JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STANISLAS CHRISTIAN ZAREMBA

Sur une question relative aux intégrales premières des systèmes d'équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 411-426.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_411_0>

Sur une question relative aux intégrales premières des systèmes d'équations différentielles;

PAR STANISLAS CHRISTIAN **ZAREMBA.**

1. On sait qu'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre admet *localement* autant d'intégrales premières indépendantes qu'il comporte d'équations. Au *point de vue intégral*, le problème de l'existence des intégrales premières est beaucoup plus compliqué; il n'a été traité que dans des cas relativement très simples. En dehors de certains cas plus spéciaux et de celui d'une seule équation, où l'on peut obtenir des propositions un peu plus générales, ce n'est que pour un système de la forme

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qu'on a réussi à démontrer un théorème de caractère intégral sur l'existence des intégrales premières [1].

Dans le cas d'un système d'équations différentielles du type

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})},$$

c'est non seulement le phénomène de condensation des caractéristiques sur d'autres caractéristiques ou sur elles-mêmes qui empêche la formation d'un système d'intégrales premières, mais, comme l'a montré

(1) *Cf.* E. KAMKE, *Über die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung* (*Deutsch. Math. Ver.*, 44, 1934, p. 156-161).

M. T. Ważewski [1], c'est aussi la présence de caractéristiques fermées qui en elle-même peut rendre impossible dans certains domaines l'existence non seulement d'un système, mais même d'une seule intégrale première sans singularités.

C'est ainsi que M. Ważewski a été amené (*loc. cit.*) à poser la question de savoir quel est le plus grand nombre d'intégrales premières indépendantes que peut admettre dans un domaine unicohérent un système de n équations différentielles ordinaire du premier ordre n'ayant pas de singularités dans ce domaine et admettant une caractéristique fermée située dans le même domaine. Certaines analogies pouvaient faire croire que ce nombre est égal à $n-2$ ou $n-1$ au plus. J'ai cependant prouvé précédemment [2] que ce nombre est au moins égal à $n-1$; j'ai construit à cet effet un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre, définies sans singularités dans une région unicohérente, satisfaites par une caractéristique fermée située dans l'intérieur de cette région et admettant dans la totalité de celle-ci une intégrale première douée de dérivées partielles continues ne disparaissant simultanément en aucun point. Ce n'est que plus tard que j'ai remarqué qu'en modifiant convenablement la construction dont je m'étais servi, on pouvait obtenir un système de deux équations différentielles, définies sans singularités dans une région unicohérente, satisfaites par une caractéristique fermée située dans l'intérieur de cette région et admettant dans la totalité de celle-ci *deux* intégrales premières indépendantes. La construction de ce système d'équations, auquel est consacrée la présente Note, permet en même temps de donner une réponse négative aux questions 3 et 4 posées par M. Ważewski dans son Mémoire cité plus haut.

Le problème envisagé dans cette Note peut être aussi présenté sous d'autres formes. Il s'agit, si l'on préfère, de l'existence de deux intégrales indépendantes d'une équation aux dérivées partielles linéaire

---

(1) *Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires* (*Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, **16**, 1938, p. 145-161); ce Mémoire contient à la fin une bibliographie complète du problème des intégrales premières sous son aspect intégral.

(2) *Remarques sur les intégrales premières des systèmes d'équations différentielles* (*Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, **17**, 1939, p. 131-137).

du premier ordre à trois variables. Mais on peut aussi présenter le même problème comme une question relative à la théorie des fonctions implicites. En effet, étant données deux fonctions des trois variables, $E(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$, indépendantes dans un domaine unicohérent, il s'agit de savoir s'il peut exister une courbe fermée située dans l'intérieur de ce domaine, sur laquelle les fonctions $E(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ soient constantes; on passe aux équations différentielles en éliminant les constantes des deux équations

$$F(x, y, z) = C, \qquad G(x, y, z) = K.$$

C'est sous cette dernière forme, se rattachant à la théorie des fonctions implicites, que nous allons traiter le problème; nous construirons effectivement les fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ et nous indiquerons les courbes fermées sur lesquelles elles sont simultanément constantes.

