JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACQUES DEVISME

Sur un espace dont l'élément linéaire est défini par $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 359-393.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_359_0>

Sur un espace dont l'élément linéaire est défini par $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz$;

PAR JACQUES **DEVISME**.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire paru il y a quelques années [1], où nous avions étudié l'équation

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z},$$

considérée comme généralisation de l'équation de Laplace

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

nous avons été amené à définir l'élément linéaire, et l'élément d'aire par les formules

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d\sigma^3 = {} & (dy\,\delta z - dz\,\delta y)^3 + (dz\,\delta x - dx\,\delta z)^3 + (dx\,\delta y - dy\,\delta x)^3 \\ & - 3(dy\,\delta z - dz\,\delta y)(dz\,\delta x - dx\,\delta z)(dx\,\delta y - dy\,\delta x). \end{aligned} \tag{2}$$

Nous avons en vue, dans ce Mémoire, de réunir un certain nombre de renseignements sur cet espace, pouvant servir à des recherches ultérieures. Les calculs que nous serons amené à faire utiliseront

[1] Sur l'équation de M. Pierre Humbert (*Ann. sc. Fac. Sc. de Toulouse*, 3e série, t. XXV, 1933, p. 143-238, ou *Thèse*, Paris, 1933).

des identités déjà démontrées dans le Mémoire cité; nous nous contenterons de renvoyer à ce Mémoire en indiquant en caractères gras entre parenthèses le numéro du paragraphe correspondant. Rappelons toutefois que l'équivalent des fonctions trigonométriques de l'espace euclidien plan est donné ici par les fonctions d'Appell

$$\left\{\begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \\ Q(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + j^2\, e^{j\theta+j^2\varphi} + j\, e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \qquad (j^3=1), \\ R(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + j\, e^{j\theta+j^2\varphi} + j^2\, e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}, \end{aligned}\right.$$

et qu'au système de référence de deux axes rectangulaires Ox, Oy correspond ce que nous avons appelé le trièdre d'Appell (**52**).

Le premier chapitre est consacré à l'étude des tétraèdres; nous nous sommes arrêté plus longuement sur les tétraèdres construits à partir d'un trièdre d'Appell et qui généralisent les triangles rectangles; l'importance des trièdres d'Appell nous a incité à le faire, autant que la simplicité et l'élégance des résultats obtenus dans ce cas particulier.

Cette étude à eu l'avantage de nous faire considérer une seconde généralisation du cercle, la surface Σ; certaines des propriétés du cercle ayant leur équivalent soit pour la sphère d'Appell, soit pour cette surface Σ. Habitués comme nous sommes à considérer en bloc le cercle et ses diverses propriétés, cette dispersion des qualités n'est pas sans surprendre au premier abord.

Il est bon de signaler aussi que le fait d'avoir dans notre espace des éléments de longueur nulle réels, donne lieu à des complications qui n'apparaissent pas dans la rédaction de ce Mémoire, puisque nous nous sommes attaché à utiliser des méthodes propres à faire disparaître toute difficulé.

Le second chapitre est consacré à l'étude des déplacements d'un trièdre d'Appell. Nous avons mis en lumière l'existence d'un centre instantané de rotation I et d'un centre des accélérations J. Les cercles des inflexions et des rebroussements qui apparaissent dans l'étude euclidienne du déplacement plan sur plan, ont ici comme équivalents des surfaces Σ et nous avons pu énoncer le théorème : *Le point* J *est la* *projection orthogonale de* I *sur le plan passant par les points* $S_1 S_2 S_3$ *diamétralement opposés à* I *sur les trois surfaces* Σ. Toute cette première partie du chapitre peut être considérée comme un travail préparatoire à l'étude des surfaces (considérées comme généralisation des courbes du plan euclidien), par la méthode du trièdre mobile d'Appell.

Le chapitre se termine par l'étude des composantes de la vitesse et de l'accélération d'un point dans le trièdre constitué par le rayon vecteur et ses deux perpendiculaires; nous donnons chemin faisant quelques renseignements sur les mouvements à accélération centrale et nous traitons à titre d'exercice de tels mouvements sur la surface d'équation polaire $r = e^{\frac{\theta+\varphi}{2}}$.

Le dernier chapitre contient d'abord quelques renseignements sur le système de coordonnées polaires; l'étude du plan tangent, de la normale et des relations entre deux trièdres d'Appell, respectivement liés à la surface et au système de coordonnées, constitue la première section; nous avons cru bon de profiter de la circonstance pour publier quelques formules que nous avions en mains depuis quelques années déjà, sur les fonctions

$$S(\theta, \varphi) = \frac{Q(\theta, \varphi)}{P(\theta, \varphi)}, \qquad T(\theta, \varphi) = \frac{R(\theta, \varphi)}{P(\theta, \varphi)},$$

fonctions qui généralisent la fonction tangente.

La deuxième section est consacrée à l'étude succincte de la surface Σ, tandis que dans la troisième section, nous faisons à titre d'exercice quelques essais de généralisation de la parabole.

Les matières contenues dans ce Mémoire peuvent paraître un peu disparates; mais nous avons justement voulu montrer que l'espace considéré appelait d'autres travaux. Évidemment toutes les propriétés démontrées sont des conséquences des propriétés des formes polaires, mais c'est aussi le cas des propriétés de la géométrie euclidienne, que nous avons généralisées. La dispersion des propriétés du cercle ou de la parabole demande réflexion; il est certainement possible de prévoir *a priori* la nouvelle répartition, pour une généralisation donnée, mais les renseignements que nous avons actuellement sur cet espace ne nous ont pas permis de conclure.

Les points principaux de ce travail ont été énoncés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 208, 1939, p. 1543-1544 et p. 1773-1775).

Ce Mémoire a été spécialement rédigé à l'occasion du Jubilé Scientifique de M. Élie Cartan, en témoignage de respectueuse admiration.

Tours, le 10 juin 1939 (1).

CHAPITRE I.

LES TÉTRAÈDRES.

I. — Tétraèdres construits à partir d'un trièdre d'Appell.

1. Théorème de Pythagore. — Prenons le trièdre d'Appell comme trièdre de référence. Soient les point $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, que nous énoncerons toujours dans cet ordre. Les aires (2) des différentes faces sont, d'après la formule (2),

$$S_A = S_{(OBC)} = bc, \qquad S_B = S_{(OCA)} = ca, \qquad S_C = S_{(OAB)} = ab,$$
$$S_O = S_{(ABC)} = \sqrt[3]{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 - 3a^2b^2c^2},$$

nous en déduisons l'identité

$$\boxed{S_O^3 = S_A^3 + S_B^3 + S_C^3 - 3\,S_A S_B S_C.}$$

2. Hauteur relative a la face hypoténuse. — La direction de la normale à la face hypoténuse

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

(1) Ce Mémoire était rédigé lorsque j'ai reçu un mot de M. Pierre Humbert qui, venant de lire ma première Note, me signalait qu'il avait travaillé cet hiver de son côté sur l'espace en question. Ses recherches l'ont conduit, entre autres choses, à l'étude de la surface que j'ai nommée Σ, considérée comme inverse d'un plan, et aussi à celle de la surface lieu des points équidistants d'un point et d'un plan.

N'ayant pas le loisir de recommencer la rédaction de ce Mémoire, après nous être entendus, je lui ai communiqué copie de mon travail en lui laissant le soin de faire les commentaires d'usage lors de la publication de ses résultats.

(2) Il faudrait, ici, introduire un coefficient multiplicatif, dont le choix nous semble prématuré.

est donnée par les paramètres directeurs (**58**)

$$\alpha = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{bc}, \qquad \beta = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ca}, \qquad \gamma = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab}.$$

Le pied H de la hauteur a donc pour coordonnées $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$, avec

$$1 = k\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right) = k\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}\right).$$

La longueur de la hauteur est donc donnée par

$$\begin{aligned} h^3 = k^3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma) &= k^3\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'identité, analogue à l'identité classique

$$\boxed{\frac{1}{h^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}.}$$

Nous pouvons encore écrire cela

$$\frac{1}{h^3} = \frac{S_0^3}{a^3 b^3 c^3},$$

d'où nous déduisons en tenant compte du paragraphe précédent

$$\boxed{abc = S_0 . h = S_A . a = S_B . b = S_C . c,}$$

dentité exprimant la *constance du produit des aires des faces et des hauteurs correspondantes*. Nous sommes ainsi amené à écrire

$$V = abc,$$

V étant le *volume* (¹) du tétraèdre.

3. Angle de la face hypoténuse et d'une autre face. — Cherchons les relations angulaires existant entre les normales à ces deux plans. Les coefficients directeurs de ces normales étant respectivement

(¹) La même remarque que pour l'*aire* est à faire.

