JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI CARTAN

Sur les matrices holomorphes de *n* variables complexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 1-26.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les matrices holomorphes de n variables complexes;

PAR HENRI CARTAN.

Dans ce travail il sera question de matrices à p lignes et p colonnes dont les éléments sont des fonctions holomorphes de n variables complexes $x_1, \ldots, x_n$ dans une certaine région Δ de l'espace de ces variables; le déterminant de ces matrices sera supposé différent de zéro en tout point de Δ. Lorsque $p = 1$, on retombe sur le cas d'une fonction holomorphe et non nulle sur Δ. Or, relativement à ce cas particulier, on connaît un théorème dont Cousin a mis en évidence le rôle important dans la recherche des fonctions holomorphes admettant des zéros donnés [problème connu aujourd'hui sous le nom de *deuxième problème de Cousin* (1)]. Voici ce théorème, que, pour simplifier, j'énonce dans le cas d'une seule variable complexe x.

Étant donnés, dans le plan (x), *deux domaines* Δ' *et* Δ'' *limités par*

(1) Pour la terminologie, *voir* par exemple H. CARTAN, *Les problèmes de Poincaré et de Cousin* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **199**, 1934, p. 1284).

des courbes régulières et dont l'intersection Δ *est simplement connexe, toute fonction* $f(x)$ *holomorphe et non nulle dans* Δ *et sur sa frontière peut être mise sous la forme du quotient d'une fonction holomorphe et non nulle dans* Δ'' *(frontière comprise) par une fonction holomorphe et non nulle dans* Δ' *(frontière comprise).*

Ce théorème se démontre facilement en considérant le logarithme de $f(x)$ dans Δ, et en se servant du fait que toute fonction holomorphe dans Δ est la différence de deux fonctions holomorphes dans Δ'' et Δ' respectivement.

Nous nous proposons de généraliser le théorème précédent au cas d'une *matrice holomorphe de déterminant non nul.* Cette généralisation n'est pas triviale, car le procédé qui consisterait à prendre le logarithme de la matrice donnée (ce qui d'ailleurs ne peut se faire sans précaution) ne conduirait pas au but, l'exponentielle d'une matrice A ne jouissant pas de la propriété fondamentale $e^{A}e^{B}=e^{A+B}$. L'énoncé précis du théorème sera donné au § 4 (théorème I); on s'y est affranchi notamment de la restriction relative aux courbes « régulières » limitant les « domaines » Δ' et Δ''.

Notre théorème semble susceptible de jouer un rôle important dans l'étude *globale* des *idéaux de fonctions holomorphes.* Remarquons à ce propos que le « deuxième problème de Cousin » se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée d'*une seule* fonction holomorphe. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, semble-t-il, l'étude globale des idéaux. C'est ce que nous ferons systématiquement dans un Mémoire ultérieur. Ici, nous nous bornerons à quelques applications immédiates de notre théorème I; elles pourront servir ensuite de point de départ pour une théorie systématique.

Qu'il me soit permis d'adresser mes vifs remercîments à M. H. Villat qui a bien voulu accepter de publier ce travail dans le Volume de son Journal dédié aux deux savants français É. Borel et É. Cartan.

1. Bref rappel relatif aux matrices. — Toutes les matrices considérées seront (sauf mention expresse du contraire) à p lignes et p colonnes, p étant un entier fixé une fois pour toutes et d'ailleurs quelconque. Les éléments des matrices seront des nombres complexes.

Il est inutile de rappeler la définition de la *somme* $A + B$ de deux matrices A et B, du produit $B.A$ (noté aussi BA) d'une matrice A par une matrice B. La matrice-unité sera désignée par E. Toute matrice A de déterminant non nul possède une inverse A^{-1} : réciproquement si l'on a deux matrices A et B telles que $A.B = E$, chacune des matrices A et B a son déterminant non nul. Pour abréger le langage, nous qualifierons d'*inversible* toute matrice qui possède une inverse, c'est-à-dire dont le déterminant n'est pas nul.

La *norme* d'une matrice A (inversible ou non) se définit comme suit : A définit une substitution linéaire dans l'espace euclidien à p dimensions complexes; dans cet espace, appelons norme d'un point M la racine carrée de la somme des carrés des modules des coordonnées de M; la norme de A, qui se note $|A|$, est alors la borne supérieure de la norme du point transformé A(M) quand la norme du point variable M reste égale à *un*. On a

$$|A + B| \leqq |A| + |B|, \qquad |AB| \leqq |A|.|B|.$$

La norme définit une métrique dans l'espace (vectoriel) des matrices; avec cette norme, l'espace est complet.

L'*exponentielle* e^A d'une matrice A peut se définir, par exemple, par le développement en série

$$e^A = E + A + \ldots + \frac{1}{n!} A^n + \ldots;$$

la matrice e^A est inversible, puisque l'on a

$$e^A e^{-A} = E.$$

Réciproquement, étant donnée arbitrairement une matrice inversible B, il existe toujours au moins une matrice A telle que $e^A = B$. En fait, nous n'aurons à envisager ici que le cas où B satisfait à la condition

$$|B - E| < 1;$$

dans ce cas, il existe une fonction analytique

$$A = \log B$$

de la variable matricielle B qui se réduit à la matrice-zéro pour $B = E$

et est telle que $e^{A} = B$; cette fonction admet le développement en série

$$\log B = (B - E) - \frac{1}{2}(B - E)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(B - E)^n + \ldots.$$

Terminons par un dernier rappel. Considérons un produit infini de matrices (infini à droite ou infini à gauche)

$$\prod_{i=1}^{\infty}(E + A_i).$$

Si la série des normes $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ est *convergente*, le produit est convergent : autrement dit, le produit fini

$$\prod_{i=1}^{k}(E + A_i)$$

tend vers une matrice limite C quand $k \to \infty$. De plus, si chacune des matrices-facteurs $(E + A_i)$ est inversible (ce qui arrive par exemple dans le cas où $|A_i| < 1$), la matrice C est inversible; pour le voir, on prouve qu'elle admet une matrice inverse, définie comme la limite de l'inverse de

$$\prod_{i=1}^{k}(E + A_i). \quad (^1)$$

Si maintenant les matrices A_i sont fonctions de variables, et si la série $\Sigma |A_i|$ est *normalement convergente* (²), la convergence du produit

---

(¹) Si $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ est convergente, et si l'on pose

$$(E + A_i)^{-1} = E + B_i,$$

la série $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$ est convergente.

(²) Une série $\sum f_i$ de fonctions est normalement convergente si l'on a, quelles que soient les valeurs données aux variables, $|f_i| \leqq \varepsilon_i$, les ε_i étant des constantes telles que $\sum_i \varepsilon_i$ converge.

a lieu uniformément. En particulier, si les éléments des matrices A_i sont des fonctions holomorphes de variables complexes $x_1, \ldots, x_n$, les éléments de la matrice-limite C sont des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_n$.

