JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES GIRAUD

Sur quelques questions relatives aux intégrales convergentes et aux intégrales divergentes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 133-142.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_133_0>

Sur quelques questions relatives aux intégrales convergentes et aux intégrales divergentes;

PAR GEORGES GIRAUD.

Il est bien connu qu'étant donné une fonction $\varphi(x)$ positive, indéfiniment croissante avec x, il existe toujours une paire de séries à termes positifs, dont l'une Σu_n est convergente et l'autre Σv_n divergente, et qui remplissent la condition $v_n \leqq \varphi(n) u_n$ quel que soit n (¹).

On peut aller plus loin et chercher des fonctions positives $f(x)$ et $g(x) \leqq \varphi(x) f(x)$, telles que l'intégrale $\int_1^\infty f(t)\,dt$ existe et que $\int_1^\infty g(t)\,dt$ n'existe pas, et telles que certaines conditions supplémentaires soient remplies : on peut exiger que f et g soient décroissants, et préciser le sens de variation de certaines fonctions qui en dépendent; on peut même faire en sorte que les dérivées jusqu'à un ordre donné p existent et jouissent de certaines propriétés. Les raisonnements qui suivent aboutissent à montrer la compatibilité d'un certain ensemble de conditions imposées à f et à g.

Une première proposition indiquera certaines conditions qui peuvent être imposées à f et à g; puis des conditions supplémentaires seront successivement introduites. Vraisemblablement quelques-uns au moins de ces résultats ne sont pas nouveaux, mais il semble que les démonstrations qui vont en être données le soient. Ces démonstrations

(¹) ÉMILE BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*.

sont fondées sur les propriétés de certaines moyennes généralisées

$$\mathfrak{M}(f, x, q) = \frac{1}{\Gamma(q)\omega(x)} \int_0^x f(t) \log^{q-1} \frac{\omega(x)}{\omega(t)}\, d\omega(t) \qquad (q > 0,\ x > 0),$$

où $\omega(x)$ est une fonction croissante donnée, nulle pour $x = 0$, et f est la fonction dont on prend la moyenne; q est un paramètre positif; l'intégrale est prise au sens de Stieltjes. On a identiquement

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{M}(f, x, q), x, r] = \mathfrak{M}(f, x, q + r).$$

On emploie beaucoup ici le cas particulier où ω est une puissance de la variable; ce cas a été étudié récemment par M. F. W. Perkins [1] et a été utilisé, ainsi qu'un autre cas particulier, dans l'étude des équations aux dérivées partielles du type elliptique [2].

Dans ces pages écrites en hommage à MM. Émile Borel et Élie Cartan, les propriétés utiles des fonctions moyennes sont démontrées aux endroits où elles sont appliquées.

1. Plus grande fonction convexe inférieure ou égale a une fonction donnée. — On dit qu'une fonction $F(x)$ est convexe dans un intervalle (a, b) si les inégalités $a < x_1 < x < x_2 < b$ entraînent

$$F(x) \leqq \frac{(x - x_1)F(x_2) + (x_2 - x)F(x_1)}{x_2 - x_1};$$

rien n'est supposé pour F aux bornes de l'intervalle; a ou b peuvent être infinis.

Soit $\Phi(x)$ une fonction donnée, positive ou nulle, de la variable positive x; on suppose que $\Phi(x)$ est infiniment petit quand x est infiniment grand; enfin on suppose que $\Phi(x)$ est continu ou tout au moins semi-continu inférieurement. Parmi toutes les fonctions $F(x)$ convexes et $\leqq \Phi(x)$, on démontre qu'il y en a une $\Psi(x)$ qui est

---

(1) F. W. Perkins, *Comptes rendus du Congrès des Math.*, Oslo, 1936, t. **2**, p. 64-65; *Am. J. math.*, t. **61**, 1939, p. 217-230.

(2) *C. R. Acad. Sci.*, t. **202**, 1936, p. 380-382; t. **206**, 1938, p. 1157-1160; t. **207**, 1938, p. 956-958 et 1351-1354. *Journ. math.*, 9e série, t. **18**, 1939, p. 111-143, spécialement le dernier paragraphe.

partout au moins égale à toute autre : c'est *la plus grande fonction convexe inférieure ou égale à* Φ. Cette fonction $\Psi(x)$ est positive ou nulle, décroissante au sens large (c'est-à-dire au sens qui n'exclut pas la constance; c'est toujours ainsi que la croissance et la décroissance seront entendues ici), et infiniment petite quand x est infiniment grand; quand x tend vers zéro, elle tend vers la plus petite limite de $\Phi(x)$ si celle-ci existe, et vers l'infini dans le cas contraire. L'ensemble E des points où l'on a $\Psi = \Phi$ est identique à l'ensemble des points où au moins une des fonctions $\frac{\Phi(x) - t}{x}$ atteint sa borne inférieure, le paramètre t étant tel que cette borne existe et soit atteinte. Cet ensemble E est fermé, et il n'est borné que si l'ensemble des zéros de Φ est non vide et borné. Dans tout intervalle contigu à E, Ψ varie linéairement.