α, β, γ, pour la face hypoténuse et 0, 0, 1 pour la face AOB, les cosinus d'Appell attachés à l'ensemble de ces directions ont pour valeur (**50**)

$$\frac{\gamma^2-\alpha\beta}{\sqrt[3]{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2}}, \qquad \frac{\gamma}{\sqrt[3]{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)}}.$$

Mais

$$\gamma=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{ab}, \qquad \gamma^2-\alpha\beta=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}\right),$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}\right)^2,$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}=\frac{S_O^3}{a^3b^3c^3}.$$

Nous sommes donc amené à écrire (en introduisant une nouvelle notation légitimée par simple lecture)

$$P(S_O, S_C)=\frac{1}{c}\,\frac{S_O^3}{a^3b^3c^3}:\frac{S_O^4}{a^4b^4c^4}=\frac{ab}{S_O},$$

$$P(S_C, S_O)=\frac{ab-c^2}{c^2ab}:\frac{S_O^2}{a^2b^2c^2}=\frac{(ab-c^2)ab}{S_O^2}.$$

Nous en déduisons immédiatement un certain nombre d'identités analogues aux identités classiques du triangle rectangle

$$\boxed{\begin{gathered} a\,P(S_O, S_A)=b\,P(S_O, S_B)=c\,P(S_O, S_C)=\frac{abc}{S_O}=h,\\ S_A=S_O\,P(S_O, S_A),\qquad S_B=S_O\,P(S_O, S_B),\qquad S_C=S_O\,P(S_O, S_C),\\ S_O=S_A\,P(S_A, S_O)+S_B\,P(S_B, S_O)+S_C\,P(S_C, S_O).\end{gathered}}$$

Ces deux dernières catégories de formules constituant l'équivalent du théorème des projections que nous pouvons énoncer :

L'aire S_1 *de la projection sur un plan* Π_1 *d'un triangle d'aire* S_0 *tracé sur un plan* Π_0 *s'exprime par la formule*

$$\boxed{S_1=S_O\,P(\Pi_0, \Pi_1).}$$

Signalons encore les identités suivantes entre les cosinus d'Appell introduits, identités qui sont encore la traduction d'identités classiques

$$\boxed{\begin{array}{l} P^3(S_O, S_A) + P^3(S_O, S_B) + P^3(S_O, S_C) - 3\,P(S_O, S_A)\,P(S_O, S_B)\,P(S_O, S_C) = 1, \\ P^3(S_A, S_O) + P^3(S_B, S_O) + P^3(S_C, S_O) - 3\,P(S_A, S_O)\,P(S_B, S_O)\,P(S_C, S_O) = 1. \end{array}}$$

4. Distance d'un point a un plan. Sphère d'Appell inscrite. — Soient le plan $lx + my + nz + p = 0$ et le point x_0, y_0, z_0; la direction de la normale au plan étant donnée par les paramètres directeurs $l^2 - mn$, $m^2 - nl$, $n^2 - lm$, écrivons que le point

$$x = x_0 + k(l^2 - mn), \qquad y = y_0 + k(m^2 - nl), \qquad z = z_0 + k(n^2 - lm)$$

est dans le plan donné, cela fournit

$$k = -\frac{lx_0 + my_0 + xz_0 + p}{l^3 + m^3 + n^3 - 3lmn},$$

et la distance du point au plan

$$d = \sqrt[3]{(x_0 - x)^3 + (y_0 - y)^3 + (z_0 - z)^3 - 3(x_0 - x)(y_0 - y)(z_0 - z)},$$

est donnée par

$$\boxed{d = \frac{lx_0 + my_0 + nz_0 + p}{\sqrt[3]{l^3 + m^3 + n^3 - 3lmn}}.}$$

En prenant la distance du plan au point on aurait un résultat de signe opposé.

Cherchons maintenant s'il existe un point situé à une même distance r des quatre faces de notre tétraèdre. Ses coordonnées seront r, r, r, et nous aurons la condition

$$r = \frac{\dfrac{r}{a} + \dfrac{r}{b} + \dfrac{r}{c} - 1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} - \dfrac{3}{abc}}} = \frac{r(bc + ca + ab) - abc}{\sqrt[3]{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 - 3a^2b^2c^2}},$$

d'où

$$\boxed{r = \frac{abc}{S_A + S_B + S_C - S_O}.}$$

C'est, à un changement de signe près, dû à notre définition de la distance, une formule analogue à celle relative au triangle rectangle. Ceci peut du reste s'écrire encore sous la forme élégante

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{h}.}$$

On pourrait introduire d'autres sphères d'Appell tangentes aux quatre faces en faisant varier les signes des distance aux plans. Nous nous contenterons de noter que si r_1 et r_2 sont les rayons des sphères dont les centres sont sur la droite $x = y = z$ (1), on peut écrire

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right],$$

formule généralisant un résultat analogue du triangle.

5. Surface Σ circonscrite au tétraèdre. Point D. — Soit la surface Σ (dont nous étudierons plus loin les propriétés au § **21**), surface qui généralise le cercle considéré comme podaire d'un point par rapport à un autre et dont l'équation est

$$\Sigma \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - [a(x^2 - yz) + b(y^2 - zx) + c(z^2 - xy)] = 0.$$

Cette surface passe par les points O, A, B, C et S(a, b, c).

Considérons maintenant le point K défini à partir du pied H de la hauteur issue de O par l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}$. Ses coordonnées sont (§ **2**)

$$x = 3h^3\alpha, \qquad y = 3h^3\beta, \qquad z = 3h^3\gamma,$$

d'où

$$x^2 - yz = 9h^6(\alpha^2 - \beta\gamma) = 9\frac{h^3}{a},$$

et deux formules analogues. Nous avons finalement

$$\Sigma \equiv 27h^9(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma) - 27h^3 \equiv 0,$$

d'après un résultat du paragraphe **3**. Donc : *le bisymétrique du sommet* O *par rapport à la face hypoténuse est sur la surface* Σ.

---

(1) Il n'est pas indifférent de noter que ces deux centres sont à une distance nulle.

Montrons maintenant que les normales à Σ, *aux trois points* A, B, C, *sont concourantes.*

En effet, un point quelonque de la normale en A s'écrit (§ 22)

$$a+\lambda(a^2-bc),\quad \lambda(c^2-ab),\quad \lambda(b^2-ca);$$

pour un point quelconque de la normale en B on a de même

$$\mu(c^2-ab),\quad b+\mu(b^2-ca),\quad \mu(a^2-bc).$$

Ces expressions seront respectivement égales si

$$\lambda=\frac{-(a^2-bc)}{a^3+b^3+c^3-3abc},\qquad \mu=\frac{-(b^2-ca)}{a^3+b^3+c^3-3abc},$$

et cela nous conduit au point $D(\xi, \eta, \zeta)$

$$\boxed{\xi=\frac{-(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc},\quad \eta=\frac{-(c^2-ab)(a^2-bc)}{a^3+b^3+c^3-3abc},\quad \zeta=\frac{-(a^2-bc)(b^2-ca)}{a^3+b^3+c^3-3abc}.}$$

C. Q. F. D.

Nous en déduisons

$$a-\xi=\frac{(a^2-bc)^2}{\mathrm{OS}^3},\qquad b-\eta=\frac{(b^2-ca)^2}{\mathrm{OS}^3},\qquad c-\zeta=\frac{(c^2-ab)^2}{\mathrm{OS}^3},$$

d'où

$$(\xi-a)^2-\eta\zeta=\frac{(a^2-bc)^2a}{\mathrm{OS}^3},\qquad \eta^2-(\xi-a)\zeta=\frac{(a^2-bc)^2c}{\mathrm{OS}^3},$$

$$\zeta^2-(\xi-a)\eta=\frac{(a^2-bc)^2b}{\mathrm{OS}^3};$$

$$\mathrm{AD}^3=(\xi-a)^3+\eta^3+\zeta^3-3(\xi-a)\eta\zeta=-\frac{(a^2-bc)^3}{\mathrm{OS}^3}$$

et enfin

$$\mathrm{DA}=\frac{a^2-bc}{\mathrm{OS}}.$$

Ceci nous fournit, en tenant compte de deux relations analogues, les identités

$$\boxed{\begin{gathered} a\mathrm{DA}+b\mathrm{DB}+c\mathrm{DC}=\mathrm{OS}^2,\\ \mathrm{DA}^3+\mathrm{DB}^3+\mathrm{DC}^3-3\mathrm{DA}.\mathrm{DB}.\mathrm{DC}=\mathrm{OS}^3.\end{gathered}}$$

Si nous remarquons d'autre part que

$$a - 3\xi = \frac{(a^2 - bc)^2 + 2(b^2 - ca)(c^2 - ab)}{\mathrm{OS}^3},$$

ne tenant compte des formules de multiplications par deux dans les cosinus d'Appell, nous avons

$$\boxed{(a - 3\xi)^3 + (b - 3\eta)^3 + (c - 3\zeta)^3 - 3(a - 3\xi)(b - 3\eta)(c - 3\zeta) = \mathrm{OS}^3.}$$

Si D' est défini par $\overrightarrow{\mathrm{OD}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, nous avons donc

$$\boxed{\mathrm{D'S} + \mathrm{SO} = 0.}$$

Signalons enfin les identités

$$a^2\alpha\xi = b^2\beta\eta = c^2\gamma\zeta.$$

6. Tétraèdres réciproques. — Considérons les deux tétraèdres construits à partir du même trièdre d'Appell et défini par

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OB} = b, \quad \mathrm{OC} = c, \quad \mathrm{OA'} = a', \quad \mathrm{OB'} = b', \quad \mathrm{OC'} = c',$$

avec

$$aa' = bb' = cc' = 1,$$

et réservons les mêmes notations pour les deux trièdres en accentuant les lettres pour le second tétraèdre; nous aurons

$$\mathrm{VV'} = 1, \qquad \mathrm{OS'}.h' = \mathrm{OS}.h = 1, \qquad \frac{1}{r} = a' + b' + c' - \frac{1}{h},$$

avec échange des points S et H' d'une part et S' et H d'autre part.

