JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 22 (1943), p. 71-83.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22__71_0>

La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien ;

PAR GASTON JULIA.

INTRODUCTION.

L'étude de la représentation spectrale des opérateurs linéaires auto-adjoints a permis d'étendre aux opérateurs non bornés de ce type les principales propriétés des opérateurs bornés. Dans ce domaine il faut tout d'abord citer les travaux fondamentaux de Carleman « sur les équations intégrales singulières », dont les résultats ont été repris par von Neumann sous la forme géométrique directe donnée par Erhard Schmidt dans son Mémoire bien connu du *Circolo di Palermo*. Von Neumann a ensuite montré les difficultés que pouvait soulever la représentation de ces opérateurs par des matrices et il a enfin montré comment les opérateurs fermés les plus généraux se représentent comme produit d'un opérateur auto-adjoint par un opérateur isométrique borné; en particulier il a traité des opérateurs normaux hypermaximaux. Par ailleurs, F. Riesz a étendu aux opérateurs auto-adjoints non bornés le calcul opérationnel, et ses élèves, en particulier Lorch, ont essayé d'étendre la représentation spectrale en intégrale de Stieltjes, par l'introduction de fonctions d'ensembles linéaires totalement additives substituées aux fonctions d'intervalle. Ceci a été complètement réalisé dans les dix dernières années par les mathématiciens nippons, dans une série de travaux remarquables, dont les derniers en date, à ma connaissance, ceux de Hidegoro Nakano, présentent la théorie spectrale des opérateurs normaux fermés hypermaximaux sous une forme à peu près définitive

Il faut remarquer cependant que dans tous ces travaux un rôle essentiel est joué par la propriété hermitienne de l'opérateur, ou la propriété parente lorsqu'il est normal, et la représentation spectrale ne peut plus s'effectuer directement lorsque ces propriétés disparaissent. Par ailleurs les domaines d'existence y sont toujours définis par la convergence d'une intégrale de Stieltjes, ce qui ne renseigne pas sur leur structure géométrique.

Cela m'a conduit à penser que deux problèmes fondamentaux restaient encore à étudier :

1° Caractérisation des domaines d'existence des opérateurs linéaires non bornés;

2° Représentation de ces opérateurs dans tout leur domaine d'existence, par des moyens analytiques simples s'appliquant aussi bien aux opérateurs auto-adjoints normaux qu'aux autres, puisque la représentation par matrices se révèle insuffisante.

Dans ces deux préoccupations, on reconnaîtra sans peine les préoccupations de quelqu'un qui, dans le cours de son existence mathématique, a beaucoup étudié les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables, lesquelles sont, à l'heure actuelle un des modèles les plus achevés de la recherche mathématique. A la lumière de ces préoccupations, j'ai étudié la théorie des opérateurs, et il me semble que les résultats déjà obtenus, s'ils ne donnent pas la solution complète des problèmes 1° et 2°, sont suffisamment intéressants pour faire entrevoir une perspective d'arriver dans ces deux problèmes à des solutions satisfaisantes. Je voudrais exposer brièvement quelques-uns de ces résultats en insistant surtout sur la marche des idées suivies, et en signalant, chemin faisant, les questions qui se posent, et dont beaucoup restent à résoudre.

Quelques idées directrices se dégagent de cette étude et je les place au début pour qu'elles aident à comprendre les faits que je vais exposer :

1° Les opérateurs bornés jouent ici le même rôle que les fonctions entières à divers égards : *a*, domaine d'existence identique à l'espace; *b*, convergence, dans tout l'espace, de la représentation analytique; *c*, uniformité de l'opérateur comme de la fonction.

2° Les opérateurs non bornés jouent à divers égards le même rôle que les séries entières à rayon de convergence fini : *a*, domaine d'existence plus petit que l'espace; *b*, convergence de la représentation analytique donnée dans un noyau que l'on étend par prolongement convenable; *c*, analogie des opérateurs fermés avec les fonctions uniformes et des opérateurs plus généraux avec les fonctions multiformes.

3° Rôle des méthodes de sommabilité pour prolonger les représentations dans les noyaux à des domaines plus étendus, et pour former des représentations valables dans ces domaines plus étendus.

4° Représentation paramétrique des opérateurs non bornés à l'aide d'opérateurs bornés, comme on uniformise les fonctions analytiques multiformes par des représentations paramétriques à l'aide de fonctions uniformes.

1. Une première observation qu'on est conduit à faire, c'est le rôle que joue un lemme analogue au lemme d'Osgood relatif aux suites de fonctions analytiques; il permet la démonstration de plusieurs théorèmes fondamentaux de la

théorie des opérateurs bornés ; il permet aussi des extensions utiles à des suites plus générales, des suites d'opérateurs.

