JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MILLOUX

Sur une nouvelle extension d'une inégalité de M. R. Nevanlinna

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 197-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_197_0>

Sur une nouvelle extension d'une inégalité de M. R. Nevanlinna;

PAR **H. MILLOUX**

(Bordeaux).

Qu'il me soit d'abord permis de rappeler l'importance capitale des travaux de M. Émile Borel, dans la théorie des fonctions entières ou méromorphes, en particulier dans l'étude des valeurs prises par ces fonctions. Ses méthodes sont bien souvent utilisées, et cet article même s'inspire de sa célèbre démonstration du théorème de M. Picard, sinon directement, du moins indirectement, par l'intermédiaire de certains travaux de M. R. Nevanlinna.

1. INTRODUCTION ET RÉSUMÉ. — Dans un fascicule, en cours d'impression, des *Actualités Scientifiques et Industrielles* (1), j'établis un certain nombre de résultats nouveaux, qui concernent des extensions de la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna. On sait que sous sa forme la plus simple, cette inégalité majore l'indice caractéristique $T(r, f)$ d'une fonction méromorphe $f(z)$, à l'aide de la somme des trois indices de densité, relatifs aux zéros de f et de $f-1$ et aux pôles de f, et d'un terme complémentaire en général négligeable devant $T(r, f)$.

Conservons les zéros et les pôles de f, et substituons, aux zéros de $f-1$, ceux de $f'-1$, ou plus généralement ceux de $\psi-1$, où ψ

(1) H. MILLOUX, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées : extensions d'un théorème de M. R. Nevanlinna; applications.*

est une combinaison linéaire et homogène de f et de ses dérivées, avec facteurs $\alpha_i(z)$ holomorphes :

$$\psi(z) = \sum_0^l \alpha_i(z) f^{(i)}(z).$$

On trouvera, dans le fascicule qui vient d'être cité, une inégalité étendant celle de M. R. Nevanlinna.

Les zéros et pôles de la fonction f sont, répétons-le conservés. On pourrait cependant remplacer les zéros de f par ceux de $f - a$, où a est une constante finie; mais les méthodes employées ne permettent pas de se débarrasser des pôles.

D'où la nécessité de méthodes nouvelles, si l'on veut traiter le problème de comparaison de $T(r, f)$ par rapport aux indices de densité des zéros de $f - a$, $f - b$ et $\psi - c$, où a, b, c sont trois constantes finies.

Le présent article a pour objet de résoudre ce problème, principalement dans le cas où $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. Nous traitons d'abord le cas où ψ est la dérivée première f', puis le cas général. Enfin, nous généralisons brièvement au cas où a b c sont quelconques.

2. Il nous sera utile, pour la suite, de limiter la part des pôles multiples dans l'indice de densité des pôles d'une fonction méromorphe $f(z)$. La question a déjà été amorcée par M. R. Nevanlinna. Posons, avec cet auteur,

$$N_1(r) = 2N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N(r, f'),$$

et utilisons une de ses propriétés [1] : en supposant $f'(0)$ différent de zéro, on a l'inégalité

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + m(r, f) < 2T(r, f) - N_1(r) + 2m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\frac{3}{|f'(0)|} + 2\log 4.$$

---

[1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, édit., 1929), *Voir* p. 66.

Ajoutons $N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$ aux deux membres de cette inégalité; remarquons d'une part que [d'après la formule de Jensen-Nevanlinna et en supposant $f(0)$ fini et différent de zéro] $T\left(r, \frac{1}{f}\right)$ est égal à $T(r, f) - \log|f(0)|$; d'autre part que $T(r, f-1)$ est au moins égal à $T(r, f) - \log 2$, il vient *a fortiori* l'inégalité

$$2N(r, f) - N(r, f') < 2m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$$
$$+ \log|f(0)| + \log|f(0) - 1| - \log|f'(0)| + 5 - \left[m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right]$$

et l'on peut *a fortiori* supprimer la quantité entre crochets, qui est positive ou nulle, puisque $f'(0)$ diffère de zéro.