Par la transformation de M. D. V. Jonesco (**62**) (*voir* aussi § **22**), les surfaces Σ circonscrites et les faces hypoténuses s'échangent d'un tétraèdre à l'autre.

7. Quelques autres questions. — Nous voulons réunir dans ce paragraphe quelques résultats qui n'ont pu être signalés dans la rédaction de ce qui précède.

Indiquons d'abord qu'on pourrait se proposer le problème de la

résolution des tétraèdres trirectangles au sens d'Appell en nombres entiers. Nous nous contenterons de signaler quelques exemples tels que

$$S_A = 2, \quad S_B = 3, \quad S_C = 4, \quad S_O = 3,$$
$$S_A = 6, \quad S_B = 6, \quad S_C = 3, \quad S_O = 4,$$
$$S_A = 21, \quad S_B = 21, \quad S_C = 22, \quad S_O = 4;$$

pour le second exemple il est remarquable que l'on ait en même temps

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad h = 3, \quad r = 1.$$

Prenons maintenant le point I $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$; si on le joint aux sommets A, B, C on obtient trois triangles d'aires égales. [Mêmes propriétés pour le point $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, 0\right)$ relativement aux points O, A, B du triangle OAB, etc.]

Considérons maintenant l'angle de la hauteur OH et de la ligne médiane OI; on a

$$\mathrm{P(OH, OI)} = \frac{a(\alpha^2 - \beta\gamma) + b(\beta^2 - \gamma\alpha) + c(\gamma^2 - \alpha\beta)}{\mathrm{OS}\,\frac{1}{h^4}}$$
$$= \frac{h^4}{\mathrm{OS}}\left[\frac{a}{ah^3} + \frac{b}{bh^3} + \frac{c}{ch^3}\right],$$

d'où

$$\mathrm{P(OH, OI)} = \frac{h}{\mathrm{OI}}.$$

Relation analogue à celle relative au triangle rectangle.

On a aussi

$$\mathrm{P(OI, OH)} = \frac{\alpha(a^2 - bc) + \beta(b^2 - ca) + \gamma(c^2 - ab)}{\mathrm{OS}^2\,\frac{1}{h^2}}$$
$$= -\frac{h^2}{\mathrm{OS}^2}\,\frac{\Sigma\, bc(a^2 - bc)^2}{\mathrm{V}}$$
$$= -\frac{h^2}{\mathrm{OS}^2\mathrm{V}^2}\left[abc(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 - 3a^2b^2c^2\right]$$
$$= -\left[\frac{\mathrm{V}^2 + \mathrm{OS}^3 h^3}{\mathrm{V.OS}^2 h}\right].$$

II. — Quelques formules pour le tétraèdre quelconque.

8. Calculs préparatoires. — Soient les quatre points $O(o, o, o)$. $A(a, b, c)$, $B(a', b', c')$, $C(a'', b'', c'')$.

Pour la face OBC on posera

$$b''c' - b'c'' = \alpha, \qquad c''a' - c'a'' = \beta, \qquad a''b' - a'b'' = \gamma,$$

d'où

$$S_A^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

On fera des permutations circulaires sur les accentuations pour les autres faces OCA, OAB.

Pour la face ABC nous utiliserons les mineurs du tableau

$$\begin{Vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ a''-a & b''-b & c''-c \end{Vmatrix},$$

qui sont respectivement

$$\alpha + \alpha' + \alpha'', \quad \beta + \beta' + \beta'', \quad \gamma + \gamma' + \gamma'';$$

d'où

$$\begin{aligned} S_O^3 = {} & (\alpha + \alpha' + \alpha'')^3 + (\beta + \beta' + \beta'')^3 + (\gamma + \gamma' + \gamma'')^3 \\ & - 3(\alpha + \alpha' + \alpha'')(\beta + \beta' + \beta'')(\gamma + \gamma' + \gamma''). \end{aligned}$$

Déterminons maintenant les cosinus d'Appell des angles des dièdres de notre tétraèdre.

L'équation du plan OBC est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ o & o & o & 1 \end{vmatrix} = \alpha x + \beta y + \gamma z = o,$$

d'où la normale de coefficients directeurs

$$\alpha^2 - \beta\gamma, \quad \beta^2 - \gamma\alpha, \quad \gamma^2 - \alpha\beta.$$

Pour le plan ABC on a de même

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a'-a & b'-b & c'-c & 0 \\ a''-a & b''-b & c''-c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\alpha'+\alpha'')x + (\beta+\beta'+\beta'')y + (\gamma+\gamma'+\gamma'')z - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

d'où les coefficients directeurs de la normale

$$A = (\alpha+\alpha'+\alpha'')^2 - (\beta+\beta'+\beta'')(\gamma+\gamma'+\gamma''),$$
$$B = (\beta+\beta'+\beta'')^2 - (\gamma+\gamma'+\gamma'')(\alpha+\alpha'+\alpha''),$$
$$C = (\gamma+\gamma'+\gamma'')^2 - (\alpha+\alpha'+\alpha'')(\beta+\beta'+\beta''),$$

ce qui fournit les formules

$$P(S_O, S_A) = \frac{\Sigma(\alpha^2-\beta\gamma)(A^2-BC)}{S_A^2 S_O^4} = \frac{\Sigma(\alpha^2-\beta\gamma)(\alpha+\alpha'+\alpha'')}{S_A^2 S_O},$$

$$P(S_A, S_O) = \frac{\Sigma A[(\alpha^2-\beta\gamma)^2-(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)]}{S_O^2 S_A^4} = \frac{\Sigma A\alpha}{S_O^2 S_A};$$

$$P(S_B, S_C) = \frac{\Sigma(\alpha''^2-\beta''\gamma'')\alpha'}{S_C^2 S_B},$$

$$P(S_C, S_B) = \frac{\Sigma(\alpha'^2-\beta'\gamma')\alpha''}{S_B^2 S_C}.$$

9. Une formule fondamentale. — **Nous déduisons de ce qui précède**

$$\varpi = S_O^3 - [S_A^3 + S_B^3 + S_C^3 - 3\Sigma S_B^2 S_C P(S_C, S_B) - 3\Sigma S_C^2 S_B P(S_B, S_C)]$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha+\alpha'+\alpha'' & \beta+\beta'+\beta'' & \gamma+\gamma'+\gamma'' \\ \gamma+\gamma'+\gamma'' & \alpha+\alpha'+\alpha'' & \beta+\beta'+\beta'' \\ \beta+\beta'+\beta'' & \gamma+\gamma'+\gamma'' & \alpha+\alpha'+\alpha'' \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \gamma' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \gamma'' & \alpha'' & \beta'' \\ \beta'' & \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix}$$

$$- 3\sum \begin{vmatrix} \alpha' & \beta'' & \gamma'' \\ \gamma' & \alpha'' & \beta'' \\ \beta' & \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix} - 3\sum \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta' & \gamma' \\ \gamma'' & \alpha' & \beta' \\ \beta'' & \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}.$$

En décomposant le premier déterminant en 27 déterminants du

troisième ordre à une seule lettre par élément, et en faisant les réductions possibles, on trouve qu'il ne reste que les 6 déterminants dont les accentuations des différentes colonnes sont toutes différentes, donc

$$\mathcal{D} = 3\begin{vmatrix} \alpha & \beta' & \gamma'' \\ \gamma & \alpha' & \beta'' \\ \beta & \gamma' & \alpha'' \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \alpha & \beta'' & \gamma' \\ \gamma & \alpha'' & \beta' \\ \beta & \gamma'' & \alpha' \end{vmatrix}$$
$$= 3[\alpha(2\alpha'\alpha'' - \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(2\beta'\beta'' - \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(2\gamma'\gamma'' - \alpha'\beta'' - \alpha''\beta')].$$

Il est assez indiqué de poser

$$\mathfrak{T}(S_A, S_B, S_C) = \frac{\mathcal{D}}{S_A S_B S_C},$$

$\mathfrak{T}$ jouant le rôle d'un *cosinus de trièdre;* moyennant cette notation nous obtenons la formule que nous avions en vue

$$\boxed{\begin{aligned} S_O^3 = S_A^3 + S_B^3 + S_C^3 &- 3 S_B^2 S_C P(S_C, S_B) - 3 S_C^2 S_B P(S_B, S_C) \\ &- 3 S_C^2 S_A P(S_A, S_C) - 3 S_A^2 S_C P(S_C, S_A) \\ &- 3 S_A^2 S_B P(S_B, S_A) - 3 S_B^2 S_A P(S_A, S_B) + 3 S_A S_B S_C \mathfrak{T}(S_A, S_B, S_C). \end{aligned}}$$

10. Volume et hauteurs. — En utilisant la distance d'un point à un plan, on a pour la hauteur issue de O

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{S_0}.$$

Or, en considérant les arêtes issues d'un quelconque des sommets, et prises dans un même ordre, on voit que le déterminant construit à partir de ces arêtes est exactement le même. Nous prendrons donc désormais comme élément de volume

$$dv = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix}.$$

Le volume du tétraèdre sera (en laissant encore de côté la question du coefficient numérique)

$$V = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

et le résultat donné plus haut permet d'écrire

$$\boxed{h_A S_A = h_B S_B = h_C S_C = h_0 S_0 = V.}$$

11. Quelques autres formules. — En utilisant quelques formules du paragraphe **8** nous pouvons écrire

$$\boxed{S_0 = S_A P(S_A, S_0) + S_B P(S_B, S_0) + S_C P(S_C, S_0)}$$

et trois formules analogues.