Si Φ est dérivable en tout point d'un intervalle fermé, Ψ est continûment dérivable dans cet intervalle.

Il est inutile de donner ici les démonstrations de ce qui vient d'être énoncé.

2. Problème. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction donnée, positive, croissante et non bornée d'une variable* $x > 0$. *Construire deux fonctions positives* $f(x)$ *et* $g(x) \leqq \varphi(x) f(x)$, *jouissant des propriétés suivantes :*

$$\int_1^\infty f(t)\,dt \text{ existe; } \int_1^\infty g(t)\,dt \text{ n'existe pas; } f \text{ et } \frac{f}{g} \text{ sont décroissants.}$$

Définissons d'abord une fonction $\varphi_1 \leqq \varphi$ qui jouisse des propriétés supposées pour φ et soit partout dérivable. Si φ est partout dérivable, on peut prendre $\varphi_1 = \varphi$; en tout cas on peut prendre

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)x^\lambda}\int_0^x \varphi(t)\,t^{\lambda-1}\log^{q-1}\frac{x}{t}\,dt\\ &= \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)}\int_0^1 \varphi(tx)\,t^{\lambda-1}\log^{q-1}\frac{1}{t}\,dt \qquad (\lambda > 0,\ q > 1),\end{aligned}$$

où λ et q sont deux constantes. Comme on a

$$\lambda^q \int_0^1 t^{\lambda-1}\log^{q-1}\frac{1}{t}\,dt = \Gamma(q),$$

$\varphi_1(x)$ est une moyenne de $\varphi(t)$ dans l'intervalle $(0, x)$; on a donc $\varphi_1(x) \leqq \varphi(x)$. On voit aisément sur la seconde expression de $\varphi_1(x)$ que cette fonction croît indéfiniment avec x. D'après la première expression, la dérivée existe quel que soit $x > 0$, et l'on a

$$\varphi_1'(x) = \frac{\lambda^q}{\Gamma(q-1)x^{\lambda+1}} \int_0^x \varphi(t) t^{\lambda-1} \log^{q-2}\frac{x}{t}\, dt - \frac{\lambda}{x}\varphi_1(x).$$

Soit maintenant $\psi(x)$ la plus grande fonction convexe $\leqq \frac{1}{\sqrt{\varphi_1(x)}}$ dans le champ $x > 0$. Cette fonction est continûment dérivable et sa dérivée est négative et croissante. Posons

$$f(x) = -\psi'(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x)\varphi_1(x),$$

de sorte que f et $\frac{f}{g}$ sont positifs et décroissants. On a évidemment

$$\int_1^x f(t)\, dt = \psi(1) - \psi(x), \qquad \int_1^\infty f(t)\, dt = \psi(1).$$

D'autre part on a, si y est $> x$,

$$\int_x^y g(t)\, dt \geqq \varphi_1(x) \int_x^y f(t)\, dt = \varphi_1(x)[\psi(x) - \psi(y)].$$

Si x appartient à l'ensemble E du paragraphe **1**, on a

$$\varphi_1(x)\psi(x) = \sqrt{\varphi_1(x)},$$

résultat aussi grand qu'on veut si x est pris assez grand, ce qui est possible, car E n'est pas borné. Ensuite, x restant fixe, $\varphi_1(x)\psi(y)$ est aussi petit qu'on veut dès que y est assez grand. Donc $\int_x^y g(t)\, dt$ n'est pas infiniment petit quand x et y sont infiniment grands, c'est-à-dire que l'intégrale étendue au champ infini diverge.

Le problème est résolu. Les conditions imposées sont donc compatibles.