2. Approximation d'un ensemble compact simplement connexe par des domaines polygonaux simplement connexes. — Nous avons besoin de quelques préliminaires topologiques de nature élémentaire.

Plaçons-nous dans le plan euclidien (à deux dimensions réelles). Dans ce plan, un ensemble Δ *compact* (c'est-à-dire borné et fermé) sera dit *simplement connexe* si l'ensemble complémentaire est connexe, autrement dit si tout point qui n'appartient pas à Δ peut être joint à l'infini par une courbe continue sans point commun avec Δ. Un ensemble compact peut être simplement connexe sans être connexe.

Par *domaine fermé*, nous entendons un ensemble fermé Δ tel que l'intérieur de Δ ait même frontière que Δ. On n'astreint pas un domaine fermé à être connexe.

Un *domaine polygonal fermé* est un domaine fermé dont la frontière se compose d'un nombre fini de segments de droites; un domaine polygonal fermé est compact.

Lemme 1. — *Étant donnés arbitrairement un ensemble compact simplement connexe* Δ *et un ensemble ouvert* U *contenant* Δ, *il existe un domaine polygonal fermé* Q, *simplement connexe, dont l'intérieur contienne* Δ *et qui soit contenu dans* U.

Prenons en effet deux axes de coordonnées; pour chaque valeur de l'entier m, faisons un quadrillage en traçant les droites d'abscisses et d'ordonnées multiples de $\frac{1}{2^m}\cdot$ Soit, pour ce quadrillage, Q_m la réunion des carrés *fermés* dont un point au moins appartient à Δ. L'ensemble Q_m est un domaine polygonal fermé dont l'intérieur contient Δ. Adjoignons à Q_m les points du plan qui ne peuvent pas être joints à l'infini par une courbe continue ne rencontrant pas Q_m; on obtient un nouveau domaine polygonal fermé Q'_m qui est simplement connexe. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que l'intersection des Q'_m (lorsque $m \to \infty$) se réduit à Δ; on prendra alors

$Q = Q'_m$ pour m assez grand. Or, soit M un point qui n'appartient pas à Δ; il existe une courbe continue Γ joignant M à l'infini sans rencontrer Δ; il est clair que pour m assez grand, Q_m et Γ n'ont aucun point commun, et que par suite M n'appartient pas à Q'_m.

C. Q. F. D.

On démontrerait de même :

LEMME 2. — *Soient deux ensembles compacts* Δ' *et* Δ'' *contenus respectivement dans deux ensembles ouverts* U' *et* U''. *Si l'intersection* $\Delta' \cap \Delta''$ *est simplement connexe, on peut trouver deux domaines polygonaux fermés* Q' *et* Q'' *dont l'intersection soit simplement connexe, dont les intérieurs contiennent respectivement* Δ' *et* Δ'', *et qui soient respectivement contenus dans* U' *et* U''.

3. APPROXIMATION DES MATRICES HOLOMORPHES INVERSIBLES SUR CERTAINS ENSEMBLES COMPACTS.

Dans l'espace de n variables complexes $x_1, \ldots, x_n$, appelons *polycylindre compact* le produit topologique de n ensembles compacts situés respectivement dans les plans des n variables. Un polycylindre compact est *simplement connexe* si ses n composantes sont simplement connexes.

Nous dirons qu'une fonction est holomorphe *sur* un polycylindre compact Δ (et, plus généralement, holomorphe *sur* un ensemble quelconque Δ) si elle est définie et holomorphe dans un ensemble *ouvert* convenable contenant Δ.

Une fonction holomorphe sur un polycylindre compact et simplement connexe peut être arbitrairement approchée, sur ce polycylindre, par des polynomes entiers en $x_1, \ldots, x_n$. En effet, en vertu du lemme 1, il suffit d'examiner le cas où les composantes du polycylindre sont des domaines polygonaux simplement connexes; et dans ce cas l'approximation par des polynomes est bien connue.

Nous allons considérer maintenant des *matrices holomorphes et inversibles* sur un polycylindre, c'est-à-dire des matrices à p lignes et p colonnes dont les éléments sont des fonctions holomorphes *sur* ce polycylindre et dont le déterminant n'est nul en aucun point du polycylindre.

Lemme 3. — *Soit un polycylindre compact et simplement connexe* Δ; *désignons par* $\mathcal{E}_\Delta$ *l'espace des matrices holomorphes et inversibles sur* Δ; *métrisons* $\mathcal{E}_\Delta$ *en prenant pour distance de deux matrices* A *et* B *le maximum, sur* Δ, *de la norme de* $A - B$. *L'espace* $\mathcal{E}_\Delta$, *muni de cette métrique, est connexe.*

En effet, nous allons montrer que tout élément A de $\mathcal{E}_\Delta$ peut être déformé continûment (dans $\mathcal{E}_\Delta$, au sens de la métrique) en la matrice-unité E. D'après le lemme 1, on peut enfermer Δ dans un polycylindre Δ' dont les composantes soient des domaines polygonaux simplement connexes, de manière que la matrice considérée A soit holomorphe et inversible sur Δ'. Il suffira de faire la déformation de A dans l'espace $\mathcal{E}_{\Delta'}$. Autrement dit, on peut, pour démontrer le lemme 3, supposer que les composantes de Δ sont des domaines polygonaux (simplement connexes). Faisons donc cette hypothèse.

La démonstration du lemme va se faire par récurrence sur le nombre n des variables, le lemme étant vrai pour $n = 0$ (matrice constante [1]). Supposons-le vrai pour $n - 1$, et démontrons-le pour n. Désignons par x la première variable complexe, par y l'ensemble des autres. Prenons, dans chacune des composantes *connexes* δ_i (en nombre *fini*) de la composante de Δ dans le plan (x), un point x_i. Posons enfin

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x} = S.$$

$S(x, y)$ est une matrice holomorphe sur Δ; à partir de $S(x, y)$ on retrouve $A(x, y)$ en intégrant, pour chaque y, l'équation différentielle (à une variable complexe x)

$$\frac{\partial A}{\partial x} = AS,$$

et en se donnant pour condition initiale, dans chaque composante δ_i, la valeur $A(x_i, y)$ de la matrice A au point x_i.

