JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. VINCENSINI

Sur les suites de Laplace contenant des éléments orthogonaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 327-366.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_327_0>

Sur les suites de Laplace contenant des éléments orthogonaux;

Par P. VINCENSINI.

Introduction.

Dans ce Mémoire, j'entreprends l'étude des particularités que présentent les suites de Laplace, de réseaux ou de congruences, contenant des éléments orthogonaux.

C'est C. Guichard, qui, le premier, a montré tout le parti que l'on pouvait tirer d'une étude simultanée des réseaux et des congruences; et ses recherches sur ce sujet, exposées dans un important Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure*, *sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*, 1897, 1898, 1903, ont abouti aux lois de *parallélisme* et *d'orthogonalité*, qui, en même temps qu'elles ont donné leur véritable signification à de nombreux rapprochements, ont profondément modifié l'orientation des recherches géométriques ultérieures.

Dans un premier paragraphe, je rappelle les résultats de C. Guichard qui trouveront une application dans la suite.

Après avoir étudié les suites de Laplace contenant, soit deux, soit une infinité d'éléments orthogonaux, je reviens plus spécialement sur le cas où les éléments de la suite sont orthogonaux de deux en deux. J'ai pu ramener la résolution de ce problème à l'intégration (non effectuée) d'un système (compatible) de trois équations aux dérivées partielles, dont deux du troisième ordre et une du second, à deux fonctions inconnues.

Le cas où deux éléments *consécutifs* d'une suite de Laplace sont orthogonaux, m'a amené à présenter quelques observations sur les surfaces de Voss et de Guichard, qui, depuis la publication de deux Mémoires importants de M. Gambier (*Acta Mathematica*, 1927; et *Annales de l'École Normale*, 1931) ont donné lieu à de belles recherches géométriques.

Les lois de parallélisme et d'orthogonalité de Guichard m'ont permis de présenter sous forme simple des résultats connus, et en même temps d'ajouter de nouveaux résultats à la théorie.

J'attire plus spécialement l'attention sur le problème de la *recherche des transformations de Ribaucour transformant une surface de Guichard en une nouvelle surface de Guichard.*

J'ai pu donner une solution complète de ce problème en utilisant la belle transformation des surfaces de Voss étudiée par Eisenhart dans un Mémoire de 1914, *Transformations of surface of Voss* (*Transaction of the American Mathematical Society*).

Je renvoie au Mémoire de M. Gambier cité plus haut [*Surfaces de Voss et Guichard* (*Annales de l'École Normale*, 1931)] pour tout ce qui concerne les résultats actuellement connus et la bibliographie des surfaces de Voss et de Guichard.

1. Rappel de résultats fondamentaux. — Dans ce premier paragraphe, nous rappelons les définitions et les principaux théorèmes indispensables pour l'intelligence de la suite. Pour les démonstrations nous renvoyons au Mémoire de C. Guichard signalé dans l'introduction.

Réseaux et congruences conjugués. — Soit (M) un réseau quelconque décrit par un point M, MR et MS les tangentes aux courbes u et v du réseau [1]; G une droite issue de M engendrant une congruence (G) quand M décrit le réseau. On dit que la congruence (G) est conjuguée au réseau (M), si les développables de (G) correspondent aux courbes du réseau.

Inversement le réseau (M) est conjugué à la congruence (G). Les problèmes de la recherche des congruences conjuguées à un réseau,

(1) Pour éviter toute confusion, nous appellerons courbes u et v, les courbes le long desquelles u et v varient respectivement.

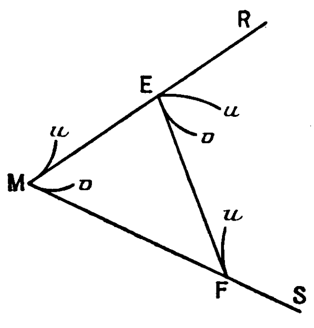
ou des réseaux conjugués à une congruence, dépendent chacun d'une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = P \frac{\partial X}{\partial u} + Q \frac{\partial X}{\partial v} + RX.$$

Réseaux et congruences harmoniques. — On dit qu'une congruence (G) et un réseau (M) sont harmoniques, si la droite G qui décrit la congruence est constamment dans le plan tangent du réseau en M, et si les foyers de G sont constamment situés sur les tangentes conjuguées du réseau. Lorsqu'il en est ainsi, les courbes du réseau et les développables de la congruence se correspondent; en outre, le *premier* foyer de la congruence (G) (correspondant à la variation de u), est situé sur la *deuxième* tangente du réseau (M) (tangente à la courbe v), et le second foyer de la congruence est sur la première tangente du réseau.

Pour obtenir toutes les congruences harmoniques à un réseau (M), on considère l'une des congruences focales du réseau [par exemple la première (MR)] et l'on construit un réseau *quelconque* (E) conjugué

Fig. 1.



à (MR) (*fig.* 1); la deuxième congruence focale (EF) du réseau (E) est la congruence harmonique cherchée la plus générale.

Si l'on part de la congruence (EF), pour avoir les réseaux harmoniques à (EF) on construit une congruence *quelconque* (MR) conjuguée au deuxième réseau focal (E) de la congruence (EF); le premier réseau focal (M) de (MR) est le réseau harmonique le plus général cherché.

Réseaux et congruences parallèles. — Deux réseaux sont parallèles si, les courbes se correspondant, les tangentes de même rang en deux points homologues quelconques sont parallèles.

Deux congruences sont parallèles si, les développables se correspondant dans les deux congruences, les droites qui les décrivent sont constamment parallèles.

Transformation de Laplace des réseaux et congruences parallèles. — Si deux réseaux sont parallèles, leurs congruences focales de même rang sont parallèles; et si l'on soumet les deux réseaux à une suite de transformations de Laplace dans le même sens, on obtient deux suites de congruences et de réseaux deux à deux parallèles.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aux réseaux et aux congruences d'un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Réseaux et congruences orthogonaux (*espace à un nombre impair de dimensions*). — Une congruence et un réseau (les développables de la congruence sont toujours supposées correspondre aux courbes du réseau) sont dits orthogonaux, si la droite qui décrit la congruence est constamment perpendiculaire au plan tangent correspondant du réseau.

Il est clair que dans la définition de l'orthogonalité, on peut remplacer une congruence (ou un réseau) par une congruence (ou un réseau) *parallèles*.

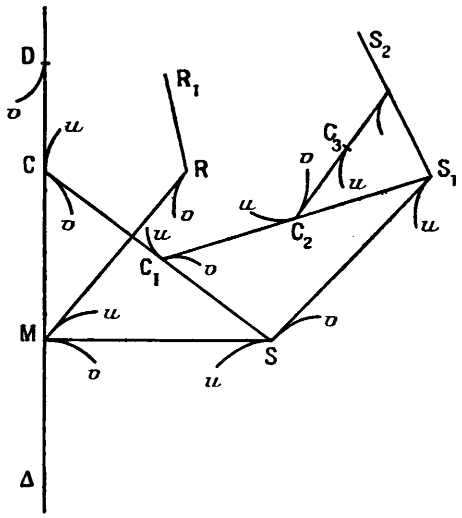
On voit sans peine que si une congruence et un réseau sont orthogonaux, chaque congruence focale du réseau est orthogonale au réseau focal de même rang de la congruence, et l'on déduit immédiatement de ce résultat la proposition importante suivante :

Envisageons un réseau et une congruence orthogonaux. Appliquons au réseau la transformation de Laplace en allant de u vers v (dans le sens u), nous obtenons une suite d'éléments, alternativement congruences et réseaux (les congruences sont les éléments de transformation). De même, appliquons la transformation de Laplace (dans le sens u) à la congruence, nous obtenons une nouvelle suite d'éléments alternativement réseaux et congruences (ici les éléments de transformation sont les réseaux). *Deux éléments de même rang dans les deux suites* (*l'un est un réseau, l'autre une congruence*) *sont orthogonaux.*

Dans les espaces d'ordre pair les éléments se correspondant par orthogonalité sont de même espèce; aux réseaux correspondent des réseaux et aux congruences des congruences. On passe des théorèmes d'orthogonalité dans un espace d'ordre impair aux théorèmes correspondants dans un espace d'ordre pair par une simple transposition d'éléments.

