JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. WACHS

Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 22 (1943), p. 25-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22__25_0>

Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant;

PAR S. WACHS.
(Paris.)

A mon Maître,
Monsieur le Professeur Élie Cartan,
en témoignage de reconnaissance et admiration.

1. INTRODUCTION. — L'application du lemme de Schwarz-Pick dans la théorie des transformations conformes d'un domaine $\mathcal{B}$ en un domaine $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ conduit, dans le cas où la transformation considérée laisse, de plus, invariant un point de la frontière de $\mathcal{B}$, à une inégalité importante que nous rappellerons tout d'abord.

Pour simplifier, nous pouvons toujours supposer que le domaine $\mathcal{B}$ soit le cercle unité $\mathcal{B} = \mathrm{E}[\,|z| < 1]$, et que le point invariant Q soit le point $z = -1$.

Cela étant, soit $\mathbf{w} = w(z)$ la transformation conforme envisagée, changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ et laissant invariant le point -1.

Supposons maintenant qu'il existe sur l'axe réel une suite dénombrable de points $\{z^{(n)}\}$ convergeant vers Q et que la suite formée par les images de ces points converge également vers Q de telle façon que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{1 + w(z^{(n)})}{1 + z^{(n)}} \right| = \Gamma.$$

D'après le lemme de Schwarz-Pick, on a

$$(1.1) \qquad \mathcal{D}\{z, z^{(n)}\} \geqq \mathcal{D}\{w, w^{(n)}\},$$

$\mathcal{D}\{z, z^{(n)}\}$ représentant la distance hyperbolique des points $\{z\}$ et $\{z^{(n)}\}$

$$\mathcal{D}\{z, z^{(n)}\} = \frac{|z - z^{(n)}|}{|1 - \overline{z^{(n)}} z|},$$

on déduit de (1)

$$\mathcal{D}^2\{z, z^{(n)}\} - 1 \geqq \mathcal{D}^2\{w, w^{(n)}\} - 1,$$

inégalité que l'on peut mettre facilement sous la forme

$$\frac{(1 - |z^{(n)}|^2)(|z|^2 - 1)}{|1 - \overline{z^{(n)}} z|^2} \geqq \frac{(1 - |w^{(n)}|^2)(|w|^2 - 1)}{|1 - \overline{w^{(n)}} w|^2}$$

ou

$$\frac{1-|z|}{|1-\overline{z^{(n)}}z|^2} \leq \left|\frac{1+z^{(n)}}{1-|z^{(n)}|^2}\right| \left|\frac{1-|w^{(n)}|^2}{1+w^{(n)}}\right| \left|\frac{1+w^{(n)}}{1+z^{(n)}}\right| \frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w^{(n)}}w|^2},$$

et, si l'on passe à la limite dans cette dernière relation, on arrive aisément à l'inégalité que nous voulions obtenir

$$\text{(1.2)} \qquad \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} \leq \mathrm{T}\frac{1-|w|^2}{|1+w|^2},$$

puisque l'on a évidemment

$$\lim_{n=\infty} z^{(n)} = \lim_{n=\infty} w^{(n)} = -1;$$

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1+z^{(n)}}{1-|z^{(n)}|^2}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{1-|z^{(n)}|}{1-|z^{(n)}|}\right| \lim_{n=\infty}\frac{1}{1+|z^{(n)}|} = \frac{1}{2},$$

car, par hypothèse, $|z^{(n)}| = -z^{(n)}$ et

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1-|w^{(n)}|^2}{1+w^{(n)}}\right| \leq 2$$

en vertu de

$$1-|w^{(n)}| \leq |1+w^{(n)}|.$$

L'inégalité (1.2) est une généralisation d'un théorème dû à M. Julia.

Une transformation univoque $w_k = w_k(z_1, z_2)$, $(k=1, 2)$, d'un domaine $\mathcal{B}$ de l'espace de deux variables complexes z_1, z_2, $z_k = x_k + iy_k$, en un domaine $\mathcal{G}$ de l'espace des variables w_1, w_2, $w_k = u_k + iv_k$, est appelée *transformation pseudo-conforme* (nous désignerons désormais ces transformations par la notation abrégée T. P.).

M. Bergmann a indiqué un moyen permettant de généraliser certaines méthodes de la théorie des transformations conformes au cas des T. P. Rappelons brièvement comment procède M. Bergmann. On peut associer intrinsèquement à chaque domaine borné de l'espace z_1, z_2 une certaine fonction réelle, dite *fonction noyau* de $\mathcal{B}$, $\mathrm{K}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \overline{z_1}, \overline{z_2})$, et à l'aide de cette fonction on peut introduire une métrique non euclidienne définie par

$$ds^2_{\mathcal{B}} = \Sigma\, \mathrm{T}_{m\bar{n}}\, dz_m\, d\overline{z_n}, \qquad \mathrm{T}_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \mathrm{K}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \overline{z_1}, \overline{z_2})}{\partial z_m\, \partial \overline{z_n}},$$

métrique qui est invariante par rapport aux T. P.

Malheureusement le théorème de Riemann-Poincaré de la théorie des transformations conformes ne peut être étendu aux T. P. M. Bergmann a montré comment on pouvait étudier le comportement d'une fonction au voisinage $\mathrm{V}(\mathrm{Q}, \mathcal{B})$ d'un point Q de la frontière de $\mathcal{B}$ en remplaçant $\mathrm{V}(\mathrm{Q}, \mathcal{B})$ par le voisinage $\mathrm{V}(\mathrm{Q}, \mathcal{A})$ ou $\mathrm{V}(\mathrm{Q}, \mathcal{J})$ de ce point regardé comme appartenant aux frontières des domaines $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{J}$, plus simples que $\mathcal{B}$, tels que $\mathcal{J} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$; de plus, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{J}$ sont tels qu'il existe une T. P. $\mathbf{T}$ changeant $\mathcal{A}$ en $\mathcal{J}$, le jacobien de **T** ayant au point Q la valeur $1+\varepsilon$, et, par un choix convenable de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$, on peut rendre ε arbitrairement petit. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ sont appelées respectivement *domaine de comparaison extérieur* et *intérieur;* on peut les choisir en général de manière qu'ils soient équivalents [1] à des domaines particuliers dans lesquels l'étude des T. P. est plus simple que dans un domaine arbitraire. Cette méthode, dite *méthode de domaine de comparaison*, a conduit M. Bergmann à une certaine classification des points frontières d'un domaine $\mathcal{B}$ suivant la nature des domaines de comparaison que l'on pouvait construire.

Dans ce travail nous considérerons les points frontières pour lesquels le domaine $\mathcal{H}$ (équivalent à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$) est le bicylindre $\mathcal{E}=\mathrm{E}[\,|z_k|\leq 1,\ k=1,2]$; nous étudierons au moyen de la méthode des domaines de comparaison le comportement des T. P. changeant un domaine $\mathcal{B}$ en un domaine $\mathcal{G}\subset\mathcal{B}$ et laissant invariant un point Q de la frontière de $\mathcal{B}$ qui répond à l'hypothèse précédente; nous en déduirons des théorèmes qui pourront, jusqu'à un certain point, être regardés comme la généralisation aux cas des T. P. du théorème de M. Julia que nous avons rappelé au début de cette introduction.

Nous devrons distinguer deux cas, suivant que le point Q considéré comme appartenant à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ est l'image du point $(z_1=1,\ z_2=0)$ ou du point $(z_1=z_2=1)$ du bicylindre $\mathcal{H}$ (on peut toujours en effet se ramener à un de ces deux cas par une T. P. convenable changeant $\mathcal{H}$ en lui-même).

M. Bergmann a montré qu'il existait pour le bicylindre une relation analogue à l'inégalité (1.1); la distance étant mesurée, non plus avec la métrique hyperbolique, mais avec la métrique précédemment indiquée que l'on déduit de la fonction noyau du bicylindre qui est

$$\mathrm{K}_{\mathcal{E}}(z_k,\overline{z_k})=\frac{1}{\pi^2(1-z_1\overline{z}_1)(1-z_2\overline{z}_2)^2}.$$

Par un passage à la limite convenable nous montrons, d'abord pour le bicylindre et ensuite en utilisant la méthode des domaines de comparaison, pour une vaste classe des domaines, qu'il existe des inégalités analogues à celle de M. Julia moyennant certaines hypothèses très larges sur les T. P. **W** considérées. Mais ces inégalités ne nous donnent aucune borne pour le jacobien de **W** [2]. Pour obtenir de telles grandeurs, il nous faut de plus supposer que $\mathcal{B}$ et **W** sont douées de propriétés un peu plus particulières, mais encore assez générales pour que nos résultats s'appliquent à des classes très étendues de domaines et de T. P.

Remarquons, pour terminer, que la méthode que nous suivons ici nous a

---

(1) Deux domaines sont dits *équivalents* s'il existe une T. P. changeant l'un en l'autre.

(2) Dans le cas des T. P. les inégalités sont beaucoup plus compliquées, c'est pour cette raison que, pour obtenir des bornes pour le jacobien de **W**, nous devons faire des hypothèses beaucoup plus spéciales sur $\mathcal{B}$ et **W** que dans le cas des transformations conformes.

conduit déjà à des résultats analogues dans le cas où les domaines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{J}$ sont équivalents à une hypersphère [1].

2. Notations. — Nous désignerons dans la suite les variétés par des caractères de ronde, l'indice supérieur indiquant le nombre de dimensions de la variété; cet indice sera du reste supprimé dans le cas d'une variété à quatre dimensions. Opérant sur des ensembles nous emploierons les signes usuels : S ou $+$, pour l'ensemble réunion de plusieurs ensembles, $\times$ pour le produit topologique [2], $\overline{\mathcal{B}}$ pour la fermeture de l'ensemble $\mathcal{B}$; etc.

E[...] désigne l'ensemble des points (z_1, z_2) dont les coordonnées satisfont aux conditions exprimées entre crochets.

Les transformations pseudo-conformes seront toujours désignées par des caractères gras. Les formules sont numérotées (m, n), ce qui signifie la formule n du n° m.

Enfin la notation $\bar{z}$ désigne la quantité conjuguée de z.

3. La métrique du bicylindre [3]. — On sait que la fonction noyau attachée au bicylindre $\mathcal{E} = \mathrm{E}[|z_k| \leqq 1, k = 1, 2]$ est

$$K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k) = \frac{1}{\pi^2(1 - z_1\bar{z}_1)^2(1 - z_2\bar{z}_2)^2},$$

d'où

$$\operatorname{Log} K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k) = -2 \operatorname{Log} \pi - 2 \operatorname{Log}(1 - z_1\bar{z}_1) - 2 \operatorname{Log}(1 - z_2\bar{z}_2)$$

et

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Log} K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_1\, \partial \bar{z}_2} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_2\, \partial \bar{z}_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Log} K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_1\, \partial \bar{z}_1} = \frac{2}{(1 - z_1\bar{z}_1)^2}; \qquad \frac{\partial^2 \operatorname{Log} K_{\mathcal{E}}(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_2\, \partial \bar{z}_2} = \frac{2}{(1 - z_2\bar{z}_2)^2};$$

par conséquent, la métrique hermitienne attachée au bicylindre $\mathcal{E}$ est

$$ds^2_{\mathcal{E}} = 2\left[\frac{dz_1\, d\bar{z}_1}{(1 - z_1\bar{z}_1)^2} + \frac{dz_2\, d\bar{z}_2}{(1 - z_2\bar{z}_2)^2}\right].$$

Cette formule montre que le $ds^2_{\mathcal{E}}$ attaché au bicylindre $\mathcal{E}$ est la somme des ds^2 de Poincaré attachés à chacun des facteurs du produit topologique $\mathcal{E}$.

---

(1) Voir *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LXVIII, fascicule I à IV, 1940, p. 177.

(2) *Voir*, par exemple, Hausdorff, *Lerbuch der Mengenlehre*, 2e édition, 1928, p. 1.

(3) Les résultats obtenus ici ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus*, t. **208**, 1939, p. 1385 et 1871.

Pour plus de détails bibliographiques sur ces questions, on se reportera aux Notes ci-dessus et au fascicule de M. Bergmann, *Mémorial des Sciences Mathématiques* (sous presse).