Le lemme à démontrer étant vrai pour $n - 1$ variables, on peut déformer continûment chacune des matrices $A(x_i, y)$ en la matrice-

(1) Dans l'espace de *toutes* les matrices à éléments constants, le sous-espace des matrices dont le déterminant n'est pas nul est *connexe*.

unité E sans sortir de l'espace des matrices holomorphes et inversibles dans le polycylindre (de l'espace y) ayant mêmes composantes que Δ suivant les variables y. Par conséquent, il existe une matrice $B(x, y; t)$ qui varie continûment avec un paramètre réel t ($0 \leqq t \leqq 1$), qui, pour chaque t, est holomorphe et inversible dans Δ, indépendante de x dans chaque δ_i, et qui satisfait aux conditions extrêmes

$$B(x_i, y; 0) = A(x_i, y), \qquad B(x, y; 1) = E.$$

Si, dans chaque δ_i, on intègre (1) l'équation à une fonction matricielle inconnue C

$$(1) \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = CS,$$

avec les conditions initiales

$$C(x_i, y) = B(x_i, y; t),$$

on obtient, pour chaque valeur de t, une matrice $C_t(x, y)$ holomorphe et inversible dans Δ. Cette matrice varie continûment avec t. Donc $A(x, y)$ peut être déformée continûment (sans sortir de $\mathcal{E}_\Delta$) en la solution de (1) définie par les conditions initiales

$$(2) \qquad C(x_i, y) = E.$$

Déformons maintenant $S(x, y)$ en la matrice-zéro, ce qui est évidemment possible, S n'étant pas assujettie à être inversible. Alors la solution de (1) qui satisfait aux conditions initiales fixes (2) se déforme continûment dans la matrice E, et le lemme est démontré.

Lemme 4. — *Sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ, toute matrice holomorphe et inversible* A *peut être arbitrairement approchée* (2) *par un produit fini de matrices de la forme e^{P_i}, où les P_i sont*

---

(1) Cette intégration est possible parce que les δ_i sont simplement connexes.

(2) Dire qu'une matière A holomorphe et inversible sur Δ peut être arbitrairement approchée sur Δ par des matrices appartenant à une certaine famille $\mathcal{F}$ de matrices holomorphes et inversibles sur Δ, c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $B \in \mathcal{F}$, telle que

$$|A - B| < \varepsilon \qquad \text{en tout point de } \Delta.$$

Cette condition équivaut à la suivante : pour tout $\eta > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}$ telle que

$$|AB^{-1} - E| < \eta \qquad \text{en tout point de } \Delta.$$

des matrices polynomiales (dont les éléments sont des polynomes en $x_1, \ldots, x_n$). *La matrice* A *peut donc être arbitrairement approchée sur* Δ *par une matrice holomorphe et inversible dans tout l'espace à distance finie.*

En effet, en vertu du lemme 3, A peut se mettre sous la forme d'un produit fini de matrices A_i qui diffèrent de E aussi peu qu'on veut, et par exemple satisfont à

$$|A_i - E| < 1 \qquad \text{sur } \Delta.$$

Or, chacune de ces A_i peut être approchée arbitrairement, sur Δ, par une matrice e^{P_i}; car si l'on pose

$$\log A_i = B_i,$$

on n'a qu'à approcher arbitrairement, sur Δ, la matrice B_i par une matrice polynomiale P_i. Le lemme 4 est donc démontré.

4. Le théorème fondamental.

Théorème I. — *Soient, dans l'espace de n variables complexes, deux polycylindres compacts Δ' et Δ'' qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une, et dont l'intersection $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta$ est simplement connexe. Toute matrice* A *holomorphe et inversible sur Δ peut être mise, sur Δ (1), sous la forme*

$$A = A'^{-1} . A'',$$

A' étant une matrice holomorphe et inversible sur Δ', et A'' une matrice holomorphe et inversible sur Δ''.

Soit x la variable complexe dans le plan de laquelle Δ' et Δ'' ont des composantes différentes, et soient δ' et δ'' ces composantes; $\delta = \delta' \cap \delta''$ est la composante de Δ dans le plan (x). Nous désignerons par y l'ensemble des autres variables; Δ', Δ'' et Δ ont, dans l'espace (y), la même composante Λ qui est un polycylindre compact et simplement connexe.

En vertu des lemmes 1 et 2, on peut trouver, dans l'espace (y), un polycylindre Λ_1 compact et simplement connexe tel que Λ soit intérieur

(1) « Sur Δ » signifie : dans un certain ensemble ouvert contenant Δ.

à Λ_1 ; puis, dans le plan (x), deux domaines polygonaux δ'_1 et δ''_1 tels que δ' et δ'' soient respectivement intérieurs à δ'_1 et δ''_1, et tels en outre que leur intersection $\delta_1 = \delta'_1 \cap \delta''_1$ soit simplement connexe; et enfin on peut choisir tous les domaines ci-dessus de manière que la matrice donnée A soit holomorphe et inversible sur le polycylindre Δ_1, produit de δ_1 par Λ_1.

Nous supposerons, ce qui est possible d'après la démonstration des lemmes 1 et 2, que les frontières de δ'_1 et δ''_1 se composent de segments de droites parallèles aux axes de coordonnées (rectangulaires) et dont les longueurs sont des multiples entiers de $\frac{1}{2^m}$ (m étant un entier assez grand). Alors, pour chaque longueur $r < \frac{1}{2^{m+1}}$, on peut définir les domaines polygonaux $\delta'_1(r)$, $\delta''_1(r)$ et $\delta_1(r)$ obtenus en enlevant respectivement de δ'_1, δ''_1 et δ_1 une bande de largeur r le long de la frontière; ces nouveaux domaines ont respectivement le même nombre de côtés-frontières que les précédents, et semblablement placés; et l'on a

$$\delta_1(r) = \delta'_1(r) \cap \delta''_1(r).$$

Choisissons une longueur a inférieure à $\frac{1}{2^{m+2}}$, et assez petite pour que δ' et δ'' soient respectivement intérieurs à $\delta'_1(2a)$ et $\delta''_1(2a)$; puis donnons à r successivement les valeurs

$$r_1 = 0,\ r_2 = a,\ \ldots,\ r_{k+1} = r_k + \frac{a}{2^{k-1}},\ \ldots .$$

Écrivons, pour simplifier, δ'_k, δ''_k et δ_k au lieu de $\delta'_1(r_k)$, $\delta''_1(r_k)$ et $\delta_1(r_k)$ (pour $k = 1, 2, \ldots$); désignons par Δ'_k, Δ''_k et Δ_k respectivement les domaines-produits de δ'_k, δ''_k et δ_k par Λ_1.

Soit γ'_k la partie de la frontière de δ'_k qui appartient à δ''_k; γ''_k la partie de la frontière de δ''_k qui appartient à δ'_k. La réunion de γ'_k et γ''_k constitue la frontière de δ_k; en outre, la distance d'un point quelconque de γ'_k à un point quelconque de δ'_{k+1} est au moins égale à $\frac{a}{2^{k-1}}$, et la distance d'un point quelconque de γ''_k à un point quelconque de δ''_{k+1} est au moins égale à $\frac{a}{2^{k-1}}$. Cela résulte des constructions ci-dessus. Enfin, il est clair que les lignes polygonales γ'_k et γ''_k ont une longueur inférieure à une quantité finie, indépendante de k; nous la désignerons par $2\pi K$, et nous supposerons que K a été choisi de manière que $K \geqq a$.