2. Nous allons d'abord décrire un procédé qui dans la suite nous servira deux fois à former dans certaines régions de l'espace des systèmes de deux fonctions de la classe C^∞ [1] indépendantes au sens de la théorie des fonctions implicites et satisfaisant à certaines conditions aux limites.

Plus précisément, supposons que dans un voisinage, soit v, de la portion de surface définie par les relations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \tag{1}$$

$$1 \leqq z \leqq 2, \tag{2}$$

deux fonctions de la classe C^∞, $\varphi(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$, soient données de façon que :

1° Sur la partie de la sphère (1) contenue dans V, la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit constante — que

2° les relations

$$\varphi(-x, y, z) = \varphi(x, y, z), \qquad \psi(-x, y, z) = \psi(x, y, z), \tag{3}$$

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)} \neq 0 \tag{4}$$

(1) C'est-à-dire admettant des dérivées partielles continues de tous les ordres.

soient vérifiées identiquement dans la partie de V satisfaisant à l'inégalité

$$z > k,$$

k étant une constante inférieure à deux — et que

3° le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

soit égal à deux dans tout le voisinage V.

Il s'agit maintenant de former deux fonctions, $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$, de la classe C^∞ dans la région R définie par les inégalités

$$\text{(R)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqq 9, \qquad 1 \leqq z \leqq 2,$$

de façon que sur la portion de sphère définie par les relations (1) et (2) ces fonctions ainsi que leurs dérivées partielles de tous les ordres soient égales respectivement aux fonctions $\varphi(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$ et à leurs dérivées partielles correspondantes, sans qu'en aucun point de R le rang de la matrice

$$\text{(5)} \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

ne soit inférieur à deux.

Nous construisons d'abord la fonction $P(x, y, z)$ à peu près de la même façon que la fonction $Q(x, y, z)$ dans ma note citée plus haut; je reproduis cette construction pour la commodité du lecteur. On peut toujours supposer le voisinage V assez restreint pour qu'il ne coupe pas le plan $z = 0$ et pour que la relation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$$

y soit partout vérifiée; on peut même se borner au cas où l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} > 0.$$

On peux choisir dans ce cas les constantes $a(a > 0)$ et b de façon que dans V on ait

$$a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b=\varphi(x, y, z) \quad \text{quand } x^2+y^2+z^2=9,$$
$$a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b \leqq \varphi(x, y, z) \quad \text{quand } x^2+y^2+z^2<9;$$

soit alors

$$f(x, y, z) \equiv a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b.$$

Faisons

$$\tau(x, \alpha, \beta)=\exp\{-[(x-\alpha)(x-\beta)]^{-2}\} \quad \text{pour } (x-\alpha)(x-\beta)<0,$$
$$\tau(x, \alpha, \beta)=0 \quad \text{pour } (x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0,$$
$$\sigma(x, \alpha, \beta)=\frac{\int_\alpha^x \tau(y, \alpha, \beta)\,dy}{\int_\alpha^\beta \tau(y, \alpha, \beta)\,dy} \quad \text{identiquement pour } \alpha \neq \beta.$$

Choisissons ε positif assez petit pour que la région

$$3-\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqq 3, \qquad 1 \leqq z \leqq 2$$

soit contenue dans V et posons

$$\begin{aligned}P(x, y, z)=&\,\sigma\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 3-\varepsilon, 3\big)\,\varphi(x, y, z)\\ &+\sigma\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 3, 3-\varepsilon\big)f(x, y, z)\end{aligned}$$

dans la partie commune à V à R et

$$P(x, y, z)=f(x, y, z)$$

dans le reste de R; un calcul immédiat montre qu'on a dans R

$$\frac{\partial P}{\partial z} \neq 0 \tag{6}$$

et, pour $z \geqq k$,

$$P(-x, y, z)=P(x, y, z). \tag{7}$$

Il est d'ailleurs clair que sur la portion de surface définie par les relations (1) et (2), la fonction $P(x, y, z)$ et ses dérivées partielles de tous les ordres sont bien égales respectivement à la fonction $\varphi(x, y, z)$ et à ses dérivées partielles correspondantes.

