JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE FRÉCHET

Conditions d'existence de systèmes d'événements associés à certaines probabilités

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 51-62.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_51_0>

Conditions d'existence de systèmes d'événements associés à certaines probabilités;

Par Maurice **FRÉCHET**.

Introduction. — De la vaste contribution de M. Borel aux progrès du Calcul des probabilités se détachent particulièrement :

son introduction des probabilités dénombrables, introduction qui a donné naissance à toute une littérature;

le renouveau d'intérêt suscité par lui pour la Théorie des probabilités.

En particulier, c'est certainement sous l'influence de son œuvre et de son apostolat que j'ai été amené à me consacrer de plus en plus à l'étude de cette branche si attrayante de la science mathématique.

C'est pourquoi il m'est agréable de dédier à M. Borel, dans ce volume, la présente Note sur le Calcul des probabilités.

Si ce petit Mémoire a quelque valeur, c'est surtout parce qu'il va s'encadrer dans un ensemble de courts articles que je publie actuellement dans plusieurs périodiques et dont les résultats, qui s'épaulent mutuellement, viendront se réunir aux recherches antérieures d'autres auteurs dans un petit livre en préparation [1].

Événements dépendants. — Dans ces dernières années, des efforts nombreux ont été consacrés à se libérer de l'hypothèse — si commode mais si étroite — de l'indépendance des événements étudiés.

---

[1] *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants.* — I. Événements en nombre fini fixe, par Maurice Fréchet, chez Hermann, Paris.

Plusieurs auteurs (à peu près dans l'ordre chronologique : Boole, Poincaré, Charles Jordan, Bonferroni, de Mises, Fréchet, Broderick, Gumbel, Mme Geiringer, ...) ont étudié les relations d'égalité et d'inégalité entre les principales probabilités associées à un nombre fini d'événements fortuits quelconques $A_1, \ldots, A_m$.

[Ces relations générales ont des applications dans deux directions dont M. Borel s'est occupé récemment : la théorie des jeux de hasard et la notion de probabilité virtuelle (qui lui est due.)]

Nous nous proposons ici de résoudre le problème inverse dont la solution est souvent utile dans ce genre de questions : *nous donnant un système de valeurs de ces probabilités, à quelles conditions existera-t-il au moins un système correspondant d'événements* $A_1, \ldots, A_m$.

Une fois les notations fixées, il nous sera d'ailleurs possible de préciser les diverses formes de ce problème général.

NOTATIONS ET RAPPEL DE FORMULES CONNUES. — Nous considérons ici un système composé d'un nombre fini fixe d'événements fortuits $A_1, \ldots, A_m$, définis sur la même catégorie d'épreuves, mais, à cela près, quelconques : *distincts ou non, indépendants ou non, incompatibles ou non.*

Désignons par $E - A_i$ l'événement « non A_i », dit complémentaire de A_i, par $A_i A_k \ldots A_l$ le concours de $A_i, \ldots, A_l$, et par $\mathrm{Pr} A_i$ la probabilité de A_i. Nous poserons

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_r} = \mathrm{Pr}\{A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_r}\}, \tag{1}$$

$$p_{[j_1 j_2 \ldots j_r]} = \mathrm{Pr}\{A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_r} (E - A_{j_{r+1}}) \ldots (E - A_{j_m})\}, \tag{2}$$

où $j_1 \ldots j_r \ldots j_m$ est une permutation quelconque des m premiers entiers et

$$S_r = \sum p_{j_1 \ldots j_r}, \tag{3}$$

où $j_1 \ldots j_r$ est une quelconque des combinaisons de r des m premiers entiers.