Le premier membre n'est autre que l'*indice de densité des pôles multiples de la fonction* $f(z)$, *chacun de ces pôles étant affecté d'un ordre de multiplicité égal à son ordre dans* f, *diminué d'une unité.* Désignons ce nouvel indice par N'. Nous avons alors l'inégalité

$$(1) \qquad N' < 2m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$$
$$+ \log|f(0)| + \log|f(0) - 1| - \log|f'(0)| + 5.$$

On suppose ici que l'origine n'est pas un zéro des fonctions $f, f-1$ et f', ni un pôle de f; mais il serait facile de généraliser.

3. Premier Cas. — *Aux zéros de* f *et de* $f-1$, *on associe les zéros de* $f'-1$. — Aux fonctions f et f' nous associons la fonction

$$\varphi = \frac{1 - f'}{f^2}.$$

Nous nous proposons d'appliquer à cette fonction la deuxième inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna, limitant son indice caractéristique en fonction de l'indice de densité de ses zéros et de ses pôles, et des zéros de $\varphi - 1$. Il nous sera nécessaire de majorer les indices de densité relatifs aux zéros de φ et de $\varphi - 1$.

Indice des zéros de φ. — Ces zéros sont composés des zéros de $f' - 1$ avec un ordre de multiplicité tout au plus égal, et des pôles multiples de f, lesquels deviennent des zéros de φ avec un ordre de multiplicité correspondant précisément à l'indice N' étudié au numéro précédent. D'où l'inégalité

$$N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \leqq N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + N'. \tag{2}$$

Indice des zéros de $\varphi - 1$. — On compare ces zéros à ceux de la fonction $(\varphi - 1)\frac{f}{f-1}$. Le facteur qu'on introduit ainsi *enlève* les zéros communs à $\varphi - 1$ et à $f - 1$. Désignons par N_0 un indice de densité affecté aux zéros communs à $\varphi - 1$ et à $f - 1$, chacun de ces zéros étant compté *avec son ordre de multiplicité le plus petit* dans $\varphi - 1$ et dans $f - 1$.

L'indice de densité des zéros de $\varphi - 1$ est alors inférieur ou égal à l'expression

$$N\left[r, \frac{f-1}{f(\varphi-1)}\right] + N_0. \tag{3}$$

Notre but est de transformer le premier terme de cette expression; il est majoré par l'indice caractéristique de la fonction $\frac{f-1}{f(\varphi-1)}$, lequel, en appliquant la formule de Jensen-Nevanlinna, est égal à

$$m\left[r, (\varphi-1)\frac{f}{f-1}\right] + N\left[r, (\varphi-1)\frac{f}{f-1}\right] + \log|f(0)-1| - \log|f(0)| - \log|\varphi(0)-1|.$$

Majoration de $m\left[r, (\varphi-1)\frac{f}{f-1}\right]$. — On écrit

$$(\varphi-1)\frac{f}{f-1} = \frac{f'}{f} - \frac{f'}{f-1} - \frac{1}{f} - 1$$

et l'indice m étudié est majoré par

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + 3\log 2.$$

Majoration de $N\left[r, (\varphi-1)\frac{f}{f-1}\right]$. — Les pôles de $(\varphi-1)\frac{f}{f-1}$ ne peuvent être pris que parmi les pôles de φ, c'est-à-dire les zéros de f (à cause du numérateur f, ils seront pris avec un ordre de multiplicité tout au plus égal à celui qui correspond à f), et parmi les zéros de $f-1$, pris avec un ordre de multiplicité égal, sauf dans le cas où ces zéros sont communs à $\varphi-1$. Dans ce cas, on est précisément amené à retrancher l'ordre de multiplicité le plus petit, c'est-à-dire l'ordre qui correspond à l'indice N_0 défini plus haut.

En résumé, l'indice étudié est au plus égal à

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right)+N\left(r, \frac{1}{f-1}\right)-N_0.$$

Revenons maintenant à l'expression (3). Il vient l'inégalité

$$\begin{aligned}(4)\quad N\left[r, \frac{1}{\varphi-1}\right] < N\left(r, \frac{1}{f}\right)+N\left(r, \frac{1}{f-1}\right)+m\left(r, \frac{1}{f}\right)+m\left(r, \frac{f'}{f}\right)\\ +m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right)+\log|f(0)-1|-\log|f(0)|-\log|\varphi(0)-1|+3.\end{aligned}$$

4. Avant d'appliquer la deuxième inégalité de R. Nevanlinna, recherchons une majorante de $T(R, \varphi)$ et une minorante de $m(r, \varphi)$.

