JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ DE POSSEL

# Sur la représentation conforme d'un domaine à connexion infinie sur un domaine à fentes parallèles

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 18 (1939), p. 285-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__285_0>

# *Sur la représentation conforme d'un domaine à connexion infinie sur un domaine à fentes parallèles;*

PAR RENÉ DE POSSEL.

1. Il s'agit du problème classique P que voici : soit D un domaine à un seul feuillet du plan $z$, à connexion finie ou infinie, et contenant le point à l'infini. On veut représenter conformément D sur un *domaine à fentes parallèles* $\overline{D}$ du plan $w$, c'est-à-dire un domaine dont tous les *éléments de frontière*(¹) sont ou des points, ou des segments parallèles à l'axe réel. On exige en outre que la fonction $w=f(z)$, qui fait la représentation, admette autour du point à l'infini un développement de la forme

$$w = z + \frac{a_1}{z} + \ldots. \tag{1}$$

Ce travail reproduit la solution du problème P que j'ai donnée en 1931 (²), basée sur un procédé de maximum, mais rendue ici indépendante du problème C de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe, grâce à l'utilisation d'une fonction particulière. Le problème C est donc résolu comme cas particulier de P.

(¹) Un *élément de frontière* est un continu de points frontières, qui n'est contenu dans aucun autre continu frontière plus grand. On peut dire encore que deux points frontières appartiennent au même élément lorsqu'il n'est pas possible de les séparer par une courbe simple fermée contenue dans le domaine.

(²) Voir *Göttinger Nachrichten*, 1931, p. 199, ou P. MONTEL, *Fonctions univalentes* (Collection Borel). La propriété de maximum de $\mathcal{R} a_1$ a été donnée aussi par H. GRÖTZSCH, *Leipziger Berichte*, 1932.

**2.** Soit $\Phi_D$ la famille des fonctions $w = f(z)$ méromorphes et univalentes dans D et qui admettent autour du point à l'infini un développement de la forme (1). *Soit* V *le problème qui consiste à trouver une fonction $f$ de la famille $\Phi_D$ pour laquelle la partie réelle de $a_f$ est maximum. Nous allons montrer que* V *a une solution, qui est en même temps solution de* P.

**3.** Démontrons d'abord deux lemmes :

Lemme I. — *De toute suite de fonctions de $\Phi_D$, on peut extraire une suite partielle $f_n$ qui converge vers une fonction $\bar{f}$ de $\Phi_D$, cela uniformément dans tout ensemble fermé et borné de* D. [*Autrement dit, la famille $\Phi_D$ est normale et compacte* (3).] *De plus* $a_f = \lim a_{f_n}$.

Choisissons R assez grand pour que la frontière de D soit contenue dans le disque $|z| \leqq R$. Soit $f$ une fonction de $\Phi_D$. Posons

$$z_1 = \frac{z}{R} \qquad \text{et} \qquad w_1 = \frac{f}{R} = z_1 + \sum_1^\infty \frac{b_i}{z_1^i}.$$

La fonction $w_1(z_1)$ est univalente pour $|z_1| > 1$, et le théorème de la surface (4) donne

$$|b_i| \leqq 1, \qquad |w_1| \geqq |z_1| - \left|\sum_1^\infty \frac{b_i}{z_1^i}\right| \geqq |z_1| - \frac{1}{|z_1| - 1},$$

et par suite $|w_1| \geqq 1$ si $|z_1| \geqq 2$.

La fonction $g = \frac{1}{w_1}$ de la variable $\zeta = \frac{1}{z_1}$ est holomorphe dans le

(3) Pour les propriétés des familles normales utilisées ici, voir P. Montel, *Leçons sur les familles normales* ou C. Carathéodory, *Stetige Konvergenz und normale Familien* (*Math. Annal.*, Bd. 101, 1929, p. 515 et suiv.), ou *Conformal Representation*, *Cambridge Tract*, n° 28.

(4) Voir L. Bieberbach, *Funktionentheorie*, Bd. II, 2e édit. p. 72, ou bien P. Montel, *loc. cit.* (2). Le théorème s'obtient en écrivant que l'aire intérieure à l'image d'un cercle $|z| = r > 1$ a une limite non négative lorsque $r$ tend vers 1. Il s'énonce $\sum_1^\infty n\,|a_n|^2 \leqq 1$.

cercle $|\zeta| < \frac{1}{2}$, y vérifie la condition $|g| < 1$, et admet une dérivée à l'origine égale à 1. De toute suite de fonctions $g$, on peut donc extraire ([3]) une suite $g_n$ qui converge uniformément dans tout ensemble fermé contenu dans le cercle $|\zeta| < \frac{1}{2}$ vers une fonction $\overline{g}$ non constante, donc, d'après un théorème connu ([5]) *univalente*, et ne s'annulant que pour $\zeta = 0$. La suite correspondante $f_n = \frac{R}{g_n}$ converge uniformément dans tout ensemble fermé et borné extérieur au disque $|z| \geqq 2R$. D'après le théorème de Stieltjes ([6]), elle converge uniformément vers une fonction $\overline{f}$ dans tout domaine fermé et borné contenu dans D.

