JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES HAAG

Méthode de calcul des oscillations mécaniques ou électriques. Application aux filtres

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 107-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_107_0>

Méthode de calcul des oscillations mécaniques ou électriques. Application aux filtres;

PAR J. HAAG.

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon,
Directeur de l'Institut de Chronométrie.

I. — Théorie générale.

1. REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION SINUSOÏDALE PAR UNE VARIABLE IMAGINAIRE ([1]). — La fonction $x = \mathrm{R}e^{-\beta t}\cos(\alpha t + \varphi)$ est la *partie réelle* de la variable imaginaire $z = \mathrm{R}e^{j(\omega t+\varphi)}$, où l'on a posé $\omega = \alpha + j\beta$, $j = \sqrt{-1}$. La dérivée $\frac{dx}{dt}$ est la partie réelle de $j\omega z$.

Nous conviendrons, dans tout ce qui va suivre, de remplacer toute fonction telle que x par la variable imaginaire correspondante, qui admet pour *module et argument l'amplitude et la phase* de ladite fonction. Nous retiendrons que la dérivation ou l'intégration par rapport à t équivalent respectivement à la multiplication par $j\omega$ ou par $-\frac{j}{\omega}$.

Si deux variables imaginaires sont identiques, il en est de même de leurs parties réelles et réciproquement. Nous appellerons *égalité symbolique* l'égalité entre variables imaginaires qui correspond à une égalité entre fonctions sinusoïdales réelles.

2. IMPÉDANCE QUADRATIQUE. — Soit un système (S), dépendant de n paramètres q_i. Nous ne considérerons que les mouvements pour

([1]) Cette représentation est bien connue des électriciens.

lesquels les q_i sont des fonctions sinusoïdales du temps, et nous appellerons v_i la variable imaginaire correspondant à la vitesse $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$. Nous ferons en outre les hypothèses suivantes sur le système (S) :

1° Sa *force vive* $2T$ est une forme quadratique à coefficients constants des dérivées q'_i.

2° Il est soumis, en permanence, à des *forces élastiques* admettant le *potentiel* V, lequel est une forme quadratique à coefficients constants des variables q_i.

3° Il est soumis, en permanence, à des *résistances visqueuses* dérivant du *potentiel de vitesses* S (1), lequel est une forme quadratique à coefficients constants des variables q'_i.

Le travail virtuel élémentaire de ces forces permanentes est

$$-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial S}{\partial q'_i}\right)\delta q_i.$$

Cela posé, nous appellerons *impédance quadratique* du système (S) la forme quadratique

$$Z = 2S + 2j\left(\omega T - \frac{V}{\omega}\right), \tag{1}$$

dans laquelle nous convenons de remplacer les variables q_i et q'_i par v_i. Nous l'écrirons, avec la *notation du calcul tensoriel*,

$$Z = z^{ik} v_i v_k. \tag{2}$$

Remarque. — Si l'on réunit plusieurs systèmes (S_i), le système (S) obtenu a évidemment pour impédance quadratique la somme des impédances quadratiques des (S_i).

3. Oscillations propres du système. — Admettons que le système (S) prenne, sous l'action des forces précédentes, un mouvement pour lequel les q_i sont des fonctions sinusoïdales. L'équation de Lagrange

(1) La *perte de puissance* due à ces forces est $2S$.

relative à la variable q_i s'écrit symboliquement

$$\frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0.$$

Ces équations ne sont compatibles que si le discriminant $D(\omega)$ de Z est nul. Ce discriminant admet $2n$ racines en ω, à chacune desquelles correspond une oscillation propre du système.

Si la forme quadratique S est définie positive, on démontre facilement que ces racines se partagent en n paires de la forme $\pm\alpha + j\beta$, avec $\beta > 0$. On en conclut que *les mouvements propres sont constitués par n vibrations amorties* arbitrairement déphasées.

Si les résistances visqueuses n'existent pas, tous les β sont nuls; les mouvements propres sont des vibrations non amorties.

4. Mouvement entretenu par des forces sinusoïdales. — Appliquons à notre système des *forces sinusoïdales* de pulsation ω. Soit $f^i v_i$ la *puissance symbolique* de ce système de forces. Nous entendons par là que, si l'on remplace les f^i et v_i par leurs parties réelles, l'expression ci-dessus représente effectivement la puissance instantanée du système. Autrement dit, f^i est la variable imaginaire qui correspond au coefficient de δq_i dans le travail virtuel des forces considérées.