Rappelons ce lemme d'Osgood dans le cas d'une variable : Si une suite de fonctions $f_n(z)$ holomorphes dans un domaine D, converge en tout point du domaine, il existe un domaine D_0, intérieur à D, où la suite est uniformément bornée : $|f_n(z)| < M$, pour $z \in D_0$ quel que soit n. [Dans D_0, la suite converge uniformément vers une fonction analytique.]

La démonstration de ce lemme n'utilise en fait que deux propriétés : 1° la convergence des f_n en tout point de D; 2° la semi-continuité inférieure du module d'une fonction analytique en tout point d'holomorphie. Par conséquent le lemme peut s'étendre : 1° à toute suite de fonctionnelles convergeant dans un domaine borné de l'espace hilbertien $\mathcal{H}$, lorsque ces fonctionnelles sont semi-continues inférieurement; 2° à toute suite d'opérateurs convergeant dans un tel domaine, lorsque ces opérateurs sont continus, donc bornés.

C'est précisément le cas du théorème de Banach pour une suite de fonctionnelles $f_n(X) = (A_n, X)$, convergente dans tout $\mathcal{H}$, d'où l'on conclut la convergence faible des vecteurs A_n; c'est le cas du théorème de Landau sur la convergence des $\sum^n a_k x_k$ pour tout X de $\mathcal{H}$, et les a_k représentent alors un vecteur A, ($\Sigma |a_k|^2$ converge); c'est le cas des suites de fonctionnelles $S_n(X) = \sum_1^n |(A_k, X)|^2$ convergeant dans tout $\mathcal{H}$ et l'on en déduit le théorème d'Hellinger-Tœplitz sur les opérateurs définis par $y_k = (A_k, X)$, la série $\sum_1^\infty |(A_k, X)|^2$ convergeant dans tout $\mathcal{H}$, et l'opérateur $Y = \sum^\infty (A_k, X) e_k$ est alors borné.

Nous allons voir comment ce principe s'applique aux suites d'opérateurs.

2. Dans l'espace euclidien à n dimensions, un opérateur linéaire A est défini par la donnée des $A_n = Ae_n$, les e_n formant une base de l'espace, en particulier un système orthonormal complet, et si $X = \sum_1^n x_k e_k$, on a $AX = \sum^n x_k A_k$. Passant à l'espace hilbertien $\mathcal{H}$, si D_A domaine d'existence de l'opérateur A est partout dense dans $\mathcal{H}$, il contient une infinité de systèmes ONC (orthonormaux complets). Soit $\{e_k\}$ l'un d'eux et $A_k = Ae_k$ les vecteurs transformés par A. Dans la variété linéaire $\{e_1, e_2, \ldots\}$ des $X = \sum_1^n x_k e_k$, $(n = 1, 2, \ldots)$, partout dense dans $\mathcal{H}$, on a $AX = \sum^n x_k A_k$. *Si* A *est fermé*, il est clair qu'en tout

point X où $\sum_1^\infty x_k A_k$ converge fortement, $\sum_1^n x_k e_k$ et $\sum_1^n x_k A_k$ convergeant fortement vers X et vers Y, X sera dans D_A et $Y = AX$. Cela conduit à étudier, pour tout système $\{A_k\}$: 1° le domaine d_A *ou noyau de convergence forte* de $\sum_1^\infty x_k A_k$; 2° l'opérateur linéaire AX défini par $AX = \sum_1^\infty x_k A_k$ dans d_A. C'est l'analogue de ce qu'on fait en définissant une fonction analytique par interpolation, ou plutôt, selon Weierstrass et Méray, un élément de fonction analytique par une série $\Sigma a_k (x - x_0)^k$ en se donnant la suite des $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Il existe alors un noyau de convergence de cette série (le cercle de convergence) dans lequel $\Sigma a_k (x - x_0)^k$ définit un élément de fonction analytique, qu'on prolonge ensuite par les procédés connus. On sait d'ailleurs, par Cauchy, que toute fonction analytique autour de x_0 est représentable autour de x_0 par une telle série.

On pourrait évidemment définir aussi, pour la série $\Sigma x_k A_k$, un noyau de convergence faible (contenant d_A) et un noyau de convergence uniforme (contenu dans d_A), par analogie avec les séries de Dirichlet.

Une première question se pose alors, comme pour les séries entières.

Sous quelles conditions la série $\sum_1^\infty x_k A_k$ *converge-t-elle fortement dans tout l'espace* $\mathcal{H}$?

Il est clair que, si A est borné, $\Sigma x_k A_k$ converge fortement dans tout $\mathcal{H}$ avec $\Sigma x_k e_k$. *La réciproque est vraie* comme on peut le voir (JULIA, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 5 mai 1941).