Il existe donc un voisinage, soit V_0, de la portion de sphère envisagée tel qu'en tout point de la partie commune à V_0 et à R le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

soit égal à deux et en particulier l'inégalité

$$\frac{D(P, \psi)}{D(y, z)} \neq 0 \tag{8}$$

soit vérifiée dès que $z \geqq k$. D'après (6), dans toute la partie de la région envisagée où l'inégalité précédente n'est pas satisfaite, on a

$$\frac{D(P, \psi)}{D(z, x)} \neq 0. \tag{9}$$

Il existe alors un nombre positif ε_0 tel que la région

$$3a + b - \varepsilon_0 \leqq P(x, y, z) \leqq 3a + b, \qquad 1 \leqq z \leqq 2 \tag{10}$$

soit contenue dans l'intérieur de V_0 et qu'à chaque système de valeur des variables x et y correspondant à un point de la région (10) on puisse faire correspondre l'un au moins des déterminants

$$\frac{D(P, \psi)}{D(y, z)} \quad \text{et} \quad \frac{D(P, \psi)}{D(z, x)},$$

de telle façon qu'il soit différent de zéro pour toute valeur de la variable z satisfaisant aux inégalités (10). Cela posé, désignons par $\theta(x, y, z)$ une fonction (¹) de la classe C^∞ telle que

$$\begin{array}{ll} 0 \leqq \theta(x, y, z) \leqq 1 & \text{partout,} \\ \theta(-x, y, z) = \theta(x, y, z) & \text{identiquement,} \\ \theta(x, y, z) = 1 & \text{dans la région (10),} \\ \theta(x, y, z) = 0 & \text{en dehors de } V_0. \end{array}$$

(¹) Pour la façon de former de telles fonctions, *voir* par exemple A. Bielecki, *Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass* (*Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, 10, 1931, p. 33-41).

Faisons, pour $z \geqq k$,

$$H(x, y, z) = \theta(x, y, z) \frac{\dfrac{D(P, \psi)}{D(z, x)}}{\dfrac{D(P, \psi)}{D(y, z)}} \qquad \text{dans } V_0,$$

$$H(x, y, z) = 0 \qquad \text{en dehors de } V_0.$$

Soit

$$z = \zeta(x, y, c)$$

la solution, unique dans R grâce à l'inégalité (6), de l'équation

$$P(x, y, z) = c$$

et posons

$$h(x, y, c) \equiv H[x, y, \zeta(x, y, c)].$$

On déduit des identités (3) et (7)

$$(11) \qquad h(-x, y, c) \equiv h(x, y, c) \qquad \text{dès que } \zeta(x, y, c) \geqq k.$$

Le paramètre c ayant une valeur déterminée, comprise entre $3a + b - \varepsilon_0$ et $3a + b$, il passe pour chaque point de la région

$$\zeta(x, y, c) \geqq 2,$$

exactement une caractéristique de l'équation différentielle

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = h(x, y, c).$$

Cette caractéristique traverse la courbe

$$(13) \qquad \zeta(x, y, c) = 2$$

en deux points symétriques, à cause de (11), par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction $\psi[x, y, \zeta(x, y, c)]$ prend en ces deux points la même valeur à cause des identités (3). Cette valeur est une fonction des conditions initiales et du paramètre c; nous désignons cette fonction par $q_0(x, y, c)$. Elle est donc définie pour tous les points par lesquels il passe une caractéristique de l'équation (12) traversant la courbe (13). Or, un calcul facile montre que sur les portions de caractéristiques situées à l'extérieur de la courbe (13), les valeurs de la fonction composée $\psi[x, y, \zeta(x, y, c)]$ sont constantes, donc égales à $q_0(x, y, c)$. Il est par suite naturel de compléter la définition de la fonction $q_0(x, y, c)$ en dehors de la courbe (13) en posant

$$q_0(x, y, c) = \psi[x, y, \zeta(x, y, c)] \tag{14}$$

dans toute la région

$$3a + b - \varepsilon_0 \leqq c \leqq 3a + b, \qquad 1 \leqq \zeta(x, y, c) \leqq 2.$$