Tous ces préliminaires étant posés, démontrons d'abord le théorème I en supposant que, sur Δ_1, l'on ait

$$|A - E| \leqq \rho, \tag{3}$$

ρ étant un nombre positif assez petit, qui sera précisé dans un instant. Le théorème en résultera dans toute sa généralité : en effet, si l'hypothèse (3) n'est pas vérifiée, il existe, en vertu du lemme 4, une matrice P partout holomorphe et inversible, telle que l'on ait sur Δ_1

$$|A.P^{-1} - E| \leqq \rho;$$

le théorème sera donc applicable à la matrice $A.P^{-1}$, d'où

$$A.P^{-1} = A'^{-1}.A'',$$

et par suite

$$A = A'^{-1}.(A''P),$$

ce qui démontre le théorème pour la matrice A.

Nous pouvons donc supposer que (3) a lieu sur Δ_1. Posons

$$A = E + U, \qquad |U| \leqq \rho \qquad \text{sur } \Delta_1,$$

et appliquons le théorème de Cauchy à la fonction holomorphe U de la variable x dans le domaine δ_1, y étant fixe dans Λ_1; il vient

$$U(x, y) = U'(x, y) + U''(x, y),$$

avec

$$U'(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_1} U(\xi, y)\frac{d\xi}{\xi - x},$$

$$U''(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''_1} U(\xi, y)\frac{d\xi}{\xi - x}.$$

$U'(x, y)$ est holomorphe sur Δ'_2 et $U''(x, y)$ sur Δ''_2; sur ces polycylindres, on a respectivement

$$|U'| \leqq K\frac{\rho}{a}, \qquad |U''| \leqq K\frac{\rho}{a},$$

car cela résulte de $|U| \leqq \rho$ et de $|\xi - x| \geqq a$.

Les matrices $E - U'$ et $E - U''$ sont certainement inversibles dans Δ'_2

et Δ''_2 respectivement si l'on a

$$K\frac{\rho}{a} < 1;$$

aussi supposerons-nous

$$(4) \qquad \rho < \frac{a}{K},$$

ce qui entraîne d'ailleurs $\rho < 1$.

Formons, en tout point de $\Delta_2 = \Delta'_2 \cap \Delta''_2$, la matrice

$$(E - U')(E + U)(E - U'');$$

elle a la forme $E + U_1$, avec

$$U_1 = -U'U - UU'' + U'U'' - U'UU''.$$

Dans Δ_2, on a

$$|U_1| \leqq 2K\frac{\rho^2}{a} + K^2\frac{\rho^2}{a^2} + K^2\frac{\rho^3}{a^2},$$

et, comme $\frac{a}{K} \leqq 1$ et $\rho < 1$,

$$|U_1| \leqq 4K^2\frac{\rho^2}{a^2}.$$

Posons

$$\rho_1 = 4K^2\frac{\rho^2}{a^2}.$$

On aura

$$\rho_1 \leqq \frac{1}{4}\rho$$

si l'on suppose

$$(5) \qquad \rho \leqq \frac{a^2}{16K^2}.$$

Supposons que ρ *ait été choisi assez petit pour satisfaire à* (4) *et à* (5), et achevons la démonstration du théorème pour la matrice A moyennant l'hypothèse (3).

Pour cela, recommençons pour U_1 dans Δ_2 ce qui vient d'être fait pour U dans Δ_1, les domaines Δ'_1 et Δ''_1 étant remplacés par Δ'_2 et Δ''_2 respectivement, Δ'_2 et Δ''_2 étant remplacés par Δ'_3 et Δ''_3 respectivement. Il vient, dans Δ_2,

$$U_1(x, y) = U'_1(x, y) + U''_1(x, y)$$

avec

$$|U'_1| \leqq K \frac{\rho_1}{\frac{a}{2}} \leqq \frac{1}{2} K \frac{\rho}{a} \qquad \text{dans } \Delta'_3,$$

$$|U''_1| \leqq K \frac{\rho_1}{\frac{a}{2}} \leqq \frac{1}{2} K \frac{\rho}{a} \qquad \text{dans } \Delta''_3.$$

Dans Δ_3, formons la matrice

$$(E - U'_1)(E + U_1)(E - U''_1) = E + U_2;$$

on a

$$|U_2| \leqq 4\left(\frac{1}{2} K \frac{\rho}{a}\right)^2 = \rho_2,$$

avec

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{4} \leqq \frac{1}{4^2} \rho.$$

Ce procédé pourra être répété indéfiniment. On définira, par récurrence sur l'entier k, les matrices U'_{k-1} et U''_{k-1} qui seront holomorphes sur Δ'_{k+1} et Δ''_{k+1} respectivement et y satisferont à

$$(6) \qquad |U'_{k-1}| \leqq \frac{K}{2^{k-1}} \frac{\rho}{a}, \qquad |U''_{k-1}| \leqq \frac{K}{2^{k-1}} \frac{\rho}{a}$$

(le second membre $\frac{K}{2^{k-1}} \frac{\rho}{a}$ est le terme général d'une série convergente). Puis on définira, sur Δ_{k+1}, la matrice U_k par la relation

$$(7) \qquad (E - U'_{k-1})(E + U_{k-1})(E - U''_{k-1}) = E + U_k,$$

et l'on aura, sur Δ_{k+1},

$$(8) \qquad |U_k| \leqq \rho_k, \qquad \rho_k \leqq \frac{1}{4^k} \rho.$$

Soient $\bar{\Delta}'$ et $\bar{\Delta}''$ respectivement l'intersection de tous les Δ'_k et l'intersection de tous les Δ''_k; les polycylindres initiaux Δ' et Δ'' sont respectivement intérieurs à $\bar{\Delta}'$ et $\bar{\Delta}''$. Or, dans $\bar{\Delta}''$, on peut former le produit infini à droite

$$(E - U'')(E - U''_1) \ldots (E - U''_k) \ldots,$$

qui, d'après (6), converge uniformément vers une matrice C'' holomorphe et inversible. De même, le produit infini à gauche

$$\ldots(\mathrm{E}-\mathrm{U}'_k)\ldots(\mathrm{E}-\mathrm{U}'_1)(\mathrm{E}-\mathrm{U}')$$

converge uniformément dans $\bar{\Delta}'$ vers une matrice C′ holomorphe et inversible. En vertu de (7), on a, dans $\bar{\Delta}' \cap \bar{\Delta}''$,

$$(\mathrm{E}-\mathrm{U}'_k)\ldots(\mathrm{E}-\mathrm{U}'_1)(\mathrm{E}-\mathrm{U}')\,\mathrm{A}(\mathrm{E}-\mathrm{U}'')(\mathrm{E}-\mathrm{U}''_1)\ldots(\mathrm{E}-\mathrm{U}''_k)=\mathrm{E}+\mathrm{U}_{k+1},$$

et, en vertu de (8), U_{k+1} tend uniformément vers zéro dans $\bar{\Delta}' \cap \bar{\Delta}''$. On obtient donc, en passant à la limite pour $k \to \infty$,

$$\mathrm{C}'.\mathrm{A}.\mathrm{C}''=\mathrm{E},$$

ou encore

$$\mathrm{A}=\mathrm{C}'^{-1}.\mathrm{C}''^{-1}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème I.

