou faire un raisonnement analogue.

a. La réunion d'un ensemble polaire et d'un ensemble intérieurement polaire est intérieurement polaire [36] (d'après quoi l'altération de E d'un ensemble polaire conserve $\overline{\mathcal{E}}_u^E$, ce qui est inclus à la fin du n° **5**).

On se servira au besoin de la remarque suivante :

b. Si $u \leqq 0$ et v sont semi-continues supérieurement dans un ouvert ω, l'ensemble où $u < v$ est réunion dénombrable de compacts; ce qu'on voit en considérant u_n continue décroissant vers u et l'ensemble où $u_n \leqq v$, fermé dans ω.

Il sera d'ailleurs souvent plus facile de faire des approximations ou passages à la limite (avec ordonnés filtrants) à partir de la définition même et des propriétés déjà connues de $\mathcal{E}_u^E$ (même seulement pour E ouvert, c'est-à-dire des propriétés de la fonction de Wiener).

Ainsi la plupart des premières propriétés de $\mathcal{E}_u^E$ (n° **6**) ont leurs analogues comme suit :

α. $\overline{\mathcal{E}}_u^E$ vaut u en tout point P où CE est non effilé intérieurement.

Selon la première manière, par exemple, l'ensemble de CE où $\overline{\mathcal{E}}_u^E$ vaut u est non effilé en P, puisque par adjonction d'un ensemble intérieurement polaire, il devient non effilé intérieurement en P.

β. Un passage à la limite transpose aussitôt (**6**, *b*) et (**6**, *f*, additivité); extension immédiate de (**6**, *g*).

γ. Si u et v coïncident hors E à peu près partout,

$$\overline{\mathcal{E}}_u^E = \overline{\mathcal{E}}_v^E.$$

Car reprenant $\omega \supset E$, u et v ne diffèrent sur $\overset{*}{\omega}$ que sur un ensemble borélien intérieurement polaire, donc négligeable pour ω; d'où $\mathcal{E}_u^\omega = \mathcal{E}_v^\omega$ dans ω; l'égalité a lieu hors ω quasi-partout sur l'ensemble où $u = v$, donc à peu près partout dans Ω et par suite partout [37].

Il s'ensuit que si $E_1 \supset E$,

$$\overline{\mathcal{E}}^E_{\overline{\mathcal{E}}_u^{E_1}} = \overline{\mathcal{E}}_u^E,$$

d'où en particulier *la conservation par itération* [38].

---

[36] Il s'ensuit que la réunion d'un ensemble effilé en P et d'un ensemble effilé intérieurement en P est effilée intérieurement. (Rappelons qu'un ensemble est effilé intérieurement en P si toute partie dont la réunion avec P est compacte, est effilée en P : par suite, un ensemble intérieurement polaire est effilé intérieurement en tout point de $\overline{R}_\tau$.)

[37] De la manière directe on dira : on se ramène au cas de $u \leqq v$; alors l'ensemble où $v > u$ est réunion dénombrable de compacts, donc aussi l'intersection β avec un compact α de CE, laquelle est donc polaire; si sur $\alpha, \overline{\mathcal{E}}_v^E > u$, on a sur $\alpha - \beta$: $\overline{\mathcal{E}}_v^E > v$. de sorte que $\alpha - \beta$ est intérieurement polaire; α est donc polaire, d'où $\overline{\mathcal{E}}_v^E \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^E$ puis l'égalité. Raisonnement analogue pour (δ) qui suit.

[38] Il s'ensuit que $\overline{\mathcal{E}}^E_{\overline{\mathcal{E}}_u^E} = \overline{\mathcal{E}}^E_{\mathcal{E}_u^E} = \overline{\mathcal{E}}_u^E$, ce qui est immédiat d'ailleurs par la première manière.

δ. Si u_n décroît vers u, $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_{u_n} \to \overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ (ce qui exprime une interversion évidente de limites).

En effet, on peut trouver ω ouvert contenant E tel que $\mathcal{E}^{\omega}_u(\mathrm{P})$ soit en P fixé, arbitrairement voisin de $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u(\mathrm{P})$. Comme $\mathcal{E}^{\omega}_{u_n} \to \mathcal{E}^{\omega}_u$, $\mathcal{E}^{\mathrm{E}}_u(\mathrm{P})$ aura une limite $\leqq \mathcal{E}^{\omega}_u(\mathrm{P})$ donc $\leqq \overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u(\mathrm{P})$.

Il serait intéressant de savoir si $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}_n}_u$ tend vers $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ quand E_n décroît vers E.

Comparaison de $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ *avec* $\mathcal{E}^{\mathrm{E}}_u$. — D'après une propriété de $\mathcal{E}^{\mathrm{E}}_u$ (6, *e*, relative à E_n décroissant), si E est intersection dénombrable d'ouverts [39] $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u = \mathcal{E}^{\mathrm{E}}_u$ [40], de sorte que pour un *fermé dans* Ω, les trois extrémales coïncident.

Soulignons que d'après le n° 5 (fin), s'il y avait identité des ensembles polaires et absolument négligeables $\mathcal{E}^{\mathrm{E}}_u$ et $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ coïncideraient pour tout E borélien.