Si l'on appelle $P_{[r]}$ la probabilité du concours de r (et r seulement) des événements $A_1, \ldots, A_m$, P_r la probabilité d'au moins r de ces événements, et par suite

$$P_r = P_{[r]} + P_{[r+1]} + \ldots + P_{[m]}, \tag{4}$$

on sait (¹) qu'on a (en posant $s_0 = 1$)

(5) $$P_{[r]} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r S_k,$$

(6) $$P_r = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_{k-1}^{r-1} S_k,$$

(7) $$S_r = \sum_{k=r}^{m} C_k^r P_{[k]}$$

(8) $$S_r = \sum_{k=r}^{m} C_{k-1}^{r-1} P_k.$$

Il est clair que

(9) $$p_{j_1 \dots j_r} = \sum_{s=0}^{m-r} \sum_{j_{r+1} \dots j_{r+s}} p_{[j_1 \dots j_{r+s}]}.$$

On démontre (¹) qu'on a

(10) $$\begin{aligned} p_{[j_1 \dots j_r]} &= \{[p_{j_1} \dots p_{j_r}(1 - p_{j_{r+1}}) \dots (1 - p_{j_m})]\} \\ &= p_{j_1 \dots j_r} - \sum_{j_{r+1}} p_{j_1 \dots j_r j_{r+1}} + \dots + (-1)^{m-r} p_{12 \dots m}, \end{aligned}$$

où le symbole $\{[\quad]\}$ indique qu'après avoir développé le produit, on remplace les produits tels que $p_\alpha \dots p_\lambda$ par les probabilités correspondantes $p_{\alpha \dots \lambda}$.

Problème a résoudre. — On se donne un système de nombres réels. On demande à quelles conditions nécessaires et suffisantes ce système de nombres doit satisfaire pour qu'il existe au moins un système d'événements $A_1, \dots, A_m$, pour lequel ce système de nombres représente l'un des systèmes suivants :

1° le système des $p_{[\alpha \dots \lambda]}$; 2° le système des $p_{\alpha \dots \lambda}$; 3° le système des $P_{[r]}$; 4° le système des P_r; 5° le système des S_r, étant supposé,

(¹) On trouverait les démonstrations de ces formules dans les Mémoires des auteurs cités ci-dessus ou dans le petit livre en préparation, cité en note de la page 51, qui contiendra les références précises de ces Mémoires.

bien entendu, qu'à chaque fois, le système des nombres donnés est en nombre égal à celui des quantités qu'il doit représenter.

Remarque. — La résolution des problèmes ci-dessus est en étroite connexion avec l'étude que nous avons faite en 1921 sur les familles additives d'ensembles [1].

Transporté de la théorie des ensembles à la théorie des événements, un des résultats de ce Mémoire devient le suivant : la famille des 2^m événements

$$I_{j_1 \ldots j_r} = A_{j_1} \ldots A_{j_r}(E - A_{j_{r+1}}) \ldots (E - A_{j_m})$$

constitue la « plus petite famille additive » d'événements comprenant les événements $A_1, \ldots, A_m$ (en définissant convenablement les familles additives d'événements).

C'est pourquoi, dans ce Mémoire, nous avions appelé ces événements $I_{j_1 \ldots j_r}$ « les atomes » du système des A.

Ces quelques mots suffiront à faire comprendre le rôle fondamental que joue le système de ces atomes dans la résolution des problèmes posés plus haut. Pour les résoudre, en se souvenant de ce rôle des événements incompatibles $A_{j_1} \ldots A_{j_r}(E - A_{j_{r+1}}), \ldots (E - A_m)$, il sera bon de traiter ces problèmes dans un ordre convenable et de les faire précéder de la solution, qui est immédiate, du problème analogue quand les nombres donnés doivent représenter les $p_{[j_1 \ldots j_r]}$.

On donne les $p_{[j_1 \ldots j_r]}$. — Il est clair que ces 2^m quantités sont $\geqq 0$ et que leur somme, en y comprenant

$$p_{[0]} = \Pr \{ (E - A_1) \ldots (E - A_m) \},$$

est égale à 1. *Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.* Car alors, on peut toujours imaginer des événements $J_{j_1 \ldots j_r \bar{j}_{r+1} \ldots \bar{j}_m}$ incompatibles, et les seuls possibles, dont les probabilités respectives soient égales aux valeurs données pour les $p_{[j_1 \ldots j_r]}$. [Par exemple, on trace sur le segment (0, 1) des segments $\sigma_{j_1 \ldots j_r \bar{j}_{r+1} \ldots \bar{j}_m}$ de longueurs respectives $p_{[j_1 \ldots j_r]}$ et l'on appelle $J_{j_1 \ldots j_r \bar{j}_{r+1} \ldots \bar{j}_m}$ l'événement consistant à ce qu'un point choisi au hasard sur (0, 1) tombe précisément sur $\sigma_{j_1 \ldots j_r \bar{j}_{r+1} \ldots \bar{j}_m}$.]