Si l'on calcule les dérivées partielles de $\psi[x, y, \zeta(x, y, c)]$ à l'extérieur de la courbe (13), tout en tenant compte de la relation (8), on trouve

$$\frac{\partial q_0}{\partial y} \neq 0, \tag{15}$$

dès que

$$2 \geqq \zeta(x, y, c) \geqq k.$$

On déduit alors des théorèmes classiques sur la variation de l'intégrale d'une équation différentielle en fonction des conditions initiales que cette inégalité est satisfaite aussi à l'intérieur de la courbe (13). En tout point de la région V_0 où l'inégalité (15) n'est pas vérifiée, on trouve, grâce à la relation (9),

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} \neq 0.$$

Plus précisément, à tout système de valeurs de x et y satisfaisant à

$$x^2 + y^2 \leqq 8,$$

on peut faire correspondre l'une des deux dérivées partielles

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q_0}{\partial y}$$

de la fonction $q_0(x, y, c)$ de telle façon que pour toute valeur du paramètre c satisfaisant aux inégalités

$$\zeta(x, y, c) \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad 3a + b - \varepsilon_0 \leqq c \leqq 3a + b,$$

cette dérivée soit différente de zéro.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} q(x, y, c) \equiv {} & \sigma(c, 3a + b - \varepsilon_0, 3a + b)\, q_0(x, y, c) \\ & + \sigma(c, 3a + b, 3a + b - \varepsilon_0)\, q_0(x, y, 3a + b - \varepsilon_0), \end{aligned}$$

on trouve donc partout

$$(16) \qquad \frac{\partial q}{\partial y} \neq 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} \neq 0.$$

Nous faisons maintenant

$$(17) \qquad Q(x, y, z) \equiv q[x, y, P(x, y, z)].$$

D'après (6) et (16), on a dans toute la région R

$$\frac{D(P, Q)}{D(y, z)} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{D(P, Q)}{D(z, x)} \neq 0;$$

le rang de la matrice (5) est donc bien égal à deux en tout point de R.

Comme nous avons déjà vu que la fonction $P(x, y, z)$ et ses dérivées partielles de tous les ordres prennent les valeurs voulues sur la portion de sphère définie par (1) et (2), il ne reste plus qu'à vérifier la même chose pour la fonction $Q(x, y, z)$. La fonction $q(x, y, c)$ et ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport à toutes les variables ayant, pour $c = 3a + b$, les mêmes valeurs que la fonction $q_0(x, y, c)$ et ses dérivées partielles respectives, nous pouvons remplacer, d'après (17), la fonction $Q(x,y, z)$ par

$$Q_0(x, y, z) \equiv q_0[x, y, P(x, y, z)].$$

En vertu de (14), on a, dans toute la région (10),

$$Q_0(x, y, z) \equiv \psi\{x, y, \zeta[x, y, P(x, y, z)]\} \equiv \psi(x, y, z),$$

ce qui prouve que la fonction $Q(x, y, z)$ satisfait réellement aux conditions aux limites qui lui avaient été imposées.

3. En posant

$$(18) \qquad x = (3 + r\cos u)\cos v, \qquad y = (3 + r\cos u)\sin v, \qquad z = r\sin u,$$

nous introduisons un système de coordonnées curvilignes (r, u, v), valable dans l'intérieur du tore correspondant à $r = 3$ dans les formules précédentes.