Même théorie pour fonctions *surharmoniques* et définition évidente par analogie de l'*extrémisation extérieure* de masses μ ($\geqq 0$ ou $\leqq 0$) avec notation $\overline{\mu}$, relativement à E.

16. Du théorème 4 on déduit aussitôt sa transposition avec l'effilement intérieur et l'*extrémale extérieure*. Si en effet α est effilé intérieurement en $\mathrm{P} \in \alpha$, on introduira sur α un compact K effilé en P et l'extrémale pour $\Omega - \mathrm{K}$. Transposition analogue de la remarque qui suit le théorème 4.

Puis le lemme 3 permettra d'étudier le *noyau extérieur* $\overline{\mathcal{N}}_{\mathrm{E}}$, ensemble de Ω ou CE est effilé intérieurement et la *base intérieure* $\mathcal{B}_\alpha = \mathrm{C}_\Omega \overline{\mathcal{N}}_{\mathrm{E}}$ de l'ensemble $\alpha = \mathrm{C}_\Omega \mathrm{E}$. Propriétés analogues [41] à celles de $\mathcal{N}_{\mathrm{E}}$; mais $\overline{\mathcal{N}}_{\mathrm{E}} \cap \mathrm{CE}$ n'est qu'intérieurement polaire. Voyons comment, car c'est moins évident, que $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ vaut

---

(39) En général $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ est limite de $\mathcal{E}^{\omega_n}_u$ pour une *suite* convenable de ω_n ouverts décroissant contenant E, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u$ vaut $\mathcal{E}^{\mathrm{E}_1}_u$ pour un E_1 convenable, intersection dénombrable d'ouverts et contenant E (mais dépendant de u). Cela résulte de ce que d'une famille ordonnée filtrante décroissante de fonctions $\leqq 0$ semi-continues supérieurement dans Ω (et même dans un espace séparé où tout ouvert est réunion dénombrable de compacts) on peut extraire une suite de même limite. Dans notre cas il est commode de prolonger sur Ω les fonctions par la valeur zéro pour raisonner en espace compact.

(40) Plus généralement et c'est là, convenablement transposé, un résultat de H. Cartan dans ses recherches récentes, si pour un ensemble dénombrable (en particulier fini) de E_n il y a égalité des deux extrémales, de même pour l'intersection E.

Car tout point de l'ensemble δ de CE où $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}}_u > u$ appartient à un CE_n et dans ce dernier à l'ensemble où $\overline{\mathcal{E}}^{\mathrm{E}_n}_u > u$ qui est polaire; donc δ est polaire.

(41) Et conséquence analogue que les points d'un ensemble où il est intérieurement effilé forment un ensemble intérieurement polaire, avec quelque précaution pour passer de Ω à $\overline{\mathrm{R}}_\tau$. Mais il est bien plus simple de déduire cela de la propriété analogue de l'effilement des compacts, qui n'est d'ailleurs autre que le fameux lemme de Kellogg-Evans sur les points irréguliers.

$\overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E}$ [42] (et est donc la plus grande fonction sousharmonique $\leqq 0$ majorée par u (ou égale à u), hors $\overline{\mathcal{N}}_E$, d'où résulte

$$\mathcal{N}_{\overline{\mathcal{N}}_E} = \mathcal{N}_E.$$

On a même

$$\overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E \cup E} = \overline{\mathcal{E}}_u^{\mathcal{N}_E \cup E} = \overline{\mathcal{E}}_u^E.$$

Il est d'abord évident que

$$\overline{\mathcal{E}}_u^E \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E} \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E \cup E}.$$

Voyons que

$$\overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E \cup E} \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^E.$$

Soit un compact α hors E où

$$\overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E \cup E} > u;$$

$\alpha \cap \overline{\mathcal{N}}_E$ est réunion dénombrable de compacts et intérieurement polaire, donc polaire. Le reste de α est intérieurement polaire; donc α est bien polaire. Reste à voir que

$$\overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E} \leqq \overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E \cap E}.$$

Raisonnement analogue avec compact hors de $\overline{\mathcal{N}}_E \cap E$.

Signalons encore, comme pour la base, que l'inégalité entre fonctions sousharmoniques $u \leqq v$ est équivalente sur $\underline{\mathcal{B}}_\alpha$, à peu près partout sur $\mathcal{B}_\alpha$ ou à peu près partout sur α.

17. Arrivons à la partie essentielle qu'est la *représentation intégrale*

$$\overline{u}(M) = \int u(S)\, d\,\overline{\varepsilon}_M(S).$$

On pourra adapter pas à pas les raisonnements du théorème 6. Il est intéressant aussi de déduire directement le résultat de ce théorème comme suit : il suffit de le voir pour un potentiel-G de masses situées sur un compact de Ω. Or introduisons l'ordonné filtrant des ouverts ω contenant E. On a

$$\mathcal{E}_u^\omega = \int \mathcal{E}_{G_M}^\omega(S)\, d\mu(S).$$

---

[42] Résultat obtenu d'abord par H. Cartan, qui indique même dans ses hypothèses, au langage près,

$$\overline{\mathcal{E}}_u^{\mathcal{N}_E} = \overline{\mathcal{E}}_u^{\overline{\mathcal{N}}_E} = \mathcal{E}_u^E, \qquad \mathcal{E}_u^{\mathcal{N}} = \overline{\mathcal{E}}_u^{\mathcal{N}_E} = \mathcal{E}_u^E,$$

ce qui entraîne respectivement

$$\mathcal{N}_{\overline{\mathcal{N}}_E} = \overline{\mathcal{N}}_{\overline{\mathcal{N}}_E} = \overline{\mathcal{N}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_{\mathcal{N}_E} = \overline{\mathcal{N}}_{\mathcal{N}_E} = \mathcal{N}_E.$$

Les compléments que cela apporte seraient évidents par coïncidence des extrémales pour borélien s'il y avait identité des ensembles polaires et absolument négligeables. Les premiers résultats se déduisent d'ailleurs de ceux du texte.