Chaque ligne géodésique de $\mathcal{E}$ se projetant suivant une géodésique sur chacun des cercles dont $\mathcal{E}$ est le produit, il résulte immédiatement de là que la distance géodésique $\mathcal{D}(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$ de deux points $\{z_k^{(1)}\}$ et $\{z_k^{(2)}\}$ de $\mathcal{E}$ est donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^2(z_k^{(1)} z_k^{(2)}) = 2[d^2(z_1^{(1)} z_1^{(2)}) + d^2(z_2^{(1)} z_2^{(2)})],$$

où $d(z_k^{(1)} z_k^{(2)})$ représente la distance non euclidienne des points $z_k^{(1)}$, $z_k^{(2)}$ mesurée avec la métrique de Poincaré, c'est-à-dire

$$d(z_k^{(1)} z_k^{(2)}) = \operatorname{Log} \frac{1 + \dfrac{|z_k^{(1)} - z_k^{(2)}|}{|1 - \overline{z_k^{(1)}} z_k^{(2)}|}}{1 - \dfrac{|z_k^{(1)} - z_k^{(2)}|}{|1 - \overline{z_k^{(1)}} z_k^{(2)}|}};$$

si nous posons

$$H(z_k^{(1,2)}) = \frac{|z_k^{(1)} - z_k^{(2)}|}{|1 - \overline{z_k^{(1)}} z_k^{(2)}|},$$

nous obtenons

$$(3.1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(z_k^{(1)} z_k^{(2)}) = \sqrt{\left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(z_1^{(1,2)})}{1 - H(z_1^{(1,2)})}\right]^2 + \left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(z_2^{(1,2)})}{1 - H(z_2^{(1,2)})}\right]^2};$$

telle est la formule qui donne la distance géodésique de deux points $\{z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\}$ et $\{z_1^{(2)}, z_2^{(2)}\}$ dans le bicylindre $\mathcal{E}$.

4. Les transformations qui laissent invariant un point frontière du second ordre. — Soit $\mathbf{W}$ une T. P. changeant le bicylindre $\mathcal{E} = E[|z_k| \leq 1, k = 1, 2]$ en un domaine $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ et qui laisse fixe le point frontière $Q(-1, 0)$.

Si $\mathbf{W}$ est définie par les formules

$$\mathbf{W} : w_k = w_k(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2).$$

On sait, d'après les résultats obtenus par M. Bergmann (1), que l'on a entre les distances géodésiques de deux points $\{z_1^{(1)}, z_2^{(2)}\}$, $\{z_2^{(2)}, z_2^{(2)}\}$ et de leurs images $\{w_1^{(1)} w_2^{(1)}\}$, $\{w_1^{(2)} w_2^{(2)}\}$ l'inégalité

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}\{z^{(1)}, z^{(2)}\} \geq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\{w^{(1)}, w^{(2)}\}.$$

D'après la formule (3.1) cette inégalité peut s'écrire

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} &\left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(z_1^{(1,2)})}{1 - H(z_1^{(1,2)})}\right]^2 + \left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(z_2^{(1,2)})}{1 - H(z_2^{(1,2)})}\right]^2 \\ &\geq \left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(w_1^{(1,2)})}{1 - H(w_1^{(1,2)})}\right]^2 + \left[\operatorname{Log} \frac{1 + H(w_2^{(1,2)})}{1 - H(w_2^{(1,2)})}\right]^2. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe une suite dénombrable de points $\{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}\}$ convergeant vers le point Q et que la suite formée avec les images de ces

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, **16**, 1937, p. 11-14.

points $\{w_1^{(n)}, w_2^{(n)}\}$ converge aussi vers le point Q. On aura donc, par hypothèse,

$$\lim_{n=\infty} z_1^{(n)} = \lim_{n=\infty} w_1^{(n)} = -1; \qquad \lim_{n=\infty} z_2^{(n)} = \lim_{n=\infty} w_2^{(n)} = 0. \tag{4.2}$$

De plus, nous admettrons que

$$0 < \lim_{n=\infty} \frac{1-|z_1^{(n)}|^2}{1-|w_1^{(n)}|^2} = \Gamma_1 < \infty. \tag{4.3}$$

Remplaçons maintenant, dans l'inégalité (4.1), le point $\{z_1^{(2)}, z_2^{(2)}\}$ par le point $\{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}\}$ et le point $\{z_1^{(2)}, z_2^{(2)}\}$ par le point $\{z_1, z_2\}$.

Remarquons que l'on a

$$\operatorname{Log}\frac{1+H}{1-H} = \operatorname{Log}\frac{(1+H)^2}{1-H^2} = 2\operatorname{Log}(1+H) - \operatorname{Log}(1-H^2), \tag{4.4}$$

et que, d'après la définition de H,

$$0 < 1 - H^2 = \frac{(1-|z_k^{(1)}|^2)(1-|z_k^{(2)}|^2)}{|1-\overline{z_k^{(1)}}z_k^{(2)}|^2} \leqq 1. \tag{4.5}$$

D'autre part les inégalités (4.2) prouvent que

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \frac{|z_1^{(n)}-z_1|}{|1-\overline{z_1^{(n)}}z_1|} = \lim_{n=\infty} \frac{|w_1^{(n)}-w_1|}{|1-\overline{w_1^{(n)}}w_1|} = 1, \\ &\lim_{n=\infty} \frac{|z_2^{(n)}-z_2|}{|1-\overline{z_2^{(n)}}z_2|} = |z_2|; \qquad \lim_{n=\infty} \frac{|w_2^{(n)}-w_2|}{|1-\overline{w_2^{(n)}}w_2|} = |w_2|. \end{aligned}\right. \tag{4.6}$$

Écrivons l'inégalité (4.1) en tenant compte de la formule (4.4), il vient

$$\begin{aligned} &\Big[\operatorname{Log}\big(1-H^2(z_1^{(n,1)})\big)\Big]^2 - 4\Big[\operatorname{Log}\big(1+H^2(z_1^{(n,1)})\big)\Big]\Big[\operatorname{Log}\big(1+H(z_1^{(n,1)})\big)\Big] \\ &\qquad + 4\Big[\operatorname{Log}\big(1+H\,(z_1^{(n,1)})\big)\Big]^2 + \left[\operatorname{Log}\frac{1+H(z_2^{(n,1)})}{1-H(z_2^{(n,1)})}\right]^2 \\ \geqq &\Big[\operatorname{Log}\big(1-H^2(w_1^{(n,1)})\big)\Big]^2 - 4\Big[\operatorname{Log}\big(1-H^2(w_1^{(n,1)})\big)\Big]\Big[\operatorname{Log}\big(1+H(w_1^{(n,1)})\big)\Big] \\ &\qquad + 4\Big[\operatorname{Log}\big(1+H\,(w_1^{(n,1)})\big)\Big]^2 + \left[\operatorname{Log}\frac{1+H(w_2^{(n,1)})}{1-H(w_2^{(n,1)})}\right]^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} &\Big[\operatorname{Log}\big(1-H^2(z_1^{(n,1)})\big)\Big]\left\{1 - 4\frac{\operatorname{Log}\big(1+H(z_1^{(n,1)})\big)}{\operatorname{Log}\big(1-H^2(z_1^{(n,1)})\big)}\right. \\ &\qquad \left. + 4\left[\frac{\operatorname{Log}\big(1+H(z_1^{(n,1)})\big)}{\operatorname{Log}\big(1-H^2(z_1^{(n,1)})\big)}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{Log}\dfrac{1+H(z_2^{(n,1)})}{1-H(z_2^{(n,1)})}}{\operatorname{Log}\big(1-H^2(z_1^{(n,1)})\big)}\right]^2\right\}^{\frac12} \\ &\leqq \operatorname{Log}\big(1-H^2(w_1^{(n,1)})\big)\left\{1 - 4\frac{\operatorname{Log}\big(1+H(w_1^{(n,1)})\big)}{\operatorname{Log}\big(1-H^2(w_1^{(n,1)})\big)}\right. \\ &\qquad \left. + 4\left[\frac{\operatorname{Log}\big(1+H(w_1^{(n,1)})\big)}{\operatorname{Log}\big(1+H^2(w_1^{(n,1)})\big)}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{Log}\dfrac{1+H(w_2^{(n,1)})}{1-H(w_2^{(n,1)})}}{\operatorname{Log}\big(1-H^2(w_2^{(n,1)})\big)}\right]^2\right\}^{\frac12}, \end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

car $\operatorname{Log}[1-H^2(z_1^{(n,1)})]$ est négatif.

Les inégalités (4.6) montrent que

$$\operatorname{Log}[1 - H^2(z_1^{(n,1)})] \quad \text{et} \quad \operatorname{Log}[1 - H^2(w_1^{(n,1)})]$$

augmentent indéfiniment avec n, tandis que

$$\operatorname{Log}\left(1 + H(z_1^{(n,1)})\right), \quad \operatorname{Log}\left(1 + H(w_1^{(n,1)})\right),$$
$$\operatorname{Log}\frac{1 + H(z_2^{(n,1)})}{1 - H(z_2^{(n,1)})}, \quad \operatorname{Log}\frac{1 + H(w_2^{(n,1)})}{1 - H(w_2^{(n,1)})}$$

tendent vers des limites finies.

Posons

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\operatorname{Log}\left(1 - H^2(z_1^{(n,1)})\right)}, \qquad \operatorname{Log}\left(1 + H(z_1^{(n,1)})\right) = A_n, \qquad \operatorname{Log}\frac{1 + H(z_1^{(n,1)})}{1 - H(z_1^{(n,1)})} = B_n,$$
$$\eta_n = \frac{1}{\operatorname{Log}\left(1 - H^2(w_1^{(n,1)})\right)}, \qquad \operatorname{Log}\left(1 + H(w_1^{(n,1)})\right) = \alpha_n, \qquad \operatorname{Log}\frac{1 + H(w_2^{(n,1)})}{1 - H(w_2^{(n,1)})} = \beta_n,$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = \lim_{n=\infty} \eta_n = 0,$$
$$0 < \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n=\infty} A_n = A \\ \lim_{n=\infty} B_n = B \end{array} \right\} < \infty, \qquad 0 < \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha \\ \lim_{n=\infty} \beta_n = \beta \end{array} \right\} < \infty;$$

avec ces notations (4.7) s'écrira

$$\frac{1}{\varepsilon_n}[1 - 4A_n\varepsilon_n + 4A_n^2\varepsilon_n^2 + B_n^2\varepsilon_n^2]^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{\eta_n}[1 - 4\alpha_n\eta_n + 4\alpha_n^2\eta_n^2 + \beta_n^2\eta_n^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Développons en série chacun des radicaux des deux membres (ce qui est légitime, puisqu'en prenant n suffisamment grand ces radicaux pourront être aussi voisins de o que l'on voudra), on aura

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\left\{1 + \frac{1}{2}\varepsilon_n[(4A_n^2 + B_n^2)\,\varepsilon_n - 4A_n] - \frac{1}{4}\varepsilon_n^2[(4A_n^2 + B_n^2)\,\varepsilon_n - 4A_n]^2 + \ldots\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{\eta_n}\left\{1 + \frac{1}{2}\eta_n[(4\alpha_n^2 + \beta_n^2)\,\eta_n - 4\alpha_n] - \frac{1}{4}\eta_n^2[(4\alpha_n^2 + \beta_n^2)\,\eta_n - 4\alpha_n]^2 + \ldots\right\}.$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\eta_n} - 2A_n + 2\alpha_n \leqq \eta_n Q_n - \varepsilon_n P_n,$$

où P_n et Q_n sont des fonctions de ε_n et η_n respectivement qui tendent vers des limites finies quand n augmente indéfiniment

$$P_n = 4A_n^2 + B_n^2 - \frac{\varepsilon_n}{4}[(4A_n^2 + B_n^2)\,\varepsilon_n - 4A_n]^2 + \ldots,$$

$$Q_n = 4\alpha_n^2 + \beta_n^2 - \frac{\eta_n}{4}[(4\alpha_n^2 + \beta_n^2)\,\eta_n - 4\alpha_n]^2 + \ldots,$$

or les égalités (4.6) montrent que

$$\lim_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} \alpha_n = \operatorname{Log} 2,$$

et par conséquent, dès que n sera suffisamment grand, $A_n - \alpha_n$ sera aussi petit qu'on le voudra; en définitive, on aura l'inégalité

$$\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\eta_n} \leqq 2(A_n - \alpha_n) + \eta_n Q_n - \varepsilon_n P_n$$

ou, en revenant à nos notations,

$$\operatorname{Log}[1 - H^2(z_1^{(n,1)})] - \operatorname{Log}[1 - H^2(w_1^{(n,1)})] \leqq \theta_n,$$

θ_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$; l'inégalité précédente s'écrit encore

$$\operatorname{Log} \frac{1 - H^2(z_1^{(n,1)})}{1 - H^2(w_1^{(n,1)})} \leqq \theta_n,$$

et, en tenant compte de (4.5),

$$\operatorname{Log} \frac{\dfrac{[1 - |z_1^{(n)}|^2][1 - |z_1|^2]}{|1 - \overline{z_1^{(n)}} z_1|^2}}{\dfrac{[1 - |w_1^{(n)}|^2][1 - |w_1|^2]}{|1 - \overline{w_1^{(n)}} w_1|^2}} \equiv \operatorname{Log} \left\{ \frac{1 - |z_1^{(n)}|^2}{1 - |w_1^{(n)}|^2} \, \frac{1 - |z_1|^2}{1 - |w_1|^2} \left| \frac{1 - \overline{w_1^{(n)}} w_1}{1 - \overline{z_1^{(n)}} z_1} \right|^2 \right\} \leqq \theta_n;$$

puis, en vertu de (4.2) et (4.3), on a, en passant à la limite et des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma_1 \frac{1 - |z_1|^2}{1 - |w_1|^2} \, \frac{|1 + w_1|^2}{|1 + z_1|^2} \leqq 1. \tag{4.8}$$

Cette formule a déjà été donnée par Miniatoff [1].