Faisons

$$t(\lambda, \mu) = \sigma\left(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\lambda$$
$$+ \sigma\left(\lambda, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\sigma\left(\lambda, \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\mu}{24}\right) + \sigma\left(\lambda, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)(\pi - \lambda)$$

pour $0 \leqq \lambda \leqq \pi$ et

$$t(\lambda, \mu) = -t(\lambda - \pi, \mu)$$

pour $\pi \leqq \lambda \leqq 2\pi$. En supposant toujours $\mu \leqq 6\pi$, on vérifie facilement que si λ diffère de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3}{4}\pi$,

$$\frac{\partial t}{\partial \lambda} \neq 0$$

et que pour ces deux valeurs exceptionnelles de λ,

$$\frac{\partial t}{\partial \mu} \neq 0.$$

Nous définissons maintenant la fonction $T(u, v)$ en posant

$$T(u, v) = t(u - v, u + v) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq u - v \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq v < 2\pi$$

et en faisant cette fonction périodique de période 2π par rapport à chacune des deux variables. Cette nouvelle fonction est discontinue pour

$$v \equiv 0 \pmod{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4} + k\pi < u < \frac{3}{4}\pi + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En dehors de ces points exceptionnels, elle admet des dérivées partielles de tous les ordres, continues, parmi lesquelles celles du premier ordre ne disparaissent pas simultanément.

Il est clair que si, en revenant aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par le changement de variables (18), nous faisons

$$F(x, y, z) = r, \qquad G(x, y, z) = T(u, v)$$

identiquement dans le domaine R_1

$$(R_1) \qquad 1 \leqq r \leqq 2, \qquad \frac{\pi}{16} \leqq v \leqq \frac{31}{16}\pi, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{13}{16}\pi \leqq u \leqq \frac{19}{16}\pi$$

(ces deux alternatives, bien entendu, ne s'excluant pas), nous obtenons ainsi dans ce domaine un système de deux fonctions de la classe C^∞; les points correspondant aux points de discontinuité de la fonction $T(u, v)$ sont en effet éliminés par le choix du domaine R. Les deux dérivées partielles du premier ordre de $T(u, v)$ ne disparaissant jamais simultanément, on est assuré de l'indépendance des fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ dans tout le domaine R_1.

Il existe d'ailleurs dans l'intérieur de R_1 une infinité de courbes fermées sur lesquelles $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ sont simultanément constantes. On obtient ces courbes en fixant arbitrairement r à condition que $1 < r < 2$ et en attribuant à $u - v$ une valeur constante quelconque comprise entre $\frac{7}{8}\pi$ et $\frac{9}{8}\pi$.

Cependant, la région R_1 n'est pas unicohérente. Pour obtenir une telle région, nous allons ajouter à R_1 deux autres régions : une région R_2 déterminée par les inégalités

$$(R_2) \qquad -1 \leqq z \leqq 1, \qquad \sqrt{x^2+y^2} \leqq 3 - \sqrt{4-z^2}$$

(c'est la composante bornée de l'ensemble que l'on obtient en supprimant de la couche $|z| \leqq 1$ la partie intérieure au tore $r = 2$) et une seconde région, soit R_3, déterminée en coordonnées curvilignes par les inégalités

$$(R_3) \qquad 0 \leqq r \leqq 1, \qquad \frac{5}{6}\pi \leqq v \leqq \frac{7}{6}\pi;$$

la somme $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ est manifestement unicohérente et il ne nous reste plus qu'à étendre la définition des fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ aux régions R_2 et R_3, de façon que ces fonctions soient indépendantes dans toute la région R_0 et appartiennent à la classe C^∞.

En vue de définir $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ dans R_3, considérons d'abord le changement de variables

$$\lambda = u\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + \frac{5}{4}\pi\sigma\left(u, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi\right) - v,$$
$$\mu = u + v\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + 2\pi\sigma\left(u, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$$

pour $0 \leqq v \leqq 2\pi$ et u quelconque. Si l'on calcule son Jacobien, on trouve

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} = 1 + \left[\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right)\right]^2 + \sigma'_u\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right)\left[\left(u - \frac{5}{4}\pi\right)\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + v - 2\pi\right].$$