Les coefficients (ou les dérivées) de $f_n$ convergent vers ceux de $\overline{f}$. Par suite la fonction $\overline{f}$ admet un développement de la forme (1) et vérifie la condition $a_{\overline{f}} = \lim a_{f_n}$. N'étant pas constante, elle est univalente et appartient à $\Phi_D$.

Lemme II. — *Soit $d$ un domaine simplement connexe, contenant le point à l'infini, et dont la frontière* F *n'est ni un point ni un segment parallèle à l'axe réel. Il existe alors une fonction $\varphi$ de la famille $\Phi_d$ telle que $\mathcal{R}\, a_\varphi > 0$.*

Quel que soit $\rho$ tel que $0 < \rho < 1$, la fonction $z_1 = \zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1}$ représente les cercles $|\zeta_1| = \rho$, $|\zeta_1| = \frac{1}{\rho}$, sur une ellipse E, de foyers $-2$, $+2$, et de demi-grand axe $a = \rho + \frac{1}{\rho}$. Soit $d_1$ un domaine simplement connexe du plan $z_1$, contenant le point à l'infini, dont la frontière contient les points $-2$ et $+2$, et est formée de points intérieurs à l'ellipse E ou sur cette ellipse. Les deux déterminations de la fonction inverse sont uniformes dans $d_1$ et l'une d'elles $\zeta_1 = g(z_1)$ représente $d_1$ sur un domaine du plan $\zeta_1$, n'empiétant pas sur le disque $|\zeta_1| \leqq \rho$.

Posons $z = Az_1 + B$ et $\zeta = A\zeta_1 + B$, A et B étant tels que deux

([5]) Voir P. Montel, *loc. cit.* ([2]) ou C. Carathéodory, *loc. cit.* ([3]), *Conformal Représentation.*

([6]) Voir par exemple P. Montel, *loc. cit.* ([3]).

points frontières $\alpha$ et $\beta$ de $d$ viennent aux points $-2$ et $+2$ du plan $z_1$. La fonction $\zeta_1 = g(z_1)$ définit alors dans $d$ une fonction $\zeta = \psi(z)$ qui appartient à la famille $\Phi_d$, car

$$z = \zeta + \frac{A^2}{\zeta - B}, \qquad \psi(z) = z - \frac{A^2}{z} + \ldots.$$

Supposons $\mathcal{R}\alpha < \mathcal{R}\beta$ et posons $\beta - \alpha = 2le^{i\theta}\left(0 < |\theta| \leqq \frac{\pi}{2}\right)\cdot$ On a

$$A = \frac{\beta - \alpha}{4}, \qquad |A| = \frac{l}{2}, \qquad \mathcal{R}\, a_\psi = -\frac{l^2}{4}\cos 2\theta.$$

S'il existe deux points frontières $\alpha$ et $\beta$ de $d$ tels que $|\theta| > \frac{\pi}{4}$, le lemme est démontré en prenant $\varphi = \psi$.

Dans le cas contraire, désignons pas $\theta_0$ la borne supérieure des angles $|\theta|$, et par $\gamma$ un point frontière de $d$ tel que $\mathcal{R}\alpha \leqq \mathcal{R}\gamma \leqq \mathcal{R}\beta$. On a

$$|\gamma - \alpha| \cos\theta_0 \leqq \mathcal{R}(\gamma - \alpha), \qquad |\gamma - \beta| \cos\theta_0 \leqq \mathcal{R}(\beta - \gamma),$$

d'où

$$|\gamma - \alpha| + |\gamma - \beta| \leqq \frac{\mathcal{R}(\beta - \alpha)}{\cos\theta_0} = 2l\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}.$$

Tout point $\gamma$ est donc à l'intérieur de l'ellipse de foyers $\alpha$ et $\beta$ et de grand axe $2l\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}$, ou sur l'ellipse.