Si l'on cherche le rayon de la sphère inscrite, on a, en utilisant la distance d'un point à un plan et en appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre

$$r = \frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0}{S_A} = \frac{\alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0}{S_B} = \frac{\alpha'' x_0 + \beta'' y_0 + \gamma'' z_0}{S_C}$$

$$= \frac{(\alpha + \alpha' + \alpha'')x_0 + (\beta + \beta' + \beta'')y_0 + (\gamma + \gamma' + \gamma'')z_0 - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{S_0};$$

éliminons x_0, y_0, z_0, il vient

$$\boxed{r = \frac{V}{S_A + S_B + S_C - S_0}.}$$

La surface Σ circonscrite se déterminera facilement; le point S sera le point commun aux plans perpendiculaires aux arêtes OA, OB, OC, en A, B, C.

CHAPITRE II.

DÉPLACEMENT D'UN TRIÈDRE D'APPELL. QUELQUES QUESTIONS DE CINÉMATIQUE.

12. Relations entre le trièdre fixe et le trièdre mobile. — Soient le trièdre fixe $O_0 x_0 y_0 z_0$ et le trièdre mobile $Oxyz$. Représentons par ξ, η, ζ les coordonnées de O par rapport à $O_0 x_0 y_0 z_0$, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', les composantes des vecteurs unitaires de Ox, Oy, Oz par rapport aux axes fixes; A, B, C; A′, B′, C′; A″, B″, C″, les composantes des vecteurs unitaires des axes fixes O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0 par rapport aux axes mobiles. Nous avons les deux tableaux, dont on ne peut impunément changer les lignes en colonnes

	O_0x_0	O_0y_0	O_0z_0
Ox	$\alpha = P$	$\beta = Q$	$\gamma = R$
Oy	$\alpha' = R$	$\beta' = P$	$\gamma' = Q$
Oz	$\alpha'' = Q$	$\beta'' = R$	$\gamma'' = P$

	Ox	Oy	Oz
O_0x_0	$A = P^2 - QR$	$B = R^2 - PQ$	$C = Q^2 - RP$
O_0y_0	$A' = Q^2 - RP$	$B' = P^2 - QR$	$C' = R^2 - PQ$
O_0z_0	$A'' = R^2 - PQ$	$B'' = Q^2 - RP$	$C'' = P^2 - QR$

Cela fournit un certain nombre d'égalités dont nous écrirons les plus caractéristiques, et en nous contentant de donner la première de chaque groupe de trois

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma &= \alpha^3+\alpha'^3+\alpha''^3-3\,\alpha\,\alpha'\,\alpha'' = A^3+B^3+C^3-3ABC\\ &= A^3+A'^3+A''^3-3AA'A'' = A\alpha+A'\beta+A''\gamma = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\alpha(\alpha'^2-\beta'\gamma')+\beta(\beta'^2-\gamma'\alpha')+\gamma(\gamma'^2-\alpha'\beta')\\ &= A(A'^2-B'C')+B(B'^2-C'A')+C(C'^2-A'B') = 0.\end{aligned}$$

Si nous cherchons maintenant les composantes de la vitesse d'un point invariablement lié au trièdre mobile, nous aurons (2) en utilisant les dérivées partielles des fonctions P, Q, R

$$\left\{\begin{aligned} V_{x_0} &= \frac{d\xi}{dt} + (Rx+Qy+Pz)\frac{d\theta}{dt} + (Qx+Py+Rz)\frac{d\varphi}{dt},\\ V_{y_0} &= \frac{d\eta}{dt} + (Px+Ry+Qz)\frac{d\theta}{dt} + (Rx+Qy+Pz)\frac{d\varphi}{dt},\\ V_{z_0} &= \frac{d\zeta}{dt} + (Qx+Py+Rz)\frac{d\theta}{dt} + (Px+Ry+Qz)\frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Projetons sur les axes fixes ; grâce aux formules

$$\left\{\begin{aligned} V_x &= AV_{x_0} + A'V_{y_0} + A''V_{z_0}, \\ V_y &= BV_{x_0} + B'V_{y_0} + B''V_{z_0}, \\ V_z &= CV_{x_0} + C'V_{y_0} + C''V_{z_0}, \end{aligned}\right.$$

et en appelant U_x, U_y, U_z les projections de la vitesse du point O, on a

$$\left\{\begin{aligned} V_x &= U_x \qquad\qquad + y\frac{d\varphi}{dt} + z\frac{d\theta}{dt}, \\ V_y &= U_y + x\frac{d\theta}{dt} \qquad\qquad + z\frac{d\varphi}{dt}, \\ V_z &= U_z + x\frac{d\varphi}{dt} + y\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Si $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$ sont les vecteurs unitaires de Ox, Oy, Oz on a donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\vec{I}_1}{dt} &= \qquad\qquad p_{12}\vec{I}_2 + p_{13}\vec{I}_3, \\ \frac{d\vec{I}_2}{dt} &= p_{21}\vec{I}_1 \qquad\qquad + p_{23}\vec{I}_3, \\ \frac{d\vec{I}_3}{dt} &= p_{31}\vec{I}_1 + p_{32}\vec{I}_2, \end{aligned}\right.$$

avec

$$p_{12} = p_{23} = p_{31},$$
$$p_{21} = p_{32} = p_{13}.$$

13. CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION. — Cherchons s'il existe un point de vitesse nulle. En résolvant le système

$$V_x = V_y = V_z = 0,$$

il vient

$$x_1 = \frac{U_x\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} - U_y\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - U_z\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^3 + \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^3},$$

ou encore

$$x_1 = -\frac{[d\xi(dP^2 - dQ\,dR) + d\eta(dQ^2 - dR\,dP) + d\zeta(dR^2 - dP\,dQ)}{d\theta^3 + d\varphi^3},$$

c'est-à-dire plus élégamment

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ dR & dP & dQ \\ dQ & dR & dP \end{vmatrix}}{d\theta^3 + d\varphi^3},$$

et de même

$$y_1 = -\frac{\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ dQ & dR & dP \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix}}{d\theta^3 + d\varphi^3}, \qquad z_1 = -\frac{\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ dP & dQ & dR \\ dR & dP & dQ \end{vmatrix}}{d\theta^3 + d\varphi^3}.$$

Cherchons si ce point ne joue pas le rôle de *centre instantané de rotation*, c'est-à-dire, cherchons si, à un instant donné, il n'existe pas des relations d'orthogonalité entre $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MV}$.

Les formules donnant la vitesse s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned}
V_x &= (y - y_1)\frac{d\varphi}{dt} + (z - z_1)\frac{d\theta}{dt} = v\frac{d\varphi}{dt} + w\frac{d\theta}{dt},\\
V_y &= (x - x_1)\frac{d\theta}{dt} + (z - z_1)\frac{d\varphi}{dt} = u\frac{d\theta}{dt} + w\frac{d\varphi}{dt},\\
V_z &= (x - x_1)\frac{d\varphi}{dt} + (y - y_1)\frac{d\theta}{dt} = u\frac{d\varphi}{dt} + v\frac{d\theta}{dt};
\end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned}
&V_x(u^2 - vw) + V_y(v^2 - wu) + V_z(w^2 - uv)\\
&= [w(u^2 - vw) + u(v^2 - wu) + v(w^2 - uv)]\frac{d\theta}{dt}\\
&\quad + [v(u^2 - vw) + w(v^2 - wu) + u(w^2 - uv)]\frac{d\varphi}{dt} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u(V_x^2 - V_yV_z) + v(V_y^2 - V_zV_x) + w(V_z^2 - V_xV_y)\\
&= [u(w^2 - uv) + v(u^2 - vw) + w(v^2 - wu)]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\\
&\quad + [u(wv - u^2) + v(uw - v^2) + w(vu - w^2)]\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\\
&\quad + [u(v^2 - wu) + v(w^2 - uv) + w(u^2 - vw)]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$

De ceci résulte que le vecteur $\vec{V}$ est dans le plan orthogonal à IM, mais n'est pas nécessairement une des perpendiculaires, ceci se produisant si et seulement si θ ou φ sont constants.

Signalons que ces résultats nous permettront ultérieurement de reprendre la théorie de surfaces de notre espace par la méthode du trièdre mobile d'Appell.

14. Retour aux axes fixes. Applications. — Les formules de transformation de coordonnées nous fournissent pour coordonnées de I dans les axes fixes

$$\left\{\begin{aligned} X_I &= \xi + \frac{d\xi\, d\theta\, d\varphi - d\eta\, d\theta^2 - d\zeta\, d\varphi^2}{d\theta^3 + d\varphi^3}, \\ Y_I &= \eta + \frac{d\eta\, d\theta\, d\varphi - d\zeta\, d\theta^2 - d\xi\, d\varphi^2}{d\theta^3 + d\varphi^3}, \\ Z_I &= \zeta + \frac{d\zeta\, d\theta\, d\varphi - d\xi\, d\theta^2 - d\eta\, d\varphi^2}{d\theta^3 + d\varphi^3}. \end{aligned}\right.$$

Prenons comme exemple

$$\xi = P, \qquad \eta = Q, \qquad \zeta = R;$$

on trouve

$$X_I = Y_I = Z_I = 0;$$

du reste le trièdre est constitué par la normale à la sphère d'Appell et les directions principales du plan tangent.