Quand ω tend en décroissant vers E, la fonction de S, $\mathcal{E}^{\omega}_{G^M}(S)$ croît et tend vers $\mathcal{E}^{E}_{G^M}$; comme elle est $\geqq 0$ et semi-continue inférieurement, on peut passer à la limite sous $\int$ (43), d'où

$$\overline{\mathcal{E}}^{E}_{u} = \int \overline{\mathcal{E}}_{G^M}(S)\, d\mu(S) = \int u\, d\bar{\varepsilon}_M.$$

Enfin l'étude de l'extrémisation des masses (n° **12**) s'adapte immédiatement à l'extrémisation extérieure au changement près de $\mathcal{N}_E$ en $\overline{\mathcal{N}_E}$, quasi-partout en à peu près partout; si μ ne charge que $\overline{\mathcal{N}_E}$, $\bar{\mu}$ ne charge encore aucun ensemble polaire.

V. — Capacités.

18. Capacité directe ou contenance. — Soit, toujours dans Ω($C\Omega$ non polaire) un potentiel-G de masses $\mu \geqq 0$, soit $\mathcal{V}$ (44), et un ensemble α. Extrémisons μ pour $\Omega - \alpha$ (c'est-à-dire balayons μ sur α). On obtient une distribution notée $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$ ou $\underset{\mu}{\mathcal{D}^{\alpha}}$ brièvement $\mathring{\mu}$ de potentiel-G égal à $\mathcal{E}^{\Omega-\alpha}_{\mathcal{V}}$ ou $\mathring{\mathcal{V}}$.

$\mathcal{E}^{\Omega-\alpha}_{\mathcal{V}}$ est le plus petit potentiel majorant $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{B}_\alpha$ (45) *(ou quasi-partout sur α); $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$ est la seule distribution $\geqq 0$ sur $\mathcal{B}_\alpha$ dont le potentiel vaille $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{B}_\alpha$ (ou quasi-partout sur α).*

A côté de la masse totale de $\mathring{\mu}$, soit $K^{\alpha}_{\mathcal{V}}$ ou $\underset{\mu}{K^{\alpha}}$, on considérera plutôt dans le cas général la quantité $\mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$ ou $\underset{\mu}{\mathcal{C}^{\alpha}}$ ($\geqq 0$, finie ou non) dite capacité directe ou *contenance-$\mathcal{V}$* de α dans Ω

$$\underset{\mu}{\mathcal{C}^{\alpha}} = \int \mathcal{V}\, d\mathring{\mu} = \int \mathring{\mathcal{V}}\, d\mu,$$

qui vaut aussi $\int \mathring{\mathcal{V}} d\mathring{\mu}$, énergie-G de $\mathring{\mu}$ d'ailleurs au plus égale à celle de μ.

La théorie de l'extrémisation fournit une série de propriétés dont nous soulignerons encore :

a. Les éléments $\mathcal{E}^{\Omega-\alpha}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$, $K^{\alpha}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{V}}$ sont les mêmes pour deux α ne différant que d'un ensemble polaire ou deux $\mathcal{V}$ égaux quasi-partout sur α; leur nullité est simultanée; elle équivaut à la polarité de α si $\mathcal{V} \neq 0$ quasi-partout sur α en particulier si $\mathcal{V}$ est partout > 0.

(43) Selon un résultat de H. Cartan déjà utilisé dans [*A. N.*, note (30)], à savoir que, avec une mesure de Radon sur un compact (ou même par extension facile, localement compact), on peut dans une intégrale sur fonction $\geqq 0$ semi-continue inférieurement, passer à la limite sous $\int$ pour un ordonné filtrant croissant de telles fonctions.

(44) Noter que dans chaque domaine composant, $\mathcal{V}$ est partout > 0 ou partout nul.

(45) Il serait équivalent, comme ultérieurement, de dire « quasi-partout » sur $\mathcal{B}_\alpha$. (*Voir* n° **10**.)

b. Pour toute suite α_n,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\cup\alpha_n} \leqq \Sigma\, \mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha_n}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\cup\alpha_n} \leqq \Sigma\, \mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\alpha_n} \qquad (\text{convexité de } \mathcal{C}).$$

c. Si α_n tend en croissant vers α, $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha_n}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\alpha_n}$ tendent en croissant vers $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$; il y a extension à un ordonné filtrant croissant d'ouverts.