Suites de Laplace déduites d'un réseau et d'une congruence conjugués. — Soient (*fig.* 2) (M) et (Δ) un réseau et une congruence conjugués,

Fig. 2.



C et D les foyers de Δ (C est le premier foyer, D le second), MR et MS les tangentes aux courbes u et v du réseau, R et S le second et le premier foyer des congruences (MR) et (MS), respectivement.

Le réseau (R) est le transformé de Laplace de (M) dans le sens u; (S) est le transformé de (M) dans le sens v. Envisageons le premier réseau focal (C) de (Δ). D'après la construction, indiquée plus haut, des congruences harmoniques à un réseau donné, on voit que la congruence (MS) est harmonique au réseau (C). Il résulte de là que la deuxième tangente du réseau (C), CC_1 (C_1 est le premier foyer), passe par S; en outre la congruence (CC_1) est conjuguée au réseau (S). Mais alors, en substituant au réseau (M) et à la congruence (Δ), le réseau (S) et la congruence (CC_1), on constate que la deuxième tangente $(C_1 C_2)$ du réseau (C_1), est conjuguée au réseau (S_1) transformé de Laplace de (S) dans le sens v, la congruence (SS_1) étant harmonique à (C_1).

En poursuivant le raisonnement précédent, que l'on peut d'ailleurs reprendre en échangeant les rôles de u et v, on est conduit aux deux résultats suivants :

Si un réseau (M) et une congruence (Δ) sont conjugués.

a. Si l'on construit, dans le même sens (de u vers v par exemple) les suites de Laplace pour le réseau et pour la congruence [1], ce qui donne la suite de réseaux $S, S_1, S_2, \ldots$ et la suite de congruences (CC_1), $(C_1 C_2)$, $(C_2 C_3)$, ..., deux éléments de même rang dans les deux suites sont conjugués.

b. Si une congruence (MS) est harmonique à un réseau (C), et si l'on construit des suites de Laplace de même sens, à partir de la congruence et du réseau envisagés, on obtient une suite de congruences (SS_1), $(S_1 S_2)$, ... et de réseaux (C_1), (C_2), ..., tels que deux éléments de même rang des deux suites soient harmoniques.

Cas particulier où (M) *est le réseau des lignes de courbure d'une surface, et* (Δ) *la congruence des normales de cette surface.* — La figure 2 jouit alors des particularités suivantes, qui résultent immédiatement des propriétés, énoncées plus haut, des couples de réseaux et de congruences orthogonaux et des suites de Laplace qui en dérivent :

Le réseau	(C)	est orthogonal à la congruence	(MR),
»	(C_1)	»	(RR_1),
...	...	...	...
»	(C_n)	»	$(R_{n-1} R_n)$.

(1) Nous appellerons transformée d'une congruence dans le sens u, la congruence obtenue en prenant les tangentes aux courbes u du deuxième réseau focal (celui qui correspond aux courbes v). Il est à noter que lorsqu'un réseau et une congruence se correspondent par courbes et développables, la transformation dans le sens u du réseau se fait par l'intermédiaire de sa première congruence focale, tandis que la transformation dans le sens u de la congruence se fait par l'intermédiaire du deuxième réseau focal.

et

La congruence	(CC_1)	est orthogonale au réseau	(R),
»	(C_1C_2)	»	(R_1),
.....	.....	.....	.....
»	$(C_{n-1}C_n)$	»	(R_{n-1}).

Réseaux et congruences O *et* pO. — Un point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions décrit un réseau rectangulaire si les deux tangentes en chaque point du réseau sont perpendiculaires.

Si ξ_i et η_i sont les paramètres normaux des deux tangentes, on aura

$$\sum_i \xi_i \eta_i = 0.$$

Dans le cas général, aucune des deux expressions $\sum_i \xi_i^2$, $\sum_i \eta_i^2$ ne sera nulle. Si l'une au moins de ces expressions est nulle, le réseau est dit *singulier*. C. Guichard appelle *réseau* O tout réseau orthogonal non singulier.

Un réseau pO de l'espace à n dimensions est la projection, sur cet espace, d'un réseau O de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

Une congruence est O ou pO si elle est orthogonale à un réseau O ou pO.

Dans son Mémoire, C. Guichard a étudié spécialement les propriétés des systèmes (réseaux ou congruences) O, 2O, 3O, ..., pO de l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Nous en extrayons le tableau suivant que nous aurons à utiliser dans la suite, relatif à l'espace à trois dimensions, qui indique le nombre et la nature des systèmes conjugués aux différents systèmes O, 2O, ..., pO.

Systèmes O.

Systèmes conjugués	1	O,
	les autres	2O.

Systèmes 2O.

Systèmes conjugués	2	O,
	∞^1	2O,
	les autres	3O.

Systèmes 3O.

Systèmes conjugués $\left\{\begin{array}{ll} \infty^1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\mathrm{O}, \\ \infty^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3\mathrm{O}, \\ \text{les autres} \ldots\ldots\ldots & 4\mathrm{O}. \end{array}\right.$

Systèmes pO.

Systèmes conjugués $\left\{\begin{array}{ll} \infty^{p-2} \ldots\ldots\ldots\ldots & (p-1)\mathrm{O}, \\ \infty^{p-1} \ldots\ldots\ldots\ldots & p\mathrm{O}, \\ \text{les autres} \ldots\ldots\ldots & (p+1)\mathrm{O}. \end{array}\right.$

Les systèmes *les plus généraux* conjugués aux systèmes O, 2O, ..., pO, sont respectivement 2O, 3O, ..., $(p+1)$O.

2. Généralités sur les suites de Laplace. Réseaux (Σ). — Je me propose d'appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'étude des suites de Laplace dont *deux* éléments sont O. Je me placerai dans l'espace à trois dimensions; l'extension des résultats aux espaces à un nombre impair de dimensions est d'ailleurs aisée.

Je ferai tout de suite la remarque suivante. Soit une suite de Laplace de réseaux; envisageons une congruence orthogonale à l'un des réseaux de la suite, et construisons la suite de Laplace de congruences à partir de la congruence considérée. Cette suite sera dite *associée par orthogonalité* à la suite de réseaux. Chaque élément de l'une quelconque des deux suites est orthogonal à l'élément de même rang de l'autre (pour l'une comme pour l'autre suite, on passe d'un élément au suivant en allant dans le sens d'une même variable).

Si donc la suite de réseaux contient deux réseaux O, la suite de congruences associée contient deux congruences O. D'une façon plus générale, les deux suites contiennent le même nombre d'éléments O, 2O, ..., pO, ces éléments occupant les mêmes places dans les deux suites. Il est clair que si l'on n'a égard qu'aux propriétés invariantes par parallélisme ou par orthogonalité, on peut étudier indifféremment la suite de réseaux ou la suite de congruences associée.