Cela posé, les équations de Lagrange s'écrivent symboliquement

$$f^i = \frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial v_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Si $D(\omega) \neq 0$, ce système admet *une solution et une seule, constituée par les variables covariantes correspondant aux variables contrevariantes f^i*. Entre ces deux groupes de variables, on a les relations

$$f^i = \zeta^{ik} v_k, \qquad v_i = f_i = \zeta_{ik} f^k. \tag{4}$$

5. Résonance. — Soit $\omega_0 = \alpha + j\beta$ une racine *simple* de $D(\omega)$. On peut écrire

$$\zeta_{ik} = \frac{R_{ik}}{\omega - \omega_0},$$

R_{ik} désignant une fraction rationnelle en ω, qui reste finie et non nulle pour $\omega = \omega_0$. Pour $\omega = \alpha$, la seconde formule (4) nous donne

$$v_i = \frac{j}{\beta}(R_{ik} f^k).$$

D'autre part, *si les résistances visqueuses sont très petites*, β est très petit, le module de v_i est très grand; donc, l'*amplitude du mouvement entretenu est très grande*. C'est le phénomène bien connu de la *résonance*.

6. Introduction de liaisons supplémentaires. — Supposons qu'on impose au système p liaisons *sans frottement*

$$(5)\qquad \alpha_i^k v_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p;$$

les coefficients α_i^k étant constants. En appliquant la méthode des *mutiplicateurs de Lagrange*, on trouve, par un calcul facile,

$$(6)\qquad v_i = f_i - z_{ik} F(\alpha^k, \alpha^m) f_m.$$

Dans cette formule, $F(\alpha^k, \alpha^m)$ représente la forme polaire des deux groupes de p variables α_j^k, α_h^m relativement à la forme quadratique auxiliaire $F = c^{jh} x_j x_h$, dont les coefficients covariants c_{jh} sont donnés par la formule

$$c_{jh} = z_{ik} \alpha_j^i \alpha_h^k, \qquad j, h = 1, 2, \ldots, p.$$

Dans le cas particulier où il y a *une seule équation de liaison*

$$\alpha^k v_k = 0,$$

la formule (6) se réduit à la suivante,

$$(7)\qquad v_i = f_i - \frac{Z(\alpha, f)}{Z(\alpha)} \alpha_i,$$

où $Z(\alpha, f)$ représente la forme polaire des deux groupes de variables α^k et f^j et où les α_i sont les variables covariantes correspondant aux variables contrevariantes α^i.

7. Systèmes a liaisons complètes. — C'est un système à un seul paramètre. Son impédance quadratique est de la forme $Z = z v^2$, en convenant que v désigne la variable covariante. Le mouvement entretenu par la force f est donné par

$$f = zv, \qquad v = \frac{1}{z} f.$$

Le nombre imaginaire z est appelé *impédance du système;* $\frac{1}{z}$ est son *admittance.*

Par abréviation, nous dirons que tout système à liaisons complètes est *une impédance;* par exemple, l'impédance (z) n'est autre que le système ci-dessus considéré.

8. Impédances en série. — Étant données n impédances (z_i), relions-les de telle manière que toutes les vitesses v_i soient égales. Nous obtenons une nouvelle impédance (z). En vertu de la remarque du n° **2**, on a

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n.$$

Par analogie avec la terminologie électrique, nous dirons que les impédances (z_i) sont *en série* et, comme en électricité, nous voyons que *plusieurs impédances en série constituent une impédance unique égale à la somme des impédances partielles.*

9. Impédances en parallèle. — Relions les impédances (z_i) à un système (S) à liaisons complètes et d'*impédance nulle*, de telle manière que *la vitesse v de* (S) *soit la somme algébrique des vitesses v_i*, lesquelles restent indépendantes. Appliquons à (S) une force sinusoïdale, dont la puissance symbolique soit fv. Si l'on considère le système à n paramètres constitué par l'ensemble de (S) et des (z_i), on a, avec les notations du n° **4**, $f^i = f$.

D'où $v_i = \frac{f}{z_i}$ et, par conséquent, $v = \frac{f}{z}$, en posant

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}. \tag{8}$$

Autrement dit, *la vitesse v du système* (S) *est la même que si ce système était unique et avait pour admittance la somme des admittances des* (z_i).