19. Cas particulier. — *Supposons qu'il existe pour* α un potentiel $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{W}$ *égal à* 1 *quasi-partout sur* α [46], comme c'est immédiat si $\bar{\alpha} \subset \Omega$ [47]. Les éléments correspondants sont les mêmes pour tous les potentiels répondant à ces conditions et l'on peut en former un qui soit $\leqq 1$ partout, par enveloppe inférieure avec 1. On appellera *contenance tout court*, notée aussi C_Ω^α la quantité

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{\alpha} = K_{\mathcal{W}}^{\alpha} \leqq \text{masse totale de } \mu \text{ (correspondant à } \mathcal{W}).$$

Théorème 10. — *Soit* ν *une distribution de masses* $\geqq 0$ *de potentiel*-G *égal à* v *et de total* Q.

a. Si $v \geqq A = \text{const.}$ *finie sur* $\mathcal{B}_\alpha$ (ou ce qui est équivalent quasi-partout sur α)

$$Q \geqq A C_\Omega^\alpha,$$

Car

$$Q \geqq \int \mathring{\mathcal{W}}\, d\nu = \int v\, d\mathring{\mu} \geqq A C_\Omega^\alpha.$$

D'après cela C_Ω^α ***est la plus petite des masses totales des distributions*** $\geqq 0$ ***sur*** Ω ***dont le potentiel*-G *majore* 1 *quasi-partout sur*** α [48].

b. *Si* ν *ne charge que* $\mathcal{B}_\alpha$ *et si* $v \leqq B$ *(const. finie) sur* $\mathcal{B}_\alpha$ *(ou quasi-partout sur* α*)* [49]

$$Q \leqq B C_\Omega^\alpha.$$

Car

$$Q = \int \mathring{\mathcal{W}}\, d\nu = \int v\, d\mathring{\mu} \leqq B C_\Omega^\alpha.$$

---

(46) Remarquer, en extrémisant pour $\Omega - \alpha$, que $\mathring{\mathcal{W}}(P)$ vaut

$$\int \mathcal{W}\, d\bar{\varepsilon}_P = \int \mathring{\mathcal{W}}\, d\bar{\varepsilon}_P,$$

donc la masse totale de $\bar{\varepsilon}_P$.

(47) La fonction égale à 1 sur $\bar{\alpha}$ et, dans $\Omega - \bar{\alpha}$, à la fonction de Wiener pour 0 sur $\overset{*}{\Omega}$ et 1 sur $\overset{*}{\alpha}$ est quasi-surharmonique et sa régularisée est un potentiel-G. Si $\bar{\alpha} \subset \Omega$, *on peut même former un* W *continu* $\leqq 1$ *égal à un sur* $\bar{\alpha}$.

(48) Et c'est la borne inférieure, lorsque le potentiel doit majorer 1 partout sur α, car on peut trouver une distribution $\geqq 0$ de total arbitrairement petit, dont le potentiel-G vaille $+\infty$ sur un ensemble polaire donné de Ω.

(49) Ce qui entraîne $v \leqq B$ [*voir* la remarque de la note (13)].

Même résultat pour α fermé dans Ω en supposant ν ne chargeant que α et $\nu \leqq B$ sur α (car ν ne chargeant alors pas les polaires ne chargera que $\mathcal{B}_\alpha$).

Ainsi C_Ω^α *est la plus grande des charges* $\geqq 0$ *sur* $\mathcal{B}_\alpha$ *dont le potentiel*-G *est* $\leqq 1$ *sur* $\mathcal{B}_\alpha$ (*ou quasi-partout sur* α); et si α est fermé dans Ω, la plus grande des charges sur α de potentiel $\leqq 1$ sur α ([50]).

Il est intéressant d'introduire les parties boréliennes de $\mathcal{B}_\alpha$ portant toute la masse de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}\varphi}^\alpha$, par exemple l'intersection de $\mathcal{B}_\alpha$ avec le noyau fermé de masses. Ainsi les premiers énoncés de a et b s'appliquent en supposant $\nu \geqq A$ ou $\nu \leqq B$ sur une telle partie.

Remarque. — Si $\Omega \supset \mathcal{R}_\tau$, $C_\Omega^{\mathcal{R}_\tau} = \dfrac{1}{G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)}$.

Variation de Ω. — Théorème 11. — *Soient* Ω_1, Ω_2 *deux ouverts* (*de complémentaires non polaires*) $\Omega_1 \subset \Omega_2$, *et un compact fixe* F *dans* Ω_1. *Alors pour une partie variable* α *de* F

$$A C_{\Omega_2}^\alpha \leqq C_{\Omega_2}^\alpha \leqq C_{\Omega_1}^\alpha, \qquad \textit{où } A \textit{ est un nombre fixe } (0 < A < 1).$$