Soit $d'$ le domaine du plan $z$ qui contient $d$ et dont la frontière est l'ensemble des points $\gamma$. Il est simplement connexe puisque $\theta_0 < \frac{\pi}{2}\cdot$ Il lui correspond, dans le plan $z_1$, un domaine dont tout point frontière est intérieur à l'ellipse de foyers $-2$, $+2$ et de grand axe $4\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}$ ou sur cette ellipse; puis dans le plan $\zeta_1$, en vertu de la remarque faite plus haut, un domaine laissant à son extérieur le disque de centre origine et de rayon $\rho$ égal à la plus petite racine de l'équation

$$2\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0} = \rho + \frac{1}{\rho};$$

enfin, dans le plan $\zeta$, un domaine laissant à son extérieur le disque $\Gamma$ de centre $B = \frac{\alpha + \beta}{2}$ et de rayon $\frac{\rho l}{2}\cdot$

La fonction

$$u = h(\zeta) = \zeta + \frac{l^2\rho^2}{4}\,\frac{1}{\zeta - B}$$

représente l'extérieur de $\Gamma$ sur le plan $u$ diminué d'un segment parallèle à l'axe réel, et la fonction $\varphi(z) = h(\psi(z))$ représente $d'$ sur un domaine du plan $u$. Elle appartient à $\Phi_d$ et son développement est

$$u = z + \frac{l^2}{4}(\rho^2 - e^{2i\theta})\frac{1}{z} + \ldots,$$

d'où

$$\mathcal{R}\, a_\varphi = \frac{l^2}{4}(\rho^2 - \cos 2\theta).$$

Si $\theta$ tend vers $\theta_0$, $\rho$ tend vers $1$ et $\cos 2\theta$ tend vers $\cos 2\theta_0 < 1$. Si donc $\theta$ est assez voisin de $\theta_0$, on a $\mathcal{R}\, a_\varphi > 0$. Il suffit de choisir $\alpha$ et $\beta$ en conséquence. Le lemme est démontré.

**4.** 1° *Le problème* V *a une solution.* — Tout d'abord la famille $\Phi_D$ n'est pas vide, car elle contient $w = z$. Soit $\mu$ la borne supérieure des $\mathcal{R}\, a_f$ pour toutes les fonctions de $\Phi_D$; on peut extraire de $\Phi_D$ une suite telle

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{R}\, a_{f_n} = \mu.$$

D'après le lemme I, on peut de cette suite, extraire une suite partielle qui converge vers une fonction $\bar{f}(z)$; on a alors $\mathcal{R}\, a_{\bar{f}} = \mu$. *La fonction $\bar{f}$ est donc solution de* V.

2° *Toute solution $\bar{f}(z)$ du problème* V *est aussi solution de* P. — Supposons au contraire que $\bar{f}$ applique D sur un domaine $\overline{D}$ dont un élément de frontière J ne se réduit ni à un point ni à un segment parallèle à l'axe réel. Soit $d$ le domaine qui contient le point à l'infini et dont la frontière est l'ensemble J. Formons la fonction $\varphi$ du lemme II pour le domaine $d$. La fonction $\chi(z) = \varphi(\bar{f}(z))$ appartient à la famille $\Phi_D$, et l'on a, au voisinage du point à l'infini,

$$\chi(z) = \bar{f} + \frac{a_\varphi}{\bar{f}} + \ldots = z + \frac{a_{\bar{f}} + a_\varphi}{z} + \ldots, \qquad \mathcal{R}\, a_\chi = \mathcal{R}(a_{\bar{f}} + a_\varphi) > \mu,$$

ce qui est en contradiction avec la définition de $\mu$.

**5.** Si D est simplement connexe, trois cas sont possibles :

1° $\overline{\mathrm{D}}$ n'a aucun élément de frontière.

2° $\overline{\mathrm{D}}$ a pour frontière un point. Dans ces deux premiers cas, on a $\mathrm{D} = \overline{\mathrm{D}}$ et $\overline{f} = z$.

3° $\overline{\mathrm{D}}$ a pour frontière un segment parallèle à l'axe réel. $\overline{\mathrm{D}}$ peut être représenté conformément sur l'intérieur d'un cercle ; il en est donc de même de D.

Revenons au cas général. On peut démontrer que le problème V n'a qu'une solution ([7]). Si D est à connexion finie, le problème P n'a lui aussi qu'une solution qui coincïde avec celle de V. Mais si D est à connexion infinie, P peut avoir plusieurs solutions ([8]). Celle qui est la solution de V jouit de plusieurs propriétés de minimum, et fournit pour $\overline{\mathrm{D}}$ un *minimal-schlitzbereich* au sens de P. Koebe ([9]).

Enfin, faisons remarquer que la méthode exposée ici ne s'applique pas aux domaines à plusieurs feuillets, pour lesquels la seule méthode directe semble être celle du minimum de l'intégrale de Dirichlet ([10]).

---

([7]) Voir René de Possel, *Math. Ann.*, Bd. 107, 1932, p. 496-504.

([8]) Voir P. Koebe, *Gött. Nachr.*, 1918, p. 60-71.

([9]) On trouvera quelques détails sur ces domaines dans M. L. Cartwright, *Quarterly Journal,* Vol. 8, n° 32, Déc. 1937, p. 303-307.

([10]) Voir Appell et Goursat, *Fonctions algébriques,* t. II, par Fatou, p. 413-419.