1° Soit en appliquant à la suite des $\sum_1^n x_k A_k$ le principe du paragraphe 1, les termes de la suite étant des fonctions vectorielles de $X = \Sigma x_k e_k$ continues dans tout $\mathcal{H}$; elles sont alors bornées dans $\|X\| \leqq r$, c'est-à-dire $\left\| \sum_1^n x_k A_k \right\| \leqq M(r)$ quel que soit n, par conséquent $\left\| \sum_1^\infty x_k A_k \right\| \leqq M(r)$ et l'opérateur A défini par $Y = AX = \sum_1^\infty x_k A_k$ est linéaire et borné;

2° Soit en considérant $(AX, Z) = \left(\sum_1^\infty x_k A_k, Z \right) = \sum_1^\infty \overline{x_k}(A_k, Z)$, convergente pour tout $X = \sum^\infty x_k e_k$ de $\mathcal{H}$, d'où résulte la convergence de $\Sigma |(A_k, Z)|^2$

pour tout Z, ce qui montre que l'opérateur défini par $BX = \sum_{1}^{\infty}(A_k, X)e_k$ est linéaire borné. Or B n'est autre que l'adjoint A^* de l'opérateur A défini dans tout $\mathcal{H}$ par $Y = AX = \Sigma x_k A_k$.

Ce théorème fondamental établit un parallélisme entre les opérateurs bornés et les fonctions entières, pour lesquelles $\Sigma a_k x^k$ converge dans tout le plan.

La condition cherchée est donc la convergence dans tout $\mathcal{H}$ de la série numérique $\Sigma |(A_k, X)|^2$.

On peut donner une condition *intrinsèque* portant sur les seuls A_k, comme suit :

1° *Orthonormaliser*, selon E. Schmidt, la suite des A_k,

$$A_k = \alpha_{k1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{kk}\varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

2° Envisager la matrice *récurrente* $\|\alpha_{ik}\|$, ($\alpha_{ik} = 0$ pour $k > i$), que je propose d'appeler « *matrice d'E. Schmidt* » ;

3° l'opérateur défini par $\Sigma x_k A_k$ sera borné si et seulement si cette matrice est *bornée*. Cette matrice est la transposée de la matrice de A dans le système orthonormal $\{\varepsilon_k\}$. Ce système est complet ou incomplet selon que la variété $[A_1, A_2, \ldots]$ remplit $\mathcal{H}$ ou non; on ne peut le reconnaître par des calculs intérieurs au seul système des $\{A_k\}$. S'il est complet, A se met sous la forme $A = \mathfrak{A}U$, U unitaire, $Ue_n = \varepsilon_n$, et $\mathfrak{A}$ borné dans $\mathcal{H}$, défini par $\mathfrak{A}\varepsilon_k = A_k$. $\mathfrak{A}$ est un opérateur fondamental et *intrinsèque* de la suite A_k. Si le système $\{\varepsilon_k\}$ est incomplet, on pose encore $\varepsilon_k = Ue_k$ et $\mathfrak{A}\varepsilon_k = A_k$, ce qui donne $A = \mathfrak{A}U$, mais U sera unitaire à gauche seulement

$$\{U^*U = 1,\ UU^* = P_V,\ V = [A_1, A_2, \ldots] = [\Delta_A]\}.$$

Plus particulièrement, la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma x_k A_k$ converge fortement et *uniformément dans tout domaine borné de $\mathcal{H}$* est que l'opérateur A défini par $Y = AX = \Sigma x_k A_k$ soit *complètement continu*. Ceci arrive en particulier si la série $\Sigma \|A_k\|^2$ converge, et l'on retrouve la propriété connue des opérateurs complètement continus dont la matrice $\|a_{ik}\|$ est telle que $\Sigma \|a_{ik}\|^2$ converge.

Si maintenant on considère la série $\Sigma x_k A_k$, où $X = \Sigma x_k e_k$ est un point arbitraire de $\mathcal{H}$, $\{A_k\}$ une suite *d'opérateurs linéaires bornés*, on verra que si la série $\Sigma x_k A_k(Y)$ converge fortement pour tout X et tout Y de $\mathcal{H}$, sa somme est un *opérateur bilinéaire borné de* X *et* Y, $\|\Sigma x_k A_k(Y)\| \leq M \|X\| \|Y\|$.

Sous d'autres formes, la convergence, dans tout $\mathcal{H}$, de la série $\Sigma |A_n(X, Y)|^2$, où $A_n(X, Y)$ est une forme bilinéaire bornée de X et Y, entraîne que cette série est bornée : c'est-à-dire

$$\Sigma |A_n(X, Y)|^2 \leqq M^2 \| X \|^2 \| Y \|^2;$$

ceci étend le théorème d'Hellinger-Tœplitz relatif aux formes linéaires (A_n, X) (*voir* Julia, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 23 juin 1941).

3. Si l'on essaie de pousser plus loin l'analogie entre opérateurs bornés et fonctions entières, que révèle le paragraphe précédent, on est conduit à rechercher ce qui, pour les opérateurs bornés, correspond à la décomposition de Weierstrass des fonctions entières en *produit infini de facteurs primaires*. Voici comment on peut procéder, de deux points de vue différents.