D'abord si H est la plus grande minorante harmonique de $\varphi = \mathcal{E}_{\mathcal{C}\varphi}^{\Omega_2 - \alpha}$ dans Ω_1. $\varphi - H$ vaut dans Ω_1 le potentiel-G des masses correspondantes; celui-ci est $\leqq 1$ sur α, d'où par (b)

$$C_{\Omega_2}^\alpha \leqq C_{\Omega_1}^\alpha.$$

Considérons maintenant les domaines composants de Ω_2 qui contiennent F, soit les ω_i, en nombre fini; choisissons dans chacun d'eux un compact λ_i non polaire. Prenons alors d'abord tous les α tels que $\mathcal{E}_{\mathcal{C}\varphi}^{\Omega_2-\alpha} \geqq \frac{1}{2}$ sur un des λ_i au moins; d'après (a), $2C_{\Omega_2}^\alpha$ majore le plus petit des $C_{\Omega_2}^{\lambda_i}$ et l'on trouvera un nombre $A_0 > 0$ tel que

$$C_{\Omega_2}^\alpha \geqq A_0 C_{\Omega_1}^F \geqq A_0 C_{\Omega_1}^\alpha.$$

Prenons ensuite tous les autres α; sur chaque λ_i, $\mathcal{E}_{\mathcal{C}\varphi}^{\Omega_2-\alpha}$, donc H sera $< \frac{1}{2}$ en un point au moins; H harmonique $\leqq 1$ dans ω_i sera sur la partie de F contenue dans ω_i majorée par un nombre $B_i < 1$ *indépendant* de α. Si $B (0 < B < 1)$ majore les B_i, on aura

$$\varphi - H \geqq 1 - B \quad \text{quasi-partout sur } \alpha, \text{ d'où} \quad C_{\Omega_2}^\alpha \geqq (1 - B) C_{\Omega_1}^\alpha.$$

On achève en prenant pour A de l'énoncé le plus petit des nombres A_0 et $1 - B$.

Corollaire. — Si un compact F est contenu dans deux ouverts du type Ω, les contenances de α variable dans F relatives aux deux ouverts sont simultanément nulles ou dans un rapport compris entre deux nombres > 0 fixes.

([50]) Il est équivalent dans ces énoncés caractérisant C_Ω^α de supposer le potentiel $\leqq 1$ partout [d'après le principe du maximum, *voir* notes ([49]) et ([15])].

20. Capacités secondaires. — Faisons au départ sur $\Omega - \alpha$ des extrémisations secondaires.

Contenance-$\mathcal{V}$ extérieure. — A $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$ correspond une distribution $\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ de masse totale $\overline{\mathrm{K}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ et l'on introduira la « contenance-$\mathcal{V}$ extérieure »

$$\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha} = \int \mathcal{V}\, d\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha} = \int \underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}\, d\mu.$$

Ces éléments sont les mêmes pour deux $\mathcal{V}$ égaux quasi-partout sur α.

Contenance-$\mathcal{V}$ intérieure. — A $\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$ correspondent de même $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$, $\underline{\mathrm{K}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ et la « contenance-$\mathcal{V}$ intérieure »

$$\underline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha} = \int \mathcal{V}\, d\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha} = \int \overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}\, d\mu = \int \overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}\, d\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}.$$

$\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$ est le plus petit potentiel majorant $\mathcal{V}$ sur $\underline{\mathcal{B}}_{\alpha}$ (ou à peu près partout sur α); $\underline{\mathcal{D}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ est la seule distribution $\geqq 0$ sur $\underline{\mathcal{B}}_{\alpha}$ dont le potentiel vaille $\mathcal{V}$ sur $\underline{\mathcal{B}}_{\alpha}$ (ou à peu près partout sur α).

Les éléments $\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$ etc., sont les mêmes pour deux α ne différant que d'un ensemble polaire ou deux $\mathcal{V}$ égaux à peu près partout sur α; la nullité (simultanée) équivaut à ce que α soit intérieurement polaire si $\mathcal{V}$ est $\neq 0$ à peu près partout sur α ([51]). Il y aura aussi extension de (**18**, c), mais sans doute pas de (**18**, b), et cette absence de convexité ne peut laisser à la contenance intérieure qu'un rôle secondaire.

On examinera enfin le cas où il existe un potentiel-$\mathcal{V}$, soit $\mathcal{W}'$ égal à 1 à peu près partout sur α. L'extrémale extérieure pour $\Omega - \alpha$ est la même pour deux tels potentiels ([52]) et l'on peut, par enveloppe inférieure avec 1, en former un qui soit partout $\leqq 1$. On pourra faire l'adaptation du n° **19** ([53]) en remplaçant $\mathcal{B}_{\alpha}$ par $\underline{\mathcal{B}}_{\alpha}$, quasi-partout par à peu près partout et $\mathrm{C}_{\Omega}^{\alpha}$ par la « contenance intérieure » $\underline{\mathrm{C}}_{\Omega}^{\alpha} = \underline{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}'}^{\alpha}$.

21. Comparaison des capacités. — D'abord

$$\underline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha} \leqq \mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\alpha} \leqq \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}.$$

Les trois coïncident si α est ouvert, les deux premières si α est fermé dans Ω,

---

([51]) Car si dans un domaine composant la partie de α n'était pas intérieurement polaire, $\mathcal{V}$ serait > 0 dans ce domaine, puis $\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$ non partout nul sur α.

([52]) Soient en effet u, v deux tels potentiels, λ un compact de α où $u \neq v$, s et t les ensembles où $u \neq 1$, $v \neq 1$; s et t sont réunions dénombrables de compacts, donc aussi $\lambda \cap s$ et $\lambda \cap t$ qui, intérieurement polaires, sont alors polaires. Comme $\lambda = (\lambda \cap s) \cup (\lambda \cap t)$, il est polaire.