Prenons maintenant l'exemple d'une surface conchoïde de plan, la représentation paramétrique est

$$\xi = l + \lambda P, \qquad \eta = l\frac{Q}{P} + \lambda Q, \qquad \zeta = l\frac{R}{P} + \lambda R;$$

d'où

$$\begin{aligned} d\xi &= \lambda(R\, d\theta + Q\, d\varphi), \\ d\eta &= \lambda(P\, d\theta + R\, d\varphi) + \frac{l}{P^2}[P(-\theta, -\varphi)\, d\theta - R(-\theta, -\varphi)\, d\varphi], \\ d\zeta &= \lambda(Q\, d\theta + P\, d\varphi) + \frac{l}{P^2}[P(-\theta, -\varphi)\, d\theta - Q(-\theta, -\varphi)\, d\varphi], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} X_I &= l\left[\frac{QR}{P^2} + \frac{R(-\theta, -\varphi)\, d\theta^2\, d\varphi + Q(-\theta, -\varphi)\, d\theta\, d\varphi^2}{P^2(d\theta^3 + d\varphi^3)}\right], \\ Y_I &= l\left[\frac{Q}{P} + \frac{Q(-\theta, -\varphi)\, d\theta^3 - R(-\theta, -\varphi)\, d\theta\, d\varphi^2}{P^2(d\theta^3 + d\varphi^3)}\right], \\ Z_I &= l\left[\frac{R}{P} + \frac{R(-\theta, -\varphi)\, d\varphi^3 - Q(-\theta, -\varphi)\, d\theta^2\, d\varphi}{P(d\theta^3 + d\varphi^3)}\right], \end{aligned}$$

qui est indépendant de λ; donc quel que soit λ, on a le même point I, ce qui résultait des considérations du paragraphe précédent.

Pour $d\varphi = 0$, ou $d\theta = 0$, les directions OI_φ, OI_θ sont orthogonales au rayon vecteur et orthogonales entre elles.

15. Quelques questions relatives aux accélérations. — On peut écrire les formules du paragraphe **12** sous la forme

$$\begin{aligned}
V_{x_0} &= \frac{d\xi}{dt} + (z - \zeta)\frac{d\theta}{dt} + (y - \eta)\frac{d\varphi}{dt},\\
V_{y_0} &= \frac{d\eta}{dt} + (x - \xi)\frac{d\theta}{dt} + (z - \zeta)\frac{d\varphi}{dt},\\
V_{z_0} &= \frac{d\zeta}{dt} + (y - \eta)\frac{d\theta}{dt} + (x - \xi)\frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$

Choisissons les axes de façon à prendre à l'instant t, O et O' confondus au point I, ce qui entraîne

$$\xi = \eta = \zeta = 0;$$

en écrivant de plus qu'au point I, V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0} sont nuls, on a

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Si maintenant nous cherchons la vitesse du point I, les formules du paragraphe précédent fournissent, en tenant compte des simplifications qui précèdent,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dX_1}{dt} &= \frac{\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\theta'\varphi' - \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\theta'^2 - \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\varphi'^2}{\theta'^2 + \varphi'^2},\\
\frac{dY_1}{dt} &= \frac{\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\theta'\varphi' - \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\theta'^2 - \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\varphi'^2}{\theta'^2 + \varphi'^2},\\
\frac{dZ_1}{dt} &= \frac{\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\theta'\varphi' - \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\theta'^2 - \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\varphi'^2}{\theta'^2 + \varphi'^2}.
\end{aligned}\right.$$

Choisissons les axes par les conditions

$$\frac{dX}{dt} = V, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0,$$

Il vient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}=-V\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=-V\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nous déduisons alors en dérivant les formules qui donnent la vitesse, et en tenant compte de toutes ces conditions

$$\begin{aligned}\Gamma_{x_0}&=\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(V_{z_0}-\frac{d\zeta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}+\left(V_{y_0}-\frac{d\eta}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt}+(z-\zeta)\frac{d^2\theta}{dt^2}+(y-\eta)\frac{d^2\varphi}{dt^2}\\&=V_{z_0}\frac{d\theta}{dt}+V_{y_0}\frac{d\varphi}{dt}+z\frac{d^2\theta}{dt^2}+y\frac{d^2\varphi}{dt^2}\\&=2x\theta'\varphi'+y(\theta'^2+\varphi'')+z(\varphi'^2+\theta''),\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\Gamma_{y_0}&=-\theta'V+2y\theta'\varphi'+z(\theta'^2+\varphi'')+x(\varphi'^2+\theta''),\\ \Gamma_{z_0}&=-\varphi'V+2z\theta'\varphi'+x(\theta'^2+\varphi'')+y(\varphi'^2+\theta'').\end{aligned}$$

En annulant Γ_{x_0}, Γ_{y_0}, Γ_{z_0}, on trouve une solution unique en x, y, z; il y a donc un centre des accélérations J qui a ces valeurs pour coordonnées.

En faisant des combinaisons de produits avec x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy, on trouve les surfaces Σ

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz-(y^2-zx)\frac{V}{2\varphi'}-(z^2-xy)\frac{V}{2\theta'}=0,\\&x^3+y^3+z^3-3xyz-(x^2-yz)\frac{V\varphi'}{\theta'^2+\varphi''}-(z^2-xy)\frac{V\theta'}{\theta'^2+\varphi''}=0,\\&x^3+y^3+z^3-3xyz-(x^2-yz)\frac{V\theta'}{\varphi'^2+\theta''}-(y^2-zx)\frac{V\varphi'}{\varphi'^2+\theta''}=0,\end{aligned}\right.}$$

qui généralisent les cercles des inflexions et des rebroussements.

Prenons sur chacune de ces surfaces Σ les points diamétralement opposés à l'origine

$$S_1\left(0, \frac{V}{2\varphi'}, \frac{V}{2\theta'}\right), \quad S_2\left(\frac{V\varphi'}{\theta'^2+\varphi''}, 0, \frac{V\theta'}{\theta'^2+\varphi''}\right), \quad S_3\left(\frac{V\theta'}{\varphi'^2+\theta''}, \frac{V\varphi'}{\varphi'^2+\theta''}, 0\right).$$

Le plan $S_1S_2S_3$ a pour équation

$$\begin{aligned}&x(\theta''\theta'^2+\varphi''\varphi'^2)+y(\varphi'^4+\theta'^3\varphi'+\varphi'^2\theta''-\theta'\varphi'\varphi'')\\&\quad+z(\theta'^4+\varphi'^3\theta'+\theta'^2\varphi''-\theta'\varphi'\theta'')-V(\theta'^3+\varphi'^3)=0.\end{aligned}$$

Or, ceci peut s'écrire

$$-\theta'\varphi'\Gamma_{x_0}+\theta'^2\Gamma_{y_0}+\varphi'^2\Gamma_{z_0}=0,$$

le plan $S_1 S_2 S_3$ passe donc par le point J.

Il y a plus, les coefficients directeurs de la normale sont

$$\left\{\begin{array}{l} \theta''^2\theta' + \varphi''^2\varphi' - \theta'\varphi'(\theta'^3+\varphi'^3), \\ \theta''^2\varphi' - \theta''\varphi''\theta' + \theta''(2\varphi'^3-\theta'^3) - 3\varphi''\theta'\varphi'^2 + \varphi'^2(\theta'^3+\varphi'^3), \\ -\theta''\varphi''\varphi' + \varphi''^2\theta' - 3\theta''\theta'^2\varphi' + \varphi''(2\theta'^3-\varphi'^3) + \theta'^2(\theta'^3+\varphi'^3); \end{array}\right.$$

ce sont, comme on le vérifie facilement, au coefficient multiplicatif

$$\frac{V}{\begin{vmatrix} 2\theta'\varphi' & \theta'^2+\varphi'' & \varphi'^2+\theta'' \\ \varphi'^2+\theta'' & 2\theta'\varphi' & \theta'^2+\varphi'' \\ \theta'^2+\varphi'' & \varphi'^2+\theta'' & 2\theta'\varphi' \end{vmatrix}}$$

près, les valeurs des coordonnées J. Donc *le point* J *est le pied de la hauteur du tétraèdre* $OS_1 S_2 S_3$ *relativement à la face* $S_1 S_2 S_3$.

16. VITESSE ET ACCÉLÉRATION D'UN POINT DANS UN MOUVEMENT ÉTUDIÉ EN COORDONNÉES POLAIRES. — Soit le mouvement déterminé par les équations

$$x=r\,P(\theta,\varphi),\qquad y=r\,Q(\theta,\varphi),\qquad z=r\,R(\theta,\varphi),$$

où $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ sont trois fonctions connues de t. En prenant les dérivées nous aurons

$$\begin{aligned} x' &= r'P + rR\theta' + rQ\varphi', \\ y' &= r'Q + rP\theta' + rR\varphi', \\ z' &= r'R + rQ\theta' + rP\varphi', \end{aligned}$$

d'où les composantes sur le rayon vecteur et sur ses perpendiculaires

$$\boxed{V_1=\frac{dr}{dt},\qquad V_2=r\frac{d\theta}{dt},\qquad V_3=r\frac{d\varphi}{dt},}$$

ce qui montre que l'une de ses composantes n'est nulle que si l'une des fonctions r, θ ou φ est constante.