A. On peut ne pas attacher d'importance spéciale aux zéros de l'opérateur A et chercher une décomposition de A en produits de facteurs, qui soient des opérateurs d'un type pouvant être étudié à fond et représenté simplement. Le facteur az est la plus simple des fonctions de z; il a un seul zéro; hors $z = 0$ il n'altère z que par un facteur constant; on engendre la fonction par le produit des binomes successifs correspondant aux différents zéros. On songe alors tout de suite à un opérateur laissant invariants presque tous les points de $\mathcal{H}$, et n'altérant essentiellement *qu'une direction de* $\mathcal{H}$. Pour préciser cette idée un peu vague, on est conduit d'abord à effectuer la décomposition préliminaire $A = \mathfrak{A} U$ du paragraphe 2, U étant unitaire ou unitaire à gauche dans $\mathcal{H}$, $\mathfrak{A}$ étant borné et défini dans $[\Delta_A]$ qui est $\mathcal{H}$ ou $\subset \mathcal{H}$. Bornons-nous à $[\Delta_A] = \mathcal{H}$.

1° $\mathfrak{A}$ étant défini par $\mathfrak{A}\varepsilon_n = A_n$, on l'engendre par les opérateurs successifs $\mathfrak{A}_k$ définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{A}_k \varepsilon_k = A_k & \\ \mathfrak{A}_k \varepsilon_i = \varepsilon_i, & \text{pour } i \neq k \end{array} \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

$\mathfrak{A}_k$ transforme ε_k en A_k, laisse invariant tout vecteur des variétés $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}]$, $[\varepsilon_{k+1}, \ldots]$, donc laisse invariants $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, en sorte que le produit $\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_{k-1} \ldots \mathfrak{A}_1$ laisse invariants $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots$ et transforme ε_i en A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2° On voit alors aisément que $\mathfrak{A}_p \mathfrak{A}_{p-1} \ldots \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}^{(p)} + 1 - \mathcal{E}_p$, où $\mathcal{E}_p$ est le projecteur $P_{[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p]}$ et $\mathfrak{A}^{(p)} = \mathcal{E}_p \mathfrak{A} \mathcal{E}_p$ est le $p^{\text{ième}}$ réduit d'Hilbert; donc, pour tout vecteur ξ de $\mathcal{H}$, le produit infini $\mathfrak{A}_p \ldots \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \xi$ converge fortement vers $\mathfrak{A}\xi$.

[*Voir*, Julia, *Journ. de Math. pures et appliquées*, 1941, pour les propriétés des opérateurs $\mathfrak{A}_k$: spectre ponctuel réduit à 1 et α_{kk}, (si $A_k = \alpha_{k1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{kk}\varepsilon_k$), borne exacte calculable aisément.]

3° Lorsque $\Sigma x_k A_k$ ne converge pas fortement dans tout $\mathcal{H}$, $\mathfrak{A}$ et A ne sont pas bornés, mais les considérations précédentes restent valables. *Le produit* *infini* ... $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1 UX$ *converge fortement dans le même noyau* d_A *que la série* $\Sigma x_k A_k$ et sa limite est égale à la somme de cette série; par le réduit d'Hilbert $\mathfrak{A}^{(p)}UX$ on obtient même noyau de convergence forte et même limite, ce qui relie la méthode actuelle à celle des matrices.

4° Lorsque les A_k ne dépendent que d'un nombre fini d'entre eux, les conclusions sont valables, mais le cas se traite directement de façon très simple.

B. Mais, à un autre point de vue, on peut avoir besoin de mettre en évidence les zéros de A; on peut alors songer à une décomposition analogue à celle du théorème classique de Weierstrass (Vorbereitungssatz), relatif aux fonctions holomorphes de plusieurs variables, produit d'un *polynome* (à coefficients holomorphes), possédant les mêmes zéros que la fonction considérée, par une fonction holomorphe ne s'annulant plus au voisinage du point considéré, c'est-à-dire bloquage des zéros dans une fonction plus simple. On est alors conduit à une décomposition des opérateurs bornés qui simplifie la classification de Tœplitz (JULIA, *C. R. Acad. Sc.*, 7 juillet 1941).

Première classe. — $n(AA^*) > 0$, $n(A^*A) > 0$; $A = \mathfrak{A}U$, U unitaire, $\mathfrak{A}$ première classe dans $\mathcal{H}$ défini intrinsèquement par $A_n = \mathfrak{A}\varepsilon_n$.