De quelque façon concrète que soient définis les événements

---

[1] *Des familles et des fonctions additives d'ensembles abstraits* (*Fund. Math.*, t. 4, 1923; t. 5, 1924).

$J_{j_1\ldots j_r\bar{j}_{r+1}\ldots\bar{j}_m}$, on appellera A_k l'événement consistant dans la réalisation de l'un quelconque des 2^{m-1} événements $J_{kj_2\ldots j_r\bar{j}_{r+1}\ldots\bar{j}_m}$.

Le système des A_k résoudra le problème. Il y aura une infinité de tels systèmes d'événements, mais l'ensemble des $p_{j_1\ldots j_r}$ bien déterminé par les formules (9) sera le même pour tous ces systèmes,

On se donne les $P_{[r]}$. — On sait déjà que les $m+1$ nombres $P_{[0]}$, $P_{[1]}$, ..., $P_{[m]}$ sont $\geqq 0$ et que leur somme est l'unité. Inversement supposons donnés $m+1$ nombres $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m$ tous $\geqq 0$ et de somme égale à 1. A chaque nombre ρ_r, on pourra assigner C_m^r nombres $p_{[\alpha_1\ldots\alpha_r]} \geqq 0$ et dont la somme est égale à ρ_r. Alors il existe d'après ce qui précède un système au moins de m événements A_j pour lesquels

$$\Pr\{A_{j_1}\ldots A_{j_r}(E - A_{j_{r+1}})\ldots(E - A_{j_m})\} = p_{[j_1\ldots j_r]}.$$

Pour ce système, on aura bien

$$P_{[r]} = \sum p_{[j_1\ldots j_r]} = \rho_r.$$

On pourra appeler système d'événements associé à un système donné, tout ensemble ayant la même loi de répétition définie par la fonction $P_{[r]}$ de r. D'après ce qui précède, non seulement, il y a une infinité de systèmes associés à un système donné, mais il y a une infinité de systèmes de valeurs des probabilités $p_{[\alpha_1\ldots\alpha_r]}$ correspondantes.

Système associé d'événements « échangeables ». — On peut en profiter pour choisir parmi eux des systèmes plus simples. Une simplification qui s'impose consistera à prendre pour chaque r les nombres $p_{[\alpha_1\ldots\alpha_s]}$ égaux, donc égaux à $\frac{\rho_s}{C_m^s}$.

D'ailleurs, ceci fait, comme $p_{j_1,\ldots,j_h}$ est la somme des quantités

$$p_{[j_1\ldots j_{h+s}]} = \frac{\rho_{h+s}}{C_m^{h+s}}$$

et comme, pour $j_1, \ldots, j_h$ et s donnés il y a C_{m-h}^s telles quantités, on aura donc

$$p_{j_1\ldots j_h} = \sum_{s=0}^{m-h} C_{m-h}^s \frac{\rho_{h+s}}{C_m^{h+s}} = \sum_{r=h}^{m} \frac{C_{m-h}^{r-h}}{C_m^r}\rho_r.$$

D'après cette formule, $p_{j_1\ldots j_h}$ est une fonction $p^{(h)}$ de h (et de m) indépendante de la combinaison particulière $j_1 \ldots j_h$. Des événements pour lesquels les $p_{j_1\ldots j_h}$ possèdent (pour $h = 1, \ldots, m$) la propriété qui vient d'être signalée, seront dits *échangeables* suivant une dénomination proposée par Polyà (Charles Jordan et Gumbel les appellent « symétriques », de Finetti qui en a fait une étude détaillée, les appelle « équivalents »).