Majorante de $T(R, \varphi)=m(R, \varphi)+N(R, \varphi)$. — On peut écrire

$$\varphi=\frac{1}{f}\left[\frac{1}{f}-\frac{f'}{f}\right],$$

d'où, en prenant les $\overset{+}{\log}$ et intégrant sur le cercle $|z|=R$,

$$m(R, \varphi) \leqq 2m\left(R, \frac{1}{f}\right)+m\left(R, \frac{f'}{f}\right)+\log 2.$$

D'autre part, les pôles de φ sont constitués par les zéros de f, qu'on prend avec un ordre de multiplicité tout au plus double, de sorte que l'on a

$$T(R, \varphi) \leqq 2T\left(R, \frac{1}{f}\right)+m\left(R, \frac{f'}{f}\right)+\log 2.$$

Dans la deuxième inégalité de R. Nevanlinna, figure le terme $12\overset{+}{\log}T(R, \varphi)$, lequel, d'après l'inégalité précédente et un calcul numérique simple, est inférieur à

$$12\overset{+}{\log}T\left(R, \frac{1}{f}\right)+m\left(R, \frac{f'}{f}\right)+26.$$

Enfin, remplaçant $T\left(R, \frac{1}{f}\right)$ par son égal $T(R, f)-\log|f(0)|$ et simplifiant, il vient l'inégalité

$$(5) \quad 12 \overset{+}{\log} T(R, \varphi) < 12 \overset{+}{\log} T(R, f) + m\left(R, \frac{f'}{f}\right) + 12 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{f(0)} + 35.$$

Minorante de $m(r, \varphi)$. — On peut écrire

$$\varphi = \frac{1}{f^2} - \frac{1}{f}\frac{f'}{f} = x^2 - xy.$$

Une étude élémentaire établit que $|x^2 - xy|$ est toujours minoré par $\frac{1}{2}\left[|x|^2 - |y|^2\right]$, d'où l'inégalité

$$\frac{1}{|f|^2} \leqq 2|\varphi| + \left|\frac{f'}{f}\right|^2.$$

En prenant les $\overset{+}{\log}$ et intégrant le long du cercle $|z| = r$, on en déduit l'inégalité

$$(6) \quad m(r, \varphi) > 2m\left(r, \frac{1}{f}\right) - 2m\left(r, \frac{f'}{f}\right) - 2\log 2.$$

5. Nous prendrons la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna sous la forme provisoire suivante [1] :

$$m(r, \varphi) < N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{\varphi - 1}\right) + m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) + 2m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi - 1}\right) + \log\left|\frac{\varphi(0)[\varphi(0) - 1]}{\varphi'(0)}\right| + 1.$$

Nous combinerons avec l'inégalité suivante, valable pour toute fonction méromorphe F, inégalité un peu améliorée sur la forme initiale due à M. R. Nevanlinna [2]

$$(7) \quad m\left(r, \frac{F'}{F}\right) < 4 \overset{+}{\log} T(\rho, F) + 4 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|F(0)|} + 3 \log \frac{R}{R - r} + 2 \log \frac{R}{r} + \overset{+}{\log} \frac{1}{R} + 16,$$

où R est quelconque supérieur à r.

---

(1) *Voir* G. Valiron, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Mém. des Sc. Math.*, fasc. LXXXIX, p. 9).

(2) *Voir* H. Milloux, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées*... [*Act. Sc. et Ind.*, 1939, n° 3, inégalité (1)].