5. Application aux idéaux de fonctions holomorphes. — Étant donné, dans une région Δ de l'espace des variables complexes $x_1, \ldots, x_n$, un système de p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$, et une matrice holomorphe A (à p lignes et p colonnes), la matrice A définit une substitution linéaire que l'on peut appliquer à $f_1, \ldots, f_p$. On obtient un nouveau système de p fonctions $g_1, \ldots, g_p$, dit *transformé du système* $(f_1, \ldots, f_p)$ *par la matrice* A ; on notera

$$(g)=\mathrm{A}(f).$$

Cela posé, revenons aux notations du théorème I (§ 4). Considérons, sur Δ', un idéal $\mathfrak{I}'$ de fonctions holomorphes ayant pour base un système de p fonctions f'_i $(i=1, \ldots, p)$; et, sur Δ'', un idéal $\mathfrak{I}''$ de fonctions holomorphes ayant pour base un système de p fonctions f''_i; supposons enfin qu'il existe, sur $\Delta' \cap \Delta''=\Delta$, une matrice holomorphe et inversible A telle que

$$(f')=\mathrm{A}(f'');$$

dans ces conditions, je dis qu'*il existe un système unique de p fonctions holomorphes dans la réunion* $\Delta' \cup \Delta''$, *qui sert de base à* $\mathfrak{I}'$ *sur* Δ' *et à* $\mathfrak{I}''$ *sur* Δ''.

En effet, d'après le théorème I, A peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}'^{-1}.\mathrm{A}'',$$

ce qui donne, sur Δ,

$$A'A(f'') = A''(f''),$$

c'est-à-dire

$$A'(f') = A''(f'').$$

$A'(f')$ est un système de p fonctions holomorphes sur Δ'; $A''(f'')$ est un système de p fonctions holomorphes sur Δ''; et, sur Δ, ces deux systèmes coïncident. On obtient donc bien un système unique de p fonctions holomorphes sur $\Delta' \cup \Delta''$; ce système sert de base à $\mathcal{I}'$ sur Δ', et à $\mathcal{I}''$ sur Δ''. C. Q. F. D.

Ceci nous amène au problème suivant :

A quelle condition deux idéaux $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ de bases finies sur Δ' et Δ'' respectivement admettent-ils une base unique, holomorphe sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$?

Ce problème est résolu par le théorème suivant :

Théorème II. — *Δ', Δ'' et Δ ayant la même signification qu'au théorème I, considérons, sur Δ' et Δ'' respectivement, deux idéaux $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ de bases finies. Pour que $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ admettent une même base holomorphe sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, il faut et il suffit que $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ engendrent* (1) *le même idéal sur l'intersection Δ.*

La condition est évidemment *nécessaire;* car si un système (f) holomorphe sur $\Delta' \cup \Delta''$ sert de base à $\mathcal{I}'$ et à $\mathcal{I}''$, (f) est une base de l'idéal engendré par $\mathcal{I}'$ sur Δ, et est aussi une base de l'idéal engendré par $\mathcal{I}''$ sur Δ.

Nous allons montrer que la condition est *suffisante*, en nous ramenant au cas qui vient d'être traité : celui où $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ possèdent deux bases formées d'un même nombre de fonctions et telles que, sur Δ, le passage d'une base à l'autre puisse s'effectuer au moyen d'une matrice holomorphe et inversible.

---

(1) L'idéal « engendré » sur un ensemble Δ par un idéal $\mathcal{I}'$ sur Δ' (lorsque $\Delta \subset \Delta'$) se compose des combinaisons linéaires finies de fonctions de $\mathcal{I}'$ à coefficients holomorphes sur Δ. Si $\mathcal{I}'$ admet une base finie sur Δ', cette base sert aussi de base à l'idéal engendré par $\mathcal{I}'$ sur Δ.

A priori, $\mathfrak{J}'$ possède une base formée de p' fonctions f'_i $(i=1, \ldots, p')$ et $\mathfrak{J}''$ une base formée de p'' fonctions $f''_\alpha(\alpha=1, \ldots, p'')$. Dans Δ, il existe des fonctions holomorphes $a_{i\alpha}$ telles que l'on ait

$$f'_i=\sum_\alpha a_{i\alpha} f''_\alpha, \tag{9}$$

et des fonctions holomorphes $A_{\alpha i}$ telles que l'on ait

$$f''_\alpha=\sum_i A_{\alpha i} f'_i; \tag{10}$$

en effet, le système (f'_i) et le système (f''_α) engendrent par hypothèse le même idéal sur Δ.

Adjoignons p'' fois la fonction *zéro* au système (f'_i); on obtient un système de $p'+p''=p$ fonctions

$$(f'_i),\ (F'_\alpha), \quad \text{avec} \quad F'_\alpha=0 \qquad (\alpha=1, \ldots, p''). \tag{11}$$

De même, en adjoignant p' fois la fonction *zéro* au système f''_α, on obtient p fonctions

$$(f''_\alpha),\ (F''_i), \quad \text{avec} \quad F''_i=0 \qquad (i=1, \ldots, p'). \tag{12}$$

Pour établir le théorème II, il suffit de montrer que *l'existence des identités* (9) *et* (10) *sur* Δ *entraîne l'existence d'une matrice holomorphe et inversible* (*sur* Δ) *qui transforme le système* (12) *dans le système* (11). La démonstration que nous allons donner est valable *sans aucune hypothèse relative à la région* Δ.

