JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL SEGOND

Aire et congruence de gravité d'une courbe gauche fermée

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 101-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__101_0>

Aire et congruence de gravité d'une courbe gauche fermée;

PAR MARCEL SEGOND.

---

1. Le théorème suivant n'est probablement pas nouveau :

Étant donnée une courbe gauche fermée, on peut trouver une courbe plane (par exemple un cercle, une ellipse, un triangle) telle que les aires des projections des deux courbes sur un plan quelconque soient égales.

Si simple que soit la démonstration analytique, il n'est cependant pas sans intérêt de remarquer que le fait en question résulte immédiatement des propriétés du moment résultant d'un système de vecteurs.

Soient, en effet, un vecteur dans l'espace et d'autre part un plan et une droite rectangulaires; la projection sur la droite, du moment du vecteur par rapport au point d'intersection est identique au moment par rapport au même point de la projection du vecteur sur le plan; la même propriété a lieu pour un système de vecteurs, et en particulier pour un système de vecteurs de résultante nulle (cas auquel les moments sont constants en grandeur et direction).

D'autre part il est connu et d'ailleurs évident que, si un système de vecteurs est constitué par les côtés d'un polygone plan parcouru dans un sens déterminé, son moment résultant est égal au double de l'aire du polygone.

Rapprochant ces deux énoncés, on voit que si l'on oriente le pourtour d'un polygone gauche de manière à avoir un système de vecteurs, l'aire de sa projection sur un plan quelconque est égale à la moitié de la projection sur une droite perpendiculaire au plan du moment résultant du système.

Il suffit alors de considérer, dans un plan perpendiculaire à ce moment résultant, une courbe fermée d'aire égale à la moitié de la mesure dudit moment; c'est bien la courbe dont il fallait prouver l'existence pour le polygone gauche considéré; et toute courbe gauche fermée peut être considérée comme limite d'un polygone.

Il résulte de cette démonstration que l'on peut à volonté supposer dans l'énoncé du théorème les deux courbes non orientées ou orientées.

Étant donnée une courbe gauche fermée, la somme des carrés des aires de ses projections sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

Étant données deux courbes gauches fermées, la somme des produits des aires de leurs projections sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

Le théorème initial est visiblement un théorème de *géométrie affine*. Il définit l'*aire* de la courbe gauche donnée, ainsi que sa *direction de plans*. Sur cette direction, l'aire de la projection de la courbe est maxima; sur toute direction perpendiculaire, elle est nulle; au point de vue affine, il faut dire que l'aire de la projection est nulle quand on projette parallèlement à la direction de plans de la courbe.

Un cas particulier est celui où l'aire de la courbe est nulle; la direction de plans est alors indéterminée, l'aire de toute projection parallèle est nulle; ceci exige évidemment trois conditions.

Soit, par exemple, un quadrilatère gauche : la direction de plans est celle des deux diagonales, ou si l'on préfère, du plan des milieux des côtés. Pour que l'aire soit nulle, il faut et il suffit que le quadrilatère soit plan et formé des côtés non parallèles et des diagonales d'un trapèze.

Les théorèmes précédents s'appliquent naturellement à des courbes gauches formées de plusieurs courbes fermées distinctes, à condition de choisir une orientation sur chacune de celles-ci.

Soient deux points dans l'espace; en les joignant par trois arcs de courbe, on obtient un *bitrièdre*; sa trigonométrie est identique à celle d'un triangle ordinaire.

Soit un polyèdre à arêtes curvilignes, dont chaque face n'est définie que par son contour, que nous supposerons d'un seul tenant : l'aire de chaque face est au plus égale à la somme des aires de toutes les autres.

Tout arc de courbe gauche orienté peut être regardé comme un système de vecteurs dont la résultante générale est le vecteur joignant l'origine à l'extrémité et dont le moment résultant par rapport à l'un de ces deux points est celui correspondant à l'aire orientée de la courbe fermée ainsi constituée (le vecteur de fermeture changé de sens).

Un système de vecteurs est équivalent de ∞^4 manières à un système de trois vecteurs mis bout à bout; si l'on fixe l'origine du premier, l'extrémité du dernier est déterminée, et il subsiste un paramètre.