Par analogie avec la terminologie électrique, nous dirons que les impédances (z_i) sont *en parallèle.*

10. GÉNÉRALISATION. — Reprenons le système du n° **6** et appliquons-lui *une seule force sinusoïdale*, dont la puissance symbolique soit fv, avec $v = m^i v_i$, les m^i étant des coefficients constants; de sorte que $f^i = fm^i$. En appliquant la formule (6), on trouve

$$v = [Z(m) - F(\beta)]f, \tag{9}$$

avec

$$\beta_j = \alpha_j^i m_i, \qquad F(\beta) = c^{jh}\beta_j\beta_h. \tag{10}$$

Dans le cas du n° **9**, les m^i sont égaux à *un* et les β_j sont nuls. Moyennant quoi, la formule (9) redonne (8).

11. INTERPRÉTATION ÉLECTRIQUE. — La théorie qui vient d'être esquissée peut se transposer dans le domaine de l'électricité.

Le système (S) devient un *réseau* de conducteurs, dont les courants sont fonctions linéaires des courants coordonnés v_i. Les formes quadratiques T, V et 2S deviennent respectivement l'*énergie électromagnétique, l'énergie potentielle électrostatique et la perte de puissance par effet Joule*. On peut les calculer quand on connaît les coefficients d'induction, les capacités et les résistances ohmiques des différents conducteurs constituant le réseau.

Quant aux f^i, ce sont des forces électromotrices définies par la condition que $f^i v_i$ représente la puissanoe symbolique des générateurs introduits dans le réseau.

En appliquant les formules précédentes, on retrouve aisément les lois fondamentales des courants électriques, et l'on justifie *a posteriori* la validité de la méthode dans ce domaine.

II. — Applications diverses.

12. OSCILLATEUR ROTATIF RÉSONANT [1]. — Imaginons une boîte possédant un *axe* extérieur commandé par un certain mécanisme placé à

---

[1] Il correspond au *circuit résonant* des électriciens, constitué par une résistance, une self et une capacité en série.

l'intérieur de la boîte et sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes :

La force vive de tout le mécanisme (y compris l'axe) est $I v^2$, I étant constant et v désignant la vitesse angulaire de l'axe. Des ressorts, placés dans la boîte, agissent de telle manière que leur énergie potentielle de déformation soit $-\frac{k}{2}\theta^2$, k désignant une constante et θ l'angle dont a tourné l'axe à partir du *point mort*. Enfin, des résistances visqueuses donnent la perte de puissance $R v^2$, R désignant encore une constante.

Dans ces conditions, l'*impédance de l'oscillateur* est

$$z = R + j\left(I\omega - \frac{k}{\omega}\right). \tag{11}$$

Le mouvement entretenu par le couple sinusoïdal f appliqué à l'axe a pour vitesse $\frac{f}{z}$; de sorte que la *résonance* est obtenue pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$, auquel cas $v = \frac{f}{R}$.

Le modèle le plus simple d'un tel oscillateur est fourni par un corps solide tournant autour d'un axe et soumis à l'action d'un spiral et d'un couple visqueux.

13. Réalisation de l'accouplement d'oscillateurs rotatifs en série ou en parallèle. — Soient deux oscillateurs (S_1) et (S_2) analogues au précédent. Pour les accoupler *en série*, on solidarise tout simplement leurs axes.

Pour les accoupler *en parallèle*, on relie leurs axes aux planétaires d'un différentiel, dont le châssis a une impédance nulle [1]. Si l'on appelle $\frac{v}{2}$ la vitesse angulaire du châssis, son admittance est alors égale à la somme des admittances des oscillateurs (S_1) et (S_2).

---

[1] Autrement dit, il doit avoir un moment d'inertie négligeable et ne doit être soumis à aucune force extérieure.

Signalons en passant que ce différentiel peut être réalisé, très simplement et sans engrenages, au moyen d'un losange articulé.

14. Oscillateur bouchon (1). — Supposons que les deux oscillateurs précédents n'aient pas de résistance visqueuse. De plus, (S_1) n'a pas de ressorts et (S_2) n'a pas de masse. Ces deux oscillateurs étant accouplés en parallèle comme il vient d'être expliqué, l'admittance du système est

$$-\frac{j}{I_1\omega}+\frac{j\omega}{k_2}=j\left(\frac{k_2}{\omega}-\frac{1}{I_1\omega}\right).$$

Elle ne peut devenir infinie pour aucune valeur finie et non nulle de ω; *la résonance est impossible*. Par contre, l'oscillateur ne peut vibrer à la pulsation $\omega=\sqrt{\frac{k_2}{I_1}}$.