Deuxième classe. — $n(AA^*) > 0$, $n(A^*A) = 0$. Les zéros de A engendrent V variété linéaire fermée; A^* n'a pas de zéro hors o; $\Delta_A = \mathcal{H}$, $\Delta_{A^*} = \mathcal{H} - V$. On prend pour base de $\mathcal{H}$ une base de V, (e'_n), et une base de $\mathcal{H} - V, (e''_n)$. Alors $A'_n = 0$; les $A''_n = Ae''_n$ sont indépendants; par les $A''_n = \alpha_{n1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{nn}\varepsilon_n$, on sous-tend $\mathcal{H}$ et l'on définit $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{A}\varepsilon_n = A''_n$. $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^*$ *sont de première classe dans* $\mathcal{H}$. $A = \mathfrak{A}U_1U_2$; U_2 *opérateur canonique de deuxième classe bloquant les zéros de* A, tel que $U_2(V) = 0$, $U_2(\mathcal{H} - V) = \mathcal{H}$, $U_2U_2^* = 1 = P_{\Delta_A}$, $U_2^*U_2 = P_{\mathcal{H}-V} = P_{\Delta_{A^*}} < 1$; U_2 transforme les (e''_n) en l'ensemble des (e'_n) et des (e''_n); U_1 est unitaire.

Troisième classe. — $n(AA^*) = 0$, $n(A^*A) > 0$, corrélative de la deuxième. A sans zéros hors o, A^* a pour zéros une variété fermée $\mathcal{V}$ complémentaire de $\mathcal{H} - \mathcal{V} = \Delta_A$, $\Delta_{A^*} = \mathcal{H}$. Les $A_n = Ae_n = \alpha_{n1}\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_{n1}\varepsilon_n$ sont indépendants, le système $\{\varepsilon_n\}$, base de $\mathcal{H} - \mathcal{V}$ est incomplet. Par $A_n = \mathfrak{A}\varepsilon_n$ on définit $\mathfrak{A}$ de *première classe*, ainsi que $\mathfrak{A}^*$, *dans* $\mathcal{H} - \mathcal{V}$; $A = \mathfrak{A}U_3U_1$, U_1 est unitaire dans $\mathcal{H}$, U_3 *est canonique de troisième classe adapté aux zéros de* A^* *ou à* Δ_A,

$$U_3^*(\mathcal{V}) = 0, \qquad U_3^*(\mathcal{H} - \mathcal{V}) = \mathcal{H},$$

U_3^* est du type de deuxième classe envisagé précédemment,

$$U_3^*U_3 = 1 = P_{\Delta_{A^*}}, \qquad U_3U_3^* = P_{\mathcal{H}-\mathcal{V}} = P_{\Delta_A} < 1.$$

Quatrième classe. — $n(AA^*) = n(A^*A) = 0$. Plusieurs types :

a. A *et* A^* *sans zéro hors* o, Δ_A et Δ_{A^*} non fermés, $[\Delta_A] = [\Delta_{A^*}] = \mathcal{H}$. $A = \mathfrak{A}U$, U unitaire, $\mathfrak{A}$ même type que A, défini intrinsèquement par $A_n = \mathfrak{A}\varepsilon_n$. Le premier exemple a été donné par Hilbert.

b. A *admet pour zéros la variété fermée* V, A^* *sans zéros hors* o; $[\Delta_A] = \mathcal{H}$, $[\Delta_{A^*}] = \mathcal{H} - V$, Δ_A et Δ_{A^*} non fermés. On a $A = \mathfrak{A}U_1U_2$, $\mathfrak{A}$ *quatrième classe type a* dans $\mathcal{H}$, U_1 unitaire, U_2 canonique de deuxième classe (comme précédemment) bloquant les zéros de A.

c. A^* *admet pour zéros la variété fermée* $\mathcal{V}$, A *sans zéros hors* o, $[\Delta_A] = \mathcal{H} - \mathcal{V}$, $[\Delta_{A^*}] = \mathcal{H}$, Δ_A et Δ_{A^*} non fermés.

$A = \mathfrak{A}U_3U_1$, $\mathfrak{A}$ quatrième classe, type *a*, *dans* $\mathcal{H} - \mathcal{V}$, U_1 unitaire, U_3 canonique de troisième classe (comme précédemment) adapté à Δ_A (ou aux zéros de A^*).

d. A *admet pour zéros la variété* V, A^* *admet pour zéros la variété* $\mathcal{V}$, deux sous-cas : d_1 ; Δ_A et Δ_{A^*} sont fermés; $\Delta_A = \mathcal{H} - \mathcal{V}$, $\Delta_{A^*} = \mathcal{H} - V$, $A = \mathfrak{A}U_3U_2$, $\mathfrak{A}$ *première classe dans* $\mathcal{H} - \mathcal{V}$, U_2 deuxième classe, U_3 troisième classe (voir précédemment), eux-mêmes décomposables en produits d'un opérateur unitaire et d'un opérateur canonique de deuxième ou troisième classe adapté aux zéros de A ou de A^*. Dans ce type sont tous les projecteurs, d_2; ni Δ_A, ni Δ_{A^*} ne sont fermés, $[\Delta_A] = \mathcal{H} - \mathcal{V}$, $[\Delta_{A^*}] = \mathcal{H} - V$, $A = \mathfrak{A}U_3U_2$ comme en d_1, *mais* $\mathfrak{A}$ *est de quatrième classe, type a, dans* $\mathcal{H} - \mathcal{V}$.