Mais, les résultats exposés au paragraphe précédent montrent qu'il y a en général intérêt à étudier les particularités des suites de réseaux, par les particularités qu'elles entraînent pour des suites de congruences convenablement associées, et inversement.

Partant de ce point de vue, nous attacherons à la suite de réseaux dont nous nous proposons de faire l'étude, une suite orthogonale de congruences, et nous étudierons les propriétés de l'ensemble obtenu.

Parmi les suites de réseaux contenant deux réseaux O, il convient d'attacher une importance spéciale aux suites déduites des réseaux, que pour simplifier l'exposition ultérieure j'appellerai réseaux Σ, définis par cette propriété que *leurs premiers transformés de Laplace dans les deux sens sont* O.

Toute congruence orthogonale à un réseau Σ jouit de la propriété que ses premières transformées dans les deux sens sont O.

Nous appellerons une telle congruence, *congruence* Σ.

Les congruences Σ sont les congruences dont les développables *touchent* les surfaces focales suivant des géodésiques ($u =$ const. sur l'une des nappes focales, $v =$ const. sur l'autre) à l'opposé des congruences normales qui donnent sur les surfaces focales des géodésiques comme *arêtes de rebroussement*.

Elles ont été l'objet de travaux récents de la part de MM. Drach, Gambier et Finikoff. L'ensemble des résultats obtenus par ces trois géomètres est exposé dans un Mémoire de M. Gambier [*Congruences de cercles; points focaux* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1933)].

M. Gambier a introduit les congruences Σ comme congruences des axes des cercles, osculateurs à la fois aux lignes de courbure $u =$ const. d'une surface, et aux lignes de courbure $v =$ const. d'une autre surface.

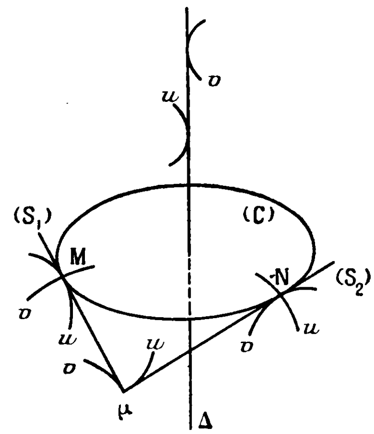
Toute congruence Σ peut, et *d'une seule façon* (sauf un cas de dégénérescence qui sera étudié par la suite), être regardée comme la congruence des axes Δ des cercles C osculateurs aux lignes de courbure $v =$ const. d'une surface S_1 et aux lignes de courbure $u =$ const. d'une autre surface S_2 (*fig.* 3).

En outre, si M et N sont les points où C touche S_1 et S_2, le point de rencontre μ des tangentes à C en M et N décrit un réseau dont les tangentes sont précisément μM et μN.

Les transformés du réseau μ dans les deux sens sont évidemment les réseaux de courbure des surfaces S_1 et S_2; μ est donc un réseau du genre Σ.

Je rétablis simplement les propriétés de la figure 3. Lorsqu'on donne à u l'accroissement infinitésimal du, le cercle C étant osculateur à la courbe $v =$ const. de S_1, son plan tourne autour de $M\mu$; de même, pour l'accroissement infinitésimal dv, le plan du cercle C tourne autour de $N\mu$; μ est donc le point caractéristique du plan du cercle C.

Fig. 3.



En outre, lorsque u varie seul, μ, qui est le premier foyer de la congruence (μM), *se déplace dans la direction* μN.

Ainsi, pour un déplacement infinitésimal de μ suivant μN, le plan du cercle C tourne autour de μM; μM et μN *sont donc des tangentes conjuguées* sur la surface enveloppée par le plan du cercle C.

Lorsque u varie seul de du, l'axe du cercle C reste dans le plan normal en M à la courbe $v =$ const. de S_1, et décrit par suite une portion de développable; on a un résultat analogue si v varie seul. Les développables de la congruence (Δ) correspondent donc aux courbes du réseau μ (et la congruence est orthogonale au réseau μ). Enfin les réseaux transformés du réseau μ dans les deux sens étant O, il résulte des propriétés d'orthogonalité rappelées au numéro 1 que les premières transformées de la congruence (Δ), dans les deux sens, sont O. Les courbes u et v non arêtes de rebroussement sur les deux nappes focales de la congruence (Δ) *sont des géodésiques* conformément à la proposition de M. Gambier.

Il est à noter que la démonstration que nous venons de donner pour établir que μ décrit un réseau de tangentes μM et μN, a le caractère projectif.

Le fait que la courbe C est un cercle n'est pas intervenu, pas plus d'ailleurs que la qualité des lignes de courbure u et v de S_1 et S_2; seule la propriété d'osculation a joué un rôle. On peut donc énoncer ce résultat général :

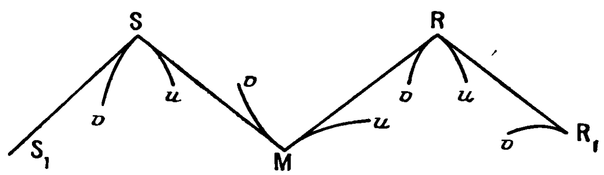
Si une courbe plane quelconque C, variable de par la variation de deux paramètres u et v, a constamment un contact du *second ordre*, avec une famille *quelconque* de courbes ($v=$ const.) d'une surface S_1, et avec une famille $u=$ const. d'une autre surface S_2, les tangentes aux courbes $v=$ const. de S_1 et $u=$ const. de S_2 en leurs points de contact M et N avec la courbe variable C se coupent en un point μ *décrivant un réseau dont les tangentes conjuguées sont* μM *et* μN.

Ainsi, à toute congruence (Δ) du type Σ défini plus haut, la construction traduite par la figure 3 fait correspondre un réseau Σ (le réseau μ). Mais il est clair que l'on n'obtient pas ainsi *tous les réseaux* Σ. La totalité des réseaux Σ s'obtient en ajoutant aux réseaux particuliers déterminés par M. Gambier (que j'appellerai dans la suite réseaux Σ_0), tous leurs parallèles.

3. Réseaux Σ_0. — Le problème de la recherche des réseaux Σ_0 étant équivalent au problème de la recherche des congruences Σ déterminées par MM. Drach, Gambier, Finikoff, une nouvelle méthode de recherche des congruences ci-dessus consiste dans la détermination préalable des réseaux Σ_0.

Nous allons donner quelques indications sur ce nouveau problème, et présenter quelques propriétés des réseaux en jeu.

Fig. 4.



Soit (M) un réseau quelconque; u et v les courbes se croisant en M; (R) et (S) les réseaux transformés de (M) dans les sens respectifs u

et v; RR_1 et SS_1 la première et la deuxième tangente des réseaux (R) et (S), respectivement (*fig.* 4).