15. On peut encore interpréter mécaniquement d'autres circuits électriques, tels que le pont de Wheatstone, le fréquencemètre, etc. On peut aussi démontrer certains théorèmes généraux d'électricité, tels que les théorèmes de Vaschy, de Maxwell, de Kennelly et Rosen, etc.

Nous nous contenterons, dans ce qui va suivre, d'appliquer notre méthode à la théorie des *filtres*.

III. — Théorie des filtres (2).

16. Admittance d'une cellule. — Une *cellule* (Γ) est constituée par une boîte possédant un *axe d'entrée* (E) et un *axe de sortie* (S) reliés par un mécanisme à n degrés de liberté et *sans résistance visqueuse*. Soit $Z(v)$ son impédance quadratique et soient $E=\alpha^i v_i$ et $S=\beta^i v_i$ les vitesses des axes (E) et (S), exprimées en fonction des vitesses coordonnées v_i.

Appliquons le couple sinusoïdal f à l'axe d'entrée. Nous obtenons les vitesses d'entrée et de sortie $E=fA$ et $S=fB$. De même,

(1) Analogue au *circuit bouchon*, constitué par une self et une capacité en parallèle.

(2) Nous nous occuperons seulement des *filtres mécaniques rotatifs*. La transposition dans le domaine des filtres mécaniques linéaires ou des filtres électriques est facile.

si l'on applique le couple f à l'axe de sortie, on a $E = fB$ et $S = fC$. Les quantités A, B, C seront appelées *les admittances de la cellule;* elles déterminent entièrement les conditions d'emploi de cette dernière.

Si les coordonnées v_i ne sont soumises à aucune liaison, on a, avec les notations du n° **4**, $f^i = f\alpha^i$ dans le premier cas, $f^i = f\beta^i$ dans le second cas. On en déduit immédiatement les formules suivantes :

$$A = Z(\alpha), \qquad C = Z(\beta), \qquad B = Z(\alpha, \beta). \tag{12}$$

S'il y a une équation de liaison

$$p_i v_i = 0,$$

les admittances sont obtenues au moyen des formules (9) :

$$\left\{\begin{aligned} &A = Z(\alpha) - \frac{Z^2(\alpha, p)}{Z(p)}, \qquad C = Z(\beta) - \frac{Z^2(\beta, p)}{Z(p)}, \\ &\qquad B = Z(\alpha, \beta) - \frac{Z(\alpha, p)Z(\beta, p)}{Z(p)}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

17. JUXTAPOSITION DE DEUX CELLULES. — Soit une seconde cellule (Γ'), ayant pour admittances A', B', C'. Juxtaposons-la *en série à la suite de* (Γ), c'est-à-dire que nous fixons l'axe (E') à l'axe (S). L'impédance quadratique de la cellule complexe (Γ'') ainsi obtenue est $Z(v) + Z'(v')$ et l'on a *l'équation de liaison*

$$\beta^i v_i - \alpha'^i v'_i = 0.$$

En appliquant les formules (7), on trouve que les admittances de (Γ'') sont données par les formules

$$A'' = A - \frac{B^2}{C + A'} \qquad C'' = C' - \frac{B'^2}{C + A'}, \qquad B'' = \frac{BB'}{C + A'}. \tag{14}$$

18. CELLULE SUIVIE PAR UNE IMPÉDANCE. — Si (Γ') se réduit à une impédance (z), on a $A' = B' = C' = \frac{1}{z}$ et les formules (14) deviennent

$$A(z) = \frac{A + Dz}{1 + Cz}, \qquad B(Z) = \frac{B}{1 + Cz}, \qquad C(z) = \frac{C}{1 + Cz}, \tag{15}$$

en posant $D = AC - B^2$.

Imposons-nous la condition que *la vitesse d'entrée de* (Γ) *soit la même que si l'on appliquait directement le couple* f *à* (z); ceci se traduit par $A(z) = \frac{1}{z}$, soit

$$Dz^2 + (A - C)z - 1 = 0. \tag{16}$$

Les deux racines ζ et ζ' de cette équation sont les *impédances caractéristiques* de la cellule (Γ).