Prenons maintenant les dérivées secondes, on a

$$x''=r''P+2r'R\theta'+2r'Q\varphi'+rQ\theta'^2+2rP\theta'\varphi'+rR\varphi'^2+rR\theta''+rQ\varphi'',$$

et deux formules analogues; les composantes de l'accélération sur le rayon vecteur et ses deux perpendiculaires seront donc

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \Gamma_1 &= r'' + 2r\theta'\varphi', \\ \Gamma_2 &= 2r'\theta' + r\varphi'^2 + r\theta'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') + r\varphi'^2, \\ \Gamma_3 &= 2r'\varphi' + r\theta'^2 + r\varphi'' = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi') + r\theta'^2. \end{aligned}\right.}$$

Dans le cas où le mouvement a lieu sur une sphère d'Appell $r = a$, on a

$$\Gamma_1 = 2a\theta'\varphi', \qquad \Gamma_2 = a(\varphi'^2 + \theta''), \qquad \Gamma_3 = a(\theta'^2 + \varphi''),$$

et l'on voit réapparaître les quantités du paragraphe **15**. L'accélération radiale, dans ce cas particulier, n'est nulle que si le point décrit une courbe de l'une des familles $\theta = \text{const.}$ ou $\varphi = \text{const.}$

On peut se poser aussi le problème de rechercher le cas où l'accélération est seulement radiale, c'est ce que nous allons faire dans le cas général.

17. Mouvements a accélération centrale. — Cherchons si les mouvements définis par $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$ ont des caractéristiques simples. Remplaçons ces équations par les suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_2\theta'^2 - \Gamma_3\varphi'^2 &= 2r'(\theta'^3 - \varphi'^3) + r(\theta'^2\theta'' - \varphi'^2\varphi'') = 0, \\ \Gamma_2 - \Gamma_3 &= 2r'(\theta' - \varphi') + r(\varphi'^2 - \theta'^2) + r(\theta'' - \varphi'') = 0. \end{aligned}$$

La première fournit

$$\frac{1}{3}\frac{d(\theta'^3 - \varphi'^3)}{\theta'^3 - \varphi'^3} = -2\frac{dr}{r}$$

ou

$$\boxed{\theta'^3 - \varphi'^3 = C e^{-6r}.}$$

La seconde équation s'écrit (en supposant toujours $\theta' \neq \varphi'$)

$$2\frac{dr}{r} - (d\varphi + d\theta) + \frac{d(\theta' - \varphi')}{\theta' - \varphi'} = 0,$$

ou

$$\boxed{r^2(\theta' - \varphi') = K e^{\theta + \varphi}.}$$

On en déduit

$$C e^{-6r} = \theta'^3 - \varphi'^3 = (\theta' - \varphi')^3 + 3\theta'\varphi'(\theta' - \varphi') = \left[\frac{K e^{\theta+\varphi}}{r^2}\right]^3 + 3\theta'\varphi'\frac{K e^{\theta+\varphi}}{r^2},$$

d'où

$$-\theta'\varphi' = \frac{K^2 e^{2(\theta+\varphi)}}{r^4} - \frac{C}{3K} r^2 e^{-6r+\theta+\varphi},$$

ce qui permet de calculer l'accélération radiale au moyen de r, θ, φ, r''.

Ceci incite à étudier à titre d'exercice ce qui se passe sur la surface

$$r = e^{\frac{\theta+\varphi}{2}};$$

on a alors

$$\theta' - \varphi' = K,$$
$$-\theta'\varphi' = K^2 - \frac{C}{3K} e^{-6r}.$$

Calculons dans ce cas l'accélération, on a

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{2}(\theta' + \varphi'),$$
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r}{4}(\theta' + \varphi')^2 + \frac{r}{2}(\theta'' + \varphi''),$$

mais

$$r(\theta'' + \varphi'') = -r(\theta'^2 + \varphi'^2) - 2\frac{dr}{dt}(\theta' + \varphi')$$
$$= -r(\theta'^2 + \varphi'^2) - \quad r(\theta' + \varphi')^2,$$

d'où

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r}{4}(\theta' + \varphi')^2 - \frac{r}{2}(\theta'^2 + \varphi'^2) - \frac{r}{2}(\theta' + \varphi')^2 = -\frac{r}{4}(3\theta'^2 + 2\theta'\varphi' + 3\varphi'^2),$$

et

$$\Gamma_1 = \frac{d^2 r}{dt^2} + 2r\theta'\varphi' = -\frac{r}{4}(3\theta'^2 + 2\theta'\varphi' + 3\varphi'^2 - 8\theta'\varphi') = -\frac{r}{4}3(\theta' - \varphi')^2;$$

donc, pour les mouvements à accélération centrale s'effectuant sur la surface

$$r = e^{\frac{\theta+\varphi}{2}},$$

on a

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_1 = -\frac{3K^2 r}{4}.}$$

CHAPITRE III.

COORDONNÉES POLAIRES. QUELQUES SURFACES SIMPLES.

I. — Compléments sur les coordonnées polaires.

18. Équation du plan tangent. — Nous avons à plusieurs reprises utilisé les coordonnées polaires, ρ, θ, φ, soit dans ce Mémoire, soit dans d'autres travaux antérieurs. Il semble bon de faire une étude un peu plus systématique de ces coordonnées.

Soit la surface d'équation

$$\rho = \rho(\theta, \varphi).$$

Les coordonnées du point courant sont :

$$x = \rho\, P(\theta, \varphi), \qquad y = \rho\, Q(\theta, \varphi), \qquad z = \rho\, R(\theta, \varphi).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
dx &= \left[P\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \rho R\right] d\theta + \left[P\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \rho Q\right] d\varphi,\\
dy &= \left[Q\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \rho P\right] d\theta + \left[Q\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \rho R\right] d\varphi,\\
dz &= \left[R\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \rho Q\right] d\theta + \left[R\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \rho P\right] d\varphi.
\end{aligned}$$

Les mineurs du tableau des coefficients de $d\theta$, $d\varphi$ peuvent s'écrire après division par ρ^2,

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\rho} P(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta Q(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi R(-\theta, -\varphi),\\
B &= \frac{1}{\rho} R(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta P(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi Q(-\theta, -\varphi),\\
C &= \frac{1}{\rho} Q(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta R(-\theta, -\varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi P(-\theta, -\varphi).
\end{aligned}\right.$$

Le plan tangent est de la forme $Ax + By + Cz + D = 0$, ou

$$\frac{1}{\rho} P(\omega - \theta, \psi - \varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta Q(\omega - \theta, \psi - \varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi R(\omega - \theta, \psi - \varphi) + \frac{D}{r} = 0,$$

mais pour $\rho = r$, $\theta = \omega$, $\varphi = \psi$ l'équation est identiquement vérifiée, donc l'équation du plan tangent s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} P(\omega - \theta, \psi - \varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta Q(\omega - \theta, \psi - \varphi) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi R(\omega - \theta, \psi - \varphi).}$$

19. Utilisation du trièdre d'Appell formé par le rayon vecteur et ses deux perpendiculaires. Applications. — Effectuons le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} x &= X\,P(\theta, \varphi) + Y\,R(\theta, \varphi) + Z\,Q(\theta, \varphi), \\ y &= X\,Q(\theta, \varphi) + Y\,P(\theta, \varphi) + Z\,R(\theta, \varphi), \\ z &= X\,R(\theta, \varphi) + Y\,Q(\theta, \varphi) + Z\,P(\theta, \varphi); \end{aligned}$$

l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ devient

$$\boxed{\frac{X}{\rho} + Y\left(\frac{1}{\rho}\right)'_\theta + Z\left(\frac{1}{\rho}\right)'_\varphi - 1 = 0.}$$

On en déduit que le plan tangent coupe les axes de ce trièdre aux points

$$(\rho, 0, 0), \quad \left(0, \frac{-\rho^2}{\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}}, 0\right), \quad \left(0, 0, \frac{-\rho^2}{\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}}\right),$$

et ceci est analogue aux résultats relatifs à la sous-tangente polaire dans le plan euclidien.

La direction de la normale dans ce système de coordonnées est donnée par les coefficients directeurs

$$\rho^2 - \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}, \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}, \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2 + \rho\frac{\partial\rho}{\partial\theta},$$

tandis que le rayon vecteur a pour cosinus directeur 1, 0, 0. On en déduit pour l'angle de la normale avec le rayon vecteur (1) (angle dont nous représentons les arguments par λ, μ), les relations entre

(1) Bien remarquer l'ordre d'énoncé et d'autre part, remarquer aussi que nous utilisons la normale, tandis qu'il est d'usage dans la théorie classique d'utiliser la tangente.

fonctions d'Appell

$$\frac{P(\lambda, \mu)}{\rho} = \frac{Q(\lambda, \mu)}{-\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}} = \frac{R(\lambda, \mu)}{-\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\rho^3 - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^3 - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^3 - 3\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}}},$$

relations analogues à celles classiques du plan euclidien.