Si $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ sont les coordonnées de M, et si ξ_i, η_i sont les paramètres normaux des tangentes MR et MS, on sait que l'on a le groupe de relations [1]

$$(1)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = l\eta;$$

$$(2)\qquad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn;$$

$$(3)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi.$$

Une fois les ξ et η connus, il suffit de choisir h et l vérifiant (2) pour pouvoir intégrer les équations (1) donnant le réseau par ses trois coordonnées (x_1, x_2, x_3).

y_1, y_2, y_3 étant les coordonnées du point R; z_1, z_2, z_3 celles du point S, on a

$$y = x + \rho_1\xi \qquad \left(\rho_1 = -\frac{l}{n}\right),$$

$$z = x + \rho_2\eta \qquad \left(\rho_2 = -\frac{h}{m}\right).$$

Écrivons les formules générales de la transformation de Laplace. Si

$$\bar\xi, \quad \bar\eta, \quad \bar h, \quad \bar l, \quad \bar m, \quad \bar n$$

sont les éléments du réseau (R) transformé de (M) dans le sens u ($\bar\xi$ et $\bar\eta$ étant les paramètres normaux), on a pour le nouveau réseau le groupe des formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\bar\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi, && \bar\eta = \frac{1}{n}\xi, \\ &\bar h = -\frac{l}{n}, && \bar l = -n\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{l}{n}\right), \\ &\bar m = \frac{1}{n}, && \bar n = n\left(mn - \frac{\partial^2 \log n}{\partial u\,\partial v}\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Chacune des relations 1 et 3 en représente trois.

Si un réseau (M) est du genre Σ_0, les deux réseaux (R) et (S) sont O, et *en outre* MR = MS.

Ces trois conditions sont *suffisantes* pour qu'un réseau soit Σ_0.

En effet, il existe alors un cercle C tangent en R et S à MR et MS, et l'on voit aussitôt que l'axe de ce cercle engendre une congruence dont les développables touchent les deux nappes focales suivant deux familles de géodésiques.

(R) est O si

$$\sum_i \xi\bar{\xi} = 0,$$

soit

$$\sum \xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi\right) = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{n^2}\Sigma\xi^2\right] = 0$$

et donne

$$\Sigma\xi^2 = n^2 V^2 \qquad (V = \text{fonction de } v \text{ seul}). \tag{5}$$

En remplaçant v par une fonction de v on peut réduire V à l'unité, et écrire

$$\Sigma\xi^2 = n^2. \tag{6}$$

En exprimant que le réseau (S) est O, on obtient la relation analogue

$$\Sigma\eta^2 = m^2. \tag{7}$$

Les longueurs MR et MS ont pour expressions

$$\text{MR} = |\rho_1|.\sqrt{\Sigma\xi^2} = \left|\frac{l}{n}\right|.\sqrt{\Sigma\xi^2} = |l|,$$
$$\text{MS} = |h|.$$

La condition MR = MS fournit la nouvelle relation

$$l^2 = h^2. \tag{8}$$

Les réseaux Σ_0 s'obtiennent, en adjoignant au système (1), (2), (3), les conditions (6), (7) et (8).

La condition (8) prouve que l'équation à laquelle satisfont les trois coordonnées ponctuelles du réseau (M),

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

a ses invariants égaux.

Ainsi :

Les réseaux Σ_0 sont des réseaux à invariants ponctuels égaux.

Ce dernier résultat est d'ailleurs une conséquence d'un théorème de G. Kœnigs, suivant lequel, pour qu'un réseau (R) soit à invariants ponctuels égaux (non nuls), il faut et il suffit que si (M) et (N) sont ses deux transformés de Laplace dans les deux sens, *il existe une conique ayant en* M *un contact du second ordre avec la courbe u du réseau* (M) *et en* N *un contact du second ordre avec la courbe v du réseau* (N).

Dans le cas des réseaux Σ_0 la conique est un cercle.

On pourrait se demander si les réseaux Σ_0 sont *caractérisés* (dans la famille générale des réseaux Σ) par la propriété d'avoir leurs invariants égaux. C'est très probable. S'il existait des réseaux Σ à invariants égaux autres que les réseaux Σ_0, le théorème de G. Kœnigs ci-dessus rappelé, établirait l'existence de congruences de coniques, osculatrices aux lignes de courbure u d'une surface S_1 et aux lignes de courbure v d'une autre surface S_2.

En tout cas, il est facile de mettre en évidence une propriété intéressante des réseaux Σ *les plus généraux.*

On sait qu'un réseau étant donné arbitrairement, il n'y a généralement pas de réseaux *parallèles* au réseau donné et à *invariants égaux;* s'il existe un tel réseau, il en existe nécessairement *un second*; et s'il y en a plus de deux, *il y en a une infinité.*

Les réseaux Σ fournissent des exemples réalisant ce dernier cas.

Envisageons un réseau Σ; soit (D) une congruence *quelconque* orthogonale au réseau; (D) peut être considérée (d'une seule façon) comme la congruence des axes des cercles C osculateurs aux lignes de courbure u et v de deux surfaces différentes; le point μ que la figure 3 associe à D décrit un réseau Σ_0 à invariants égaux.

Les réseaux Σ sont donc parallèles à une infininité de réseaux à invariants égaux.

4. Réseaux Σ_0 particuliers. Surfaces minima non euclidiennes. — La conclusion sur l'unicité du réseau Σ_0 associé à une congruence (D) dont les développables *touchent* les deux nappes focales suivant des géodésiques, cesse d'être vraie pour certaines congruences dégénérées formées de droites issues d'un point fixe (congruences point). Envisageons une congruence point (δ) parallèle à (D) [1]. (δ) peut être regardée comme la limite d'une congruence homothétique à (D) dans une homothétie dont le rapport tend vers zéro.

Dans cette homothétie, le réseau Σ_0 associé à (D), a pour homologue un réseau dégénéré dont les tangentes sont issues d'un point fixe (réseau point), qui, en général, est le seul réseau Σ_0 associé à (δ).

Cherchons s'il existe des congruences point (δ) auxquelles on peut associer des réseaux Σ_0 *non dégénérés.*

Soit (δ) une telle congruence; tous ses rayons sont issus d'un point fixe O, et les deux familles de développables, $v =$ const., $u =$ const., sont deux familles de cônes de sommet O.

Par hypothèse, il existe une congruence de cercles (C) ayant pour axes les différents rayons de (δ), osculateurs à une surface S_1 le long de ses lignes de courbure $v =$ const., et à une surface S_2 le long de ses lignes de courbure $u =$ const.

Lorsque u varie seul, le cercle C reste constamment osculateur à une ligne de courbure de S_1 ($v =$ const.) en un certain point M, et il est clair que la droite OM est constamment normale à la ligne de courbure en question, qui, de ce fait, est tracée sur une sphère de centre O (sphère qui contient C). De même, lorsque v varie seul, C reste osculateur en N à une ligne de courbure de S_2 (tracée sur une sphère de centre O) et touche S_2 suivant une ligne de courbure ($u =$ const.).

Sur S_1, les deux systèmes de lignes de courbure sont tracés sur des sphères de centre O; S_1 est donc une sphère (S) de centre O, et il est clair que S_2 coïncide avec S_1.

Les congruences (δ) cherchées sont donc les congruences des axes des cercles osculateurs à deux familles de courbes tracées sur une même sphère (S).

---

[1] Les rayons de (δ) sont parallèles à ceux de (D) et les deux familles de développables de (δ) sont les deux familles de cônes qui correspondent aux développables de (D).

Si μ est le point où se coupent les tangentes à C (et par suite à S) aux deux points d'osculation M et N, μ décrit comme l'on sait, un réseau (du genre Σ_0) dont les tangentes sont μM et μN.

Réciproquement, si les tangentes μM et μN d'un réseau (u, v) touchent une sphère fixe S en M et N, l'axe du cercle C tangent en M et N à μM et μN passe constamment par O et décrit une congruence (δ) associée au réseau (μ) [les développables de (δ) sont les cônes correspondant aux courbes du réseau].

Les surfaces portant les réseaux (μ) dont les tangentes conjuguées touchent une sphère fixe S, sont les *surfaces minima* de la géométrie non euclidienne obtenue en prenant la sphère S pour quadrique fondamentale.