Considérons maintenant un domaine $\mathcal{B}$ sur lequel nous faisons les hypothèses suivantes, et un point Q de sa frontière :

1° $\mathcal{B}$ est tout entier à distance finie.

2° La frontière de $\mathcal{B}$ comprend au moins un morceau d'hypersurface analytique

$$I^{(3)} = \mathbf{E}[Z_1 = h(Z_2, \lambda), \quad 0 < \lambda < 2\pi, \quad Z_2 \in \mathcal{B}^{(2)}(\lambda)],$$

où $\mathcal{B}^{(2)}(\lambda)$ est un domaine convenable du plan z_2 et où $h(Z_2, \lambda)$ représente, pour toute valeur de λ, une fonction analytique de Z_2 définie dans un domaine suffisamment grand admettant en chaque point une dérivée partielle par rapport à λ positive et finie. $I^{(3)}$ est donc l'ensemble réunion des morceaux de surfaces analytiques $\mathcal{J}^{(2)}(\lambda)$ que M. Bergmann appelle les *lamelles* de la frontière [2] de $\mathcal{B}$.

---

(1) Miniatoff, *C. R. Acad. Sc.*, **201**, 1935, p. 711-713.

(2) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*, **16**, 1937, p. 11-14; et *Math. Zeitschr.*, **39**, 1934, p. 79-83.

Par hypothèse Q sera un point intérieur à $\mathcal{J}^2(\lambda_0)$, $0 < \lambda_0 < 2\pi$.

Par la transformation

$$z_1 = \frac{h(Z_2, \lambda) - Z_1}{i h'_\lambda(Z_2, \lambda_0)},$$
$$z_2 = Z_2.$$

nous introduisons ce que M. Bergmann appelle les *coordonnées normales* (¹) par rapport à la lamelle $\mathcal{J}^2(\lambda_0)$ qui sera située ainsi dans le plan $z_1 = 0$.

3° Nous supposerons que, si le point $\{\gamma\}$ n'appartient pas à la frontière de $\mathcal{J}^2(\lambda_0)$, le point $\{0, \gamma\}$ n'appartient pas non plus à la frontière de $\mathcal{B}$.

4° Pour chaque domaine $\overline{\mathcal{J}^\star} \subset \mathcal{J}^2(\lambda_0)$, il existe trois nombres $\mu > 0$, $\omega_0 > 0$ et $k < \infty$ tel que la courbe frontière $\mathcal{G}'(\gamma)$ de l'intersection de $\mathcal{B}$ avec le plan $z_2 = \gamma$, γ étant intérieur à $\overline{\mathcal{J}^\star}$, peut être représentée en coordonnées polaires au voisinage du point $z_1 = 0$ par $r = r(\omega)$, $\pi - \omega_0 < \omega < \pi + \omega_0$, de telle façon que $|r(\omega)| > \mu$ et $|r''(\omega)| < k$, le pôle étant le point $z_1 = 1$ et l'axe polaire la normale intérieure à $\mathcal{G}'(\gamma)$ au point Q.

5° Enfin il existe un nombre θ tel que les bicylindres

$$\mathbf{E}[\,|z_1 + \theta| < \theta, \qquad |z^2 - \gamma| < \theta]$$

soient extérieurs à $\mathcal{B}$ quel que soit le point γ de la frontière de $\mathcal{J}^2(\lambda_0)$. Moyennant ces conditions, M. Bergmann a démontré que l'on pouvait prendre, comme domaines de comparaison au voisinage de Q, des bicylindres et que Q n'appartient pas aux surfaces remarquables de ces bicylindres. Un tel point frontière est dit du 2ᵉ ordre et de 3ᵉ espèce. Le domaine de comparaison extérieur sera

$$\mathcal{A} = \mathbf{E}[\,|z_1 - r_2| > r_2,\ |z_2| < R_2],$$

et le domaine de comparaison intérieur

$$\mathcal{J} = \mathbf{E}[\,|z_1 - r_1| < r_1,\ |z_2| < R_1],$$

les nombres $r_1 r_2 R_1$ et R_2 étant essentiellement positifs et ne dépendant que du domaine $\mathcal{B}$.

Cela posé nous avons le théorème :

THÉORÈME I. — *Étant donné un domaine $\mathcal{B}$ satisfaisant aux hypothèses précédentes, un point* Q *de sa frontière du second ordre et de troisième espèce,* $Q \in \mathcal{J}(\lambda_0)$ *et une T. P.* **W** *changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, s'il existe une suite dénombrable de points $\{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}\}$ convergeant vers* Q *ainsi que la suite formée par les images de ces points et telle que l'expression*

$$L_1^{(n)} = \frac{F(z_1^{\star(n)})}{F(w_1^{\star(n)})}$$

(¹) Voir *Math. Zeitschr.*, 1934, p. 605.

tende vers une limite finie et positive Γ_1 lorsque n augmente indéfiniment, on a, en tout point $\{z_1, z_2\}$ suffisamment voisin de Q, l'inégalité

$$\Gamma_1 \frac{F(z_1^\star)}{|z_1^\star|^2} \geqq \frac{F(w_1^\star)}{|w_1^\star|^2}$$

en posant

$$F(u) = u + \bar{u} - u\bar{u}, \qquad z_1^\star = \frac{z_1}{r_1}, \qquad w_1^\star = \frac{w_1}{w_1 + r_2}.$$

Démonstration. — La transformation

$$(\mathbf{T}_1) \qquad z_1 = \frac{r_2 \zeta_1}{r_1 - \zeta_1}, \qquad z_2 = \frac{R_2}{R_1} \zeta_2$$

change le bicylindre $\mathcal{J}$ dans le bicylindre $\mathfrak{A}$. La transformation $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}\mathbf{T}_1^{-1}$ change $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathfrak{A}$.

On a donc, entre la distance non euclidienne de deux points A et B mesurée avec la métrique relative à $\mathfrak{A}$ et la distance non euclidienne de leurs images A_1 et B_1 par $\mathbf{W}_1$, l'inégalité

$$(4.9) \qquad \varpi_{\mathfrak{A}} \{A_1, B_1\} \leqq \varpi_{\mathfrak{A}} \{A, B\}.$$

D'autre part la transformation

$$(\mathbf{T}_2) \qquad z_1 = \frac{r_2 \zeta_1}{1 - \zeta_1}, \qquad z_2 = R_2 \zeta_2$$

change le bycylindre unitaire $\mathcal{E} = \mathrm{E}[|\zeta - 1| \leqq 1, |\zeta_2| \leqq 1]$ dans le bicylindre $\mathfrak{A}$. On a donc

$$\varpi_{\mathfrak{A}} \{A, B\} = \varpi_{\mathcal{E}_1} \{\mathbf{T}_2^{-1} A, \mathbf{T}_2^{-1} B\},$$

et par conséquent l'inégalité (4.9) devient

$$\varpi_{\mathcal{E}} \{\mathbf{T}_2^{-1} A_1, \mathbf{T}_2^{-1} B_1\} \leqq \varpi_{\mathcal{E}} \{\mathbf{T}_2^{-1} A, \mathbf{T}_2^{-1} B\}.$$

Prenons pour A le point $\mathbf{T}_1\{z^{(n)}\}$ et pour B le point $\mathbf{T}_1\{z\}$ (¹); on a

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{W}_1 A = \mathbf{W}\mathbf{T}_1^{-1} A = \mathbf{W}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_1 \{z^{(n)}\} = \mathbf{W}\{z^{(n)}\} = \{w^{(n)}\}, \\ B_1 &= \mathbf{W}_1 B = \mathbf{W}\mathbf{T}_1^{-1} B = \mathbf{W}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_1 \{z\} = \mathbf{W}\{z\} = \{w\}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité

$$(4.10) \qquad \varpi_{\mathcal{E}_1} \left\{ \mathbf{T}_2^{-1}\{w^{(n)}\}, \mathbf{T}_2^{-1}\{w\} \right\} \leqq \varpi_{\mathcal{E}_1} \left\{ \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_1\{z^{(n)}\}, \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_1\{z\} \right\},$$

et l'on a

$$\mathbf{T}_2^{-1}\{w\} = \begin{cases} w_1^\star = \dfrac{w_1}{w_1 + r_2}, \\ w_2^\star = \dfrac{w_2}{R_2}, \end{cases} \qquad \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_1\{z\} = \begin{cases} z_1^\star = \dfrac{z_1}{r_1}, \\ z_2^\star = \dfrac{z_2}{R_1}. \end{cases}$$

(¹) La notation $\{z\}$ désigne ici le point de coordonnées $\{z_1, z_2\}$.

Les calculs faits au début de ce paragraphe nous conduisent immédiament à l'inégalité de l'énoncé en faisant dans (4.10) augmenter n indéfiniment en passant à la limite et en remarquant que précédemment le point Q avait pour coordonnées $(-1, 0)$, tandis qu'actuellement il a pour coordonnées $(0, 0)$ et que, dans ces conditions, l'inégalité de Miniatoff s'écrit

$$\frac{w_1 + \bar{w}_1 - w_1 \bar{w}_1}{|w_1|^2} \leqq \Gamma_1 \frac{z_1 + \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_1}{|z_1|^2}.$$

THÉORÈME II. — *Dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent, en remplaçant* $L_1^{(n)}$ *par*

$$L^n = \frac{F(z_1'^{*(n)})}{F(w_1'^{*(n)})},$$

et Γ_1 *par* Γ_2, *si l'on suppose en outre qu'il existe à l'intérieur de* $\mathcal{G}$ *un bicylindre* $\mathcal{E} = \mathbf{E}[|z_1 - \rho_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2]$, *on a, en tout point* $\{z_1, z_2\}$ *suffisamment voisin de* Q, *l'inégalité*

$$\Gamma_2 \frac{F(z_1'^{*})}{|z_1'^{*}|^2} \leqq \frac{F(w_1'^{*})}{|w_1'^{*}|^2}$$

en posant

$$z_1'^{*} = \frac{z_1}{z_1 + r_2}, \qquad w_1'^{*} = \frac{w_1}{\rho_1}.$$

Démonstration. — Conservons les notations précédentes; la transformation

$$(\mathbf{T}_3) \qquad z_1 = \frac{r_2 \zeta_1}{\rho_1 - \zeta_1}, \qquad z_2 = \frac{R_2}{\rho_2} \zeta_2$$

change le bicylindre $\mathcal{E}$ en $\mathfrak{A}$. La T. P. $\mathbf{W}^{-1}$ change $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ en $\mathcal{E}^{*} \subset \mathcal{B} \subset \mathfrak{A}$, par conséquent la transformation $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3^{-1}$ change $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{E}^{*} \subset \mathfrak{A}$. On peut donc encore écrire, si A et B sont des points de $\mathfrak{A}$ et A_2 et B_2 leurs images par $\mathbf{W}_2$,

$$\varpi_{\mathfrak{A}}\{A, B\} \geqq \varpi_{\mathfrak{A}}\{A_2, B_2\}$$

ou encore

$$\varpi_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2^{-1}A, \mathbf{T}_2^{-1}B\} \geqq \varpi_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2^{-1}A_2, \mathbf{T}_2^{-1}B_2\}.$$

Prenons pour A le point $\mathbf{T}_3\{w^{(n)}\}$ et pour B le point $\mathbf{T}_3\{w\}$; on a

$$A_2 = \mathbf{W}_2 A = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3^{-1} A = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{T}_3\{w^{(n)}\} = \mathbf{W}^{-1}\{w^{(n)}\} = \{z^{(n)}\},$$
$$B_2 = \mathbf{W}_2 B = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3^{-1} B = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{T}_3\{w\} = \mathbf{W}^{-1}\{w\} = \{z\}.$$

On a donc

$$(4.11) \qquad \varpi_{\mathcal{E}_1}\left\{\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_3\{w^{(n)}\}, \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_3\{w\}\right\} \geqq \varpi_{\mathcal{E}_1}\left\{\mathbf{T}_2^{-1}\{z^{(n)}\}, \mathbf{T}_2^{-1}\{z\}\right\}$$

avec

$$\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_3\{w\} = \begin{cases} w_1'^{*} = \dfrac{w_1}{\rho_1}, \\ w_2'^{*} = \dfrac{w_2}{\rho_2}, \end{cases} \qquad \mathbf{T}_2^{-1}\{z\} = \begin{cases} z_1'^{*} = \dfrac{z_1}{z_1 + r_2}, \\ z_2'^{*} = \dfrac{z_2}{R_2}. \end{cases}$$

Pour obtenir l'inégalité de l'énoncé, il ne nous reste qu'à faire augmenter n indéfiniment dans l'inégalité (4.11) et à passer à la limite comme au numéro précédent.