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

A tout système d'événements quelconques $A_1, \ldots, A_m$, *on peut associer un système d'événements « échangeables » entre eux, en même nombre,* $B_1, \ldots, B_m$ *de façon que les deux systèmes aient la même loi de fréquence* (définie par les $P_{[r]}$).

De plus les $P_{[r]}$ et m ayant les mêmes valeurs respectives pour les deux systèmes, il en est de même des S_r. Or pour le second système, on a évidemment

$$S_r = C_m^r p^{(r)},$$

d'où

$$p^{(r)} = \frac{\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_r} p_{\alpha_1\ldots\alpha_r}}{C_m^r},$$

autrement dit la valeur $p^{(r)}$ commune aux probabilités $\Pr(B_{j_1} \ldots B_{j_r})$ pour le second système est égale à la moyenne arithmétique $\varpi_r = \frac{S_r}{C_m^r}$ des probabilités analogues $\Pr(A_{j_1} \ldots A_{j_r})$ pour le premier système. Il en résulte, en particulier, que, le système $A_1, \ldots, A_m$ étant donné, si le système d'événements échangeables $B_1, \ldots, B_m$ qui vient de lui être assigné n'est pas unique, du moins les probabilités $p^{(r)}$ qui sont attachées au système des B sont-elles bien déterminées et indépendantes du choix fait entre les différents systèmes B possibles.

Bien entendu, si l'on se donnait au lieu des valeurs ρ_r des $P_{[r]}$, les valeurs μ_r des P_r, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système d'événements A correspondants serait (en laissant de côté $\mu_0 = 1$) $1 \geqq \mu_1 \geqq \mu_2 \ldots \geqq \mu_m \geqq 0$, comme on le voit en posant

$$1 - \mu_1 = \rho_0, \qquad \mu_i - \mu_{i+1} = \rho_i, \qquad \mu_m = \rho_m.$$

2° Si l'on se donne m nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, la condition nécessaire et suffisante pour que ce soit des S_r, c'est-à-dire pour qu'il existe m événements A tels que

$$\sigma_r = \sum p_{j_1 \ldots j_r},$$

est que l'on ait

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r - C^1_{r+1}\sigma_{r+1} + \ldots + (-1)^s C^s_{r+s}\sigma_{r+s} + \ldots + (-1)^{m-r} C^{m-r}_m \sigma_m \geqq 0 \\ \qquad \text{pour } r = 0, 1, 2, \ldots, m, \qquad \text{en posant } \sigma_0 = 1. \end{array} \right.$$

La condition est évidemment nécessaire en raison des relations (5). Elle est aussi suffisante. En effet, si elle est vérifiée, alors en appelant ρ_r l'expression (11), les ρ_r seront $\geqq 0$ et de somme égale à 1. Il y aura donc un système d'événements A, pour lesquels les $P_{[r]}$ seront les ρ_r. Pour ce système, les S_r s'exprimeront en fonction des $P_{[r]}$ par les relations (7) et en y remplaçant les $P_{[r]}$ par les ρ_r et les ρ_r par leurs expressions (11) en fonction des σ_j, on trouvera

$$S_r = \sigma_r.$$

On peut donner une autre forme équivalente aux conditions (11). En utilisant la condition sur les μ_r et les relations (6), elles deviennent

$$(12) \quad \begin{array}{l} 1 \geqq \sigma_1 - \sigma_2 + \ldots + (-1)^{s-1}\sigma_s + \ldots + (-1)^{m-1}\sigma_m \geqq \ldots \\ \geqq \sigma_r - C^1_r \sigma_{r+1} + \ldots + (-1)^s C^s_{r+s-1}\sigma_{r+s} \\ \quad + \ldots + (-1)^{m-r} C^{m-r}_{m-1}\sigma_m \geqq \ldots \geqq \sigma_{m-1} - (m-1)\sigma_m \geqq \sigma_m \geqq 0. \end{array}$$

3° Donnons-nous enfin un système de nombres $\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \nu_{12\ldots m}$ et cherchons s'il existe au moins un système d'événements $A_1, \ldots, A_m$ tels que

$$\Pr\{A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_r}\} = \nu_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$$

pour tout entier $r \leqq m$ et toute combinaison $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ de r des m premiers entiers.