Ces surfaces ont été étudiées par C. Guichard dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* (*Sur les surfaces minima non euclidiennes*, 3e série, t. XIII, 1896). Elles jouissent de la propriété suivante, indiquée par Guichard et facile du reste à retrouver, qu'une double transformation de Laplace appliquée au réseau (u, v) transforme une surface minima non euclidienne en une autre surface minima non euclidienne du même espace. La surface obtenue par double transformation de Laplace est d'ailleurs transformée par polaires réciproques de la surface initiale par rapport à la sphère fondamentale, et quatre transformations de Laplace successives redonnent la surface initiale.

Il résulte immédiatement de là que les réseaux Σ particuliers, parallèles aux réseaux (u, v) portés par les surfaces minima non euclidiennes, jouissent de la propriété remarquable de se transformer en réseaux analogues après un nombre pair de transformations de Laplace.

Les réseaux compris entre deux réseaux Σ consécutifs sont O, de sorte que l'on peut dire que les réseaux de la suite de Laplace issue de l'un quelconque des réseaux Σ actuellement envisagés, sont O de deux en deux (avec deux représentations sphériques distinctes seulement).

Les suites de congruences associées par orthogonalité aux suites de réseaux dont il vient d'être question, offrent un exemple de suites de Laplace de congruences *normales de deux en deux*, et leur existence *prouve la possibilité* du problème général de la recherche des suites de Laplace de congruences qui sont O de deux en deux (ou de réseaux qui sont O de deux en deux), sur lequel nous reviendrons plus loin.

5. Suites de Laplace issues d'un élément Σ. — Nous nous proposons maintenant d'étudier les propriétés des suites de Laplace obtenues à partir de l'un des réseaux Σ introduits au numéro **2** (dont les premiers transformés de Laplace dans les deux sens sont O), et des suites de congruences associées par orthogonalité.

Soit $R(u, v)$ le point décrivant le réseau Σ envisagé; $M(u, v)$ le transformé de Laplace du réseau R dans le sens v, $N(u, v)$ son transformé dans le sens u; les réseaux M et N sont O.

En transformant M dans le sens v, on obtient les réseaux successifs M_1, M_2, M_3, ...; de même, en transformant N dans le sens u, on obtient les réseaux N_1, N_2, N_3, ... Il s'agit d'étudier la suite de Laplace

$$\ldots, \quad M_3, \quad M_2, \quad M_1, \quad M, \quad R, \quad N, \quad N_1, \quad N_2, \quad \ldots.$$

Pour la raison indiquée au numéro **2**, nous adjoindrons à la suite de réseaux précédente, une suite de Laplace de congruences orthogonales aux réseaux. On pourrait choisir arbitrairement la congruence de la suite, orthogonale à l'un des réseaux; toute la suite se trouverait alors déterminée; mais il y a avantage à particulariser la suite des congruences, en prenant, par exemple, pour l'une des congruences de la suite, *la congruence des normales à la surface portant le réseau* M [surface sur laquelle le réseau (u, v) est le réseau des lignes de courbure].

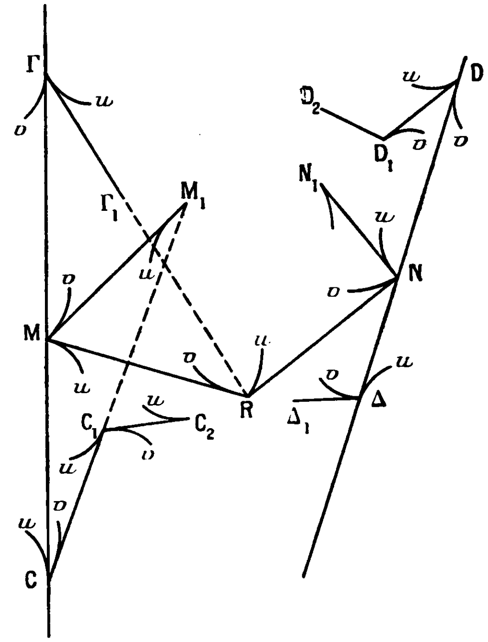
Soient (*fig.* 5) C et Γ le premier et le deuxième foyer de la congruence des normales aux réseaux M; Δ et D les foyers de même rang de la congruence des normales au réseau N. Les deux congruences $(C\Gamma)$ et (ΔD) sont O.

Désignons par C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ..., les réseaux déduits du premier réseau focal C de la congruence $(C\Gamma)$, par la méthode de Laplace, en allant de v vers u; et par Γ_1, Γ_2, Γ_3, ..., Γ_n, ..., les réseaux déduits du deuxième réseau focal Γ, en allant de u vers v.

De même, appelons Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., Δ_n, ..., les réseaux déduits de Δ par des transformations successives de Laplace dans le sens v, et D_1, D_2, D_3, ..., D_n, ..., les réseaux transformés de D dans le sens u

Si, pour simplifier l'exposition, nous posons $M_0 \equiv M$, $N_0 \equiv N$, si nous nous reportons aux résultats rappelés au numéro **1** sur l'ort gonalité des réseaux et des congruences, nous voyons que le réseau

Fig. 5.



[premier réseau focal de la congruence ($C\Gamma$)] est orthogonal à congruence (MR) (première congruence focale du réseau M); même

Le réseau	C_1	est orthogonal à la congruence	RN_0,
»	C_2	»	N_0N_1,
.....	.....	.....	.....
»	C_n	»	N_{n-2}, N_{n-1}.

Toujours d'après la loi d'orthogonalité :

La congruence	CC_1	est orthogonale au réseau	R,
»	C_1C_2	»	N_0,
»	C_2C_3	»	N_1,
.....	.....	.....	.....
»	C_nC_{n+1}	»	N_{n-1}.

Pour la même raison, le réseau Γ_n est orthogonal à la congruence $(M_n M_{n+1})$, et la congruence $(\Gamma_{n-1}\Gamma_n)$ au réseau M_n.

Aux relations précédentes, il convient d'ajouter celles que l'on obtient en remplaçant chaque lettre M par la lettre N de même indice, chaque lettre C par la lettre D de même indice, et chaque lettre Γ par la lettre Δ de même indice.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit au numéro **1** à propos des suites de Laplace déduites d'un réseau et d'une congruence conjugués, et si l'on applique les résultats indiqués au réseau M et à la congruence conjuguée (ΓC), on constate que les congruences (CC_1), $(C_1 C_2)$, ..., $(C_{n-1} C_n)$ sont conjuguées aux réseaux M_1, M_2, ..., M_n; et que la congruence $(\Gamma_n \Gamma_{n+1})$ est conjuguée au réseau N_{n-1}.

Toutes ces relations subsistent après le changement de lettres et d'indices indiqué plus haut.

Nous résumons les résultats qui précèdent dans les tableaux qui suivent. La première ligne de chaque tableau contient les éléments successifs d'une suite de réseaux ou de congruences; les lignes suivantes contiennent les éléments orthogonaux ou conjugués à ceux de la première, deux éléments correspondants étant situés dans une même colonne verticale.

TABLEAU I.

Réseaux........	....	Γ_n.	....	Γ_2.	Γ_1.	Γ.	C.	C_1.	C_2.	....	C_n.	....
Congr. orthog..	...	$M_{n+1}M_n$	...	M_3M_2	M_2M_1	M_1M_0	M_0R	RN_0	N_0N_1	...	$N_{n-2}N_{n-1}$	...

TABLEAU II.