Théorème III. — *Sous les hypothèses des théorèmes précédents et en supposant de plus que la* T. P. $\mathbf{W}$ *change le domaine*

$$\mathcal{C}_{mpq}(z) = \mathbf{E}\left[0 < z_1 + \bar{z}_1 < m, \ \frac{|z_1|}{z_1 + \bar{z}_1} < p, \ |z_2| < q \right].$$

Dans un domaine intérieur au domaine

$$\mathcal{C}_{m'p'q'}(w) = \mathbf{E}\left[0 < w_1 + \bar{w}_1 < m', \ \frac{|w_1|}{w_1 + \bar{w}_1} < p', \ |w| < q' \right],$$

le jacobien de la transformation $\mathbf{W}$ *est borné en module supérieurement et inférieurement en tout point du domaine* $\mathcal{C}_{mpq}(z)$ *par des quantités ne dépendant que de* $m, p, q, m', p', q', \Gamma_1, \Gamma_2$ *et du domaine* $\mathcal{B}$.

Démonstration. — Des hypothèses faites, il résulte que l'on se trouve en présence des domaines $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Nous avons donc les inégalités suivantes entre les fonctions noyaux de ces domaines (¹)

$$K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z}) < K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}) < K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z}).$$

Et comme $\mathcal{J} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on aura

$$K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w}) < K_{\mathcal{G}}(w, \bar{w}) < K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w}),$$

puisque $\mathcal{E} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$.

On en déduit

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})} \leq \frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{G}}(w, \bar{w})} \leq \frac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})}.$$

Mais on sait que la fonction noyau d'un domaine est un invariant intégral pour toutes les T. P., on a

$$\frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{G}}(w, \bar{w})} = \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2.$$

D'où

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})} \leq \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2 \leq \frac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})}.$$

(¹) Voir *Journal de Crelle*, **169**, 1932, p. 1-40.

Pour démontrer notre proposition, il nous suffit de prouver que, dans les conditions de l'énoncé, le rapport $\dfrac{K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})}$ est borné inférieurement tandis que le rapport $\dfrac{K_{\mathfrak{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathfrak{A}}(w, \bar{w})}$ est borné supérieurement.

Nous allons donc commencer par calculer chacune des fonctions noyaux indiquées. Pour cela nous partirons du fait qu'il existe une T. P. changeant chacun de ces domaines sur le bicylindre unitaire

$$\mathcal{E}_1 = E[\,|z_1 - 1| \leqq 1,\ |z_2| \leqq 1\,]$$

dont la fonction noyau est

$$K_{\mathcal{E}_1}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi^2(z_1 + \bar{z}_1 - z_1\bar{z}_1)^2(1 - z_2\bar{z}_2)^2}.$$

La transformation $\mathbf{T}_2$ change $\mathfrak{A}$ dans le bicylindre unitaire, on a donc

$$K_{\mathcal{E}_1}(\zeta, \bar{\zeta}) = K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}) \left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}\right|^2.$$

Or on trouve immédiatement que

$$\left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}\right|^2 = \frac{r_2^2 R_2^2}{|1 - \zeta_1|^4},$$

et par conséquent

$$K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}) = \frac{r_2^2 R_2^2}{\pi^2[r_1(z_1 + \bar{z}_1) - z_1\bar{z}_1]^2[R_2^2 - z_2\bar{z}_2]^2};$$

de même la transformation

$$z_1 = r_1\zeta_1, \qquad z_2 = R_1\zeta_1$$

change en $\mathfrak{J}$ le bicylindre unitaire $\mathcal{E}_1$. On a donc

$$K_{\mathcal{E}_1}(\zeta, \bar{\zeta}) = K_{\mathfrak{J}}(z, \bar{z}) \left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}\right|^2.$$

Or

$$\left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}\right|^2 = r_1^2 R_1^2.$$

Par conséquent il vient

$$K_{\mathfrak{J}}(z, \bar{z}) = \frac{r_1^2 R_1^2}{\pi^2[r_1(z_1 + \bar{z}_1) - z_1\bar{z}_1]^2[R_1^2 - z_2\bar{z}_2]^2}.$$

De même on obtiendra par la transformation

$$z_1 = \rho_1\zeta_1, \qquad z_2 = \rho_2\zeta_2,$$

qui change $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_1$

$$K_{\mathcal{E}}(z, \bar{z}) = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\pi^2[\rho_1(z_1 + \bar{z}_1) - z_1\bar{z}_1]^2[\rho_2^2 - z_2\bar{z}_2]^2}.$$

Résumons ces résultats sous la forme suivante qui nous sera plus commode

$$K_{\mathcal{S}}(z, \bar{z}) = \frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^2\left[\rho_1 - \dfrac{|z_1|^2}{z_1+\bar{z}_1}\right]^2[\rho_2^2-|z_2|^2]^2},$$

$$K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}) = \frac{r_2^2 R_2^2}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^2\left[r_2 - \dfrac{|z_1|^2}{z_1+\bar{z}_1}\right]^2[R_2^2-|z_2|^2]^2},$$

$$K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z}) = \frac{r_1^2 R_1^2}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^2\left[r_1 - \dfrac{|z_1|^2}{z_1+\bar{z}_1}\right]^2[R_1^2-|z_2|^2]^2}.$$

Ces formules nous montrent que nous devons chercher maintenant des bornes supérieures et inférieures pour le rapport $\frac{w_1+\bar{w}_1}{z_1+\bar{z}_1}$. C'est ce que nous allons faire maintenant par application des théorèmes I et II.

Faisons d'abord les remarques suivantes :

a. Si le point $(z_1 z_2)$ appartient au domaine $\mathcal{C}_{mpq}(z)$, le point $(z_1^* z_2^*)$ appartiendra au domaine $\mathcal{C}^*_{m^* p^* q^*}(z^*)$. En effet, on a

$$z_1^* = \frac{z_1}{r_1}, \qquad z_2^* = \frac{z_1}{R_1},$$

par conséquent

$$0 < z_1^* + \bar{z}_1^* = \frac{z_1+\bar{z}_1}{r_1} < \frac{m}{r_1} = m^*$$

et

$$\frac{|z_1^*|}{z_1^*+\bar{z}_1^*} = \frac{\dfrac{1}{r_1}|z_1|}{\dfrac{z_1+\bar{z}_1}{r_1}} = \frac{|z_1|}{z_1-\bar{z}_1} < p = p^*;$$

enfin

$$|z_2^*| = \frac{1}{R_1}|z_2| < \frac{q}{R_1} = q^*.$$

b. Si le point $(w_1 w_2)$ appartient à $\mathcal{C}_{m'p'q'}(w)$, le point $(w_1^* w_2^*)$ appartiendra aussi à un domaine analogue. En effet, on a

$$w_1^* = \frac{w_1}{w_1+r_2}, \qquad w_2^* = \frac{w_2}{R_2},$$

d'où

$$0 < w_1^* + \bar{w}_1^* = \frac{2|w_1|^2 + r_2(w_1+\bar{w}_1)}{|r_2+w_1|^2} < \frac{2m'^2p'^2+r_2m'}{r_2^2} = m'^*,$$

puisque, du fait que $(w_1 w_2)$ appartiendra à $\mathcal{C}_{m'p'q'}(w)$, on a

$$|w_1| < p'(w_1+\bar{w}_1) < m'p',$$

et de même

$$\frac{|w_1^\star|}{w_1^\star+\overline{w_1^\star}}=\frac{|w_1|\,|w_1+r_2|}{2|w_1|^2+r_2(w_1+\overline{w_1})}=\frac{|w_1|}{w_1+\overline{w_1}}\,\frac{|w_1+r_2|}{r^2+\dfrac{2|w_1|^2}{w_1+\overline{w_1}}},$$

mais

$$|w_1+r_2|<|w_1|+r_2<m'p'+r_2,\qquad r_2+\frac{2|w_1|^2}{w_1+\overline{w_1}}>r_2,$$

donc

$$\frac{|w_1^\star|}{w_1+\overline{w_1^\star}}<\frac{|w_1|}{w_1+\overline{w_1}}\,\frac{m'p'+r_2}{r_2}<\frac{p'(m'p'+r_2)}{r_2}=p'^\star,$$

enfin

$$|w_2^\star|=\frac{1}{R_2}|w_2|<\frac{q'}{R_2}=q'^\star.$$

c. Si le point $(z_1 z_2)$ appartient à $\mathcal{C}_{mpq}(z)$, le point $(z_1'^\star z_2'^\star)$ appartient à $\mathcal{C}_{m,p,q,}(z'^\star)$. En effet, on a

$$z_1'^\star=\frac{z_1}{z_1+r_2},\qquad z_2'^\star=\frac{1}{R_2}z_2.$$

Les calculs sont identiques à ceux faits en *b* et l'on a

$$0<z_1'^\star+\overline{z_1'^\star}<m_1=\frac{2m^2p^2+r_2m}{r_2^2},$$

de même

$$\frac{|z_1'^\star|}{z_1'^\star+\overline{z_1'^\star}}<p_1=\frac{p(mp+r_2)}{r_2}$$

et

$$|z_2'^\star|<q_2=\frac{q}{R_2}.$$

d. Si le point $(w_1 w_2)$ appartient à $\mathcal{C}_{m'p'q'}(w)$, le point $(w_1'^\star w_2'^\star)$ appartient $\mathcal{C}_{m'_1p'_1q'_1}$. On a, en effet,

$$w_1'^\star=\frac{w_1}{\rho_1},\qquad w_2'^\star=\frac{w_2}{\rho_2},$$

d'où les inégalités

$$0<w_1'^\star+\overline{w_1'^\star}<m'_1=\frac{m'}{\rho_1},\qquad \frac{|w_1'^\star|}{w_1'^\star-\overline{w_1'^\star}}<p'_1=p',\qquad |w_2'^\star|<q'_1=\frac{q'}{\rho_2}.$$

Ces remarques faites, appliquons le théorème I; on a

$$\Gamma_1\,\frac{z_1^\star\overline{z_1^\star}-|z_1^\star|^2}{|z_1^\star|}\geqq\frac{w_1^\star-\overline{w_1^\star}-|w_1^\star|^2}{|w_1^\star|}$$

ou

$$\Gamma_1\,\frac{(z_1^\star+\overline{z_1^\star})}{|z_1^\star|}\left[1-\frac{|z_1^\star|^2}{z_1^\star+\overline{z_1^\star}}\right]\leqq\left|\frac{z_1^\star}{w_1^\star}\right|\,\frac{w_1^\star+\overline{w_1^\star}}{|w_1^\star|}\left[1-\frac{|w_1^\star|^2}{w_1^\star+\overline{w_1^\star}}\right],$$

d'où

$$\left|\frac{z_1^*}{w_1^*}\right| \leqq \Gamma_1 \frac{\dfrac{z_1^*+\overline{z_1^*}}{|z_1^*|}\left[1-\dfrac{|z_1^*|^2}{z_1^*+\overline{z_1^*}}\right]}{\dfrac{w_1^*+\overline{w_1^*}}{|w_1^*|}\left[1-\dfrac{|w_1^*|^2}{w_1^*+\overline{w_1^*}}\right]}.$$

Or on a évidemment

$$\frac{1}{p^*} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{z_1^*+\overline{z_1^*}}{|z_1^*|} \leqq 1, \qquad \frac{1}{p'^*} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{w_1^*+\overline{w_1^*}}{|w_1^*|} \leqq 1.$$

D'autre part une borne supérieure du crochet numérateur est évidemment 1, et une borne inférieure du crochet dénominateur est $1-m'^*p'^{*2}$. On a donc

$$\left|\frac{z_1^*}{w_1^*}\right| < \Gamma_1 \frac{1}{\dfrac{1}{p'^*}(1-m'^*p'^{*2})} = \frac{\Gamma_1 p'^*}{1-m'^*p'^{*2}} = \alpha.$$

Or

$$\left|\frac{z_1^*}{w_1^*}\right| = \left|\frac{z_1}{w_1}\right| \frac{|r_2+w_1|}{r_1} < \alpha$$

entraîne

$$\left|\frac{z_1}{w_1}\right| < \frac{\alpha r_1}{|r_2+w_1|} < \alpha\frac{r_1}{r_2},$$

mais

$$\frac{z_1+\overline{z_1}}{w_1+\overline{w_1}} < \frac{|z_1|}{\dfrac{|w_1|}{p'}} = p'\left|\frac{z_1}{w_1}\right| < \alpha p'\frac{r_1}{r_2}.$$