En appliquant cette inégalité à φ et $\varphi - 1$, et reportant dans l'inégalité qui précède, il vient, après un calcul numérique simple, la forme suivante de la deuxième inégalité de M. R. Nevanlinna

$$(8)\quad m(r, \varphi) < N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{\varphi - 1}\right) + 12 \overset{+}{\log} T(R, \varphi) + 2 \overset{+}{\log} |\varphi(0)|$$
$$- \log|\varphi'(0)| + 9 \log\frac{R}{R - r} + 6 \log\frac{R}{r} + 3 \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 61.$$

La suite des opérations consiste à :

1° Minorer le premier membre de (8) à l'aide de (6).

2° Majorer le premier terme du deuxième membre à l'aide de (2) et de (1); puis le deuxième terme à l'aide de (4); puis le troisième terme à l'aide de (5).

Ces minorations et majorations font intervenir les expressions $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, $m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right)$, $m\left(R, \frac{f'}{f}\right)$. On les élimine en appliquant convenablement dans chaque cas l'inégalité (7). A r et R, on associera ρ, de façon que R soit moyenne arithmétique de r et de ρ. On simplifiera en remplaçant, dans (5), $T(R, f)$ par sa majorante $T(\rho, f)$.

Enfin, l'expression $m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ sera remplacée par son égale

$$T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \log|f(0)|,$$

qui résulte de l'application de la formule de Jensen-Nevanlinna.

6. Il est inutile d'entrer dans le détail des calculs, qui n'offrent ainsi aucune difficulté. Après quelques simplifications immédiates, on obtient le résultat résumé dans le théorème suivant :

Théorème. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe au voisinage de l'origine, voisinage contenant le cercle $|z| = \rho > r$. Entre l'indice caractéristique de la fonction et les indices de densité relatifs aux zéros de f, $f - 1$, $f' - 1$, on a l'inégalité suivante :*

$$(9)\quad T(r, f) < 3N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + S(r)$$

avec

$$(10)\qquad S(r) = 44\,\overset{+}{\log} T(\rho, f) + 33 \log \frac{\rho}{\rho - r} + 22 \log \frac{\rho}{r}$$
$$+ 11\,\overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 3\,\overset{+}{\log} |f(0)| - \log |f'(0)|$$
$$+ 2\,\overset{+}{\log} |\varphi(0)| - \log |\varphi(0) - 1| - \log |\varphi'(0)| + 330.$$

Rappelons que

$$\varphi(z) = \frac{1 - f'}{f^2}.$$

Remarque. — On suppose ici, mais ces restrictions n'ont rien de fondamental dans la méthode, que l'origine n'est pas un zéro des fonctions f, $\frac{1}{f}$, $f - 1$, f', φ, $\varphi - 1$ et φ'.

7. Cas général. — *Aux zéros de f et de $f - 1$, on associe les zéros de $\psi - 1$, avec*

$$\psi = \sum_{0}^{l} \alpha_i f^{i},$$

l est supposé au moins égal à 1.

Les facteurs $\alpha(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine D où l'on étudie la fonction méromorphe $f(z)$. *On suppose que le premier de ces facteurs $\alpha_0(z)$ ne se réduit pas à l'unité :* en effet, les calculs qui vont suivre ne s'appliquent pas au cas où α_0 est identique à 1. Nous montrerons plus tard la raison pour laquelle ce cas conduit nécessairement à un échec.

De plus, pour simplifier les calculs, mais sans que ces nouvelles restrictions soient fondamentales, nous supposerons que dans le domaine D *les fonctions $\alpha_0 - 1$ et α_l ne s'annulent jamais.*

La méthode d'étude est analogue à celle du premier cas; à la fonction ψ nous allons adjoindre la fonction

$$\varphi = \frac{1 - \psi}{f^{l+1}(1 - \alpha_0)}.$$

Après quelques propositions préliminaires, nous appliquerons à cette fonction φ la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna.

8. Indice des zéros de φ. — Ces zéros sont ceux de $\psi - 1$, avec un ordre de multiplicité tout au plus égal, et les pôles multiples de f. Un tel pôle, d'ordre p dans f, devient un zéro d'ordre $l(p-1)$ dans φ, puisque le coefficient α_l ne s'annule pas, d'où l'inégalité

$$\text{(11)} \qquad N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \leqq N\left(r, \frac{1}{\psi - 1}\right) + lN'.$$

N′ conserve la signification indiquée au premier cas, et par conséquent satisfait à l'inégalité (1).