Si nous considérons le tétraèdre déterminé à partir du trièdre d'Appell par l'adjonction du plan tangent, la hauteur issue de l'origine O vérifie la relation

$$\rho^3 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^3 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^3 - 3\rho\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \frac{\rho^6}{h^3}.$$

Si maintenant nous considérons le tétraèdre MNT_1T_2 construit sur la normale et ses deux perpendiculaires issues de M, tétraèdre dont la face opposée à M est le plan $X = 0$, des calculs simples montrent que les longueurs d'arête issues de M sont respectivement

$$a = \frac{-\rho^5}{h^2(\rho^2 - \rho'_\theta\rho'_\varphi)}, \qquad b = \frac{-\rho^5}{h^2(\rho'^2_\theta + \rho\rho'_\varphi)}, \qquad c = \frac{-\rho^5}{h^2(\rho'^2_\varphi + \rho\rho'_\theta)};$$

la hauteur issue de M est de longueur $-\rho$, et ceci peut servir de vérification.

En appliquant les formules du paragraphe **3** on peut déterminer les aires T_1OT_2, T_2ON, NOT_1 déterminées par le point O dans la face hypoténuse NT_1T_2.

Si nous remarquons que l'on peut écrire

$$\frac{ab(ab - c^2)ab}{S_M^2} = \frac{a^2b^2(ab - c^2)\rho^2}{a^2b^2c^2} = ab\rho^2\left[\frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab}\right],$$

nous trouvons pour valeurs des aires

$$bc\frac{h}{\rho}, \quad -ca\frac{h}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \quad -ab\frac{h}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi},$$

ou

$$\frac{1}{a}\frac{Vh}{\rho}, \quad -\frac{1}{b}\frac{Vh}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \quad -\frac{1}{c}\frac{Vh}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}.$$

Mais, d'autre part, on a

$$P(-\lambda, -\mu) = (\rho^2 - \rho\rho_\theta'\rho_\varphi')\frac{h^2}{\rho^4} = -\frac{\rho}{a},$$

$$Q(-\lambda, -\mu) = (\rho_\theta'^2 + \rho\rho_\varphi')\frac{h^2}{\rho^4} = -\frac{\rho}{b},$$

$$R(-\lambda, -\mu) = (\rho_\varphi'^2 + \rho\rho_\theta')\frac{h^2}{\rho^4} = -\frac{\rho}{c},$$

d'où

$$\boxed{\frac{T_1OT_2}{P(\lambda, \mu)P(-\lambda, -\mu)} = \frac{T_2ON}{Q(\lambda, \mu)Q(-\lambda, -\mu)} = \frac{NOT_1}{R(\lambda, \mu)R(-\lambda, -\mu)} = -\frac{V}{\rho}.}$$

20. Deux fonctions analogues a la fonction tangente, déduites des fonctions d'Appell. — Les résultats du paragraphe précédent font apparaître les relations

$$\frac{Q(\lambda, \mu)}{P(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \qquad \frac{R(\lambda, \mu)}{P(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}.$$

Dans le cas particulier des surfaces d'équation $\rho = Ce^{a\theta+b\varphi}$, les valeurs de ces quotients sont les constantes $-a$, $-b$ [1]. Nous avons une propriété analogue à celle de la spirale logarithmique $\rho = Ce^{a\theta}$ dans le plan où l'on peut écrire tang(OM, MN) $= -a$.

Ceci incite à étudier un peu les fonctions

$$S(\theta, \varphi) = \frac{Q(\theta, \varphi)}{P(\theta, \varphi)}, \qquad T(\theta, \varphi) = \frac{R(\theta, \varphi)}{P(\theta, \varphi)};$$

nous donnerons ici quelques formules nouvelles relatives à ces fonctions et à celles d'Appell, complétant ainsi les formules données dans notre thèse (**2**), (**48**).

Relativement à $S(\theta, \varphi)$ et $T(\theta, \varphi)$, nous pouvons écrire les

---

(1) *Voir* aussi : J. Devisme, *Sur les surfaces* $\rho = Ce^{a\theta+b\varphi}$ *de l'espace attaché à l'équation* $\Delta_3 U = 0$ *de M. Pierre Humbert* (70e *Congrès des Sociétés savantes,* 1937, p. 35-37). — P. Humbert, *Sur une solution particulière de l'équation* $\Delta_3 = 0$ (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1937, série I, t. **57**, p. 142-145).

relations

$$1 + S^3 + T^3 - 3ST = \frac{1}{P^3},$$

$$S(\theta + \theta', \varphi + \varphi') = \frac{S(\theta, \varphi) + S(\theta', \varphi') + T(\theta, \varphi)T(\theta', \varphi')}{1 + S(\theta, \varphi)T(\theta', \varphi') + S(\theta', \varphi')T(\theta, \varphi)},$$

$$T(\theta + \theta', \varphi + \varphi') = \frac{T(\theta, \varphi) + T(\theta', \varphi') + S(\theta, \varphi)S(\theta', \varphi')}{1 + S(\theta, \varphi)T(\theta', \varphi') + S(\theta', \varphi')T(\theta, \varphi)},$$

d'où

$$1 + S(\theta + \theta', \varphi + \varphi') + T(\theta + \theta', \varphi + \varphi') = \frac{[1 + S(\theta, \varphi) + T(\theta, \varphi)][1 + S(\theta', \varphi') + T(\theta', \varphi')]}{1 + S(\theta, \varphi)T(\theta', \varphi') + S(\theta'\varphi')T(\theta, \varphi)}.$$

Les formules se simplifient pour $\theta = \theta'$, $\varphi = \varphi'$ et deviennent

$$S(2\theta, 2\varphi) = \frac{2S(\theta, \varphi) + T^2(\theta, \varphi)}{1 + 2S(\theta, \varphi)T(\theta, \varphi)},$$

$$T(2\theta, 2\varphi) = \frac{2T(\theta, \varphi) + T^2(\theta, \varphi)}{1 + 2S(\theta, \varphi)T(\theta, \varphi)}.$$

Donnons maintenant les formules relatives à la multiplication par -1; on a

$$S(-\theta, -\varphi) = \frac{T^2(\theta, \varphi) - S(\theta, \varphi)}{1 - S(\theta, \varphi)T(\theta, \varphi)},$$

$$T(-\theta, -\varphi) = \frac{S^2(\theta, \varphi) - T(\theta, \varphi)}{1 - S(\theta, \varphi)T(\theta, \varphi)},$$

d'où

$$\boxed{1 + S(-\theta, -\varphi)T(\theta, \varphi) + T(-\theta, -\varphi)S(\theta, \varphi) = \frac{1}{P(\theta, \varphi)P(-\theta, -\varphi)};}$$

de même la multiplication par 3 fournit

$$P(3\theta, 3\varphi) = 1 + 9PQR,$$

$$Q(3\theta, 3\varphi) = 3(RQ^2 + QP^2 + PR^2), \qquad R(3\theta, 3\varphi) = 3(QR^2 + RP^2 + PQ^2),$$

$$S(3\theta, 3\varphi) = \frac{3(TS^2 + T^2 + S)}{1 + S^3 + T^3 + 6ST}, \qquad T(3\theta, 3\varphi) = \frac{3(ST^2 + S^2 + T)}{1 + S^3 + T^3 + 6ST}.$$

De ces formules on déduit que les fonctions $P(\theta, \varphi)Q(\theta, \varphi)$, $R(\theta, \varphi)$ $S(\theta, \varphi)$, $T(\theta, \varphi)$ *s'expriment rationnellement en fonction de* $s = S\left(\frac{\theta}{3}, \frac{\varphi}{3}\right)$

et $t = \mathrm{T}\left(\frac{\theta}{3}, \frac{\varphi}{3}\right)$ par les formules

$$\mathrm{P} = \frac{1+s^3+t^3+6st}{1+s^3+t^3-3st}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{3(ts^2+t^2+s)}{1+s^3+t^3-3st}, \qquad \mathrm{R} = \frac{3(t^2s+s^2+t)}{1+s^3+t^3-3st},$$

$$\mathrm{S} = \frac{3(ts^2+t^2+s)}{1+s^3+t^3+6st}, \qquad \mathrm{T} = \frac{3(t^2s+s^2+t)}{1+s^3+t^3+6st}.$$

Signalons encore les identités

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi} = 1 - \mathrm{ST}.}$$

II. — La surface Σ.

21. Définition. — Nous avons déjà rencontré cette surface à plusieurs reprises aux paragraphes **5**, **11**, **15**; nous en ferons ici une étude succincte.

Soient les deux points $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ et $\mathrm{S}(a, b, c)$; cherchons le lieu des points M intersection des droites issues de O et des plans orthogonaux menés par S; on a pour OM

$$\frac{x}{\mathrm{P}} = \frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{z}{\mathrm{R}},$$

et pour le plan orthogonal mené par S

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ \mathrm{R} & \mathrm{P} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{P} \end{vmatrix} = 0.$$

Éliminons P, Q, R entre les trois relations, on a

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant

$$\boxed{\Sigma \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - [a(x^2 - yz) + b(y^2 - zx) + c(z^2 - xy)] = 0.}$$

Si l'on échangeait le rôle des points O et S, on aurait la surface

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z-c & x-a & y-b \\ y-b & z-c & x-a \end{vmatrix} = 0,$$

ou en posant $x-a=\xi$, $y-b=\eta$, $z-c=\zeta$

$$\xi^3+\eta^3+\zeta^3-3\xi\eta\zeta+[a(\xi^2-\eta\zeta)+b(\eta^2-\zeta\xi)+c(\zeta^2-\xi\eta)]=0;$$

cette surface, rapportée au trièdre d'Appell d'origine transférée en S est distincte de la surface précédente. Les points O et S ne jouent donc pas des rôles réciproques.