On démontre facilement que si l'on juxtapose deux cellules ayant mêmes impédances caractéristiques, la cellule complexe obtenue a encore les mêmes impédances caractéristiques.

Si z est une impédance quelconque, le rapport de la vitesse de sortie à la vitesse d'entrée est

$$\lambda(z) = \frac{B}{A + Dz}. \tag{17}$$

Dans le cas où z est une impédance caractéristique, on a $\lambda = e^{-\varphi}$, avec

$$ch\,\varphi = \frac{A + C}{2B}. \tag{18}$$

Le nombre φ est appelé *affaiblissement caractéristique* de la cellule (Γ).

19. Zone de filtrage. — La cellule étant munie de l'impédance caractéristique ζ, *la vitesse de sortie a même amplitude que la vitesse d'entrée* si φ est une imaginaire pure, c'est-à-dire si l'on a

$$-1 < \frac{A + C}{2B} < 1. \tag{19}$$

Les zones de fréquence vérifiant (19) constituent la *zone de filtrage de la cellule*. En dehors de cette zone, φ possède une partie réelle, qui est positive ou négative suivant que ζ est l'une ou l'autre des deux impédances caractéristiques.

La formule (17) peut s'écrire

$$\lambda(z) = \frac{\zeta - \zeta'}{e^{\varphi}(z - \zeta') - e^{-\varphi}(z - \zeta)}. \tag{20}$$

Si la partie réelle de φ est positive et très grande, le module de $\lambda(z)$

est très petit; *la vitesse de sortie a une très faible amplitude*, quelle que soit l'impédance z, pourvu qu'elle soit différente de ζ'.

20. Constitution d'un filtre. — Pour constituer un *filtre*, il suffit dès lors de s'arranger pour que l'*affaiblissement caractéristique ait une partie réelle positive et très grande en dehors de la zone de filtrage.* Or, si l'on juxtapose n cellules (Γ_i) ayant les *mêmes impédances caractéristiques*, l'affaiblissement caractéristique φ de l'ensemble est la somme des affaiblissements caractéristiques φ_i. En particulier, si les cellules (Γ_i) sont toutes identiques, on a $\varphi = n\varphi_i$; de sorte qu'*en prenant n assez grand, on obtient un filtre.*

21. Structure algébrique des admittances d'une cellule en fonction de la fréquence. — L'impédance quadratique d'une cellule est de la forme

$$Z = \frac{j}{\omega}(X\omega^2 - Y),$$

X et Y désignant des formes quadratiques positives. Par une substitution linéaire convenable, on peut la mettre sous la *forme canonique*

$$Z = \frac{j}{\omega}\left[\sum_{i=1}^{q}(\omega^2 - m_i)v_i^2 - \sum_{i=q+1}^{n} v_i^2\right], \qquad q \leq n. \tag{21}$$

Les m_i sont des constantes positives, pas nécessairement distinctes et dont certaines peuvent être nulles.

En appliquant les formules (12), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &A = -j\omega\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{a_i}{\omega^2 - m_i} - a\right), \qquad C = -j\omega\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{c_i}{\omega^2 - m_i} - c\right),\\ &\qquad\qquad B = -j\omega\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{\omega^2 - m_i} - b\right), \end{aligned}\right. \tag{22}$$

en posant

$$a_i = \sum_h (\alpha_i^h)^2, \qquad c_i = \sum_h (\beta_i^h)^2, \qquad b_i = \sum_h \alpha_i^h \beta_i. \tag{23}$$

Dans les formules (22), les m_i sont tous différents. Dans les formules (23), α_i^h par exemple désigne le coefficient de v_h dans E, si le terme $(\omega^2 - m_i)v_h^2$ figure dans (21). Pour a, b, c, on a des formules analogues, la sommation devant porter sur les coefficients, dans E et S, des v_h qui figurent dans la seconde somme du crochet de (21).

La *zone de filtrage* est définie par $PQ < 0$, en posant

$$P = \frac{p_i}{\omega^2 - m_i} - p, \qquad Q = \frac{q_i}{\omega^2 - m_i} - q,$$

$$p_i = a_i + c_i - 2b_i, \qquad q_i = a_i + c_i + 2b_i.$$

D'après (23), les p_i, q_i, p et q sont tous positifs. On en déduit que si les m_i sont rangés par ordre de grandeur croissante, il existe une bande passante dans chaque intervalle (m_i, m_{i+1}).