En conclusion, les quatre classes de Tœplitz se réduisent à deux classes essentielles, *la première et la quatrième* (*type a*). Tout opérateur borné est le produit d'un opérateur de première ou de quatrième classe par un ou plusieurs opérateurs *canoniques* de deuxième ou troisième classe et par un ou plusieurs opérateurs unitaires (première classe). Les hermitiens sont de première ou quatrième classe (type *a* ou *d*).

4. Le prolongement. — Les faits exposés aux paragraphes 2 et 3 établissent l'analogie que j'ai signalée entre fonctions entières et opérateurs bornés.

Si l'on donne maintenant une suite de vecteurs A_n tels que $\sum_1^\infty |(A_n, X)|^2$ ne converge pas pour tout X de $\mathcal{H}$, on peut définir deux opérateurs linéaires distincts non bornés, selon qu'on opère par contrevariance ou par covariance.

1° Considérons l'opérateur A défini par $Y = AX = \Sigma x_k A_k$, dans le noyau d_A où converge fortement la série $\Sigma x_k A_k$. A est linéaire et d_A contient la variété linéaire *non fermée*, partout dense dans $\mathcal{H}$, $\mathfrak{M} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ engendrée par les $\sum_1^n \lambda_k e_k$, ($n = 1, 2, \ldots$, les λ_k complexes quelconques); d'autre part, en considérant la majorante $\Sigma |x_k| \|A_k\|$, il est clair que si, par exemple,

$$|x_k| \leqq \min\left[\frac{1}{K^{1+\varepsilon}}, \frac{1}{K^{1+\varepsilon}\|A_k\|}\right],$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, le vecteur $X = \Sigma x_k e_k$ correspondant de $\mathcal{H}$ appartient au noyau d_A, lequel ne se réduit donc pas à la variété $\mathfrak{M} = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Il sera intéressant d'étudier la structure de d_A, et en particulier d'essayer de le définir par la propriété de convergence d'une série numérique, comme au 2°.

2° Considérons l'opérateur B défini par $Y = BX = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k, X)e_k$ dans le domaine D_B où $\sum_1^{\infty} |(A_k, X)|^2$ converge. On a, pour tout X de d_A et tout Y de D_B,

$$(Y, AX) = (Y, \Sigma x_k A_k) = \Sigma x_k (Y, A_k) = \Sigma(\overline{A_k, Y})x_k = (BY, X),$$

ce qui prouve que B et A sont adjoints. Il serait intéressant d'avoir des renseignements sur la structure du domaine D_B où $\Sigma |(A_k, Y)|^2$ converge.

A étant défini dans d_A partout dense dans $\mathcal{H}$, il existe une infinité de systèmes ONC appartenant à d_A. Soit $\{\varepsilon_n\}$ l'un d'eux, et soient $\mathfrak{A}_n = A\varepsilon_n$ les transformés des ε_n par l'opérateur A qu'on vient de définir. Si l'on veut essayer de prolonger A hors de d_A, voici quelles seront les principales questions à résoudre.

X de $\mathcal{H}$ étant $= \sum_1^{\infty} \xi_k \varepsilon_k$, considérons le domaine $d_{\mathfrak{A}}$ de convergence forte de $\sum_1^{\infty} \xi_k \mathfrak{A}_k$; il contient tous les ε_n;

1° contient-il tous les e_n?

2° L'opérateur $\mathfrak{A}X$ défini par $Y = \mathfrak{A}X = \sum_1^{\infty} \xi_k \mathfrak{A}_k$ coïncide-t-il avec A en tous les points communs à d_A et à $d_{\mathfrak{A}}$, en particulier en tous les points e_n appartenant à $d_{\mathfrak{A}}$?

3° Le domaine $d_{\mathfrak{A}}$ déborde-t-il d_A?

Toutes ces questions se simplifient *lorsqu'on sait* à priori *que* A *initial est fermé, car il est uniforme;* mais en général on ne sait rien de tel, et il est probable que les propriétés précédentes ne se réalisent que pour des classes particulières d'opérateurs. *A priori*, on peut s'attendre à ce que la valeur $A_n = Ae_n$, fournie par A en e_n, soit différente de la valeur $\mathfrak{A}e_n$ fournie par $\mathfrak{A}$, en sorte que A et $\mathfrak{A}$, coïncidant sur les ε_n pourraient différer ailleurs, ce qui impliquerait une multiformité compliquée des opérateurs les plus généraux définis par le précédent. Une telle multiformité n'aurait rien de surprenant si l'on songe que, par intégration de fonctions uniformes quasi analytiques [1] de Borel, j'ai pu trouver des fonctions multiformes dont l'ensemble des valeurs en un point à la puissance du continu (JULIA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 6 février 1922).