3. Problème. — *On donne une constante ν positive et < 1, et la même fonction φ qu'au paragraphe* **2**. *Outre les conditions imposées à f et à g dans le paragraphe* **2**, *on veut que $f(x)x^\nu$ soit décroissant.*

Nous formons φ_1 comme ci-dessus (§ **2**), et nous nommons $\psi(x)$ la plus grande fonction convexe $\leqq \left[\varphi_1\left(x^{\frac{1}{1-\nu}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$. Nous posons alors

$$f(x) = -x^{-\nu}\psi'(x^{1-\nu}) \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x)\varphi_1(x).$$

On voit que $f(x)x^\nu$ est positif et décroissant. Les autres conditions sont aussi remplies, car on a

$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{\psi(1)-\psi(x^{1-\nu})}{1-\nu}, \qquad \int_1^\infty f(t)\,dt = \frac{\psi(1)}{1-\nu},$$

$$\int_x^y g(t)\,dt \geqq \varphi_1(x)\,\frac{\psi(x^{1-\nu})-\psi(y^{1-\nu})}{1-\nu} \qquad (y > x),$$

et le raisonnement s'achève comme dans le paragraphe **2**.

4. Problème. — *On donne la même fonction φ et l'on impose à f et à g les mêmes conditions qu'au paragraphe* **2**. *En outre on exige que g soit décroissant.*

Nous formons d'abord une fonction $\varphi_2(x)$ qui soit $\leqq \varphi(x)$ pour $x \geqq 1$ et constante pour $x \leqq 1$, et qui remplisse les conditions supposées pour φ, et qui soit telle que $\varphi_2(x)x^{-\nu}$ soit décroissant, ν étant une constante positive et < 1, arbitrairement choisie. Si la plus petite limite de $x^{-\nu}\varphi(x)$ quand x croît indéfiniment n'est pas nulle, il suffit de prendre $\varphi_2(x) = Ax^\nu$ pour $x \geqq 1$, en choisissant convenablement la constante A. Si cette plus petite limite est nulle, nous pouvons poser

$$\varphi_2(x) = x^\nu \times \underset{1<t<x}{\text{borne inférieure}}\,[t^{-\nu}\varphi(t)] \qquad \text{pour} \quad x \geqq 1;$$

$x^{-\nu}\varphi_2(x)$ est évidemment décroissant et continu (même aux points de discontinuité de φ s'il y en a), et φ_2 est $\leqq \varphi$ pour $x \geqq 1$. Il s'agit de montrer que cette fonction φ_2 est croissante. Or si l'on a $\varphi_2(x) < \varphi(x)$ en un point x, on a la même inégalité dans un intervalle $a < x < b$ ou $a \leqq x < b$, tel qu'on ait $\varphi_2(b) = \varphi(b)$ et $\varphi_2(a) = \varphi(a-)$ [cette dernière notation désigne la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers a par valeurs $< a$], et $x^{-\nu}\varphi_2(x)$ est constant dans cet intervalle; en effet, φ étant croissant, $t^{-\nu}\varphi(t)$ tend vers $x^{-\nu}\varphi(x+) > x^{-\nu}\varphi_2(x)$ quand t

tend vers x par valeurs $> x$; si donc $y - x$ est positif et assez petit, $t^{-\nu}\varphi(t)$ est $> x^{-\nu}\varphi_2(x)$ pour $x < t < y$, de sorte qu'on a

$$y^{-\nu}\varphi_2(y) = x^{-\nu}\varphi_2(x) < y^{-\nu}\varphi(y);$$

l'existence de l'intervalle (a, b) est donc établie. Soient maintenant x et y deux nombres donnés, tels qu'on ait $1 \leqq x < y$; si x et y font partie d'un même intervalle où $t^{-\nu}\varphi_2(t)$ soit constant, on a évidemment $\varphi_2(x) < \varphi_2(y)$; dans le cas opposé, il existe des nombres b_1 et a_2 tels qu'on ait $x \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq y$ et, même pour $b_1 = a_2$,

$$\varphi_2(x) \leqq \varphi_2(b_1) = \varphi(b_1) \leqq \varphi(a_2 -) = \varphi_2(a_2) \leqq \varphi_2(y),$$

d'où encore $\varphi_2(x) \leqq \varphi_2(y)$; donc φ_2 est bien croissant.

Ayant formé φ_2, nous remplaçons φ par φ_2 dans les calculs du paragraphe **3**, de sorte qu'on a

$$x^{-\nu}\varphi_1(x) = \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)}\int_0^1 \frac{\varphi_2(tx)}{(tx)^{\nu}}\, t^{\lambda+\nu-1}\log^{q-1}\frac{1}{t}\,dt,$$

et par suite le premier membre est décroissant. En remarquant qu'on a $g(x) = [f(x)x^{\nu}][x^{-\nu}\varphi_1(x)]$, on voit que g est le produit de deux facteurs positifs décroissants; il est donc décroissant. Le problème est résolu.