On a donc identiquement

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u, v)} > 0. \tag{19}$$

Appliquons ce changement de variables à la fonction $t(\lambda, \mu)$ en posant

$$T^*(u, v) = t\left[u\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + \frac{5}{4}\pi\sigma\left(u, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi\right) - v, \; u + v\sigma\left(u, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) + 2\pi\sigma\left(u, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)\right]$$

pour

$$\frac{3}{4}\pi \leqq u \leqq \frac{3}{2}\pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq v \leqq 2\pi$$

et en faisant cette fonction périodique de période 2π par rapport à la variable u. On déduit de l'inégalité (19) et des propriétés de la fonction $t(\lambda, \mu)$ que l'on a identiquement

$$\left|\frac{\partial T^*}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial T^*}{\partial v}\right| > 0 \tag{20}$$

dans tout le domaine d'existence de la fonction envisagée. Il est d'ailleurs évident que

$$T^*(u, v) = T(u, v) \qquad \text{pour } \frac{3}{4}\pi \leqq u \leqq \frac{7}{6}\pi. \tag{21}$$

Il est donc clair que si, en revenant aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par le changement de variables inverse à (18), nous faisons

$$G^*(x, y, z) = T(u, v),$$

identiquement dans la région définie par les inégalités

$$\frac{3}{2} \leqq r \leqq \frac{5}{2}, \qquad \frac{3}{4}\pi \leqq u \leqq \frac{3}{2}\pi,$$

nous obtenons ainsi dans cette région une fonction de la classe C^∞ satisfaisant, en vertu de (21), à l'identité

$$G^\star(x, y, z) = G(x, y, z) \tag{22}$$

valable dans la partie commune à cette région et à R_2. Grâce à l'inégalité (20), on constate facilement l'indépendance des fonctions

$$F(x, y, z) \equiv r$$

et $G^\star(x, y, z)$ dans la région envisagée.

Appliquons à $F(x, y, z)$ et $G^\star(x, y, z)$ le changement de variables

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\,\frac{3-\sqrt{4-[-(1+\sqrt{3})z'+2+\sqrt{3}]^2}}{\sqrt{9-z'^2}},\\ y &= \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\,\frac{3-\sqrt{4-[-(1+\sqrt{3})z'+2+\sqrt{3}]^2}}{\sqrt{9-z'^2}},\\ z &= -(1+\sqrt{3})z'+2+\sqrt{3}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

nous obtenons ainsi deux nouvelles fonctions, soit respectivement $\varphi(x', y', z')$ et $\varphi(x', y', z')$ auxquelles nous pouvons appliquer le procédé décrit dans le n° **2**. En effet, ces deux nouvelles fonctions sont bien définies dans le voisinage de la portion de surface définie par (1) et (2) et y sont indépendantes, puisque $F(x, y, z)$ et $G^\star(x, y, z)$ l'étaient. Sur la portion de surface envisagée, on trouve

$$\varphi(x', y', z') = 2.$$

En désignant par k un nombre arbitraire tel que

$$\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < k < 2$$

et en choisissant le voisinage V suffisamment restreint, on s'assurera que les identités (3) sont satisfaites dans V pour $z' \geq k$. Quant à l'inégalité (4), on s'assurera d'elle le plus facilement en introduisant sur la sphère (1) les paramètres u et v par l'intermédiaire des formules (18), où l'on a fait $r = 2$, et (23).

Toutes les hypothèses faites au sujet des fonctions φ et ψ (les variables étant x', y' z' au lieu de x, y, z) se trouvent ainsi réalisées.

Nous pouvons donc former les fonctions $P(x', y', z')$ et $Q(x', y', z')$ d'après le procédé du n° **2**. Ces deux fonctions seront donc définies dans toute la région R, mais nous nous bornerons à les envisager dans la partie de cette région satisfaisant à l'inégalité

$$z' \leqq \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

En effet, elle correspond par les formules (23) à la région R_2. En faisant donc dans les fonctions $P(x', y', z')$ et $Q(x', y', z')$ le changement de variables inverse à celui qui est représenté par les formules (23), nous obtiendrons dans R_2 deux fonctions que nous désignerons précisément par $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$, ce qui est légitime, car sur la frontière commune à R_1 et R_2 nous retrouverons les valeurs que nous avions assignées à ces deux fonctions en les définissant dans la région R_1 et même les valeurs des dérivées partielles de tous les ordres concorderont. Cela résulte des conditions aux limites imposées aux fonctions $P(x', y' z')$ et $Q(x', y', z')$, et du fait que sur la frontière commune en question, l'identité (22) est vérifiée. Finalement, l'indépendance des fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ dans R_2 résulte de celle des fonctions $P(x', y', z')$ et $Q(x', y', z')$.