Congruences..............	....	$\Gamma_{n-1}\Gamma_n$.	....	$\Gamma_3\Gamma_2$.	$\Gamma_2\Gamma_1$.	$\Gamma_1\Gamma$.	ΓC.	CC_1.	C_1C_2.	....	C_nC_{n+1}.	....
Réseaux orthogonaux....	...	M_n	...	M_3	M_2	M_1	M_0	R	N_0	...	N_{n-1}	...
Réseaux conjugués......	...	N_{n-2}	...	N_1	N_0	R	M_0	M_1	M_2	...	M_{n+1}	...

TABLEAU III.

Réseaux.........	....	Δ_n.	...	Δ_2.	Δ_1.	Δ.	D.	D_1.	D_2.	....	D_n.	....
Congr. orthog..	...	$N_{n+1}N_n$	...	N_3N_2	N_2N_1	N_1N_0	N_0R	RM_0	M_0M_1	...	$M_{n-2}M_{n-1}$	...

TABLEAU IV.

Congruences..............	....	$\Delta_{n-1}\Delta_n$.	....	$\Delta_3\Delta_2$.	$\Delta_2\Delta_1$.	$\Delta_1\Delta$.	ΔD.	DD_1.	D_1D_2.	....	D_nD_{n+1}.	....
Réseaux orthogonaux....	...	N_n	...	N_3	N_2	N_1	N_0	R	M_0	...	M_{n-1}	...
Réseaux conjugués......	...	M_{n-2}	...	M_1	M_0	R	N_0	N_1	N_2	...	N_{n+1}	...

Je désignerai dans la suite par T_1, T_2, T_3, T_4 les quatre tableaux ci-dessus. L'examen de ces tableaux conduit aux remarques suivantes, relatives à la nature des réseaux transformés par la méthode de Laplace, d'un réseau quelconque R appartenant au type Σ.

La congruence $(C_1 C_2)$, orthogonale au réseau $(N \equiv N_0)$ qui est O, est une congruence O; d'autre part, cette congruence est conjuguée au réseau M_2 (*voir* T_2). Mais alors, le réseau M_2, conjugué à une congruence O, est (en général) 2O (*voir* le numéro **1**).

Le même raisonnement fait avec le tableau (T_4) (ou une raison de symétrie évidente) montre *que le réseau* N_2 *est aussi* 2O.

De même, la congruence $(C_3 C_4)$ est orthogonale au réseau $N_2(T_2)$, *c'est donc en général une congruence* 2O (*voir* le numéro **1**). Cette même congruence est conjuguée au réseau $M_4(T_2)$; *ce dernier réseau est donc* 3O. Par raison de symétrie, le réseau de N_4 est aussi 3O.

En continuant ainsi, on est conduit au résultat suivant :

Si R *est le réseau* Σ *le plus général, ses transformés de Laplace dans les deux sens, sont, de deux en deux, à partir des deux premiers qui sont* O, *respectivement*, 2O, 3O, ..., *n*O, ...

La loi d'orthogonalité des éléments permet d'énoncer un théorème analogue pour les congruences du type Σ (dont les deux transformées de Laplace, dans les deux sens, sont normales).

6. Sur les suites de Laplace de congruences (ou de réseaux) qui sont O de deux en deux. — Envisageons la suite de Laplace formée par les réseaux

$$\ldots,\quad M_2,\quad M_1,\quad M \equiv M_0,\quad R,\quad N \equiv N_0,\quad N_1,\quad N_2,\quad \ldots,$$

dans laquelle les réseaux M et N sont O, et la suite de congruences orthogonales associées que le tableau T_2 leur fait correspondre.

Le réseau M_2 est en général 2O (*voir* le numéro précédent); demandons-nous ce qu'il faudrait pour qu'il soit simplement O.

M_2 sera O, au lieu de 2O, si la congruence $(\Gamma_1 \Gamma_2)$ que (T_2) lui fait correspondre est O au lieu de 2O.

Or $(\Gamma_1 \Gamma_2)$ est conjuguée au réseau $N(T_2)$; si elle est O, elle coïncide *nécessairement* avec la congruence (ΔD) des normales à la surface qui porte le réseau N. Cela exige que le réseau Δ soit confondu avec Γ_1, et D avec Γ_2. Alors, la congruence $(D_1 D_2)$ coïncide avec $(\Gamma_3 \Gamma_4)$. $(D_1 D_2)$ étant orthogonale au réseau M (*voir* T_4) est O; il en résulte que la congruence $(\Gamma_3 \Gamma_4)$ est O également. Mais, d'après le tableau T_2, le réseau M_4 est orthogonal à la congruence $(\Gamma_3 \Gamma_4)$; *il en résulte que ce réseau est* O, et que par suite :

Si dans une suite de Laplace de réseaux (ou de congruences), la suite obtenue en prenant les éléments de deux en deux contient trois éléments consécutifs O, *l'élément suivant est aussi* O.

On peut donc énoncer ce théorème :

Si dans une suite de Laplace déduite d'un élément orthogonal donné $(\mathcal{E})$, *les deux éléments* $(\mathcal{E}_{-2})$ *et* $(\mathcal{E}_2)$ *sont orthogonaux, tous les éléments sont orthogonaux de deux en deux.*

On peut dire que les éléments de la suite complète sont alternativement O et Σ.

Les suites de Laplace issues des réseaux portés par les surfaces minima non euclidiennes déterminées par C. Guichard, dont il a été question au n° **4**, offrent des exemples de suites de Laplace dont les éléments sont O de deux en deux.

Dans le Mémoire cité dans ce même numéro, C. Guichard a montré qu'il n'y a que deux représentations sphériques distinctes pour les réseaux orthogonaux consécutifs. Nous allons montrer que cette propriété s'étend aux suites générales envisagées dans le paragraphe actuel.

Les congruences $(\Gamma_3 \Gamma_4)$ et $(D_1 D_2)$ étant confondues, comme on l'a vu plus haut, les réseaux M_4 et M respectivement orthogonaux à ces congruences, sont en général parallèles *au sens de Peterson;* ils peuvent être parallèles *au sens ordinaire* (les surfaces qui les portent sont alors orthogonales aux rayons d'une congruence normale), ou même *confondus* (C. Guichard dans son Mémoire donne des exemples de ces deux cas particuliers).

Il résulte immédiatement de là, que le réseau M_{2n} (n étant un entier quelconque) a même représentation sphérique que M. Si donc, dans la suite des réseaux orthogonaux, on prend les éléments de deux en deux à partir de M, on obtient toujours la même représentation sphérique; comme la même chose a lieu si l'on prend les éléments de deux en deux à partir de N, on voit que :

Dans une suite de Laplace dans laquelle les éléments (réseaux ou congruences) sont orthogonaux de deux en deux, les éléments orthogonaux ont, de deux en deux, la même représentation sphérique, de sorte qu'il n'y a que deux représentations sphériques distinctes.

7. Généralisation. Suites de Laplace dans lesquelles deux éléments non contigus a un même élément sont O. — Les résultats des deux paragraphes qui précèdent, relatifs aux suites de Laplace déduites d'un élément Σ, c'est-à-dire contenant deux éléments O contigus à un même élément de la suite, peuvent être généralisés.

Supposons que dans la suite de Laplace de réseaux envisagée au n° **5** :

$$\ldots,\quad M_3,\quad M_2,\quad M_1,\quad M,\quad R,\quad N,\quad N_1,\quad N_2,\quad \ldots,$$

le réseau M soit un réseau O, et qu'il en soit de même pour le $k^{\text{ième}}$ réseau transformé dans le sens u, soit N_{k-2}.