([53]) Sans la note ([48]) évidemment.

les deux dernières si $\mathcal{V}$ est finie continue, ce qui est le cas de $\bar{\alpha} \subset \Omega$ avec $\mathcal{W}$ qu'on peut alors prendre continue.

Théorème 12. — *$\underline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ est la borne supérieure des contenances-$\mathcal{V}$ des parties de α fermées dans Ω.*

On considérera l'ordonnée filtrant de ces parties F; comme $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-F}$ semi-continue inférieurement $\geqq 0$, tend en croissant vers $\overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$,

$$\int \mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-F}\, d\mu \to \int \overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}\, d\mu,$$

ce qui exprime le théorème ([54]).

Symétriquement, contentons-nous du résultat partiel suivant ([55]) :

Théorème 13. — *Pour $\bar{\alpha} \subset \Omega$, C_{Ω}^{α}, ou $\overline{C}_{\Omega}^{\alpha}$ vaut la borne inférieure des C_{Ω}^{ω} pour les ω ouverts contenant α*, c'est-à-dire la limite relative à l'ordonné filtrant des ω.

Prenons en effet dans Ω un compact K dont l'intérieur $\mathring{K}$ contient $\bar{\alpha}$ et dont la frontière $\overset{*}{K}$ est une surface assez régulière de R_τ; on pourra ne considérer que les ω contenus dans un ouvert ω_1 tel que $\bar{\alpha} \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \mathring{K}$. Alors sur $\Omega - \bar{\omega}_1$, $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\omega}$ est harmonique croissante et tend vers $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$. La convergence est localement uniforme; de même celle des dérivées premières dans R_τ; par suite le flux de $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\omega}$ à travers K a comme limite le flux de $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$, d'où la propriété annoncée pour les masses totales ou contenances.

De là résulte aussitôt la comparaison avec les capacités classiques, ce qui va donner d'importantes caractérisations de ces dernières ([56]).

Capacités classiques. — Théorème 14. — *Prenons $\Omega = R_\tau(\tau \geqq 3)$, α borné, $\mathcal{V}$ du type $\mathcal{W}$ fini continu.*

Si α est compact, $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$, égale aux autres extrémales, vaut le potentiel capacitaire classique de α (puisque, par exemple, elle est égale à 1 quasi-partout

---

([54]) D'ailleurs [*voir* Note ([39])] on peut trouver une *suite* croissante F_n (de telles F) telle que $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\Omega-F_n} \to \overline{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}^{\Omega-\alpha}$, donc aussi $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{F_n} \to \underline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$. C'est là un résultat obtenu par Vasilesco (*loc. cit.*) assez péniblement, dans des hypothèses moins générales (en particulier avec $\mathcal{V}$ borné); sa capacité-$\mathcal{V}$ est notre contenance-$\mathcal{V}$ intérieure.

([55]) Plus généralement on peut démontrer, grâce à un raisonnement encore inédit de H. Cartan (sur les ordonnés filtrants de potentiels) : *pour* $\bar{\alpha} \subset \Omega$ ($C\Omega$ non polaire) et $\mathcal{V}$ *finie continue*, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ ou $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{V}}^{\alpha}$ *vaut la borne inférieure des contenances-$\mathcal{V}$ des ouverts contenant α.*

([56]) Nous allons préciser les résultats de Monna (II), où les potentiels capacitaires ne sont pas donnés sous la forme du texte qui paraît s'imposer.

sur α et vaut sur $R_\tau - \alpha$ la fonction de Wiener pour o en $\mathcal{R}_\tau$ et 1 sur $\overset{\star}{\alpha}$); $C^\alpha_{R_\tau}$ *vaut donc la capacité classique de* α.

Si α *est borné quelconque,* $\underline{C}^\alpha_{R_\tau}$ *vaut* (d'après le théorème 11), *la capacité intérieure classique de* α; *c'est la masse totale de la distribution dont le potentiel est* $\overline{\mathcal{E}}^{R_\tau - \alpha}_{\mathcal{Q}}$ *et vaut le plus petit potentiel de masses* $\geqq 0$ *majorant* 1 *à peu près partout sur* α.

Enfin et surtout, on sait que $\mathcal{E}^{R_\tau-\alpha}_{\mathcal{Q}}$ ou $\underline{\mathcal{E}}^{R_\tau-\alpha}_{\mathcal{Q}}$ *est le plus petit potentiel de masses* $\geqq 0$ *majorant* 1 *quasi-partout sur* α; *de plus la masse totale correspondante* $C^\alpha_{R_\tau}$ ou $\overline{C}^\alpha_{R_\tau}$ *vaut* (d'après le théorème 13) *la capacité extérieure classique de* α.

22. Remarques sur le cas du plan. — Soit α un *compact* de R_2. Si α n'est pas polaire, on sait (Frostman) qu'il existe une distribution et une seule de la masse 1 sur α de sorte que le potentiel soit sur α quasi-partout égal à sa borne supérieure K_α dans R_2 [57].

Soit alors v le potentiel logarithmique d'une distribution $\mu \geqq 0$ de total Q; si v majore la constante A quasi-partout sur α, $A \leqq K_\alpha Q$ [58]; d'où résulte la décroissance de K_α en α.