Il nous suffira de montrer qu'on peut assigner des valeurs convenables aux probabilités $P_{[\alpha_1 \ldots \alpha_r]}$. S'il existe un tel système de valeurs, il lui correspondra une infinité de systèmes d'événements $A_1, \ldots, A_m$. Mais s'il existe un tel système de valeurs, il n'en existe qu'un. Car en vertu de la formule obtenue en remplaçant les p par les μ dans (10), les quantités $p_{[\ ]}$ seront bien déterminées au moyen des ν. On aura en particulier

$$p_{[12\ldots m]} = \nu_{12\ldots m},$$

$$p_{[0]} = 1 - \sum \nu_{\beta_1} + \sum \nu_{\beta_1\beta_2} + \ldots + (-1)^m \nu_{12\ldots m},$$

et

$$\sum p_{[j_1\ldots j_r]} = 1.$$

Mais pour que le système des A existe, il faut (et d'ailleurs il suffit) que les valeurs des $p_{[j_1\ldots j_r]}$ soient toutes $\geqq 0$ et de somme égale à 1.

La condition d'existence cherchée est donc que l'on ait en vertu de (10)

$$\begin{aligned}\nu_{\alpha_1\ldots\alpha_r} - \sum \nu_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_{r+1}} + \ldots \\ + (-1)^s \sum_{\beta_{r+1}\ldots\beta_{r+s}} \nu_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_{r+1}\ldots\beta_{r+s}} + \ldots + (-1)^{m-r}\nu_{12\ldots m} \geqq 0,\end{aligned}$$

pour tout entier $r \geqq 0$ et $\leqq m$ et pour toute combinaison $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$ des m premiers entiers.

On peut d'ailleurs écrire cette condition symboliquement d'une façon plus condensée

$$(14) \qquad \{[\nu_{\alpha_1}\ldots\nu_{\alpha_r}(1-\nu_{\beta_{r+1}})\ldots(1-\nu_{\beta_m})]\} \geqq 0.$$

Système d'événements indépendants associé a un système donné. — Considérons l'équation

$$(15) \qquad u^m - S_1 u^{m-1} + \ldots + (-1)^t S_t u^{m-t} + \ldots + (-1)^m S_m = 0.$$

Elle a m racines réelles ou complexes, distinctes ou non : $u_1, \ldots, u_m$ et l'on a

$$S_r = \Sigma\, u_{\alpha_1} u_{\alpha_r} \ldots u_{\alpha_r}.$$

Quand les événements A sont indépendants, le polynome $(u - p_1)\ldots(u - p_m)$ est évidemment identique au premier membre de (15). Les u_j sont donc respectivement égales aux p_j; elles sont donc réelles, $\geqq 0$, $\leqq 1$; et, si on les range dans un ordre convenable, on a

$$u_j = p_j, \qquad S_r = \Sigma\, u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_r}.$$

Quand les événements A_j ne sont pas indépendants, les u_j ne sont plus nécessairement égales aux p_j et mêmes elles ne sont plus nécessairement réelles.

Prenons en effet $m = 2$ et considérons trois événements incompatibles D, F_1, F_2 de probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{24}$, par exemple. Appelons A_i l'événement (D ou F_i), de sorte que l'événement (A_1 et A_2) sera l'événement D. On aura

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}; \qquad p_{12} = \frac{1}{4}.$$

D'où

$$S_1 = \frac{7}{12}, \qquad S_2 = \frac{1}{4}$$

et l'équation (15) devient

$$u^2 - \frac{7}{12} u + \frac{1}{4} = 0$$

qui n'a pas de racines réelles.