2. Appelons *axe de gravité* d'une courbe gauche fermée la droite lieu des centres de gravité des aires des sections planes d'un cylindre quelconque passant par la courbe. L'ensemble des axes de gravité constitue la *congruence de gravité*; elle est covariante de la courbe dans une transformation affine quelconque.

La congruence de gravité est algébrique et d'un ordre qui ne dépasse pas trois.

Cherchons en effet l'axe de gravité dont les coefficients directeurs sont α, β, γ. Si nous prenons provisoirement de nouveaux plans de coordonnées, dont les deux plans

$$\alpha y - \beta x = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma x - \alpha z = 0$$

parallèles à la direction donnée, les coordonnées initiales X, Y, Z d'un point de l'axe cherché satisfont à la relation

$$\int(\alpha y - \beta x)^2(\gamma\, dx - \alpha\, dz) = 2(\alpha Y - \beta X)\int(\alpha y - \beta x)(\gamma\, dx - \alpha\, dz),$$

les intégrales étant étendues à la courbe. On a, sous les mêmes conditions,

$$\int x^2\,dy + 2\int xy\,dx = 0; \qquad \int yz\,dx + \int zx\,dy + \int xy\,dz = 0,$$

la première égalité ayant cinq analogues. On a, par suite, les trois relations suivantes, dont la première se déduit de celle ci-dessus en simplifiant et divisant par α,

$$\int (\alpha y - \beta x)^2 dz - \gamma(\alpha y^2 dx + \beta x^2 dy) = 2(\alpha Y - \beta X)\int(\alpha y\,dz + \beta z\,dx + \gamma x\,dy),$$

$$\int (\beta z - \gamma y)^2 dx - \alpha(\beta z^2 dy + \gamma y^2 dz) = 2(\beta Z - \gamma Y)\int(\alpha y\,dz + \beta z\,dx + \gamma x\,dy),$$

$$\int (\gamma x - \alpha z)^2 dy - \beta(\gamma x^2 dz + \alpha z^2 dx) = 2(\gamma X - \alpha Z)\int(\alpha y\,dz + \beta z\,dx + \gamma x\,dy).$$

Soient C, A, B les trois premiers membres, quadratiques en α, β, γ. On a la relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

qui est évidente pour les seconds membres et résulte d'ailleurs pour les premiers de l'égalité ci-dessus, liant trois intégrales.

Nous avons, connaissant α, β, γ, les coordonnées pluckériennes de l'axe cherché. Inversement, connaissant X, Y, Z, que pour abréger nous supposerons nuls, cherchons α, β, γ. Il faut résoudre le système $A = B = C = 0$; or les deux coniques (du plan de l'infini) B et C n'ont qu'un point d'intersection vérifiant $\alpha = 0$, c'est le point $\beta = \int x^2 dy$, $\gamma = \int x^2 dz$; les trois autres points d'intersection sont donc sur A; le système $A = B = C = 0$ a donc trois solutions.

Il semble donc que l'ordre de la congruence soit égal à trois. La question ne peut cependant être regardée comme complètement résolue par ce qui précède, même dans le cas général, à cause des relations supplémentaires qui, *a priori*, peuvent exister entre les intégrales [1].

---

[1] L'hypothèse n'est pas exclue, par exemple, que deux des trois points communs aux trois coniques appartiennent nécessairement à la droite des trois seconds membres.

Mon idée initiale avait été que la congruence de gravité devait être *linéaire*; en effet, dans le cas d'une courbe plane on a une congruence linéaire dégénérée, déterminée par le plan de la courbe et son centre de gravité. Si la congruence était linéaire, ses deux droites fondamentales seraient manifestement parallèles à la direction de plans de la courbe; son plan moyen serait covariant dans le groupe affine.

Il conviendrait donc d'élucider cette question, par exemple dans le cas d'un quadrilatère gauche, ou bien en développant x, y, z en séries de Fourier.

3. En vue de l'extension à une courbe gauche du théorème de Guldin sur le volume engendré par l'intérieur d'une courbe plane tournant autour d'une droite quelconque de son plan, nous allons nous occuper d'abord de questions analogues de géométrie plane et sphérique. Les propriétés dans le plan pourraient être considérées comme limites de celles sur la sphère; nous les démontrerons cependant séparément, pour commencer.