A côté de la *capacité logarithmique* e^{-K_α}, on introduit, si K_α est > 0 (comme il arrive pour les parties compactes d'un $D_O^r \left(r < \frac{1}{2}\right)$ la *capacité de Wiener* $\Gamma_\alpha = \frac{1}{K_\alpha}$. On peut alors adapter comme suit le théorème 11 :

Théorème 15. — *Soit* Ω *un ouvert borné contenant le compact* F *de* R_2 *tel que* $K_F > 0$. *Pour un compact variable* α *de* F, *non polaire, le rapport* $\frac{\Gamma_\alpha}{C^\alpha_\Omega}$ *reste compris entre deux nombres finis* > 0 *fixes*.

---

(57) *Voir* avec un énoncé plus général sur le balayage dans le plan, une autre démonstration dans mon article du *Bull. Ac. Royale de Belgique*, 1938, p. 433. Voici pour l'existence, encore une démonstration que j'indique sommairement (et qui s'adapterait au balayage plus général) : on introduit

$$D_O^{R_1} \supset \alpha, \quad D_O^{R_2} \qquad (R_1 < R_2)$$

et l'on opère par la méthode alternée pour raccorder en la modifiant la fonction $\log \frac{R_1}{OM}$ dans $\Delta_O^{R_1}$ à une fonction surharmonique dans $D_O^{R_2}$, quasi-partout égale à 1 sur α, égale dans $D_O^{R_2} - \alpha$ à la fonction de Wiener correspondant à la valeur 1 sur $\overset{\star}{\alpha}$ et à une distribution convenable sur $\overset{\star}{D}{}_O^{R_2}$. On obtient ainsi une fonction surharmonique V dans R_2, valant 1 quasi-partont sur α, partout $\leqq 1$, harmonique hors α et valant au voisinage de l'infini $\log \frac{1}{OM} + v$ où v est harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_2$ dans $\overline{R_2}$. Alors, d'après un critère de (*A. N.*, n° **4**, corollaire **2** du théorème **4**), V vaut à une constante près un potentiel logarithmique de masses $\geqq 0$ sur α.

(58) De même si une distribution $\geqq 0$ de total Q ne charge que α et si son potentiel est $\leqq B$ sur α, alors $K_\alpha Q \leqq B$. Ce sont là des propositions analogues à *a* et *b* du n° **19**.

D'ailleurs Γ_α est définie comme nulle si α est polaire. Soit dans le compact F de $R_2(K_F > 0)$ une partie variable E telle que $\overline{E} \subset \mathring{F}$. Ses capacités classiques « intérieure » et extérieure » sont, comme on sait : Γ_E, borne supérieure des Γ_α pour les compacts $\alpha \subset E$, et respcctivement $\underline{\Gamma}_E$, borne supérieure des Γ_α pour les ouverts α de $\mathring{F}$, contenant E. Le théorème précédent montre que $\frac{\underline{\Gamma}_E}{\underline{C}_\Omega^E}, \frac{\overline{\Gamma}_E}{C_\Omega^E}$ restent compris entre deux nombres > 0 fixes quand E varie dans F en restant non intérieurement polaire, respectivement non polaire. De plus les numérateurs ne s'annulent qu'avec les dénominateurs correspondants, c'est-à-dire pour E intérieurement polaire, respectivement polaire.

Soulignons enfin qu'on *transpose aussitôt tous ces résultats au potentiel-h_Q* dans l'espace $\overline{R}_\tau - Q(\tau \geqq 2)$, où le point Q différent de $\mathcal{R}_\tau$ remplace $\mathcal{R}_2$; les démonstrations ici mentionnées [note ([57])] ou esquissées s'adaptent avec quelques modifications.

VI. — Quelques applications.

25. Critère d'effilement du type de Wiener. — Reportons-nous aux théorèmes 7 et 8 de (*B. S.* 2). On peut maintenant, en remplaçant le lemme 2 de (*B. S.* 2) relatif à des compacts par la propriété générale *a* du théorème 10, adapter les démonstrations de l'effilement pour fermés, *directement* au cas général. Explicitons rapidement l'essentiel.

Théorème 16. — *Considérons au voisinage du point* $O \neq \mathcal{R}_\tau$, *un ensemble quelconque* E *et l'intersection* e_n *avec l'ensemble* S_n *défini par*

$$s^n \leqq h(OM) \leqq s^{n-1} \quad (s > 1) \quad ([59]).$$

L'effilement de E *en* O *équivaut à la convergence de la série* $s^n C_\Omega^{e_n}$ ($\Omega \supset E$, $C\Omega$ non polaire) où l'on peut d'ailleurs évidemment remplacer cette contenance pour Ω arbitraire par la capacité classique extérieure même dans le cas plan.

D'abord, s'il y a convergence, on considérera la distribution $\nu_n = \mathcal{D}_{\Omega}^{e_n}$ relative à Ω. La réunion des ν_n à partir d'un certain rang a un potentiel-h ou un potentiel-G_Ω arbitrairement petit en O, mais le dernier majore 1 quasi-partout sur E assez près de O, d'où l'effilement de E.