5. Problème. — *On donne un nombre positif $h < 1$ et la même fonction φ que dans le paragraphe* **2**. *Outre les conditions imposées à f et g dans le paragraphe* **2**, *on exige que $g(x)x^h$ soit décroissant.*

Soit ν une constante dans l'intervalle $h < \nu < 1$. Formons par la méthode du paragraphe **4** une fonction positive croissante $\varphi_2(x)$ qui soit $\leqq \varphi(x)$ pour $x \geqq 1$ et constante pour $x \leqq 1$ et telle que $x^{h-\nu}\varphi_2(x)$ soit décroissant, et servons-nous-en comme de celle du paragraphe **4**. Les résultats antérieurs subsistent, car $x^{-\nu}\varphi_2(x)$ est décroissant. De plus on a

$$g(x)x^h = [f(x)x^{\nu}][\varphi_1(x)x^{h-\nu}],$$

et les deux facteurs sont positifs et décroissants. Le problème est donc résolu.

6. Problème. — *On donne deux nombres h et k tels qu'on ait $0 < h < 1 < k$, et la même fonction φ que dans le paragraphe* **2**. *Outre les conditions imposées à f et à g dans le paragraphe* **2**, *on exige que $g(x)x^h$ soit décroissant et que $f(x)x^k$ soit croissant.*

Pour $x \geqq 1$, soit $f_1(x)$ la fonction qui était nommée $f(x)$ au paragraphe **5**; pour $0 \leqq x \leqq 1$, nous définissons que $f_1(x)$ est constant. Posons, avec $q > 1$,

$$f(x) = \frac{k^q x^{-k}}{\Gamma(q)} \int_0^x f_1(t)\, t^{k-1} \log^{q-1} \frac{x}{t}\, dt,$$

d'où $f(x) \geqq f_1(x)$, car f_1 est décroissant. On a [1]

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(u)\, du &= \frac{k^q}{\Gamma(q)} \int_0^x u^{-k} \int_0^u f_1(t) t^{k-1} \log^{q-1} \frac{u}{t}\, dt\, du \\
&= \frac{k^q}{\Gamma(q)} \int_0^x f_1(t)\, t^{k-1} \int_t^x u^{-k} \log^{q-1} \frac{u}{t}\, du\, dt \\
&< \frac{k^q}{\Gamma(q)} \int_0^x f_1(t)\, t^{k-1} \int_t^\infty u^{-k} \log^{q-1} \frac{u}{t}\, du\, dt = \left(\frac{k}{k-1}\right)^q \int_0^x f_1(t) dt;
\end{aligned}$$

donc l'intégrale étendue au champ infini converge. En prenant $g = f\varphi_1$, où φ_1 est la fonction ainsi nommée au paragraphe **5**, g est $\geqq f_1 \varphi_1$; donc l'intégrale de g dans le champ infini diverge. En écrivant

$$f(x) x^\nu = \frac{k^q}{\Gamma(q)} \int_0^1 f_1(tx)\, (tx)^\nu\, t^{k-\nu-1} \log^{q-1} \frac{1}{t}\, dt,$$

on voit que le premier membre est décroissant; donc $g(x)x^h$ décroît, comme au paragraphe **5**. Comme q est > 1, il est évident que le produit

$$f(x) x^k = \frac{k^q}{\Gamma(q)} \int_0^x f_1(t)\, t^{k-1} \log^{q-1} \frac{x}{t}\, dt$$

est croissant. Le problème est résolu.

---

[1] L'élément de champ étant toujours mis après la fonction intégrée, l'écriture indique l'ordre des intégrations.

7. **Problème.** — *Aux données du paragraphe* 6, *joignons un entier positif* p. *Outre les conditions imposées à* f *et à* g *dans le paragraphe* **6**, *on veut que ces fonctions soient dérivables jusqu'à l'ordre* p, *et que, pour* $n \leqq p$, *les* $\frac{g^{(n)}}{f^{(n)}}$ *et les* $(-x)^n f^{(n)}(x)x^k$ *soient positifs et croissants, et les* $(-x)^n g^{(n)}(x)x^h$, *décroissants.*