21. Normale a la surface. — Nous avons

$$\begin{aligned} f'_x &= 3(x^2-yz)-(2ax-bz-cy), \\ f'_y &= 3(y^2-zx)-(2by-cx-az), \\ f'_z &= 3(z^2-xy)-(2cz-ay-bx). \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de $f'^2_x-f'_yf'_z$, $f'^2_y-f'_zf'_x$, $f'^2_z-f'_xf'_y$; les calculs sont un peu longs pour arriver à une forme simplifiée, nous ne donnerons le détail que pour la première de ces expressions

$$\begin{aligned} f'^2_x-f'_yf'_z &= 9[(x^2-yz)-(y^2-zx)(z^2-xy)]-6(x^2-yz)(2ax-bz-cy) \\ &\quad +3(y^2-zx)(2cz-ay-bx)+3(z^2-xy)(2by-cx-az) \\ &\quad +(2ax-bz-cy)^2-(2by-cx-az)(2cz-ay-bx) \\ &= 9x\Sigma-3(x^2-yz)(ax-2bz-2cy)+3(y^2-zx)(2cz-ay+2bx) \\ &\quad +3(z^2-xy)(2by+2cx-az)+(2ax-bz-cy)^2-(2by-cx-az)(2cz-ay-bx) \\ &= -3a(x^3+y^3+z^3-3xyz)+(2ax-bz-cy)^2-(2by-cx-az)(2cz-ay-bx) \\ &= -3a\Sigma+(a^2-bc)(x^2+2yz)+(b^2-ca)(z^2+2xy)+(c^2-ab)(y^2+2zx). \end{aligned}$$

Finalement nous avons, tous calculs faits,

$$\begin{aligned} f'^2_x-f'_yf'_z &= (a^2-bc)(x^2+2yz)+(b^2-ca)(z^2+2xy)+(c^2-ab)(y^2+2zx), \\ f'^2_y-f'_zf'_x &= (a^2-bc)(z^2+2xy)+(b^2-ca)(y^2+2zx)+(c^2-ab)(x^2+2yz), \\ f'^2_z-f'_xf'_y &= (a^2-bc)(y^2+2zx)+(b^2-ca)(x^2+2yz)+(c^2-ab)(z^2+2xy). \end{aligned}$$

Nous pouvons interpréter ces renseignements d'une façon angulaire. Si (α, β) est la direction de OS, (θ, φ) celle de OM, ρ la longueur du rayon vecteur OM, l la longueur de OS, nous avons pour équation polaire de Σ

$$\rho = l\,\mathrm{P}(\alpha - \theta,\ \beta - \varphi),$$

et la direction de la normale est $(2\theta - \alpha,\ 2\varphi - \beta)$.

On en déduit que *l'angle du rayon vecteur avec* OS *est le même que celui de la normale avec le rayon vecteur.* En particulier *la normale en* S *est justement* OS.

Appliquons maintenant à la surface la transformation de M. D. V. Jonesco (**62**)

$$\frac{\xi}{x^2 - yz} = \frac{\eta}{y^2 - zx} = \frac{\zeta}{z^2 - xy} = \frac{k}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz},$$

l'équation de la surface devient

$$a\xi + b\eta + c\zeta - k = 0,$$

c'est celle d'un plan. Donc *la surface Σ est la transformée d'un plan ne passant pas par l'origine dans* l'inversion *précédente.*

23. Le cône Γ. — Il est naturel de chercher quelle est la surface inverse d'un plan passant par l'origine. Prenons ce plan pour plan yOz, la surface transformée a pour équation

$$x^2 - yz = 0;$$

c'est le cône Γ que nous avons déjà considéré (**98**).

En tenant compte de la relation $x^2 = yz$, vérifiée sur la surface du cône, les coefficients directeurs de la normale sont

$$x^2 + 2yz, \quad y^2 + 2zx, \quad z^2 + 2xy;$$

la normale en un point d'une génératrice de direction (θ, φ) est parallèle à la direction $(2\theta, 2\varphi)$. Donc *l'angle du rayon vecteur avec* Ox *est le même que celui de la normale avec le rayon vecteur.* C'est le même théorème que celui cité plus haut pour la surface Σ.

III. — Sur des essais d'extensions de la parabole.

24. Surface antipodaire d'un plan. — Soit le point fixe origine et le plan $x = a$. Les coordonnées de l'intersection du rayon vecteur de direction (θ, φ) par le plan sont

$$x = a, \qquad y = a\frac{Q}{P}, \qquad z = a\frac{R}{P};$$

le plan perpendiculaire en ce point au rayon vecteur s'écrit

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a\frac{Q}{P} & z-a\frac{R}{P} \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Pi \equiv x\,P(-\theta, -\varphi) + y\,R(-\theta, -\varphi) + z\,Q(-\theta, -\varphi) - \frac{a}{P} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe adjoignons $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$, c'est-à-dire

$$x\,R(-\theta, -\varphi) + y\,Q(-\theta, -\varphi) + z\,P(-\theta, -\varphi) - a\frac{R}{P} = 0,$$

$$x\,Q(-\theta, -\varphi) + y\,P(-\theta, -\varphi) + z\,R(-\theta, -\varphi) - a\frac{Q}{P} = 0;$$

les combinaisons linéaires (P, Q, R), (Q, R, P), (R, P, Q) donnent

$$x = a\frac{P(2\theta, 2\varphi)}{P^2}, \qquad y = a\frac{Q(2\theta, 2\varphi)}{P^2}, \qquad z = a\frac{R(2\theta, 2\varphi)}{P^2},$$

d'où

$$P^2(\theta, \varphi)\,[x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz] = a.$$

c'est-à-dire en changeant légèrement les notations de façon que les coordonnées du point courant soient ρ, θ, φ, la surface a pour équation en coordonnées polaires

$$\boxed{\rho = \frac{a}{P^2\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)},}$$

qui est bien l'analogue d'une équation classique de la parabole.

Comme d'autre part la direction de la normale est $\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ on peut énoncer : *les angles de la normale avec l'axe* Ox, *et du rayon vecteur avec la normale sont égaux.*

Soit maintenant M le point courant de la surface et le point S défini par l'égalité $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OM}$. La surface Σ de points diamétralement opposés O et S a pour équation

$$\rho = \frac{ka}{P^2\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)} P(\theta - \omega, \varphi - \psi).$$

On a en dérivant

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \frac{ka}{P^3\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)}\left[R(\theta - \omega, \varphi - \psi)\, P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right) - P(\theta - \omega, \varphi - \psi)\, R\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \frac{ka}{P^3\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)}\left[Q(\theta - \omega, \varphi - \psi)\, P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right) - P(\theta - \omega, \varphi - \psi)\, Q\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Annulons $\frac{\partial\rho}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}$, il vient

$$\frac{P(\theta - \omega, \varphi - \psi)}{P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{Q(\theta - \omega, \varphi - \psi)}{Q\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{R(\theta - \omega, \varphi - \psi)}{R\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)},$$

en restant dans le domaine réel cela entraîne $\omega = \frac{\theta}{2}$, $\psi = \frac{\varphi}{2}$; le point de contact est donc

$$\rho = \frac{ka}{P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\varphi}{2},$$

le lieu est le plan $x = ka$. Nous avons laissé arbitraire la constante k de façon à pouvoir la déterminer par telle ou telle autre propriété.

Si l'on écrit l'équation du plan tangent avec nos nouveaux angles on a

$$x P\left(-\frac{\theta}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right) + y R\left(-\frac{\theta}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right) + z Q\left(-\frac{\theta}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{a}{P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)} = 0,$$

le point situé sur l'axe des x a pour abscisse

$$x = \frac{a}{P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right) P\left(-\frac{\theta}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)},$$

on voit que l'un des facteurs du dénominateur de ρ s'est changé de $P\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ en $P\left(-\frac{\theta}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$. La propriété de la sous-tangente est fortement modifiée ici, parce que la fonction P n'est pas une fonction paire.

25. Surface lieu des points équidistants d'un point et d'un plan. — En prenant pour point l'origine et pour plan $X = a$, on a

$$\rho = a - P\rho,$$

d'où

$$\boxed{\rho = \frac{a}{1 + P(\theta, \varphi)}.}$$

L'équation du plan tangent, d'après le paragraphe **18**, s'écrit

$$\frac{a}{r} = [1 + P(\theta, \varphi)] P(\omega - \theta, \psi - \varphi) + R(\theta, \varphi) Q(\omega - \theta, \psi - \varphi) + Q(\theta, \varphi) R(\omega - \theta, \psi - \varphi),$$

ou

$$\frac{a}{r} = P(\omega - \theta, \psi - \varphi) + P(\omega, \psi);$$

si l'on coupe par l'axe des $x (\omega = \psi = 0)$, il vient

$$r = \frac{a}{1 + P(-\theta, -\varphi)};$$

c'est un autre aspect du problème de la sous-tangente, la non-parité de la fonction P conduit à des conséquences analogues à celles citées plus haut.

Nous nous arrêterons ici sans conclure, car, dans un travail de ce genre, il n'y a pas plus de raisons de s'arrêter sur une propriété que de poursuivre la recherche d'autres résultats.