Indice des zéros de $\varphi - 1$. — On compare encore ces zéros à ceux de $(\varphi - 1)\frac{f}{f-1}$. On désigne aussi par N_0 l'indice de densité affecté aux zéros communs à $\varphi - 1$ et à $f - 1$. La méthode est la même que plus haut. Les seules différences à observer ont lieu sur les points de détail suivants :

Majoration de $m\left[r, (\varphi - 1)\frac{f}{f-1}\right]$. — On écrit

$$(\varphi - 1)\frac{f}{f-1} = -1 - \frac{1}{f} - \ldots - \frac{1}{f^{l-1}} + \frac{1}{\alpha_0 - 1}\left[\frac{1}{f^l} + \frac{1}{f^{l-1}}\sum_1^l \alpha_i\left(\frac{f^{(i)}}{f-1} - \frac{f^{(i)}}{f}\right)\right].$$

Et par suite, en désignant par θ la plus grande des quantités 1 et $\frac{1}{|f|^l}$, le module de l'expression précédente est majoré par

$$\theta\left\{l + \frac{1}{|\alpha_0 - 1|}\left[1 + \sum_1^l |\alpha_i|\left(\left|\frac{f^{(i)}}{f}\right| + \left|\frac{f^{(i)}}{f-1}\right|\right)\right]\right\}.$$

Prenons les $\overset{+}{\log}$ et intégrons le long du cercle de centre o et de rayon r. En désignant par $a(l)$ une constante positive, dépendant uniquement de l, la majoration précédente fournit l'inégalité

$$\text{(12)} \quad m\left[r, (\varphi - 1)\frac{f}{f-1}\right] < lm\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_1^l m(r, \alpha_i) + m\left(r, \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) + \sum_1^l m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + \sum_1^l m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f-1}\right) + a(l).$$

Majoration de $N\left[r, (\varphi - 1)\frac{f}{f-1}\right]$. — Les pôles de $(\varphi - 1)\frac{f}{f-1}$ ne peuvent être pris que parmi les pôles de φ, c'est-à-dire les zéros de f; en raison du numérateur du facteur $\frac{f}{f-1}$ ils sont pris avec un ordre de multiplicité tout au plus égal à l fois celui qui correspond à f; en outre, il y a les zéros de $f-1$, pris avec un ordre de multiplicité tout au plus égal; en tenant compte éventuellement des zéros communs à $f-1$ et à $\varphi - 1$, il vient l'inégalité

$$N\left[r, (\varphi - 1)\frac{f}{f-1}\right] \leqq l N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N_0. \tag{12'}$$

Revenons aux zéros de $\varphi - 1$. La méthode précisée dans l'étude du premier cas, jointe aux inégalités (12) et (12'), fournit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{\varphi - 1}\right) < (l-1) N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + l m\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ + m\left(r, \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) + \sum_1^l m(r, \alpha_i) + \sum_1^l m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) \\ + \sum_1^l m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f-1}\right) + a(l) - \log|\varphi(0) - 1|. \end{aligned} \tag{13}$$

9. Terminons ces préliminaires, comme plus haut, par une majoration de $T(R, \varphi)$ et une minoration de $m(r, \varphi)$.

Majoration de $T(R, \varphi) = m(R, \varphi) + N(R, \varphi)$. — On peut écrire

$$\varphi = \frac{1}{f'}\left[1 + \frac{1}{\alpha_0 - 1}\left(1 - \frac{1}{f}\right) - \sum_1^l \alpha_i \frac{f^{(i)}}{f}\right],$$

d'où, en prenant les $\overset{+}{\log}$ et intégrant sur le cercle $|z| = R$,

$$\begin{aligned} m(R, \varphi) < (l+1) m\left(R, \frac{1}{f}\right) + m\left(R, \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) \\ + \sum_1^l m(R, \alpha_i) + \sum_1^l m\left(R, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + a(l). \end{aligned}$$