Réciproquement si cet effilement a lieu, il existe une distribution $\mu \geqq 0$ dont le potentiel-G est fini en O, mais tend vers $+\infty$ quand $M \neq O$ tend vers O sur E. Extrémisons μ pour $\Omega - \bigcup_{p=1}^{\infty} e_{2p}$ c'est-à-dire balayons sur $E' = \bigcup_{p=1}^{\infty} e_{2p}$. Cela

([59]) Il est immédiat d'après la démonstration qui suit, que l'on peut dans cette définition de S_n remplacer h par $G_\Omega(O, M)$ et aussi, indépendamment, *supprimer* l'un des signes d'égalité.

donne une distribution μ'; son potentiel-G, minorant partout l'ancien, l'égale quasi-partout sur E' et tend donc vers $+\infty$ quand M de E' tend vers zéro hors d'un certain ensemble polaire. D'après le lemme 1 de (*B. S.* 2), la charge d'un $\bar{e}_{2p}$ a un potentiel-*h* ou G majorant quasi-partout sur e_{2p} un nombre $K > 0$ indépendant de p; d'où

$$\mu'(\bar{e}_{2p}) \geqq K C_\Omega^{e_{2p}}$$

et la convergence de la série $s^{2p} C_\Omega^{2p}$; de même avec $s^{2p+1} C_\Omega^{2p+1}$, d'où la convergence cherchée.

On passe d'ailleurs aussitôt au critère d'effilement *intérieur* en remplaçant la contenance par la contenance *intérieure*. On pourra aussi par un raisonnement de Kellog-Vasilesco obtenir la forme intégrale de ces critères; on peut même adapter au cas de l'effilement général la démonstration directe (de cette forme) donnée par Frostman pour les ensembles fermés [60].

Remarque. — L'étude de l'effilement à l'infini qui peut se ramener par inversion à une étude locale au voisinage d'un point $O \neq \mathcal{R}_\tau$ donne directement le *critère* simple suivant :

L'effilement en $\mathcal{R}_\tau (\tau \geqq 3)$ d'un ensemble E de R_τ équivaut à ce que (pour un $\Omega \supset \mathcal{R}_\tau$), $\delta \cap E$ soit de contenance arbitrairement petite pour un voisinage δ convenable de $\mathcal{R}_\tau$ (et l'on en déduit le même énoncé avec l'effilement intérieur et la contenance intérieure). Cela résulte aussitôt de la remarque du n° **9** et de l'allure de la fonction de Green à l'infini pour $\tau \geqq 3$.

24. Transformations continues en théorie du potentiel. — Reportons-nous aux Chapitres IV et V de (*J. M.*) pour nous débarrasser, dans les théorèmes B et C_2 sur la transformation continue, de la restriction qu'elle conserve les ouverts.

Théorème 17. — *Considérons dans* $\overline{R_\tau}$ *une transformation continue* $M \to M'$ *définie sur un compact* E *qu'elle applique sur le compact* E'; *on suppose que pour deux ouverts* Ω, Ω' (de complémentaires non polaires) *contenant respectivement* E *et* E', $G_\Omega(M, P) \leqq G_{\Omega'}(M', P')$ (cette condition signifie pour $\Omega = \Omega' = R_\tau$, $\tau \geqq 3$, que l'application minore les distances).

A une distribution de masses $\mu \geqq 0$ *sur* E *correspond* μ' *sur* E' [61]. *Alors* on

---

[60] *Voir* historique et références dans (*J. M.*) [*voir* note [10]]. Rectifions à cette occasion, dans ce mémoire, la *remarque* finale du paragraphe III (p. 330) tronquée dans l'impression et qui doit se lire comme suit : « On peut encore dans (α) et (α_1) supprimer l'un des signes d'égalité. On peut aussi supprimer le signe d'égalité dans (β) et (β_1) et cela entraîne aussitôt le résultat de la fin du n° **7** ».

[61] μ' est définie par $\mu'(e) = \mu(\bar{e}^1)$ (*e* ensemble borélien contenu dans E', $\bar{e}^1$ image réciproque).

voit, comme dans le théorème B, *que le potentiel-*$G_{\Omega'}$ *de* μ' *en* M′ *majore le potentiel* G_Ω *de* μ *en* M (d'où la majoration de l'intégrale d'énergie). *Il en résulte* la conservation de la polarité, puis par le théorème 10 (a) que

$$C_\Omega^\alpha \geq C_{\Omega'}^{\alpha'}.$$

D'autre part améliorons le théorème C_2 (*J. M.*).

THÉORÈME 18. — *Considérons dans* R_τ *une transformation continue locale* M → M′ *d'un voisinage du point* O telle que

$$\frac{M'_1 M'_2}{M_1 M_2} < k_1, \qquad \frac{O'M'}{OM} > k_2 \qquad (k_1, k_2 \text{ finis} > 0 \text{ fixés}).$$

Alors un ensemble effilé en O *devient un ensemble effilé en* O′.

Il n'est pas besoin d'utiliser le critère du théorème 16 et la contenance ou capacité. Si l'on prend au voisinage de O une distribution de masses ≥ 0 de potentiel-G ou h fini en O mais tendant vers $+\infty$ quand $M \neq 0$ tend vers O sur E, ces propriétés sont conservées par la transformation.

Remarque. — Si dans ces théorèmes, la transformation est *biunivoque*, il est immédiat, comme conséquence, que dans le premier a lieu l'inégalité entre contenances intérieures et dans le second la conservation de l'effilement intérieur.