Désignons respectivement par Δ et D, le premier et le deuxième foyer de la congruence des normales à la surface portant le réseau N_{k-2}; par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, les réseaux transformés du réseau Δ dans le sens v, et par $D_1, D_2, \ldots$, les réseaux transformés de D dans le sens u.

Rien n'est changé en ce qui concerne les tableaux (1) et (2) du n° **5**, puisque le réseau M continue à être orthogonal; mais les tableaux (3) et (4) sont modifiés, car on fait actuellement jouer au réseau N_{k-2} le rôle que jouait précédemment le réseau N_0.

On voit sans peine que ces deux derniers tableaux doivent être remplacés par ceux que l'on en déduit en laissant fixes les éléments de la première ligne de chacun d'eux, en faisant subir aux deuxièmes lignes un décalage de $k-2$ rangs vers la droite, et à la troisième ligne du tableau (4) un décalage de $k-2$ rangs vers la gauche.

En particulier, le tableau (4) est à remplacer par le suivant :

(T_5).

Congruences.......	....	$\Delta_2\Delta_1$.	$\Delta_1\Delta$.	ΔD.	DD_1.	....	$D_{k-3}D_{k-2}$.	$D_{k-2}D_{k-1}$.	$D_{k-1}D_k$.	D_kD_{k+1}.	....
Réseaux orthog...	...	N_k	N_{k-1}	N_{k-2}	N_{k-3}	...	N_0	R	M_0	M_1	...
Réseaux conj.....	...	N_{k-4}	N_{k-3}	N_{k-2}	N_{k-1}	...	N_{2k-4}	N_{2k-3}	N_{2k-2}	N_{2k-1}	...

Considérons dès lors la congruence $(C_{k-1}C_k)$, elle est orthogonale au réseau N_{k-2} (*voir* T_2); ce dernier réseau étant O par hypothèse, il en est de même de la congruence envisagée. D'autre part $(C_{k-1}C_k)$ est conjuguée au réseau $M_k(T_2)$; le réseau M_k (obtenu en soumettant M à k transformations de Laplace successives dans le sens v), orthogonal à une congruence O, est en général 2O.

Par raison de symétrie, le réseau obtenu en soumettant N_{k-2} à k transformations de Laplace successives dans le sens u, soit N_{2k-2}, est 2O.

De même, la congruence $(C_{2k-1}C_{2k})$ est orthogonale au réseau N_{2k-2}; cette congruence est donc en général une congruence 2O. Or, la congruence $(C_{2k-1}C_{2k})$ est conjuguée au réseau $M_{2k}(T_2)$, donc d'après les résultats du n° **1**, ce dernier réseau est 3O. Par raison de symétrie N_{3k-2} est 3O.

En continuant, on voit que si dans la suite de Laplace formée par les réseaux.

$$\ldots,\quad M_n,\quad M_{n-1},\quad \ldots,\quad M_2,\quad M_1,\quad M_0,\quad R,\quad N_0,\quad N_1,\quad \ldots,\quad N_n,\quad \ldots,$$

on considère la chaîne à $k+1$ éléments

$$M_0,\quad R,\quad N_0,\quad N_1,\quad N_2,\quad \ldots,\quad N_{k-2},$$

dont les deux réseaux extrêmes M_0 et N_{k-2} sont O, et si l'on prolonge cette chaîne dans les deux sens (dans le sens v à partir de M_0 et dans le sens u à partir de N_{k-2}), *les réseaux obtenus sont de k en k, à partir de* M_2 *et* N_{k-2}, *respectivement* 2O, 3O, 4O, ..., pO.

La loi d'orthogonalité associe aux suites de réseaux dont il vient d'être question des suites de congruences possédant les mêmes particularités.

L'existence de ces suites de réseaux et de congruences est facile à établir. Les propriétés de ces suites ne dépendent que de la représentation sphérique de l'un de leurs éléments O. On peut donc supposer (en supposant qu'il s'agisse d'une suite de réseaux) que l'un des réseaux O de la suite est porté par une sphère (S) de rayon 1. Soit

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

l'élément linéaire de la sphère rapportée à un système orthogonal (u, v).

En exprimant que le $k^{\text{ième}}$ réseau transformé du réseau sphérique (u, v) dans un sens déterminé, est un réseau O, on sera conduit à une certaine équation de condition entre les fonctions E et G. Cette équation et l'équation de Gauss exprimant que la courbure de la forme $E\,du^2 + G\,dv^2$ est égale à l'unité, constitueront un système aux deux fonctions inconnues E et G propre à déterminer ces fonctions. Toute solution (E, G) de ce système fournira une suite de Laplace du genre étudié, *au parallélisme près*.

8. Sur les suites de Laplace dont les éléments sont O de k en k. — Nous venons de montrer l'existence de suites de Laplace de réseaux et de congruences, telles qu'en prenant les éléments de k en k en suivant la suite dans un sens déterminé, on obtienne une nouvelle suite formée d'éléments :

$$\ldots,\ p\mathrm{O},\ (p-1)\mathrm{O},\ \ldots,\ 3\mathrm{O},\ 2\mathrm{O},\ \mathrm{O},\ \mathrm{O},\ 2\mathrm{O},\ \ldots,\ p\mathrm{O},\ \ldots.$$

Portons notre attention sur les suites, généralisant celles du n° **6**, dans lesquelles les éléments sont O de k en k à partir de l'un d'eux.

Laissant de côté ici l'étude de l'existence de pareilles suites [certaine pour $k = 2$, probable pour $k > 2$ mais semblant difficile à établir ([1])], nous allons montrer que l'on peut, pour ces suites (dans l'hypothèse de l'existence), énoncer un résultat analogue à celui donné au n° **6** pour le cas où $k = 2$.

Supposons que les deux réseaux M_0 et N_{k-2} de la suite de Laplace envisagée dans les numéros qui précèdent, soient O. Le réseau M_k précédant M_0 est, en général, 2O, comme on l'a vu au n° **7**. Plaçons-nous dans le cas où ce réseau serait O au lieu de 2O. Le réseau M_k étant O, la congruence $(\Gamma_{k-1}\Gamma_k)$, qui, d'après le tableau (T_2) (n° **5**) est orthogonale à M_k, est aussi O.

D'autre part, toujours d'après le tableau (T_2), la congruence $(\Gamma_{k-1}\Gamma_k)$ est conjuguée au réseau N_{k-2}; ce dernier étant O par hypothèse, $(\Gamma_{k-1}\Gamma_k)$ *coïncide avec la congruence des normales à la surface qui porte le réseau* N_{k-2}.

Cela exige que le réseau Δ soit confondu avec Γ_{k-1} et D avec Γ_k.

([1]) Pour $k = 1$ les suites en question n'existent que *dans le plan* (*voir* le n° **10**).

Il résulte de là que la congruence $(D_{k-1}D_k)$ *coïncide avec la congruence* $(\Gamma_{2k-1}\Gamma_{2k})$.

Si l'on se reporte au tableau (T_5), on voit que la congruence $(D_{k-1}D_k)$ est orthogonale au réseau M_0; cette congruence, orthogonale à un réseau O est O, et il en est par suite de même de la congruence $(\Gamma_{2k-1}\Gamma_{2k})$.

D'après (T_2), $(\Gamma_{2k-1}\Gamma_{2k})$ est orthogonale au réseau M_{2k}; *ce dernier réseau est donc* O *lui aussi*. On peut donc énoncer ce résultat, qui généralise celui du n° **6** :

Étant donnée une suite $(\mathfrak{S})$ *de réseaux, extraite d'une suite de Laplace en prenant les réseaux de k en k; si dans* $(\mathfrak{S})$ *trois réseaux consécutifs sont* O, *le réseau suivant (dans un sens ou dans l'autre) est également* O, *et par suite tous les réseaux sont* O.