Donc le rapport $\dfrac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}}$ est borné inférieurement par $\dfrac{r_2}{\alpha p' r_2}$:

$$a < \frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}}$$

avec

$$a = \frac{r_2(1-m'^*p'^{*2})}{\Gamma_1 p'^* p' r_1},$$

où m'^* et p'^* ont les valeurs données dans la remarque b. Appliquons maintenant le théorème II; on a

$$\Gamma_2 \frac{z_1'^*+\overline{z_1'^*}-|z_1'^*|^2}{|z_1'^*|^2} \leqq \frac{w_1'^*+w_1'^*-|w_1'^*|^2}{|w_1'^*|^2}.$$

D'où

$$\Gamma_1 \frac{z_1'^*+\overline{z_1'^*}}{|z_1'^*|}\left[1-\frac{|z_1'^*|^2}{z'^*+\overline{z_1'^*}}\right] \leqq \left|\frac{w'^*}{z'^*}\right| \frac{w_1'^*+\overline{w_1'^*}}{|w_1'^*|}\left[1-\frac{|w_1'^*|^2}{w_1'^*+\overline{w_1'^*}}\right]$$

ou encore

$$\left|\frac{z_1'^*}{w_1'^*}\right| \geqq \Gamma_2 \frac{\dfrac{z_1'^*+\overline{z_1'^*}}{|z_1'^*|}}{\dfrac{w_1'^*+\overline{w_1'^*}}{|w_1'^*|}}\,\frac{1-\dfrac{|z_1'^*|^2}{z_1'^*+\overline{z_1'^*}}}{1-\dfrac{|w_1'^*|^2}{w_1'^*+\overline{w_1'^*}}}.$$

Or on a

$$\frac{1}{p_1} \leqq \frac{1}{2} \frac{z_1'^* + \overline{z_1'^*}}{|z_1'^*|} \leqq 1, \qquad \frac{1}{p_1'} \leqq \frac{1}{2} \frac{w_1'^* + \overline{w_1'^*}}{|w_1'^*|} \leqq 1.$$

Une borne inférieure du numérateur de la seconde fraction de l'inégalité est $1 - m_1 p_1^2$, et 1 est une borne supérieure pour le dénominateur de cette fraction. On a donc

$$\left| \frac{w_1'^*}{z_1'^*} \right| > \Gamma_2 \frac{1 - m_1 p_1^2}{p_1} = \beta.$$

D'autre part

$$\left| \frac{z_1'^*}{w_1'^*} \right| = \left| \frac{z_1}{w_1} \right| \frac{\rho_1}{|z_1 + r_2|} > \beta.$$

Donc

$$\left| \frac{z_1}{w_1} \right| > \frac{\beta |z_1 + r_2|}{\rho_1} > \frac{\beta r_2}{\rho_1},$$

or

$$\frac{z_1 + \overline{z_1}}{w_1 + \overline{w_1}} > \frac{|z_1|}{p |w_1|} > \frac{\beta r_2}{p r_1}.$$

Par conséquent le rapport $\frac{w_1 + \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}}$ est borné supérieurement par $\frac{p r_1}{\beta r_2}$:

$$\frac{w_1 + \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}} < b$$

avec

$$b = \frac{p r_1 p_1}{\Gamma_2 r_2 (1 - m_1 p_1^2)},$$

où p_1 et m_1 ont les valeurs indiquées dans la remarque c. On a donc

$$a < \frac{w_1 + \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}} < b.$$

Bornons maintenant inférieurement le rapport $\frac{K\mathcal{E}(w_1 \overline{w})}{K\mathcal{A}(z_1 \overline{z})}$. On a

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \overline{w})} = \frac{r_2^2 R_2^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} \left(\frac{w_1 - \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}} \right)^2 \frac{\left[\rho_1 - \frac{|w_1|^2}{w_1 + \overline{w_1}} \right]^2 [\rho_2^2 - |w_2|^2]^2}{\left[r_2 + \frac{|z_1|^2}{z_1 + \overline{z_1}} \right]^2 [R_2^2 - |z_2|^2]^2}.$$

Puisqu'on connaît une borne inférieure de $\frac{w_1 + \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}}$, il nous suffit d'en chercher une pour

$$f = \frac{\left[\rho_1 - \frac{|w_1|^2}{w_1 + \overline{w_1}} \right]^2 [\rho_2^2 - |w_2|^2]^2}{\left[r_2 + \frac{|z_1|}{z_1 + \overline{z_1}} \right]^2 [R_2^2 - |z_2|^2]^2}.$$

Or

$$\frac{|w_1|^2}{w_1+\overline{w}_1} = |w_1| \frac{|w_1|}{w_1+\overline{w}_1} < m'p'^2 \qquad (|z_2|<q),$$

$$\frac{|z_1|^2}{z_1+\overline{z}_1} = |z_1| \frac{|z_1|}{z_1+\overline{z}_1} < m\,p^2 \qquad (|w_2|<q).$$

On a donc

$$f > \frac{(\rho_1 - m'p'^2)^2(\rho_2^2 - q'^2)^2}{R_2^4(r_2+mp^2)^2},$$

par conséquent

$$a_1 = \frac{r_2^2(\rho_1 - m'p'^2)^2(\rho_2^2 - q'^2)^2}{R_2^2\rho_1^2\rho_2^2(r_2+mp^2)^2}a^2 < \frac{K_{\mathfrak{A}}(z,\,\overline{z})}{K_{\mathcal{G}}(w,\,\overline{w})}.$$

a_1 est donc une borne inférieure du carré du module du jacobien de w. Limitons maintenant supérieurement le rapport $\frac{K_{\mathfrak{J}}(z,\overline{z})}{K_{\mathfrak{A}}(w,\overline{w})}$; on a

$$\frac{K_{\mathfrak{J}}(z,\,\overline{z})}{K_{\mathfrak{A}}(w,\,\overline{w})} = \frac{r_1^2R_1^2}{r_2^2R_2^2}\left(\frac{w_1+\overline{w}_1}{z_1+\overline{z}_1}\right)^2 \frac{\left[r_2+\frac{|w_1|^2}{w_1+\overline{w}_1}\right]^2[R_2^2-|w_2|^2]^2}{\left[r_1-\frac{|z_1|^2}{z_1+\overline{z}_1}\right]^2[R_1^2-|z_2|^2]^2}.$$

Comme on connaît une borne supérieure de $\frac{w_1+\overline{w}_1}{z_1+\overline{z}_1}$, il nous suffit d'en trouver une pour la fraction du milieu. Il est clair que cette borne est

$$\frac{R_2^4(r_2+m'p'^2)^2}{(r_1-mp^2)^2(R_1^2-q_2)^2},$$

par conséquent

$$\frac{K_{\mathfrak{J}}(z,\,\overline{z})}{K_{\mathfrak{A}}(w,\,\overline{w})} < \frac{R_1^2r_1^2R_2^2b^2(r_2+m'p'^2)^2}{r_2^2(r_1-mp^2)^2(R_1^2-q^2)^2} = b_1,$$

b_1 est donc une borne supérieure pour le carré du module du jacobien.

5. Les transformations qui laissent invariant un point frontière du quatrième ordre. — Considérons encore le bicylindre unitaire

$$\mathcal{E}_1 = \mathbf{E}[\,|z_k|\leqq 1,\; k=1,2]$$

et une T. P. $\mathbf{W}$ changeant $\mathcal{E}_1$ dans un domaine $\mathcal{G}\subset\mathcal{E}_1$ et laissant invariant le point frontière $Q(-1,\,-1)$. Supposons de plus qu'il existe une suite dénombrable de points $\{z_1^{(n)},\,z_2^{(n)}\}$ convergeant vers Q et telle que la suite formée par les images de ces points converge également vers Q. On aura donc

$$\lim_{n=\infty} z_1^{(n)} = \lim_{n=\infty} w_1^{(n)} = \lim_{n=\infty} z_2^{(n)} = \lim_{n=\infty} w_2^{(n)} = -1 \tag{5.1}$$

et nous ferons de plus les hypothèses suivantes

$$(5.2)\qquad \begin{cases} 0 < \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1 - |z_k^{(n)}|^2}{1 - |w_k^{(n)}|^2} = \Gamma_k < \infty & (k = 1, 2), \\ 0 < \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\operatorname{Log}[1 - |z_1^{(n)}|^2]}{\operatorname{Log}[1 - |w_1^{(n)}|^2]} = \Gamma_3 < \infty. \end{cases}$$

Considérons le point $\{z_1^{(n)} z_2^{(n)}\}$ et le point $\{z_1 z_2\}$; on a encore, entre les distances non euclidiennes de ces points et de leurs images, l'inégalité

$$(5.3)\qquad \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{z^{(n)}, z\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\{w^{(n)}, w\}.$$

Posons, comme au début du paragraphe précédent,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\operatorname{Log}[1 - \mathrm{H}^2(z_1^{(n,1)})]}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\operatorname{Log}[1 - \mathrm{H}^2(z_2^{(n,1)})]},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\operatorname{Log}[1 - \mathrm{H}^2(w_1^{(n,1)})]}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{\operatorname{Log}[1 - \mathrm{H}^2(w_2^{(n,1)})]},$$

$$\mathrm{A}_n = \operatorname{Log}[1 + \mathrm{H}(z_1^{(n,1)})], \qquad \mathrm{B}_n = \operatorname{Log}[1 + \mathrm{H}(z_1^{(n,1)})],$$

$$\mathrm{C}_n = \operatorname{Log}[1 + \mathrm{H}(w_1^{(n,1)})], \qquad \mathrm{D}_n = \operatorname{Log}[1 + \mathrm{H}(w_1^{(n,1)})]$$

avec

$$\mathrm{H}(z_k^{(n,1)}) = \frac{|z_k^{(n)} - z_k|}{|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|}$$

et l'on a encore

$$0 < 1 - \mathrm{H}^2(z_k^{(n,1)}) = \frac{[1 - |z_k^{(n)}|^2][1 - |z_k|^2]}{|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2} < 1,$$

il en résulte immédiatement que

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_1 = \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_2 = \lim\limits_{n=\infty} \eta_1 = \lim\limits_{n=\infty} \eta_2 = 0, \\ \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{B}_n = \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{C}_n = \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{D}_n = \operatorname{Log} 2. \end{cases}$$

Avec ces notations, l'inégalité (5.3) s'écrit

$$\frac{1}{\varepsilon_1^2}(1 - 2\mathrm{A}_n\varepsilon_1)^2 + \frac{1}{\varepsilon_2^2}(1 - 2\mathrm{B}_n\varepsilon_2)^2 \geqq \frac{1}{\eta_1^2}(1 - 2\mathrm{C}_n\eta_1)^2 + \frac{1}{\eta_2^2}(1 - 2\mathrm{D}_n\eta_2)^2$$

ou encore

$$(5.5)\qquad \frac{1}{\varepsilon_1^2}(1 - 2\mathrm{A}_n\varepsilon_1)^2 - \frac{1}{\eta_1}(1 - 2\mathrm{C}_n\eta_1)^2 \geqq \frac{1}{\eta_2}(1 - 2\mathrm{D}_n\eta_2)^2 - \frac{1}{\varepsilon_2}(1 - 2\mathrm{B}_n\varepsilon_2)^2,$$

puis

$$(5.6)\qquad \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\eta_1}\right)\left[1 - \frac{2(\mathrm{A}_n + \mathrm{C}_n)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\eta_1}}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\eta_1} + 2(\mathrm{C}_n - \mathrm{A}_n)\right]$$

$$\geqq \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\eta_2}\right)\left(1 - \frac{2(\mathrm{B}_n + \mathrm{D}_n)}{\dfrac{1}{\varepsilon_2} + \dfrac{1}{\eta_2}}\right)\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\varepsilon_2} + 2(\mathrm{B}_n - \mathrm{D}_n)\right),$$

posons

$$\frac{A_n + C_n}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\eta_1}} = \sigma_1^{(n)}, \qquad \frac{B_n + D_n}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\eta_2}} = \sigma_2^{(n)}, \qquad C_n - A_n = \alpha_n, \qquad B_n - D_n = \beta_n.$$

Puisque A_n, B_n, C_n, D_n tendent vers la même limite finie lorsque n augmente indéfiniment tandis que ε_1, ε_2, η_1, η_2 tendent vers zéro, on a

$$\lim_{n=\infty} \sigma_1^{(n)} = \lim_{n=\infty} \sigma_2^{(n)} = \lim_{n=\infty} \alpha_n = \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$$

Les inégalités (5.6) s'écrivent alors :