Posons, pour $\alpha=1, \ldots, p''$ et $\beta=1, \ldots, p''$,

$$b_{\alpha\beta}=-\sum_i A_{\alpha i} a_{i\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

avec

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha=\beta, \\ 0 & \text{si } \alpha\neq\beta. \end{cases}$$

Posons de même, pour $i=1, \ldots, p'$ et $j=1, \ldots, p'$,

$$B_{ij}=-\sum_\alpha a_{i\alpha} A_{\alpha j}+\varepsilon_{ij}, \tag{14}$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On vérifie les relations

$$F'_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta} f''_\beta - \sum_j A_{\alpha j} F''_j \,;$$

$$F''_i = \sum_j B_{ij} f'_j - \sum_\beta a_{i\beta} F'_\beta.$$

Ces relations, jointes aux suivantes [déduites de (9) et (10)]

$$f'_i = \sum_\beta a_{i\beta} f''_\beta + F''_i,$$

$$f''_\alpha = \sum_j A_{\alpha j} f'_j + F'_\alpha,$$

prouvent que la matrice

$$S = \begin{vmatrix} a_{i\beta} & \varepsilon_{ij} \\ b_{\alpha\beta} & -A_{\alpha j} \end{vmatrix}$$

transforme le système (12) dans le système (11) [l'indice i se rapporte aux p' premières lignes de la matrice S, l'indice α aux p'' dernières lignes, l'indice β aux p'' premières colonnes, et l'indice j aux p' dernières colonnes]. De même la matrice

$$S_1 = \begin{vmatrix} A_{\alpha j} & \varepsilon_{\alpha\beta} \\ B_{ij} & -a_{i\beta} \end{vmatrix}$$

transforme le système (11) dans le système (12).

Or un calcul facile montre que le produit $S \cdot S_1$ est égal à la matrice-unité E. Par suite, la matrice S est inversible dans Δ, ce qui achève la démonstration.

6. Problème concernant les changements de base pour un idéal de fonctions holomorphes. — Nous venons de montrer que si un idéal $\mathcal{I}$, dans une région Δ, possède deux bases finies (f'_i) et (f''_α), on peut les compléter respectivement par des fonctions identiquement nulles de manière que le passage d'une des bases complétées à l'autre base complétée puisse se faire au moyen d'une matrice holomorphe et inversible dans Δ. Il est naturel de se demander si, dans le cas particulier où les deux bases données ont *un même nombre de fonctions*, le passage de l'une à l'autre peut se faire *directement* (sans adjonction de fonctions identiquement nulles) au moyen d'une matrice holomorphe et inversible, au moins *dans le cas* (le seul que nous examinerons) *où Δ est un polycylindre compact et simplement connexe.*

Contrairement à ce qu'on serait tenté de croire, la réponse est *négative* (*voir* § **8**). Le problème mériterait d'ailleurs d'être étudié plus à fond. Nous n'envisagerons ici que deux cas particuliers :

1° *le cas où les fonctions de $\mathcal{J}$ n'ont aucun zéro commun sur* Δ. Dans ce cas, deux bases formées d'un même nombre de fonctions peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre par une matrice holomorphe et inversible sur Δ (*voir* § **7**);

2° ***le cas où le nombre p des fonctions de chacune des bases est égal à deux.*** Nous montrerons (§ **8**) que si les zéros communs aux fonctions de $\mathcal{J}$ forment une variété à $n-2$ dimensions (complexes) et *simplement connexe*, on peut toujours transformer l'une des bases dans l'autre par une matrice holomorphe et inversible. Au contraire, nous donnerons un exemple (toujours pour $p=2$) où, la variété de $\mathcal{J}$ n'étant pas simplement connexe (quoique à $n-2$ dimensions), on peut trouver deux bases qui ne soient pas transformables l'une dans l'autre par une matrice holomorphe et inversible.

7. Bases d'un idéal dont les fonctions n'ont aucun zéro commun.

Théorème III. — ***Soit, sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ, un système de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sans zéro commun. Posons***

$$g_1 = 1, \qquad g_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, p).$$

On peut transformer le système $(f_1, \ldots, f_p)$ dans le système $(g_1, \ldots, g_p)$ au moyen d'une matrice holomorphe et inversible sur Δ.

Ce théorème entraînera la conséquence suivante : le passage d'un système de p fonctions sans zéro commun à un autre système de

p fonctions sans zéro commun peut toujours s'effectuer au moyen d'une matrice holomorphe et inversible, au moins lorsque la région Δ considérée est un polycylindre compact et simplement connexe.

Pour démontrer le théorème III, remarquons d'abord que, *au voisinage de tout point de* Δ, le passage du système (f) au système (g) peut se faire au moyen d'une matrice holomorphe et inversible, car si l'on a, par exemple, $f_1 \neq 0$ au point considéré, il suffit de prendre la matrice

$$\left|\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{f_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -\frac{f_2}{f_1} & & & \\ \vdots & & E_{p-1} & \\ -\frac{f_p}{f_1} & & & \end{array}\right|,$$

où E_{p-1} désigne la matrice-unité à $p-1$ lignes et $p-1$ colonnes. On peut donc, Δ étant compact, recouvrir Δ avec des polycylindres compacts Δ_k en nombre fini, de manière que, dans chaque Δ_k, il existe une matrice holomorphe et inversible S_k jouissant de la propriété

$$(g) = S_k(f).$$

Il y a, bien entendu, un grand arbitraire dans le choix des Δ_k. On peut, en particulier, procéder comme ceci : soit $\delta_i (i = 1, \ldots, n)$ la composante de Δ dans le plan de la $i^{\text{ème}}$ variable complexe; on recouvre chaque δ_i par des domaines fermés (compacts) δ_i^l assez petits, en nombre fini, puis on considère tous les domaines-produits

$$\delta_1^{l_1} \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n},$$

où $l_1, \ldots, l_n$ prennent indépendamment toutes les valeurs possibles. Ces polycylindres (en nombre fini) jouent le rôle des Δ_k.

Désignons par ε_i^l la réunion (dans le plan de la $i^{\text{ème}}$ variable complexe) des l premiers domaines $\delta_i^1, \ldots, \delta_i^l$. Comme δ_i est simplement connexe, on peut choisir les δ_i^l de manière que *les* ε_i^l *soient simplement connexes,* et que les intersections

$$\varepsilon_i^l \cap \delta_i^{l+1}$$

le soient aussi. Cela posé, il s'agit de démontrer d'abord que le passage du système (f) au système (g) peut s'effectuer par une matrice holomorphe et inversible dans le domaine-produit

$$\varepsilon_1^{l_1} \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n},$$

quels que soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$; cette démonstration se fera, $l_2, \ldots, l_n$ étant fixés, par récurrence sur l_1. Cela fait, on saura qu'on peut passer de (f) à (g) par une matrice holomorphe inversible dans chaque polycylindre

$$\delta_1 \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n}.$$

Ensuite, on s'occupera des domaines $\delta_1 \times \varepsilon_2^{l_2} \times \delta_3^{l_3} \times \ldots \times \delta_n^{l_n}$ (par récurrence sur l_2), etc. Ce procédé n'est autre que celui employé par Cousin : la récurrence se fait successivement dans les plans des n variables complexes.