Il ne nous reste donc plus qu'à étendre la définition des fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ à la région R_3, ce qui s'effectuera par un procédé entièrement analogue à celui qui vient de nous servir pour définir les mêmes fonctions dans R_2. Remarquons d'abord que l'on a identiquement

$$T(v, u) = -T(u, v).$$

En posant donc par définition

$$T^{**}(u, v) = -T^{*}(v, u),$$

nous obtenons une nouvelle fonction satifaisant à l'identité

$$T^{**}(u, v) = T(u, v) \qquad \text{pour } \frac{3}{4}\pi \leqq v \leqq \frac{7}{6}\pi \tag{24}$$

et à l'inégalité

$$\left|\frac{\partial T^{**}}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial T^{**}}{\partial v}\right| > 0, \tag{25}$$

valable dans tout le domaine d'existence de la fonction $T^{**}(u, v)$, défini par la double inégalité

$$\frac{3}{4}\pi \leqq v \leqq \frac{3}{2}\pi.$$

La fonction en question étant périodique de période 2π par rapport à la variable u, nous pouvons lui appliquer le changement de variables inverse à celui qui est défini par les formules

$$(26)\qquad \begin{cases} x = r\sqrt{9 - \left(\frac{2v}{\pi} - \frac{2}{3}\right)^2}\cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right), \\ y = r\sqrt{9 - \left(\frac{2v}{\pi} - \frac{2}{3}\right)^2}\sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right), \\ z = \frac{2v}{\pi} - \frac{2}{3}, \end{cases}$$

en posant cette fois

$$\psi(x, y, z) = T^{**}(u, v), \quad \varphi(x, y, z) = r.$$

Ces deux nouvelles fonctions sont définies dans le voisinage de la portion de surface définie par les relations (1) et (2) et sont indépendantes dans tout leur domaine d'existence à cause de l'inégalité (25). Sur la portion de surface envisagée, on a

$$\varphi(x, y, z) = 1.$$

Pour $z \geqq \frac{11}{6}$ les identités (3) sont manifestement satisfaites, ainsi que l'inégalité (4), ce qu'on démontre de la même façon que précédemment.

Toutes les hypothèses faites dans le n° **2** se trouvent ainsi satisfaites, ce qui nous permet d'appliquer une seconde fois le procédé décrit pour la formation des fonctions $P(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$. Ces deux fonctions seront donc bien définies dans toute la région R, mais nous nous bornerons à les envisager dans la partie de R satisfaisant à l'inégalité

$$z \leqq \frac{5}{3}.$$

En effet, elle correspond par les relations (26) à la région R_3. En faisant donc dans les fonctions $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$ ce changement de variables, puis en exprimant par les formules (18) les coordonnées curvilignes r, u, v au moyen des coordonnées cartésiennes que nous désignerons de nouveau par x, y, z, nous obtiendrons dans R_3 deux fonctions que nous désignerons précisément par $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$, ce qui est légitime, car sur la frontière commune à R_1 et R_3 nous retrouverons les valeurs que nous avions assignées à ces deux fonctions en les définissant dans R_1, et même les valeurs des dérivées partielles de tous les ordres concorderont grâce à la relation (24). Finalement, l'indépendance des deux fonctions envisagées dans R_3 résulte de celle de $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$. La construction de l'exemple annoncé à la fin du n° **1** est donc achevée.

4. On peut remplacer les fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ par deux polynomes ayant aussi la propriété voulue d'être indépendants dans la totalité d'un domaine unicohérent contenant dans son intérieur une courbe fermée sur laquelle ils sont tous les deux constants; il suffit que ces polynomes approchent suffisamment bien les fonctions $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ dans la région R_0.