La recherche précédente mérite donc d'être poursuivie. Pour la simplifier, on peut astreindre les ε_n à rester dans $\mathcal{M}$, qui jouera le rôle d'un *intérieur* pour d_A [comme l'intérieur du cercle de convergence pour la série $\Sigma a_k(x-a)^k$]. $\mathcal{M}$ étant partout dense dans $\mathcal{H}$, cela est possible d'une infinité de façons. Considérons alors la variété $\mathfrak{M} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots\}$ engendrée par tous les $\sum_1^n \xi_i\varepsilon_i$, $(i=1, 2, \ldots, \infty)$. Elle est contenue dans $\mathcal{M} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$.

Soit X un point quelconque de $\mathfrak{M}$; on peut écrire $X = \sum_1^n \xi_i\varepsilon_i = \sum_1^p x_k e_k$, et l'on voit aisément que la valeur $\mathfrak{A}X = \sum_1^n \xi_i\mathfrak{A}_i$ est égale à $AX = \sum_1^p x_k A_k$ [comme il arrive pour la série $\Sigma b_k(x-b)^k$, relative à $f(x)$, en tout point x du cercle $|x-b|<\rho$ intérieur au cercle de convergence $|x-a|<r$ de la série $\Sigma a_k(x-a)^k$ relative à la même $f(x)$].

Mentionnons encore, dans les conditions présentes, l'analogue du célèbre théorème d'Abel relatif aux points de la circonférence du cercle de convergence où la série $\Sigma a_k(x-a)^k$ converge. En tout point $X = \sum_1^\infty x_k e_k$ de d_A, $\sum_1^\infty x_k A_k$, valeur de AX, est en effet la limite de $\sum_1^p x_k A_k$, qui est la valeur de AX_p en un point $X_p = \sum_1^p x_k e_k$ de $\mathcal{M}$, (donc intérieur à d_A), lorsque, pour $p=\infty$, tend vers le point $X = \sum_1^\infty x_k e_k$.

Je me bornerai ici à signaler toutes ces questions.

Pour les résoudre, la technique actuelle des opérateurs est insuffisante. Il nous manque, notamment, une majorante aussi souple que la majorante de

(1) Le fait que les domaines d'existence des opérateurs non bornés ne contiennent aucune sphère laisse présumer qu'ils sont assimilables aux domaines C où Borel a défini ses fonctions quasi analytiques, et que certains points de la technique de Borel pour ces fonctions pourraient être étendus aux opérateurs non bornés. J'y reviendrai ailleurs.

Cauchy $\left[\dfrac{M}{1-\dfrac{x-a}{R}}\right]$, le lemme de Cauchy-Schwarz étant très insuffisant, car il ne tient pas compte de la variation d'orientation des A_n. C'est dans ce sens, il me semble, qu'il faudra d'abord diriger l'effort; j'ai d'ailleurs obtenu déjà quelques résultats fragmentaires que je publierai ultérieurement; mais de nombreuses recherches sont désirables.

5. Un autre point de vue selon lequel on peut prolonger A hors de d_A est l'emploi des *méthodes de sommabilité des* séries, en les généralisant aux séries vectorielles $\Sigma x_k A_k$ que nous envisageons. On sait que ces méthodes ont conduit à des théorèmes ergodiques intéressants, ainsi qu'à l'éclaircissement de la convergence faible. Comme je l'ai fait remarquer au paragraphe 4, les questions à résoudre se simplifient pour les opérateurs linéaires *fermés*, qui, à notre point de vue, sont *uniformes*. J'ai donc pensé que l'étude préliminaire de ces opérateurs fermés pourrait, dans ces conditions de prolongement, servir à éprouver la valeur des idées directrices exposées ici. Les résultats que j'ai obtenus dans deux voies différentes m'ont confirmé dans la valeur de ces idées et dans l'utilité qu'il y a à étudier les opérateurs fermés avant les autres.

En premier lieu, parmi les procédés de prolongement des séries entières, le plus simple est, comme on sait, *l'ultraconvergence* (Überkonvergenz). Elle consiste à ne choisir dans $\sum^{\infty} a_k x^k$ que certaines sommes partielles S_{n_i}, (n_i croissant $\to\infty$); il arrive que S_{n_i} converge hors du cercle de convergence, vers la fonction analytique $f(x)$ représentée par la série dans le cercle. Autrement dit, le *groupement convenable des termes* de $\Sigma a_k x^k$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k x^k,$$

donne une série pouvant converger vers $f(x)$ hors du cercle.

Ici nous considérerons un opérateur *fermé* A, à domaine D_A partout dense dans $\mathcal{H}$. La série $\sum^{\infty} x_k A_k$ diverge hors de d_A; mais est-il possible de grouper les $\{e_n\}$ par familles orthogonales $\{e_k^i\}$, ($i=1, 2, \ldots$), chacune pouvant être infinie ($k=1, 2, \ldots$), de façon que, X étant mis sous la forme

$$X=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^i e_k^i, \qquad x_k^i=(e_k^i, X),$$

on ait

$$AX=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^i A_k^i.$$

avec $A_k = Ae^i_k$, *la série double convergeant fortement dans tout le domaine d'existence* D_A *de* A ?