Chaque fois, la récurrence revient à ceci (raisonnons, par exemple, pour $\varepsilon_1^{l_1} \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n}$) : on a, sur le polycylindre compact

$$\varepsilon_1^{l_1} \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n} = \Delta',$$

une matrice holomorphe inversible S' telle que

$$(g) = S'(f);$$

et, dans le polycylindre compact

$$\delta_1^{l_1+1} \times \delta_2^{l_2} \times \ldots \times \delta_n^{l_n} = \Delta'',$$

une matrice holomorphe inversible S'' telle que

$$(g) = S''(f);$$

il s'agit de trouver, dans la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, une matrice holomorphe inversible S *telle que*

$$(g) = S(f),$$

sachant que $\Delta' \cap \Delta''$ est simplement connexe.

Tel est le problème qui reste à résoudre pour achever la démonstration du théorème III. Pour cela, nous nous servirons du théorème I. Posons, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$S' S''^{-1} = \Sigma;$$

on a

$$\Sigma(g) = (g).$$

Or nous allons démontrer :

LEMME 5. — *Δ', Δ'' et Δ ayant la même signification qu'au théorème* I, *et $g_1, \ldots, g_p$ ayant la même signification qu'au théorème* III, *toute matrice Σ, holomorphe et inversible sur Δ, et qui laisse invariant le système (g), peut se mettre sous la forme $\Sigma'^{-1}\Sigma''$, où Σ' est holomorphe et inversible sur Δ', Σ'' est holomorphe et inversible sur Δ'', Σ' et Σ'' laissant chacune le système (g) invariant.*

Admettons ce lemme pour un instant, et achevons la démonstration du théorème III. On aura

$$S'S''^{-1} = \Sigma = \Sigma'^{-1}\Sigma'',$$

d'où

$$\Sigma'S' = \Sigma''S'';$$

la matrice S, égale à $\Sigma'S'$ sur Δ' et à $\Sigma''S''$ sur Δ'', satisfait, en tout point de $\Delta' \cup \Delta''$, à la condition

$$S(f) = (g). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Reste à démontrer le lemme 5. Or les matrices inversibles qui laissent invariant le système (g) ont la forme

$$\Sigma = \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & a_2 & \ldots & a_p \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right|,$$

où A est une matrice inversible à $(p-1)$ lignes et $(p-1)$ colonnes. Une telle matrice Σ étant donnée sur Δ, prenons pour inconnues les matrices

$$\Sigma'^{-1} = \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & a'_2 & \ldots & a'_p \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A'^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right|$$

et

$$\Sigma''^{-1} = \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & a''_2 & \ldots & a''_p \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A''^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right|.$$

L'on veut avoir

$$\Sigma\Sigma''^{-1} = \Sigma'^{-1}.$$

Pour cela, il faut d'abord

$$A = A'^{-1}A'',$$

ce qui est possible à réaliser, en vertu du théorème I. Puis, en désignant par

$$|b_2 \quad \ldots \quad b_p|$$

la matrice (à une ligne et $p-1$ colonnes) produit de la matrice A'' par la matrice $|a_2 \ldots a_p|$, on doit avoir

$$(15) \qquad b_k = a'_k - a''_k \qquad (k = 2, \ldots, p).$$

Or, une fois la matrice A'' déterminée, les b_k sont déterminés, holomorphes sur $\Delta' \cap \Delta''$, et l'on sait qu'une fonction holomorphe sur $\Delta' \cap \Delta''$ peut effectivement se mettre sous la forme de la différence de deux fonctions, holomorphes respectivement sur Δ' et sur Δ''. On peut donc déterminer les a'_k et les a''_k de manière à satisfaire à (15), et le lemme 5 est démontré.

Corollaire du théorème III. — *Si $f_1, \ldots, f_p$ sont holomorphes et n'ont pas de zéro commun sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ, il existe p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ holomorphes sur Δ telles que*

$$c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p = 1.$$

Une démonstration directe serait facile et ne nécessiterait pas le recours au théorème I; il est d'ailleurs inutile de supposer que Δ soit simplement connexe.

Ce corollaire exprime que *tout système de p fonctions holomorphes et sans zéro commun sur un polycylindre compact engendre sur ce polycylindre l'idéal-unité.*

8. Idéaux ayant une base formée de deux fonctions.

Théorème IV. — *Si (f_1, f_2) et (g_1, g_2) sont deux bases d'un même idéal $\mathfrak{J}$ sur un polycylindre compact Δ, et si la variété de l'idéal $\mathfrak{J}$* [1],

[1] La variété d'un idéal est l'ensemble des zéros communs aux fonctions de l'idéal.

supposée à n — 2 dimensions complexes [1], *est simplement connexe* [2], *on peut transformer une base dans l'autre par une matrice holomorphe inversible sur* Δ.

En effet, il existe par hypothèse des fonctions a, b, c, d, a', b', c', d' holomorphes dans Δ et telles que

$$\begin{aligned} g_1 &= af_1 + bf_2, & f_1 &= a'g_1 + b'g_2, \\ g_2 &= cf_1 + df_2, & f_2 &= c'g_1 + d'g_2. \end{aligned}$$

D'où les identités

$$\begin{aligned} (aa' + cb' - 1)f_1 + (ba' + db')f_2 &= 0, \\ (ac' + cd')f_1 + (bc' + dd' - 1)f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Comme f_1 et f_2 sont premières entre elles (la variété $f_1 = f_2 = 0$ étant par hypothèse à $n - 2$ dimensions complexes), on a

$$\begin{aligned} aa' + cb' &\equiv 1 \quad (f_2) \\ ac' + cd' &\equiv 0 \quad (f_2) \\ ba' + db' &\equiv 0 \quad (f_1) \\ bc' + dd' &\equiv 1 \quad (f_1), \end{aligned}$$

et par suite

$$(ad - bc)(a'd' - b'c') \equiv 1 \quad (\mathfrak{I}),$$

ce qui prouve que le déterminant $ad - bc$ est $\neq 0$ en tout point de la variété Λ de l'idéal $\mathfrak{I}$. Or, Λ étant simplement connexe, on peut y définir une détermination uniforme de $\log(ad - bc)$. Il existe donc une fonction φ, holomorphe au voisinage de Λ, telle que

$$e^{\varphi} = ad - bc.$$

Or on montre [3] qu'étant donnée une fonction φ holomorphe au

---

(1) Ceci n'exclut pas le cas où cette variété serait vide, cas qui est d'ailleurs justiciable du théorème III.

(2) Dans le sens suivant : toute courbe fermée y est réductible à zéro par continuité.