21. Supposons que l'*on se donne à l'avance les fréquences de coupure*. Les m_i, p, q peuvent être choisis arbitrairement; on en déduit les p_i, q_i; d'où $a_i + c_i$ et b_i. La répartition de $a_i + c_i$ entre a_i et c_i reste encore arbitraire. En particulier, on peut supposer $a_i = c_i$, ce qui donne $A = C$, soit une *cellule symétrique*.

22. On peut aussi se poser le problème de *réaliser concrètement une cellule dont les admittances sont données a priori*, sous la forme (22). On a les conditions *nécessaires*

$$(24) \quad \sum (a_i \pm b_i) > 0, \qquad \sum (c_i \pm b_i) > 0, \qquad \sum \frac{a_i \pm b_i}{m_i} > 0, \qquad \sum \frac{c_i \pm b_i}{m_i} > 0.$$

Je n'ai pu démontrer, en toute généralité, qu'elles sont suffisantes.

Si les quantités $a_i \pm b_i$ et $c_i \pm b_i$ sont toutes positives, la solution du problème est facile. Sinon, la difficulté semble beaucoup plus grande et je n'ai pu la surmonter que dans certains cas particuliers.

Si l'on s'en tient à une *cellule symétrique* [1], on a $a_i = c_i$ et tous les $a_i \pm b_i$ sont positifs; on sait donc construire la cellule. D'après ce

[1] Ce type de cellule est le plus avantageux au point de vue de la *netteté du filtrage*.

qu'on a vu au n° **21**, *on sait* donc *toujours réaliser la cellule admettant une zone de filtrage donnée à l'avance.*

23. Exemple de cellule rotative. — Voici un exemple de cellule, qui est la transposition mécanique de la cellule du *filtre en T* des électriciens.

Soit un *différentiel,* dont les planétaires P_1 et P_2 ont pour impédances z_1 et z_2 et dont le châssis P_3 a pour impédance $4z_3$. Appelons v_1, v_2 et $\frac{1}{2}v_3$ les vitesses angulaires respectives de ces trois mobiles. L'impédance quadratique de la cellule est

$$Z = z_1(v_1)^2 + z_2(v_2)^2 + z_3(v_3)^2 = h_1(v^1)^2 + h_2(v^2)^2 + h_3(v^3)^2,$$

en posant $h_i = \frac{1}{z_i}\cdot$ On a, d'autre part, l'équation de liaison

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

En appliquant les formules (13), on trouve

$$A = \frac{h_1(h_2+h_3)}{h_1+h_2+h_3}, \qquad C = \frac{h_2(h_1+h_3)}{h_1+h_2+h_3}, \qquad B = \frac{h_1 h_2}{h_1+h_2+h_3}.$$

La zone de filtrage est définie par $p(p+2q) < 0$, en posant $p = j(z_1+z_2)$, $q = 2jz_3$.

Soient I_1, I_2, I_3 les moments d'inertie de P_1, P_2, P_3 et k_1, k_2, k_3 les raideurs des spiraux respectivement accouplés à ces trois pièces. En utilisant la formule (11) pour le calcul de z_1, z_2, z_3 on trouve que *la zone de filtrage est constituée par l'intervalle* (ω_0, ω_1), avec

$$\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{I_1+I_2}, \qquad \omega_1^2 = \frac{k_1+k_2+k_3}{I_1+I_2+I_3}. \tag{25}$$

On a un *passe-bas* pour $k_1 = k_2 = 0$, un *passe-haut* pour $I_1 = I_2 = 0$, un *passe-bande* dans les autres cas.

24. Une simplification fréquemment adoptée dans la pratique consiste à remplacer le châssis du différentiel par un spiral accouplant les pièces P_1 et P_2, qui sont alors de simples poulies montées sur le même axe. Si $\frac{1}{4} k_3$ désigne la raideur de ce spiral, on a toujours les formules (25), mais avec $I_3 = 0$. Avec ce dispositif, on ne peut pas réaliser le passe-haut, car les deux fréquences de coupure deviennent simultanément infinies.

On peut imaginer des exemples plus compliqués, permettant, comme on l'a dit au n° **22**, de réaliser une zone de filtrage donnée à l'avance.