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\eta_1}\right)(1 - 2\sigma_2^{(n)})\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\eta_1} + 2\alpha_n\right) \\ &\geqq \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\eta_1}\right)(1 - 2\sigma_2^{(n)})\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\beta_n\right). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\varepsilon_k} - \frac{1}{\eta_k} = \text{Log}\,\frac{1 - \text{H}^2(z_k^{(n,1)})}{1 - \text{H}^2(w_k^{(n,2)})} = \text{Log}\,\frac{[1 - |z_k^{(n)}|^2][1 - |z_k|^2]\left[|1 - \overline{w_k^{(n)}} w_k|^2\right]}{[1 - |w_k^{(n)}|^2][1 - |w_k|^2]\left[|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2\right]}$$
$$(k = 1, 2).$$

D'après les hypothèses (5.1) et (5.2), on peut évidemment poser

$$\frac{[1 - |z_k^{(n)}|^2][1 - |z_k|^2]\left[|1 - \overline{w_k^{(n)}} w_k|^2\right]}{[1 - |w_k^{(n)}|^2][1 - |w_k|^2]\left[|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2\right]} = \Gamma_k \frac{[1 - |z_k|^2][|1 + w_k|^2]}{[1 - |w_k|^2][|1 + z_k|^2]} + \rho_k^{(n)},$$

où $\rho_k^{(n)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

D'autre part

$$\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\eta_k} = \text{Log}[1 - \text{H}^2(z_k^{(n,1)})] + \text{Log}[1 - \text{H}^2(w_k^{(n,1)})].$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Log}[1 - \text{H}^2(z_k^{(n,1)})] &= \text{Log}\,\frac{[1 - |z_k^{(n)}|^2][1 - |z_k|^2]}{|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2} \\ &= \text{Log}[1 - |z_k^{(n)}|^2] + \text{Log}\,\frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2}, \\ \text{Log}[1 - \text{H}^2(w_k^{(n,1)})] &= \text{Log}[1 - |w_k^{(n)}|^2] + \text{Log}\,\frac{1 - |w_k|^2}{|1 - \overline{w_k^{(n)}} w_k|^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\eta_k} = 2\,\text{Log}[1 - |z_k^{(n)}|^2] + \text{Log}\,\frac{1 - |w_k^{(n)}|^2}{1 - |z_k^{(n)}|^2} + \text{Log}\,\frac{[1 - |w_k|^2][1 - |z_k|^2]}{|1 - \overline{z_k^{(n)}} z_k|^2 |1 - \overline{w_k^{(n)}} w_k|^2}.$$

Les deux derniers Log de cette formule tendent vers des limites finies lorsque n augmente indéfiniment; on peut donc poser

$$\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\eta_k} = [\text{Log}(1 - |z_k^{(n)}|^2)][2 + \mu_k^{(n)}],$$

$\mu_k^{(n)}$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Les inégalités (5.7) s'écrivent alors

$$
(5.8)\qquad
\begin{aligned}
&\{\mathrm{Log}[1-|z_1^{(n)}|^2]\}(2+\mu_1^{(n)})(1-2\sigma_1^{(n)})\\
&\quad\times\left\{2\alpha_n+\mathrm{Log}\left[\Gamma_1\frac{[1-|z_1|^2]\,|1+w_1|^2}{(1-|w_1|^2)\,|1+z_1|^2}+\rho_1^{(n)}\right]\right\}\\
&\geqq\{\mathrm{Log}[1-|z_2^{(n)}|^2]\}(2+\mu_2^{(n)})(1-2\sigma_2^{(n)})\\
&\quad\times\left\{2\beta_n-\mathrm{Log}\left[\Gamma_2\frac{(1-|z_2|^2)\,|1+w_2|^2}{(1-|w_2|^2)\,|1+z_2|^2}+\rho_2^{(n)}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Divisons maintenant les deux membres de la première de ces inégalités par $\mathrm{Log}[1-|z_2^{(n)}|^2]$, quantité négative quand n est suffisamment grand; on obtient ainsi en passant à la limite :

$$
2\Gamma_3\,\mathrm{Log}\left[\Gamma_1\frac{(1-|z_1|^2)\,|1+w_1|^2}{(1-|w_1|^2)\,|1+z_1|^2}\right]\leqq 2\,\mathrm{Log}\frac{1}{\Gamma_2}\,\frac{(1-|w_2|^2)\,|1+z_2|^2}{(1-|z_2|^2)\,|1+w_2|^2}.
$$

D'où finalement, en passant des Log aux nombres, on a

$$
\left[\Gamma_1\frac{1-|z_1|^2}{|1+z_1|^2}\,\frac{|1+w_1|^2}{1-|w_1|^2}\right]^{\Gamma_3}\leqq\frac{1}{\Gamma_2}\,\frac{1-|w_2|^2}{|1+w_2|^2}\,\frac{|1+z_2|^2}{1-|z_2|^2}.
$$

Telle est la formule qui généralise au cas des points frontières du quatrième ordre celle obtenue par Miniatoff pour les points du second ordre.

Nous voulons étendre maintenant les propriétés que nous venons d'obtenir à un domaine $\mathcal{B}$ plus général. Nous ferons sur $\mathcal{B}$ les hypothèses suivantes :

1° $\mathcal{B}$ est tout entier à distance finie.

2° La frontière de $\mathcal{B}$ comprend au moins un morceau des deux hypersurfaces analytiques

$$
\iota_1^{(3)}=\mathbf{E}[z_1=h(z_2,\lambda),\ 0\leqq\lambda\leqq 2\pi],\qquad \iota_2^{(3)}=\mathbf{E}[z_2=e^{i\mu},\ 0\leqq\mu\leqq 2\pi]\quad (^1),
$$

où $h(z_2,\lambda)$ est, pour toute valeur de λ, une fonction analytique de z_2 définie dans un domaine suffisamment grand, dont la dérivée partielle par rapport à λ est toujours finie et positive; les $\iota^{(3)}$ sont donc les ensembles réunions des morceaux de surfaces analytiques $\mathcal{J}_1^{(2)}(\lambda)$ et $\mathcal{J}_2^{(2)}(\mu)$.

3° Le point frontière Q appartient à chacune des surfaces $\mathcal{J}_1^{(2)}(\lambda_0)$ et $\mathcal{J}_2^{(2)}(\mu_0)$. Par la transformation

$$
z_1=\frac{h(z_2,\lambda_0)-Z_1}{ih'_\lambda(z_2,\lambda_0)},
$$
$$
z_2=Z_2-e^{i\mu_0},
$$

(1) Bien que la forme de $\iota_2^{(3)}$ soit très particulière, ce cas se rencontre assez fréquemment. L'étude des domaines dont la frontière est formée d'un nombre fini d'hypersurfaces analytiques est d'un très haut intérêt; l'intersection de ces hypersurfaces est la surface que M. Bergmann appelle *surface remarquable* du domaine; elle joue, au point de vue de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, un rôle analogue à celui de la courbe frontière dans le cas d'une seule variable.

nous introduisons des coordonnées simultanément normales par rapport aux lamelles $\mathcal{J}_1^{(2)}(\lambda_0)$ et $\mathcal{J}_2^{(2)}(\mu_0)$. La première est située dans le plan $z_1 = 0$, la seconde dans le plan $z_2 = 0$; nous supposons que si le point $\{\gamma\}$ n'appartient ni à $\mathcal{J}_1^{(2)}(\lambda_0)$ ni à $\mathcal{J}_2^{(2)}(\mu_0)$, les points $\{0, \gamma\}$ et $\{\gamma, 0\}$ n'appartiennent pas $\mathcal{B}$.

4° Enfin nous supposerons satisfaites les hypothèses 4° et 5° que nous avons déjà faites dans le cas du point frontière du second ordre.

Dans ces conditions M. Bergmann a montré que les domaines de comparaison de $\mathcal{B}$ au point Q sont des bicylindres et que ce point appartient à la surface remarquable de ces bicylindres. Un point frontière tel que Q est dit point frontière du quatrième ordre.

On a alors le théorème suivant

Théorème I. — *Étant donné un domaine $\mathcal{B}$ satisfaisant aux hypothèses précédentes, un point* Q *de sa frontière du quatrième ordre et une* T. P. **W** *laissant fixe* Q *et changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, s'il existe une suite dénombrable de points $\{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}\}$ convergeant vers* Q *telle que la suite formée par les images de ces points converge également vers* Q *et que*

$$L_1^{(n)} = \frac{F(z_1^{*(n)})}{F(w_1^{*(n)})}, \qquad L_2^{(n)} = \frac{F(z_2^{*(n)})}{F(w_2^{*(n)})}, \qquad L_3^{(n)} = \frac{\operatorname{Log}[F(z_1^{*(n)})]}{\operatorname{Log}[F(z_2^{*(n)})]},$$

tendent vers des limites finies et positives Γ_1, Γ_2 et Γ_3 lorsque n augmente indéfiniment, on a, en tout point $\{z_1, z_2\}$ suffisamment voisin de Q, *l'inégalité*

$$\Gamma_2 \frac{F(z_2^*)}{|z_2^*|^2} \frac{|w_2^*|^2}{F(w_2^*)} \leq \left[\frac{1}{\Gamma_1} \frac{F(w_1^*)}{|w_1^*|^2} \frac{|z_1^*|^2}{F(z_1^*)}\right]^{\Gamma_3}$$

en posant

$$F(u) = u + \bar{u} - u\bar{u}, \qquad z_k^* = \frac{z_k}{\theta}, \qquad w_k^* = \frac{w_k}{w_k + \theta} \qquad (k = 1, 2),$$

où θ *est un nombre ne dépendant que du domaine* $\mathcal{B}$.

Démonstration. — L'analogie extrêmement étroite entre la démonstration de ce théorème (et de ceux qui vont suivre) avec celle que nous avons donnée au paragraphe précédent nous permet d'être très bref.

M. Bergmann a démontré que l'on pouvait prendre comme domaine de comparaison intérieur le bicylindre

$$\mathcal{J} = \mathbf{E}[\,|z_k - \theta| < \theta,\ k = 1, 2]$$

et pour domaine de comparaison extérieur le bicylindre

$$\mathcal{A} = \mathbf{E}[\,|z_k + \theta| < \theta,\ k = 1, 2],$$

θ ne dépendant que de $\mathcal{B}$.

Dans ces conditions la transformation

$$(\mathbf{T}'_1) \qquad z_1 = \frac{\theta\zeta_1}{\theta - \zeta_1}, \qquad z_2 = \frac{\theta\zeta_2}{\theta - \zeta_2}$$

change $\mathcal{J}$ en $\mathcal{A}$.

La transformation $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}\mathbf{T}'^{-1}_1$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. On a donc la distance non euclidienne de deux points A et B et celle de leurs images A_1, B_1 mesurée avec la métrique relative à $\mathcal{A}$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\{A, B\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}\{A_1, B_1\}.$$

La transformation

$$(\mathbf{T}'_2) \qquad z_k = \frac{\theta\zeta_k}{1 - \zeta_k} \qquad (k = 1, 2)$$

change le bicylindre unitaire $\mathcal{E}_1 = \mathbf{E}[|\zeta_k - 1| < 1, k = 1, 2]$ dans le bicylindre $\mathcal{A}$.