D'autre part, les pôles de φ sont constitués par les zéros de f, dont l'ordre de multiplicité se trouve multiplié tout au plus par $l+1$, dans le passage de f à φ; de sorte que, avec l'inégalité qui précède, on majore $T(R, \varphi)$. On passe ensuite, comme plus haut, à $12 \overset{+}{\log} T(R, \varphi)$, terme qui entre dans la deuxième inégalité de R. Nevanlinna. On obtient aisément l'inégalité

$$(14)\quad 12 \overset{+}{\log} T(R, \varphi) < 12 \overset{+}{\log} T(R, f) + m\left(R, \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) + \sum_{1}^{l} m(R, \alpha_i) + \sum_{1}^{l} m\left(R, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + 12 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(0)|} + a(l).$$

Minorante de $m(r, \varphi)$. — On peut écrire

$$\varphi = \frac{1}{1-\alpha_0}\left[\frac{1}{f^{l+1}} - \frac{1}{f^l}\sum_{0}^{l} \alpha_i \frac{f^{(i)}}{f}\right] = \frac{1}{1-\alpha_0}[x^{l+1} - x^l y],$$

avec $x = \frac{1}{f}$.

Une étude élémentaire montre que $|x^{l+1} - x^l y|$ est toujours minoré par $\frac{1}{l+1}[|x|^{l+1} - |y|^{l+1}]$. En achevant comme dans le premier cas, on trouve l'inégalité

$$(15)\quad m(r, \varphi) > (l+1) m\left(r, \frac{1}{f}\right) - m(r, 1-\alpha_0) - (l+1)\sum_{0}^{l} m(r, \alpha_i) - (l+1)\sum_{1}^{l} m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) - a(l).$$

On peut simplifier légèrement en remplaçant la somme du deuxième et du troisième terme par

$$-(l+2) m(r, \alpha_0) - (l+1)\sum_{0}^{l} m(r, \alpha_i) - \log 2.$$

10. Il ne reste plus maintenant qu'à appliquer à la fonction φ la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, que nous prendrons sous la forme (8). On utilise ensuite les minorations (15) et majorations (1), (11), (13) et (14). Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs, à peu près identiques à ceux du premier cas. Les expressions simples

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right), \quad m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) \quad \text{et } m\left(R, \frac{f'}{f}\right)$$

sont remplacées par des expressions composites plus compliquées; prenons par exemple l'expression $\sum_1^l m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right)$. Il résulte d'une étude antérieure ([1]) que $m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f}\right)$ est majorée par l'expression

$$a(l)\overset{+}{\log}\mathrm{T}(\rho, f) + a(l)\log\frac{\rho}{\rho - r} + a(l)\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|}$$
$$+ a(l)\log\frac{\rho}{r} + a(l)\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + a(l),$$

où ρ est arbitrairement supérieur à r. Quitte à changer les facteurs positifs $a(l)$, en leur conservant leur signification, on constate sans peine que l'expression précédente majore l'expression étudiée.

Ici aussi, il entre dans les calculs, deux quantités R et ρ arbitrairement supérieures à r. On prendra encore pour R la moyenne arithmétique entre r et ρ.

On obtient finalement le théorème suivant :

Théorème. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine* D *comprenant le cercle $|z| = \rho$. On pose*

$$\psi = \sum_0^l \alpha_i f^{(i)} \qquad (l \geq 1).$$

Les fonctions α_i sont holomorphes dans D; *$\alpha_0 - 1$ et α_l ne s'y annulent jamais. On a alors l'inégalité suivante :*

$$(16)\quad \mathrm{T}(r, f) < (2l+1)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (l+1)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi - 1}\right) + \mathrm{S}(r),$$

avec

$$(17)\quad \mathrm{S}(r) = a(l)\overset{+}{\log}\mathrm{T}(\rho, f) + (l+2)\sum_0^l m(\rho, \alpha_i) + m\left(\rho, \frac{1}{\alpha_0 - 1}\right) + a(l)\log\frac{\rho}{\rho - r}$$
$$+ a(l)\log\frac{\rho}{r} + a(l)\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + a(l) + (2l+1)\overset{+}{\log}|f(0)| - l\log|f'(0)|$$
$$+ 2\overset{+}{\log}|\varphi(0)| - \log|\varphi'(0)| - \log|\varphi(0) - 1|$$