Cependant, on peut observer que toutes les racines réelles de (15) sont toujours $\geqq 0$ et $\leqq 1$. Car, en vertu des formules (7), on peut écrire l'équation (15)

$$(16) \quad P_{[0]} u^m + P_{[1]} u^{m-1}(u-1) + \ldots + P_{[k]} u^{m-k}(u-1)^k + \ldots + P_{[m]}(u-1)^m = 0.$$

Ou en posant $z = \frac{u}{u-1}$,

$$(17) \qquad P_{[0]} z^m + \ldots + P_{[k]} z^{m-k} + \ldots + P_{[m]} = 0,$$

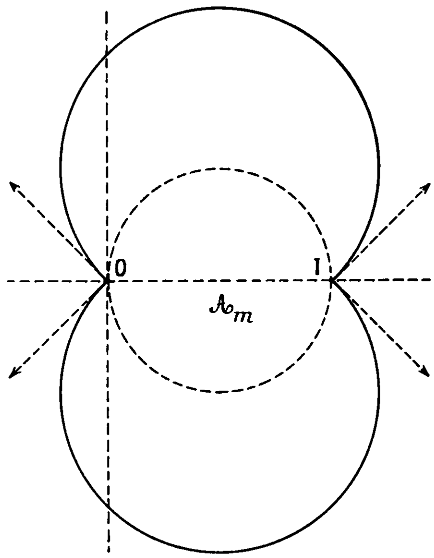
équation à coefficients tous $\geqq 0$. Les racines réelles de cette équation sont donc toutes $\leqq 0$. Par suite les racines réelles de l'équation en u, (15), sont toutes $\geqq 0$ et $\leqq 1$. Si $P_{[0]} \neq 0$, aucune racine ne sera égale à 1; si $P_{[m]} \neq 0$ aucune racine ne sera nulle.

Racines complexes. — La propriété précédente n'aurait plus de sens pour les racines complexes. Toutefois on voit que les racines complexes de l'équation en z (17) ne peuvent être quelconques puisque cette équation a ses coefficients tous positifs. Il est clair que si le point représentant z se trouve à l'intérieur de l'angle issu de l'origine formé par les droites D′ D″ d'arguments $\frac{\pi}{2m}$ et $-\frac{\pi}{2m}$, les points représentant $z, z^2, \ldots z^m$ seront du côté des x positifs. Dès lors la partie réelle du premier membre de (17) étant la somme de nombres $\geqq 0$ ne pourra être nulle puisque $z \neq 0$ et que les $P_{[k]}$ ayant une somme égale à 1 ne peuvent être tous nuls. Ainsi il n'y a aucune racine de (17) à l'intérieur de l'angle (D′, D″).

Or la transformation $z = \frac{u}{u-1}$ est une transformation homographique qui transforme toute droite ou cercle en une droite ou un cercle et qui transforme deux nombres conjugués en deux nombres conjugués. Elle transforme en particulier la région limitée par D′, D″ du plan des z dans une région du plan des u limitée par deux cercles. D'ailleurs elle transforme $0, \infty$ du premier plan dans $0, 1$ du second et deux courbes correspondantes passant à l'origine y sont tangentes.

Dès lors, comme d'ailleurs le vérifierait un calcul direct, la région extérieure à l'angle D′D″ se transforme dans l'aire bornée $\mathcal{A}_m$ ayant le segment réel $(0, 1)$ pour diamètre et limitée par deux arcs de circonférence γ, γ' passant par les points réels 0 et 1 et faisant avec l'axe réel négatif deux angles égaux à $\frac{\pi}{2m}$.

La figure a été faite dans le cas de $m = 2$. Notons enfin quel que soit m, $\mathcal{A}_m$ comprend le cercle ayant pour diamètre le segment réel $(0, 1)$, cercle qui d'ailleurs limite $\mathcal{A}_1$ et en particulier comprend le segment réel $(0, 1)$.



Nous avions d'abord montré que les racines réelles de (15) étaient sur ce segment (0 1). On vient maintenant de voir que toutes les racines (15) sont dans $\mathcal{A}_m$.

Il faut d'ailleurs observer que nous n'avons ici que des conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les racines. Ces conditions, qui s'obtiennent assez simplement, ne sont pas suffisantes.