Soit un mouvement continu plan; l'aire balayée par un arc de courbe orienté entre une position et une autre ne dépend évidemment que du mouvement de ses extrémités, nullement de l'arc lui-même. On peut donc se borner à considérer des aires balayées par des segments rectilignes orientés.

Nous dirons que deux segments sont *équivalents* lorsqu'ils sont équipollents et constituent les côtés opposés d'un rectangle. Ainsi, tandis qu'en mécanique un vecteur est équivalent à lui-même lorsqu'il glisse sur sa ligne d'action, à notre point de vue un segment (orienté) est équivalent à lui-même lorsqu'il subit une translation dans le sens perpendiculaire.

Dans le mouvement d'une figure plane, l'aire balayée par un segment ne change pas lorsqu'on le remplace par un segment équivalent. L'aire balayée par un système de segments est égale à celle balayée par un certain segment équipollent à la résultante des proposés, et qui est dit leur segment résultant.

Tout mouvement étant composé de rotations infinitésimales, nous pouvons, pour la première partie de cet énoncé, supposer qu'il s'agit d'une rotation d'angle ω. Soient AB le segment, $A'B'$ sa nouvelle position, O le centre de rotation; les aires des triangles AOB et $A'OB'$ étant égales, l'aire balayée par le segment est égale à la différence des aires des deux secteurs circulaires, soit $\left(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2\right)\frac{\omega}{2}$, ou $\overline{AB} \times \delta \times \omega$, δ étant la distance de O à la médiatrice de AB; donc elle demeure la même pour tout segment équivalent à AB.

Pour la seconde partie, il suffit de l'établir dans le cas de deux segments; d'après la première, on peut supposer que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre; le segment résultant est alors le troisième côté du triangle. Ainsi, dans le cas de deux segments, leurs médiatrices concourent avec celle du résultant.

Passons à la géométrie sphérique (en géométrie lobatchewskienne ou cayleyenne, on aurait des propriétes analogues). Nous pouvons nous borner à considérer des aires balayées par des segments orientés d'arc de grand cercle. Deux segments seront dits *équivalents* quand leurs cordes seront équipollentes; un segment qui demeure équivalent à lui-même balaie une zone équatoriale d'axe parallèle à sa corde.

Dans un mouvement sur la sphère, l'aire balayée par un segment ne change pas lorsqu'on le remplace par un segment équivalent. L'aire balayée par un système de segments est égale à celle balayée par le segment dont la corde est équipollente à la résultante des cordes des proposés, et qui est dit leur segment résultant.

Nous pouvons encore, pour la première partie, supposer qu'il s'agit d'une rotation d'angle ω. L'aire balayée est alors, d'après la formule qui donne l'aire d'une zone, égale à $\omega R h$, où R est le rayon de la sphère, h la projection du segment sur l'axe de rotation; elle demeure par suite la même pour un segment équivalent.

Quant à la seconde partie elle se démontre mot pour mot comme en géométrie plane.

Il convient cependant d'observer qu'ici la construction peut être en défaut, les cercles utilisés ne se coupant pas; effectivement la fin de l'énoncé n'a de sens que si la résultante des cordes a une longueur au plus égale à $2R$; dans le cas contraire, on considérera sa $m^{\text{ième}}$ partie, m étant suffisamment grand, on prendra l'aire balayée par le segment dont cette $m^{\text{ième}}$ partie est la corde, et on le multipliera ensuite par m.

4. Passons à l'extension annoncée du théorème de Guldin au cas de la révolution d'une courbe gauche fermée autour d'une droite. Mais, auparavant, reportons-nous aux relations du paragraphe **2** entre les coordonnées pluckériennes d'un axe de gravité; les coefficients en sont des intégrales simples dont la signification géométrique est évidente et qui représentent les unes des volumes, les autres des surfaces; il suffit même pour que la congruence de gravité soit déterminée que soient connus les rapports entre eux des volumes et des surfaces, et réciproquement; si à cette connaissance on ajoute par exemple celle de l'aire de la courbe donnée, volumes et surfaces sont connus, non pas seulement leurs rapports.