Nommons $f^\star$ et $g^\star$ les fonctions respectivement nommées f et g dans le paragraphe **6**, puis posons

$$f_p(x) = f^\star(x)x^{-p} \qquad \text{et} \qquad g_p(x) = g^\star(x)x^{-p}.$$

Définissons successivement des fonctions f_n et g_n ($n = p-1, p-2, \ldots$) en posant

$$f_n(x) = \int_x^\infty f_{n+1}(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \int_x^\infty g_{n+1}(t)\,dt,$$

tant que les intégrations sont possibles; cela équivaut à

$$f_n(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{p-n-1}}{(p-n-1)!} f_p(t)\,dt, \qquad g_n(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{p-n-1}}{(p-n-1)!} g_p(t)\,dt.$$

Nous allons prouver que f_0 et g_0 existent, et qu'en posant

$$f(x) = f_0(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = g_0(x)\frac{\Gamma(k)\Gamma(p+h)}{\Gamma(h)\Gamma(p+k)},$$

ces fonctions f et g remplissent les conditions du problème.

Faisons les hypothèses suivantes, satisfaites pour $n = p$: pour un entier $n > 0$, f_n et g_n existent et sont positifs, $\frac{g_n}{f_n}$ et $x^{n+k}f_n(x)$ sont croissants, et $x^{n+h}g_n(x)$, décroissant. On va prouver que les mêmes choses ont lieu quand on remplace n par $n-1$. En effet, d'après l'hypothèse, l'inégalité $t > x$ entraîne

$$f_n(t) \leqq \frac{f_n(x)x^{n+h}}{t^{n+h}} \qquad \text{et} \qquad g_n(t) \leqq \frac{g_n(x)x^{n+h}}{t^{n+h}},$$

d'où l'existence de f_{n-1} et de g_{n-1}. En outre on a

$$g_{n-1}(x)x^{n+h-1} = \int_1^\infty \frac{g_n(tx)(tx)^{n+h}}{t^{n+h}}\,dt,$$

et par suite le premier membre est décroissant. On prouve de même que $f_{n-1}(x)x^{n+k-1}$ est croissant. On a ensuite

$$g_{n-1}(x) \geqq \frac{g_n(x)}{f_n(x)} \int_x^\infty f_n(t)\,dt = \frac{g_n(x)}{f_n(x)} f_{n-1}(x);$$

par suite $\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}}$, dont la dérivée a le signe de $g_{n-1}f_n - f_{n-1}g_n$, est croissant, et les assertions avancées au début de l'alinéa sont prouvées.

Donc f et g existent et l'on a

$$f_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(h)\Gamma(p+k)}{\Gamma(k)\Gamma(p+h)} g^{(n)}(x);$$

les propriétés de croissance et de décroissance qui ont été énoncées en résultent.

De ce que certaines fonctions sont croissantes, comme il vient d'être prouvé, nous déduisons les inégalités

$$n+h-1 \leqq -x\frac{g^{(n)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} \leqq -x\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)} \leqq n+k-1 \qquad (n=1, \ldots, p),$$

qui entraînent, eu égard aux valeurs de $f^{(p)}$ et de $g^{(p)}$,

$$f_0(x) \leqq \frac{\Gamma(h)}{\Gamma(p+h)} f^\star(x) \qquad \text{et} \qquad g_0(x) \geqq \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} g^\star(x),$$

d'où, dans le champ infini, la convergence de l'intégrale de f et la divergence de l'intégrale de g. Comme on a aussi

$$g_0(x) \leqq \frac{\Gamma(h)}{\Gamma(p+h)} g^\star(x) \qquad \text{et} \qquad f_0(x) \geqq \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} f^\star(x),$$

nous en déduisons

$$\frac{g}{f} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(p+h)}{\Gamma(h)\Gamma(p+k)} \frac{g_0}{f_0} \leqq \frac{g^\star}{f^\star} \leqq \varphi,$$

et par suite le problème est résolu.

8. Généralisation. — On peut reprendre tous les calculs après avoir changé de variable en posant $y = \omega(x)$, où ω est une fonction donnée, positive et indéfiniment croissante, dont les dérivées jusqu'à l'ordre p existent et sont continues, la dérivée première étant décroissante.

En revenant à la variable x, on obtient des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ qui remplissent toutes les conditions du paragraphe **2** et sont continûment dérivables jusqu'à l'ordre p, et sont en outre telles que $\frac{f\omega^k}{\omega'}$ et $\frac{\omega'}{g\omega^h}$ soient croissants $(0 < h < 1 < k)$. Si ω est lentement croissant, la convergence et la divergence des intégrales obtenues sont lentes. On peut prendre notamment $\omega(x) = \log x$, ou même $\omega(x) = \log_n x$, en posant $\log_1 x = \log x$ et $\log_n x = \log_{n-1} \log x$.