(3) Nous prions le lecteur d'admettre ce résultat, et nous le renvoyons à notre Mémoire ultérieur consacré aux idéaux de fonctions holomorphes. Le résultat admis ici sera démontré pour un idéal $\mathfrak{I}$ sur un polycylindre compact, pourvu que $\mathfrak{I}$ possède pour base un système de p fonctions et que la variété de $\mathfrak{I}$ soit à $n - p$ dimensions (complexes) au voisinage de chacun de ses points.

voisinage de la variété Λ, on peut trouver une fonction Φ *holomorphe sur le polycylindre* Δ et telle que, au voisinage de tout point de Λ, on ait

$$\Phi \equiv \varphi \ (\mathcal{I}).$$

On a donc

$$e^{\Phi} \equiv ad - bc \ (\mathcal{I})$$

au voisinage de tout point de Δ, et par suite la congruence a lieu globalement ([1]) sur Δ. Autrement dit, il existe λ et μ holomorphes sur Δ et telles que

$$ad - bc = e^{\Phi} + \lambda g_1 + \mu g_2.$$

Alors la matrice

$$\begin{vmatrix} a - \mu f_2 & b + \mu f_1 \\ c + \lambda f_2 & d - \lambda f_1 \end{vmatrix}$$

transforme le système (f_1, f_2) dans le système (g_1, g_2), et son déterminant ne s'annule pas sur Δ, puisqu'il est égal à e^{Φ}.

Le théorème IV est ainsi démontré.

Il nous reste à former un *contre-exemple pour le théorème* IV. Nous l'aurons en prenant simplement trois variables complexes x, y, z, un polycylindre Δ compact et même simplement connexe, et un idéal $\mathcal{I}$ dont la variété Λ est à une dimension complexe, chacune des deux bases de $\mathcal{I}$ se composant de *deux* fonctions. Considérons les deux polycylindres

$$(\Delta') \qquad |x + 1| \leqq \sqrt{2}, \qquad |y| \leqq 3, \qquad |z| \leqq 1,$$
$$(\Delta'') \qquad |x - 1| \leqq \sqrt{2}, \qquad |y| \leqq 3, \qquad |z| \leqq 1.$$

Ils remplissent les conditions du théorème I (§ 4). Sur leur *réunion* (qui est simplement connexe), considérons l'idéal $\mathcal{I}$ ayant pour base le système de deux fonctions

$$f_1 = x^2 + y^2 - 1, \qquad f_2 = z.$$

Nous allons former une autre base (g_1, g_2) du même idéal, de manière que *le passage de* (f_1, f_2) *à* (g_1, g_2) *ne puisse pas s'effectuer au moyen d'une matrice holomorphe inversible sur la réunion* $\Delta' \bigcup \Delta''$.

Sur l'intersection $\Delta' \bigcap \Delta''$, désignons par $\sqrt{1 - x^2}$ la détermination

([1]) Nous renvoyons encore le lecteur au Mémoire annoncé en note, p. 23.

(uniforme) qui prend la valeur 1 pour $x=0$; puis définissons la fonc tion $\lambda(x, y)$ par la relation

$$(x^2+y^2-1)\lambda = 1+e^{\frac{\pi i y}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

$\lambda(x, y)$ est holomorphe et uniforme sur $\Delta'\bigcap\Delta''$. La matrice

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda f_2 & 1-\lambda f_1 \end{vmatrix}$$

transforme le système (f_1, f_2) en lui-même, et son déterminant est

$$1-\lambda f_1 = -e^{\frac{\pi i y}{\sqrt{1-x^2}}} \neq 0.$$

En vertu du théorème I, il existe une matrice A′ holomorphe et inversible sur Δ', et une matrice A″ holomorphe et inversible sur Δ'', telles que

$$A = A'^{-1} A''.$$

Donc les matrices A′ et A″ produisent le même effet sur le système (f_1, f_2) dans $\Delta'\bigcap\Delta''$; elles fournissent par suite un système de deux fonctions g_1 et g_2 holomorphes sur la réunion $\Delta'\bigcup\Delta''$.

Les fonctions g_1 et g_2 servent de base à $\mathcal{J}$ sur $\Delta'\bigcup\Delta''$, en vertu d'un théorème que nous demandons au lecteur d'admettre ici [1]. Reste à montrer qu'il n'existe pas de matrice S holomorphe et inversible sur $\Delta'\bigcup\Delta''$ telle que

$$(f) = S(g).$$

Si une telle S existait, on pourrait écrire

$$A = (SA')^{-1}(SA''),$$

avec

$$SA'(f) = (f), \qquad SA''(f) = (f).$$

$(SA')^{-1}$ et SA″ auraient donc la forme

$$(SA')^{-1} = \begin{vmatrix} 1-\mu' f_2 & \mu' f_1 \\ \lambda' f_2 & 1-\lambda' f_1 \end{vmatrix},$$

$$SA'' = \begin{vmatrix} 1-\mu'' f_2 & \mu'' f_1 \\ \lambda'' f_2 & 1-\lambda'' f_1 \end{vmatrix},$$

---

[1] Nous devons encore renvoyer au Mémoire annoncé p. 23. On y démon-

et le déterminant de A serait égal au produit des déterminants, soit

$$(1-\lambda' f_1 - \mu' f_2)(1-\lambda'' f_1 - \mu'' f_2) = -e^{\frac{\pi i y}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Or, sur $\Delta' \cap \Delta''$, les fonctions

$$\log(1-\lambda' f_1 - \mu' f_2) \qquad \text{et} \qquad \log(1-\lambda'' f_1 - \mu'' f_2)$$

seraient uniformes; choisissons pour chacune d'elles la détermination qui s'annule pour $x=0$, $y=1$, $z=0$. Avec cette convention on aurait

$$(16) \quad \log(1-\lambda' f_1 - \mu' f_2) + \log(1-\lambda'' f_1 - \mu'' f_2) = \pi i\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right).$$

Comme le premier log est uniforme sur Δ' où la variété $f_1 = f_2 = 0$ est *connexe*, ce log serait *nul* en tout point de cette variété; de même le second log serait nul sur la variété. Or le second membre de (16) n'est pas nul au point $x=0$, $y=-1$, $z=0$ de la variété. D'où la contradiction cherchée.

Il est probable, d'après ce qui précède, que les conditions auxquelles doivent satisfaire deux bases d'un même idéal pour qu'elles soient transformables l'une dans l'autre par une matrice holomorphe et inversible, sont de nature purement *topologique*.

---

trera : si deux systèmes $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_p)$ engendrent le même idéal au voisinage de tout point d'un polycylindre compact, et si la variété de l'idéal est de dimension $n-p$, ces deux systèmes engendrent le même idéal sur le polycylindre.