Nous avons maintenant, en coordonnées rectangulaires, pour le volume englobé par la courbe gauche dans sa révolution autour de la droite joignant les points $(x_0 y_0 z_0)$ et $(x_1 y_1 z_1)$, l'expression

$$2\pi \frac{\displaystyle\int \left\{ \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_0 & x_0 & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\} [(x_0 - x_1)\,dx + (y_0 - y_1)\,dy + (z_0 - z_1)\,dz]}{[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

l'intégrale étant étendue à la courbe. Comme dans cette expression ne figurent, outre les deux point donnés, que les coefficients des équations du paragraphe **2** on voit que :

Le volume engendré par la révolution d'une courbe gauche autour d'un axe s'obtient algébriquement lorsque l'on connaît, outre l'aire de cette courbe, la figure formée par l'axe et sa congruence de gravité.

Dans le cas d'une courbe plane, cette figure se réduit à celle formée par l'axe, le plan de la courbe et son centre de gravité.

Il y aurait lieu de trouver effectivement ces expressions.

Il en résulte que le volume engendré est égal à celui correspondant dans les mêmes conditions à une certaine *courbe canonique,* ne dépendant que de la courbe donnée et point de la position de l'axe, et ne contenant dans sa définition qu'un nombre fini de paramètres;

il conviendrait de trouver une telle courbe (1), par exemple de savoir si l'on peut prendre pour elle un quadrilatère gauche.

Quoi qu'il en soit, comme ce qui précède subsiste pour le cas d'une rotation quelconque, à cela près que le facteur 2π est remplacé par le facteur ω, angle de cette rotation, on voit que, dans le cas d'un mouvement composé de rotations infinitésimales, il y a égalité des volumes englobés par une courbe gauche et sa courbe canonique; mais plus généralement :

Le volume englobé par une courbe gauche fermée dans un mouvement quelconque à un paramètre est égal à celui englobé dans le même mouvement par sa courbe canonique.

Il suffit d'établir ceci pour un mouvement hélicoïdal. Or, si nous considérons plus généralement un mouvement laissant une droite fixe (on sait que dans ces conditions les mouvements successifs sont permutables), le volume englobé est égal à $\int A\,dr$, A étant l'aire balayée sur le cylindre de rayon r, laquelle ne dépend que des positions initiale et finale, car, si l'on développe le cylindre sur un plan, on a des translations. Ainsi, dans un mouvement laissant une droite fixe, le volume englobé ne dépend que des positions extrêmes; en particulier celui correspondant à un mouvement hélicoïdal est égal à la somme de ceux relatifs à la rotation et à la translation composantes; ce qui démontre notre théorème.

Dans le cas d'une translation, il est à peu près immédiat directement que :

Le volume englobé d'une position à une autre par une courbe gauche fermée animée d'un mouvement de translation est égal au produit de l'amplitude de la translation rectiligne correspondante par l'aire de la projection de la courbe sur un plan perpendiculaire.

---

(1) Dans le cas d'une courbe plane, la question est immédiatement résolue : il résulte de ce qui précède que l'on peut prendre pour courbe canonique une courbe coplanaire, par exemple un cercle, de même aire et même centre de gravité; l'analogie avec le théorème de Guldin est alors aussi complète qu'on pouvait l'espérer; dans ce cas il reste seulement à expliciter la formule précédente.

Il est possible que certaines propositions du présent article soient des cas particuliers de propositions de la théorie des invariants différentiels et intégraux, et de celle des groupes de Lie; dans cette dernière, on sait que la notion de la mesure invariante a fait depuis une douzaine d'années l'objet de nombreux travaux. Le groupe des mouvements de la sphère, considéré au paragraphe **2**, est isomorphe au groupe projectif de la droite.

Addendum. — Le présent Mémoire a été rédigé en février 1940, en particulier avant la composition de la Note aux *Comptes rendus* du 27 mai de la même année, et laissé pour ainsi dire tel quel.

La congruence de gravité est linéaire dans le cas d'un quadrilatère gauche, mais elle est du troisième ordre en général.