C'est ce que j'ai pu en effet démontrer (JULIA, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 23 mars 1942) en utilisant la représentation de tout A fermé par $A = BH$, H auto-adjoint $(H = \sqrt{A^* A})$ dans D_A ($D_A = D_H$), B borné isométrique dans Δ_H. (*voir* travaux récents de von Neumann, Riesz et Lorch, dans *Annals of Math.* et *Trans. of the Amer. Math. Soc.*). On peut choisir, d'une infinité de manières, des variétés orthogonales linéaires fermées $\mathfrak{M}^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *dont l'ensemble sous tend* $\mathcal{H}$, dans chacune desquelles H est auto-adjoint, borné, H conserve chaque $\mathfrak{M}^i$. On a

$$X = \sum X^i, \qquad X^i \in \mathfrak{M}^i \qquad \text{et} \qquad HX = \sum HX^i,$$

le domaine $D_A = D_H$ étant celui de la convergence de $\Sigma \| HX^i \|^2$ et de la convergence forte de ΣHX^i. Choisissant dans chaque $\mathfrak{M}^i$ une base orthonormale $\{e^i_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$; on aura $HX^i = \sum_k (e^i_k, X) He^i_k$, fortement convergente dans tout $\mathfrak{M}^i$. Donc $HX = \sum_i \sum_k (e^i_k, X) He^i_k$; fortement convergente dans tout D_A. L'application de B borné ne change rien à la forte convergence et l'on a

$$AX = BHX = \sum \sum_k (e^i_k, X)\, Ae^i_k = \sum \sum_k x^i_k A^i_k,$$

fortement convergente dans tout D_A.

La réciproque se démontre aisément et l'on obtient ainsi l'opérateur linéaire *fermé le plus général.* Mais on a ainsi utilisé la représentation spectrale des opérateurs auto-adjoints, et il serait intéressant d'obtenir une démonstration indépendante de cette représentation.

6. Dans une deuxième voie les opérateurs fermés m'ont confirmé la valeur directrice des idées que je viens d'exposer. J'ai réussi à montrer, par extension de l'idée d'uniformisation des fonctions analytiques, que pour tout A fermé non borné, on peut représenter paramétriquement, dans tout le domaine d'existence D , la variable indépendante X et la variable dépendante $Y = AX$, à l'aide de deux opérateurs bornés K et K_1 par $X = KZ$, $Y = K_1 Z$ (*voir* JULIA, *C. R. Acad. Sc.*, 13 avril 1942).

On reprend pour cela la représentation par $A = BH$; A et H définis dans le domaine $D_A = D_H$, sont simultanément non bornés et fermés. H, auto-adjoint, a un spectre réel; donc, pour tout λ fini non réel (et plus généralement non du spectre), $H - \lambda$ admet un inverse K borné. Donc $H = \lambda + K^{-1}$ et K sera de quatrième classe si H n'est pas borné. Par $X = KZ$, lorsque Z décrit $\mathcal{H}$, X décrit Δ_K, domaine des valeurs de K = domaine d'existence de K^{-1}; $\Delta_K = D_{K^{-1}} = D_H = D_A$. La correspondance entre Z de $\mathcal{H}$ et X de D_H est biunivoque. Alors

$$HX = HKZ = (\lambda + K^{-1})KZ = Z + \lambda KZ$$

et

$$Y = AX = BHX = BHKZ = B(1 + \lambda K)Z = K_1 Z;$$

$K_1 = B(1 + \lambda K)$ est borné comme K et B; la représentation $X = KZ$, $Y = K_1 Z$ est totale, car $\Delta_K = D_H = D_A$. On reconnaît que K_1 sera de première ou deuxième classe si $\Delta_A = \mathcal{H}$; il sera de troisième classe si Δ_A est fermé sans remplir $\mathcal{H}$; il sera de quatrième classe si Δ_A n'est pas fermé.

7. Conclusion. — Je laisserai de côté d'autres questions soulevées par ce qui précède, ou qui précède, ou que fait pressentir la poursuite d'un fil conducteur dans ces analogies et différences entre fonctions analytiques et opérateurs linéaires. L'une d'entre elles consisterait à rechercher l'extension du théorème classique de Runge et Mittag-Leffler; elle est liée à l'étude de la structure du domaine d'existence d'un opérateur linéaire uniforme, en particulier d'un opérateur fermé, et à la représentation de cet opérateur dans ce domaine d'existence par une série convenable d'opérateurs simples.

Les divers exemples que j'ai donnés témoigneront, je l'espère, de la valeur directrice des idées exposées dans la présente conférence. Les questions à résoudre restent nombreuses et la besogne ne manque pas. Souhaitons que beaucoup d'entre elles soient bientôt résolues.