On a donc

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\{A.B\} = \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}'^{-1}_2 A, \mathbf{T}'^{-1}_2 B\},$$

d'où

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}'^{-1}_2 A, \mathbf{T}'^{-1}_2 B\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}'^{-1}_2 A_1, \mathbf{T}'^{-1}_2 B_1\};$$

prenons pour A le point $\mathbf{T}'_1\{z^{(n)}\}$ et pour θ le point $\mathbf{T}'_1\{z^{(n)}\}$. Il vient

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{W}_1 A = \mathbf{W}\mathbf{T}'^{-1}_1 A = \mathbf{W}\mathbf{T}'^{-1}_1 \mathbf{T}'_1\{z^{(n)}\} = \mathbf{W}\{z^{(n)}\} = \{w^{(n)}\}, \\ B_1 &= \mathbf{W}_1 B = \mathbf{W}\mathbf{T}'^{-1}_1 B = \mathbf{W}\mathbf{T}'^{-1}_1 \mathbf{T}'_1\{\ z\ \} = \mathbf{W}\{\ z\ \} = \{\ w\ \}, \end{aligned}$$

d'où

$$(5.9) \qquad \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}'^{-1}_2\{w^{(n)}\}, \mathbf{T}'^{-1}_2\{w\}\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{T}'_1\{z^{(n)}\}, \mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{T}'_1\{z\}\}.$$

Et l'on a

$$\mathbf{T}'^{-1}_2\{w\} = w^{\star}_k = \frac{w_k}{w_k + \theta}, \qquad \mathbf{T}'^{-1}_2\mathbf{T}'_1\{z\} = z^{\star}_k = \frac{z_k}{\theta} \qquad (k = 1, 2).$$

En faisant croître n indéfiniment dans (5.9) et en passant à la limite, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

Théorème II. — *Dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent, en remplaçant seulement dans* $L^{(n)}_1$, $L^{(n)}_2$, $L^{(n)}_3$ *les* $z^\star$ *et* $w^\star$ *par des* $z'^\star$ *et* $w'^\star$ *et* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *par* Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3, *si l'on suppose de plus qu'il existe à l'intérieur de* $\mathcal{G}$ *un bicylindre* $\mathcal{E} = \mathbf{E}[|z_k - r| < r,\ k = 1, 2]$, *on a, en tout point* $\{z_1, z_2\}$ *suffisamment voisin de* Q, *l'inégalité*

$$\Gamma'_2 \frac{F(w'^\star_2)}{|w'^\star_2|^2} \frac{|z'^\star_2|^2}{F(z'^\star_1)} \leqq \left[\frac{1}{\Gamma'_1} \frac{F(z'^\star_1)}{|z'^\star_1|^2} \frac{|w'^\star_1|^2}{F(w'^\star_1)}\right]^{\Gamma'_3}$$

en posant

$$z'^\star_k = \frac{z_k}{z_k + \theta}, \qquad w'^\star_k = \frac{w_k}{\theta} \qquad (k = 1, 2).$$

Démonstration. — Conservons les notations précédentes, la transformation

$$(\mathbf{T}'_3) \qquad z_k = \frac{\theta\zeta_k}{r - \zeta_k} \qquad (k = 1, 2),$$

change $\mathcal{E}$ en $\mathcal{A}$. La transformation $\mathbf{W}^{-1}$ change $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ en $\mathcal{E}^{\star} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$; par conséquent la transformation $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3'^{-1}$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{E}^{\star} \subset \mathcal{A}$. On peut donc encore écrire, si A et B sont deux points de $\mathcal{A}$ et A_2 et B_2 leurs images par $\mathbf{W}_2$,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\{A, B\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}\{A_2, B_2\}$$

ou

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2'^{-1}A, \mathbf{T}_2'^{-1}B\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2'^{-1}A_2, \mathbf{T}_2'^{-1}B_2\};$$

prenons pour A le point $\mathbf{T}_3'\{w^{(n)}\}$ et pour B le point $\mathbf{T}_3'\{w\}$; on a

$$A_2 = \mathbf{W}_2 A = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3'^{-1}\mathbf{T}_3\{w^{(n)}\} = \mathbf{W}^{-1}\{w^{(n)}\} = \{z^{(n)}\},$$
$$B_2 = \mathbf{W}_2 B = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{T}_3'^{-1}\mathbf{T}_3\{\ w\ \} = \mathbf{W}^{-1}\{\ w\ \} = \{\ z\ \},$$

d'où

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2'^{-1}\mathbf{T}_3'\{w^{(n)}\}, \mathbf{T}_2'^{-1}\mathbf{T}_3'\{w\}\} \geqq \mathcal{D}_{\mathcal{E}_1}\{\mathbf{T}_2'^{-1}\{z^{(n)}\}, \mathbf{T}_2'^{-1}\{z\}\} \tag{5.10}$$

avec

$$\mathbf{T}_2'^{-1}\mathbf{T}_3\{w\} = w_k'^{\star} = \frac{w_k}{r}, \qquad \mathbf{T}_2'^{-1}\{z\} = z_k'^{\star} = \frac{z_k}{z_k + 0} \qquad (k = 1, 2).$$

En faisant croître n indéfiniment dans (5.10) et en passant à la limite, on obtient les inégalités de l'énoncé.

Théorème III. — *Sous les mêmes hypothèses qu'aux deux théorèmes précédents et en supposant en outre que la* T. P. $\mathbf{W}$ *change le domaine*

$$\mathcal{C}(z) = \mathbf{E}\left[0 < m_1 < z_1 + \bar{z}_1 < m_2, \frac{|z_1|}{z_1 + \bar{z}_1} < m_3, 0 < z_2 + \bar{z}_2 < m_4, \frac{|z_2|}{z_2 + \bar{z}_2} < m_5\right],$$

en un domaine intérieur au domaine

$$\mathcal{C}(w) = \mathbf{E}\left[0 < m_1' < w_1 + \bar{w}_1 < m_2', \frac{|w_1|}{w_1 + \bar{w}_1} < m_3', 0 < w_2 + \bar{w}_2 < m_4', \frac{|w_2|}{w_2 + \bar{w}_2} < m_5'\right].$$

Le module du jacobien de la transformation $\mathbf{W}$ *est borné inférieurement et supérieurement en tout point du domaine* $\mathcal{C}(z)$ *par des quantités ne dépendant que des* m_i, m_i', Γ_j, Γ_j' *et de* $\mathcal{B}$.

Démonstration. — Il résulte de nos hypothèses que

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}.$$

On a donc

$$K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w}) < K(w, \bar{w}) < K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w}),$$

$K(z, \bar{z})$ étant toujours la fonction noyau du domaine.

De même on a

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A},$$

donc

$$K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z}) < K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}) < K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z}).$$

Nous en concluons

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})} \leqq \frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{G}}(w, \bar{w})} \leqq \frac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})}$$

et comme

$$\frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})} = \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2.$$

On voit que, pour démontrer notre proposition, il suffit de trouver une borne inférieure pour $\dfrac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})}$ et une borne supérieure pour $\dfrac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})}$. Des calculs faits au paragraphe précédent, on tire immédiatement

$$K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z}) = \frac{\theta^4}{\pi^2[\theta(z_1 + \bar{z}_1) + z_1\bar{z}_1]^2[\theta(z_2 + \bar{z}_2) + z_2\bar{z}_2]^2},$$

de même

$$K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z}) = \frac{\theta^4}{\pi^2[\theta(z_1 + \bar{z}_1) - z_1\bar{z}_1]^2[\theta(z_2 + \bar{z}_2) - z_2\bar{z}_2]^2}$$

et

$$K_{\mathcal{E}}(z, \bar{z}) = \frac{r^4}{\pi^2[r(z_1 + \bar{z}_1) - z_1\bar{z}_1]^2[r(z_2 + \bar{z}_2) - z_2\bar{z}_2]^2}.$$

On en conclut que

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{E}}(w, \bar{w})} = \frac{(w_1 + \bar{w}_1)^2(w_2 + \bar{w}_2)^2}{(z_1 + \bar{z}_1)^2(z_2 + \bar{z}_2)^2} \frac{\left[r - \dfrac{|w_1|^2}{w_1 + \bar{w}_1}\right]^2\left[r - \dfrac{|w_2|^2}{w_2 + \bar{w}_2}\right]^2}{\left[\theta + \dfrac{|z_1|^2}{z_1 + \bar{z}_1}\right]^2\left[\theta + \dfrac{|z_2|^2}{z_2 + \bar{z}_2}\right]^2} \frac{\theta^4}{r^4}$$

et

$$\frac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w, \bar{w})} = \frac{(w_1 + \bar{w}_1)^2(w_2 + \bar{w}_2)^2}{(z_1 + \bar{z}_1)^2(z_2 + \bar{z}_2)^2} \frac{\left[\theta + \dfrac{|w_1|^2}{w_1 + \bar{w}_1}\right]^2\left[\theta + \dfrac{|w_2|^2}{w_2 + \bar{w}_2}\right]}{\left[\theta - \dfrac{|z_1|^2}{z_1 + \bar{z}_1}\right]^2\left[\theta - \dfrac{|z_2|^2}{z_2 + \bar{z}_2}\right]}.$$

Des hypothèses faites, il résulte

$$|z_1| < m_2 m_3, \qquad |z_2| < m_4 m_5, \qquad |w_1| < m'_2 m'_3, \qquad |w_2| < m'_4 m'_5$$

et par conséquent

$$\frac{|z_1|^2}{z_1 + \bar{z}_1} < m_2 m_3^2, \qquad \frac{|z_2|^2}{z_2 + \bar{z}_2} < m_4 m_5^2,$$

$$\frac{|w_1|^2}{w_1 + \bar{w}_1} < m'_2 m'^2_3, \qquad \frac{|w_2|^2}{w_2 + \bar{w}_2} < m'_4 m'^2_5,$$

une borne inférieure de

$$\frac{\left[r - \dfrac{|w_1|^2}{w_1 + \bar{w}_1}\right]^2\left[r - \dfrac{|w^2|^2}{w_2 + \bar{w}_2}\right]^2}{\left[\theta + \dfrac{|z_1|^2}{z_1 + \bar{z}_1}\right]^2\left[\theta + \dfrac{|z_2|^2}{z_2 + \bar{z}_2}\right]^2}$$

est

$$\frac{(r - m'_2 m'^2_3)^2(r - m'_4 m'^2_5)^2}{(\theta + m_2 m_3^2)^2(\theta + m_4 m_5^2)^2} = \alpha_1,$$

de même une borne supérieure de

$$\frac{\left[\theta + \dfrac{|w_1|^2}{w_1 + \bar{w}_1}\right]^2 \left[\theta + \dfrac{|w_2|^2}{w_2 + \bar{w}_2}\right]^2}{\left[\theta + \dfrac{|z_1|^2}{z_1 + \bar{z}_1}\right]^2 \left[\theta - \dfrac{|z_2|^2}{z_2 + \bar{z}_2}\right]^2}$$

est

$$\frac{(\theta + m'_2 m'^2_3)^2 (\theta + m'_4 m'^2_5)^2}{(\theta - m_2 m_3^2)^2 (\theta - m_4 m_5^2)^2} = \beta_1.$$

Pour avoir démontré notre proposition, il nous suffit de trouver des bornes inférieures et supérieures pour

$$\frac{(w_1 + \bar{w}_1)(w_2 + \bar{w}_2)}{(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2)}.$$

C'est ce que nous allons chercher maintenant. On peut trouver immédiatement ces bornes pour $\dfrac{w_1 + \bar{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1}$. En effet, par hypothèses, on a

$$0 < m_1 < z_1 + \bar{z}_1 < m_2, \qquad 0 < m'_1 < w_1 + \bar{w}_1 < m'_2.$$

Donc

$$\frac{m_1}{m'_2} < \frac{z_1 + \bar{z}_1}{w_1 + \bar{w}_1} < \frac{m_2}{m'_1}$$

ou

$$\frac{m'_1}{m_2} < \frac{w_1 + \bar{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1} < \frac{m'_2}{m_1}.$$

Cela étant, les remarques suivantes sont à faire :

a. Si le point $\{z_1, z_2\}$ appartient à $\mathcal{C}(z)$, le point $\{z_1^\star\ z_2^\star\}$ appartiendra à un domaine analogue. Les démonstrations sont les mêmes qu'aux remarques faites à propos du théorème III du paragraphe précédent. Aussi bornons-nous à donner les résultats

$$m_1^\star = \frac{m_1}{\theta}, \qquad m_2^\star = \frac{m_2}{\theta}, \qquad m_3^\star = m_3, \qquad m_4^\star = \frac{m_4}{\theta}, \qquad m_3^\star = m_5.$$

b. Si le point $\{w_1\ w_2\}$ appartient à $\mathcal{C}(w)$, le point $\{w_1^\star\ w_2^\star\}$ appartient à un domaine analogue. On trouve aisément

$$m'^\star_1 = \frac{\theta m'_1}{\theta^2 + \theta m'_2 + m'^2_2 m'^2_3}, \qquad m'^\star_2 = \frac{2 m'^2_2 m'^2_3 + \theta m'_2}{\theta^2}, \qquad m'^\star_3 = \frac{m'_3 (m'_2 m'_3 + \theta)}{\theta},$$
$$m'^\star_4 = \frac{2 m'^2_4 m'^2_5 + \theta m'_4}{\theta^2}, \qquad m'^\star_5 = \frac{m'_5 (m'_4 m'_5 + \theta)}{\theta}.$$

c. Si le point $\{z_1\ z_2\}$ appartient à $\mathcal{C}(z)$, le point $\{z_1'^\star\ z_2'^\star\}$ appartient à un domaine analogue. On arrive facilement aux valeurs

$$\mu_1 = \frac{\theta m_1}{\theta^2 + \theta m_2 + m_2^2 m_3^2}, \qquad \mu_2 = \frac{2 m_2^2 m_3 + \theta m_2}{\theta^2}, \qquad \mu_3 = \frac{m_3(m_2 m_3 + \theta)}{\theta},$$

$$\mu_4 = \frac{2 m_2^2 m_3^2 + \theta m_4}{\theta^2}, \qquad \mu_5 = \frac{m_5(m_4 m_5 + \theta)}{\theta}.$$

d. Si le point $\{w_1\ w_2\}$ appartient à $\mathcal{C}(w)$, le point $\{w_1'^{*}\ w_2'^{*}\}$ appartient aussi à un domaine analogue; on obtient

$$\mu_1' = \frac{m_1'}{r}, \qquad \mu_2' = \frac{m_2'}{r}, \qquad \mu_3' = m_3', \qquad \mu_4' = \frac{m_4'}{r}, \qquad \mu_5' = m_5'.$$