([1]) H. Milloux, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées* (déjà cité), *voir* n° **13**, inégalité (12).

et

$$\varphi = \frac{1-\psi}{f^{l+1}} \frac{1}{1-\alpha_0}.$$

ρ est une quantité arbitraire supérieure à r; $a(l)$ une constante positive, dépendant uniquement de l partout où elle figure. On suppose que l'origine n'est pas un zéro de f, $\frac{1}{f}$, $1-f$, f', $\psi-1$, $\varphi-1$ et φ', mais ces restrictions n'ont rien de fondamental dans les méthodes qui précèdent. Elles ne sont faites que dans un but de simplification d'écriture.

Remarque. — Ce théorème est certainement susceptible d'amélioration, notamment en ce qui concerne les coefficients des indices de densité qui interviennent dans le deuxième membre de l'inégalité (16) : il n'y a en effet aucune raison justifiant une non-identité des coefficients des deux premiers indices. Du reste, on pourrait obtenir une inégalité analogue à (16) en étudiant, au lieu de la fonction $\frac{1-\psi}{f^{l+1}}$, la fonction analogue $\frac{1-\psi}{(1-f)^{l+1}}$; les coefficients en question sont alors échangés, et la demi-somme des limitations de $T(r, f)$ donne une inégalité symétrique par rapport aux indices de densité des zéros de f et de $f-1$. Ce procédé présente l'inconvénient d'augmenter le coefficient du second indice de densité.

11. Montrons que la restriction *fondamentale* que nous avons faite plus haut : α_0 *non identique à* 1, n'a rien d'artificiel, et qu'elle est due, non à la méthode employée, mais à la nature des choses.

Supposons en effet $\alpha_0 = 1$.

En changeant f en $1-f$, on est conduit à substituer aux zéros de $\psi-1$ ceux de ψ (après changement de signe des coefficients α). Les zéros de f et de $f-1$ sont, de leur côté, échangés.

On est donc conduit à étudier le cas où l'on associe les zéros de ψ à ceux de f et de $f-1$. Montrons, sur un cas particulier, qu'on ne peut espérer obtenir dans ce cas une inégalité du genre de celle de M. R. Nevanlinna.

Nous prendrons $\psi \equiv f'$ et

$$f = \frac{e^{\lambda(z)}}{e^{\lambda(z)} - 1},$$

où $\lambda(z)$ est une fonction entière quelconque. La fonction f ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur 1. Quant à l'indice des zéros de sa dérivée f', il est, pour presque toutes les valeurs de $|z| = r$, très faible vis-à-vis de l'indice caractéristique $T(r, f)$, et de l'ordre de grandeur du log de cet indice : l'impossibilité d'une inégalité genre Nevanlinna dans ce cas particulier, est donc manifeste.

12. Dans les études précédentes, nous avons associé les zéros de f, $f - 1$ et $\psi - 1$. Terminons ce Mémoire en montrant que dans certaines conditions, une simple transformation de la forme $F = Af + B$, où A et B sont des constantes, permet de ramener à ce cas particulier le cas général des zéros de $f - a$, $f - b$, et $\psi - c$, où abc sont des constantes *finies*. Posons, en effet,

$$F = \frac{f - a}{b - a},$$

A $\psi = c$ correspond l'équation

$$\sum_{0}^{l} \alpha_i (b - a) F^{(i)} = c - a\alpha_0(z). \tag{18}$$

Pour ramener au cas étudié, on supposera que $c - a\alpha_0(z)$ ne s'annule pas dans le domaine D; mais cette restriction n'a rien de fondamental, car les études précédentes, qui supposent les facteurs α_i holomorphes, pourraient être reprises sur des bases plus larges, avec des coefficients méromorphes.

En tout cas, si le second membre de l'égalité (18) ne s'annule pas, il suffit de diviser les deux membres de (18) par le second membre, pour retomber sur l'étude effectuée. Dans le cas où α_0 est une constante, celle-ci sera obligatoirement différente de $\frac{c}{a}$ et de $\frac{c}{b}$.