Appelons C la condition à remplir par les S_j pour que l'équation en u (15) ait toutes ses racines réelles; alors si C est vérifiée, les racines u_j de (15) sont réelles $\geqq 0$, $\leqq 1$. On peut les considérer comme les probabilités de certains événements indépendants $H_1, \ldots H_m$, et l'on a

$$\Sigma \,\text{Prob.} \{ A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_r} \} = S_r = \Sigma u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_r} = \Sigma \,\text{Prob.} \{ H_{\alpha_1} \ldots H_{\alpha_r} \}.$$

Toutefois, il ne faudrait pas en conclure que ceci ne peut arriver que si les A sont eux-mêmes indépendants et encore moins que les u_j sont dans ce cas égales aux p_j en les rangeant dans un ordre convenable. C'est ce que montre l'exemple suivant.

Reprenons l'exemple de la page 59, mais en attribuant à D_1 et D_2 les probabilités $\frac{1}{8}$ et $\frac{3}{8}$; de sorte que

$$p_{12} = \frac{1}{4}, \qquad p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \qquad p_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

On a alors

$$S_2 = \frac{1}{4}, \ S_1 = 1,$$

l'équation en u devient

$$u^2 - u + \frac{1}{4} = 0$$

qui a deux racines réelles $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$ comprises entre 0 et 1. On a bien

$$p_{12} = u_1 u_2, \qquad p_1 + p_2 = u_1 + u_2,$$

et pourtant les événements A_1, A_2 ne sont pas indépendants, p_1 est différent de u_1 et u_2, il en est de même de p_2 et l'on a $p_{12} \neq p_1 p_2$.

En revenant au cas général on voit que si la condition C est vérifiée (nous savons qu'elle peut ne pas l'être, et qu'elle peut l'être sans que les A_j soient indépendants), il existe un système d'événements indépendants $H_1, \ldots, H_m$ tel que les quantités S_j et par suite les probabilités $P_{[r]}$ soient respectivement les mêmes pour le système des H que pour celui des A. Autrement dit la loi de probabilité du nombre R des A concourants et celle du nombre R' des H concourants sont les mêmes.

Remarque. — Quand on aura affaire à un système concret d'événements dépendants A_j, il pourra être intéressant de chercher s'ils se comportent comme s'ils étaient indépendants au regard des probabilités $P_{[r]}$ et de définir d'une manière concrète un système d'événements indépendants H_j associés aux A_j de façon naturelle et qui donnent les mêmes valeurs pour les $P_{[r]}$.

Probabilités fictives. — Dans le cas où les racines $u_1, u_2, \ldots$ ne sont plus réelles, il ne peut plus être question de système associé. Toutefois il n'est pas indifférent de pouvoir observer que *le résultat formel subsiste*. Autrement dit, quel que soit le système des événements A, il existe un système de nombres correspondants $u_1, u_2 \ldots$ réels ou complexes, distincts ou non — à savoir le système des m racines de l'équation en u (15) — tel que si l'on opère sur ces u comme s'ils constituaient le système de probabilités de m événements *indépendants* $H_1, \ldots, H_m$, les calculs à effectuer dans cette hypothèse fourniraient pour la loi de probabilité du nombre r' des événements H concourants, des valeurs $P_{[r]}$ qui non seulement sont réelles $\geqq 1$ et $\leqq 1$, mais définissent en même temps précisément la loi de probabilité du nombre r des événements A concourants.

Car ces calculs fourniraient $P_{[r]}$ par l'intermédiaire de formules (5) où figureraient des coefficients égaux à

$$\Sigma \operatorname{Prob.} \{H_{\alpha_1} \ldots H_{\alpha_r}\} = \Sigma u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_r},$$

quantités précisément égales respectivement aux S_r calculés pour les A.

Dans deux Notes récentes, M. Émile Borel [1] a introduit des probabilités *virtuelles* qui sont réelles et $\geqq 0$, mais peuvent être $\geqq 1$. Ici nous sommes naturellement conduit à la considération des quantités $u_1, \ldots, u_m$ qui jouent aussi le rôle de probabilités virtuelles. Mais elles sont d'une autre nature que celles de M. Borel puisqu'elles peuvent être complexes.

---

[1] *Sur certaines probabilités de répartition et sur les probabilités virtuelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1177). *Sur une interprétation des probabilités virtuelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1369).