Nous sommes maintenant en état de trouver des bornes pour $\dfrac{w_2 + \overline{w}_2}{z_2 + \overline{z}_2}$. Appliquons le théorème I; on a

$$\Gamma_2 \frac{|w_2^*|^2}{F(w_2^*)} \frac{F(z_2^*)}{|z_2^*|^2} \leqq \left[\frac{1}{\Gamma_1} \frac{F(w_1^*)}{|w_1^*|^2} \frac{|z_1^*|^2}{F(z_1^*)}\right]^{\Gamma_3}$$

ou encore

$$\Gamma_2 \frac{z_2^* + \overline{z}_2^*}{|z_2^*|}\left[1 - \frac{|z_2^*|^2}{z_2^* + \overline{z}_2^*}\right] \frac{|w_2^*|}{(w_2^* + \overline{w}_2^*)\left[1 - \dfrac{|w_2^*|^2}{w_2^* + \overline{w}_2^*}\right]} \left|\frac{w_2^*}{z_2^*}\right| \tag{5.11}$$

$$\leqq \left[\frac{1}{\Gamma_1} \frac{F(w_1^*)}{|w_1^*|^2} \frac{|z_1^*|^2}{F(z_1^*)}\right]^{\Gamma_3}.$$

Le second membre s'écrit

$$\left\{\frac{\dfrac{1}{\Gamma_1} \dfrac{w_1^* + \overline{w}_1^*}{|w_1^*|}\left[1 + \dfrac{|w_1^*|^2}{w_1^* + \overline{w}_1^*}\right]}{\dfrac{z_1^* + \overline{z}_1^*}{|z_1^*|}\left[1 - \dfrac{|z_1^*|^2}{z_1^* + \overline{z}_1^*}\right]} \left|\frac{z_1^*}{w_1^*}\right|\right\}^{\Gamma_3}.$$

Nous allons chercher une borne supérieure pour cette expression qui peut encore s'écrire

$$\left\{\frac{1}{\Gamma_1} \frac{w_1^* + \overline{w}_1^*}{z_1^* + \overline{z}_1^*} \frac{1 - \dfrac{|w_1^*|^2}{w_1^* + \overline{w}_1^*}}{1 - \dfrac{|z_1^*|^2}{z_1^* + \overline{z}_1^*}} \left|\frac{z_1^*}{w_1^*}\right|\right\}^{\Gamma_3}.$$

Des remarques *a* et *b*, il résulte que

$$\frac{m_1'^*}{m_2^*} < \frac{w_1^* + \overline{w}_1^*}{z_1^* + \overline{z}_1^*} < \frac{m_2'^*}{m_1^*},$$

et les inégalités

$$\frac{1}{m_3^*} \leqq \frac{1}{2} \frac{z_1 + \overline{z}_1^*}{|z_1^*|} \leqq 1, \qquad \frac{1}{m_3'^*} \leqq \frac{1}{2} \frac{w_1^* + \overline{w}_1^*}{|w_1^*|} \leqq 1$$

donnent

$$\frac{1}{m_3'^*} \leqq \frac{w_1^* + \overline{w_1^*}}{z_1^* + \overline{z_1^*}} \left| \frac{z_1^*}{w_1^*} \right| < m_3^*,$$

donc

$$\frac{1}{m_3'^*} \frac{m_1^*}{m_2'^*} \leqq \left| \frac{z_1^*}{w_1^*} \right| \leqq m_3^* \frac{m_2^*}{m_1'^*}$$

et comme

$$\frac{|z_1^*|^2}{z_1^* + \overline{z_1^*}} < m_3^* |z_1^*| < m_2^* m_3^*,$$

on a, pour borne supérieure du second membre de l'inégalité (5.11),

$$\left[\frac{1}{\Gamma_1} \frac{m_2'^*}{m_1^*} \frac{1}{1 - m_2^* m_3^{*2}} m_3^{*2} \frac{m_2^{*2}}{m_1'^{*2}} \right]^{\Gamma_3} = \alpha_2;$$

on tire de (5.11)

$$\left| \frac{w_2^*}{z_2^*} \right| \leqq \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \frac{\dfrac{w_2^* + \overline{w_2^*}}{|w_2^*|} \left[1 - \dfrac{|w_2^*|^2}{w_2^* + \overline{w_2^*}} \right]}{\dfrac{z_2^* + \overline{z_2^*}}{|z_2^*|} \left[1 - \dfrac{|z_2^*|^2}{z_2^* + \overline{z_2^*}} \right]},$$

or

$$\frac{1}{m_5^*} \leqq \frac{1}{2} \frac{z_2^* + \overline{z_2^*}}{|z_1^*|} \leqq 1, \qquad \frac{1}{m_5'^*} \leqq \frac{1}{2} \frac{w_2^* + \overline{w_2^*}}{|w_2^*|} \leqq 1,$$

d'où

$$\frac{|z_2^*|^2}{z_2^* + \overline{z_2^*}} = \frac{|z_2^*|}{z_2^* + \overline{z_2^*}} |z_2^*| < m_4^* m_5^{*2};$$

il en résulte immédiatement que

$$\left| \frac{w_2^*}{z_2^*} \right| < \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \frac{2 m_5^*}{1 - m_4^* m_5^{*2}} = \alpha_3,$$

mais

$$\left| \frac{w_2^*}{z_2^*} \right| = \left| \frac{w_2}{w_2 + \theta} \frac{\theta}{z_2} \right| = \left| \frac{w_2}{z_2} \right| \frac{\theta}{|w_2 + \theta|} < \alpha_3$$

ou

$$\left| \frac{w_2}{z_2} \right| < \alpha_3$$

et comme

$$\frac{w_2 + \overline{w_2}}{z_2 + \overline{z_2}} < \frac{|w_2|}{\dfrac{|z_2|}{m_5}} < m_5 \alpha_3.$$

Donc $\dfrac{w_2 + \overline{w_2}}{z_2 + \overline{z_2}}$ est borné supérieurement et l'on a

$$\left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2 < \frac{K_{\mathfrak{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathfrak{A}}(w, \bar{w})} < m_5^2 \alpha_3^2 \frac{m_2'^2}{m_1^2} \beta_1.$$

Nons avons ainsi obtenu une borne supérieure du carré du module du jacobien.

Appliquons maintenant le théorème II. On a

$$\frac{1}{\Gamma'_2}\frac{|w'^{\star}_2|^2}{F(w'^{\star}_2)}\frac{F(z'^{\star}_2)}{|z'^{\star}_2|^2} \geqq \left[\Gamma'_1\frac{|z'^{\star}_1|^2}{F(z'^{\star}_1)}\frac{F(w'^{\star}_1)}{|w'^{\star}_1|^2}\right]^{\Gamma'_3}. \tag{5.12}$$

Cherchons une borne inférieure du second membre écrit sous la forme

$$\left\{\frac{\Gamma'_1\dfrac{w'^{\star}_1+\overline{w'^{\star}_1}}{|w'^{\star}_1|}\left[1-\dfrac{|w'^{\star}_1|^2}{w'^{\star}_1+\overline{w'^{\star}_1}}\right]}{\dfrac{z'^{\star}_1+\overline{z'^{\star}_1}}{|z'^{\star}_1|}\left[1-\dfrac{|z'^{\star}_1|^2}{z'^{\star}_1+\overline{z'^{\star}_1}}\right]}\left|\frac{z'^{\star}_1}{w'^{\star}_1}\right|\right\}^{\Gamma'_3},$$

des remarques c et d, il résulte que

$$\frac{\mu'_1}{\mu_2} < \frac{w'^{\star}_1+\overline{w'^{\star}_1}}{z'^{\star}_1+\overline{z'^{\star}_1}} < \frac{\mu'_2}{\mu_1}, \qquad \frac{1}{\mu_3} \leqq \frac{1}{2}\frac{z'^{\star}_1+\overline{z'^{\star}_1}}{|z'^{\star}_1|} \leqq 1, \qquad \frac{1}{\mu'_3} \leqq \frac{1}{2}\frac{w'^{\star}_1+\overline{w'^{\star}_1}}{|w'^{\star}_1|} \leqq 1,$$

$$\frac{1}{\mu'_3} \leqq \frac{w'^{\star}_1+\overline{w'^{\star}_1}}{z'^{\star}_1+\overline{z'^{\star}_1}}\left|\frac{z'^{\star}_1}{w'^{\star}_1}\right| < \mu_3, \qquad \frac{1}{\mu'_3}\frac{\mu_1}{\mu'_2} < \left|\frac{z'^{\star}_1}{w'^{\star}_1}\right| < \mu_3\frac{\mu_2}{\mu'_1}.$$

La borne inférieure de (5.12) est donc

$$\beta_2 = \left[\Gamma'_1\frac{1}{\mu'^2_3}\frac{\mu_1}{\mu'_2}\right]^{\Gamma'_3}.$$

On a, par conséquent, d'après (5.12),

$$\left|\frac{w'^{\star}_2}{z'^{\star}_2}\right| > \Gamma'_2\beta_2\frac{\dfrac{w'^{\star}_2+\overline{w'^{\star}_2}}{|w'^{\star}_2|}}{\dfrac{z'^{\star}_2+\overline{z'^{\star}_2}}{|z'^{\star}_2|}}\;\frac{1-\dfrac{|w'^{\star}_2|^2}{w'^{\star}_2+\overline{w'^{\star}_2}}}{1-\dfrac{|z'^{\star}_2|^2}{z'^{\star}_2+\overline{z'^{\star}_2}}}.$$

En vertu toujours des remarques c et d, on a

$$\frac{1}{\mu'_4} \leqq \frac{1}{2}\frac{w'^{\star}_2+\overline{w'^{\star}_2}}{|w'^{\star}_2|} \leqq 1,$$

$$\frac{1}{\mu_4} \leqq \frac{1}{2}\frac{z'^{\star}_2+\overline{z'^{\star}_2}}{|z'^{\star}_2|} \leqq 1,$$

$$\frac{|z'^{\star}_2|^2}{z'^{\star}_2+\overline{z'^{\star}_2}} < \mu^2_5\mu_4;$$

d'où

$$\left|\frac{w'^{\star}_2}{z'^{\star}_2}\right| > \frac{\Gamma'_2\beta_2}{\mu'_4(1-\mu^2_5\mu_4)} = \beta_3,$$

or

$$\left|\frac{w'^{\star}_2}{z'^{\star}_2}\right| = \left|\frac{w_2}{r}\frac{z_2+\theta}{z_2}\right| = \left|\frac{z_2+\theta}{r}\right|\left|\frac{w_2}{z_2}\right| > \frac{\theta}{r}\left|\frac{w_2}{z_2}\right| > \beta_3.$$

Donc

$$\left|\frac{w_2}{z_2}\right| > \frac{r\beta_3}{\theta}.$$

Or

$$\frac{w_2+\overline{w_2}}{z_2+\overline{z_2}} > \frac{|w_2|}{m'_5|z_2|} = \frac{1}{m'_5}\left|\frac{w_2}{z_2}\right| = \frac{r\beta_3}{\theta m'_5}.$$

Il en résulte

$$\frac{w_2 + \overline{w}_2}{z_2 + \overline{z}_2} > \frac{r\beta_3}{\theta m'_5}.$$

Et l'on aura

$$\frac{\beta_3^2}{m_5'^2}\,\frac{m_1'^2}{m_2^2}\,\alpha_1\left(\frac{\theta}{r}\right)^2 < \frac{K_{\mathfrak{a}}(z, \overline{z})}{K_{\mathcal{S}}(w, \overline{w})} = \left|\frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1, z_2)}\right|^2.$$

Notre proposition est démontrée.

Remarque I. — Dans le cas où $\Gamma_3 = \Gamma'_3 = 1$, on peut prendre $m_1 = m'_1 = 0$, mais, dans ces conditions, les bornes que nous venons de donner ne sont plus valables. Cependant un calcul analogue à celui fait au paragraphe précédent pour le théorème III permet de trouver ces nouvelles bornes.

Remarque II. — Il est évident que les théorèmes III, que nous venons de donner, permettent de donner pour certains éléments géométriques, tels que : volumes, surfaces, etc., d'une figure $\mathcal{F}^\star$ image d'une figure $\mathcal{F}$ par une T. P. **W** satisfaisant aux conditions indiquées des bornes inférieures et supérieures en fonction des éléments correspondants de $\mathcal{F}$.