La loi d'orthogonalité donne l'énoncé analogue relatif aux congruences :

Si l'on prend les congruences d'une suite de Laplace de k en k, et si trois congruences consécutives de la suite obtenue sont normales, toutes le sont.

Par un raisonnement analogue à celui qui termine le n° **6**, on établit que :

Si les éléments d'une suite de Laplace (réseaux ou congruences) sont O *de k en k, les éléments* O *de la suite ont de deux en deux même représentation sphérique, de sorte qu'il n'y a que deux représentations sphériques distinctes.*

9. Sur la recherche des congruences normales dont les transformées de Laplace sont normales de deux en deux. — Les résultats du n° **6** conduisent à une méthode de recherche des suites de Laplace formées de congruences normales de deux en deux. Le problème est identique à celui de la recherche des suites de réseaux qui sont O de deux en deux. Si l'on connaît un réseau O donnant lieu à une telle suite, toute congruence orthogonale à ce réseau donne lieu à une suite de Laplace jouissant de la propriété voulue.

Une transformation par parallélisme n'altérant pas la propriété des suites de réseaux dont il est question, il est clair qu'on peut se borner à chercher les réseaux *sphériques* donnant lieu aux suites de Laplace cherchées.

Envisageons sur une sphère (S) de rayon 1, un réseau sphérique $M(u, v)$ répondant à la question. Ses deuxièmes transformés de Laplace dans les deux sens sont O, et il suffit, comme on l'a montré au n° **6**, d'exprimer cette condition, pour avoir le réseau sphérique M le plus général donnant lieu à la suite de Laplace voulue.

Soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

l'élément linéaire de (S) rapportée au réseau $M(u, v)$. Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les cosinus directeurs de la tangente à la courbe u, par X_2, Y_2, Z_2 ceux de la tangente à la courbe v, et par X_3, Y_3, Z_3 ceux du rayon OM de la sphère (S).

Si ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 sont les paramètres normaux des tangentes en M aux courbes u et v du réseau, et si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de M, on a (*voir* le n° **3**) :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi, \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = lm, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi.$$

Or :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,X_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,Y_1, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,Z_1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,X_2, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,Y_2, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,Z_2;$$

on peut donc prendre pour paramètres normaux :

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_1 = X_1, \\ \xi_2 = Y_1, \\ \xi_3 = Z_1; \end{cases}$$

$$(9') \qquad \begin{cases} \eta_1 = X_2, \\ \eta_2 = Y_2, \\ \eta_3 = Z_2; \end{cases}$$

et l'on aura alors

$$h = \sqrt{E}, \qquad l = \sqrt{G},$$
$$m = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Les éléments du premier transformé de Laplace M_1, du réseau M, dans le sens u, sont, comme on l'a rappelé au n° **3** :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\xi} = \dfrac{\partial \xi}{\partial u} - \dfrac{1}{n} \dfrac{\partial n}{\partial u} \xi, & \bar{\eta} = \dfrac{\xi}{n}, \\ \bar{l} = -n \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{l}{n}\right), & \bar{h} = -\dfrac{l}{n}, \\ \bar{m} = \dfrac{1}{n}, & \bar{n} = n\left(mn - \dfrac{\partial^2 \log n}{\partial u \, \partial v}\right). \end{array} \right.$$

Pour le deuxième réseau transformé, M_2, on a, en surlignant d'un double trait les éléments correspondants :

$$\bar{\bar{\xi}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} - \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{n}}{\partial u} \bar{\xi}, \qquad \cdots\cdot$$

M_2 sera un réseau O si

$$\sum \bar{\xi} \bar{\bar{\xi}} = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum \frac{\bar{\xi}}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{n}}\right) = 0$$

ou encore :

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sum \bar{\xi}^2}{\bar{n}^2}\right] = 0.$$

En tenant compte de (9) et (9′), on a

$$\sum \bar{\xi}^2 = \sum \left[\frac{\partial X_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) X_1\right]^2$$
$$= \sum \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \sqrt{E}\, X_3 + \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) X_1\right]^2,$$

$$\sum \bar{\xi}^2 = E + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)\right]^2,$$

$$\bar{n}^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)\right]^2.$$

La condition (11) s'écrit donc :

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\mathrm{E}+\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2+\left[\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)\right]^2}{\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}-\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)\right]^2}\right\}=0.$$

La condition pour que le deuxième réseau transformé de M dans le sens v soit O, se déduit de (12) en permutant E et G ainsi que u et v; on trouve alors

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\mathrm{G}+\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2+\left[\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right]^2}{\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}-\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right]^2}\right\}=0.$$

Une première intégration des équations (12), (13) introduit deux fonctions U, V de u et v respectivement. En remplaçant u par une fonction de v, on peut réduire U et V à l'unité. On obtient alors le système

$$(14)\qquad \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}-\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)\right]^2 = \left[\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)\right]^2+\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2+\mathrm{E},$$

$$(15)\qquad \frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}-\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right]^2 = \left[\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right]^2+\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2+\mathrm{G}.$$

Si aux équations (14) et (15) on ajoute l'équation de Gauss :

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)=-\sqrt{\mathrm{EG}},$$

on obtient un système de trois équations [14, 15, 16], deux du troisième ordre et une du second, aux fonctions inconnues E et G, nécessairement compatible (puisque les représentations sphériques des transformés de Laplace des réseaux portés par les surfaces minima non euclidiennes le vérifient), dont l'intégration fournira, par leur représentation sphérique, les réseaux O se reproduisant O de deux en deux dans la suite de Laplace à laquelle ils donnent naissance.

10. Cas particulier où la suite de Laplace contient deux éléments consécutifs orthogonaux. — On connaît les travaux auxquels ont donné lieu les surfaces de Voss, *qui possèdent deux familles de géodésiques conjuguées*, et les surfaces de Guichard *qui peuvent s'associer deux par deux de façon à former les deux nappes focales d'une congruence rectiligne dans laquelle les réseaux focaux sont orthogonaux* (*formés de lignes de courbure*).

Les propriétés des surfaces de Voss et de Guichard n'ont été découvertes, comme le montre M. B. Gambier dans l'un des Mémoires qu'il a consacrés à ce sujet [*Surfaces de Voss et Guichard* (*Annales de l'École Normale*, 1931)], qu'avec assez de peine par les géomètres successifs. L'ensemble des résultats acquis dans ce domaine, et dus principalement à Voss, Guichard, Razzaboni, Bianchi, MM. Eisenhart, Gambier, Finikoff, est exposé dans le Mémoire cité de M. Gambier.

Récemment, M. Lebel (1), dans un Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques*, a introduit les surfaces de Guichard d'une manière originale.

Je me propose de montrer comment les considérations développées dans les paragraphes qui précèdent, permettent d'unifier des résultats connus, de retrouver simplement la transformation de Guichard des surfaces de Voss, et de donner des aperçus nouveaux sur la belle transformation de ces mêmes surfaces étudiée par Eisenhart, correspondant à la transformation asymptotique de Bianchi-Bäcklund des surfaces à courbure totale constante, pour l'exposé complet de laquelle je renvoie au Mémoire de M. Gambier cité plus haut.

Supposons que les deux réseaux consécutifs M et R (R est transformé de M dans le sens u) de la suite de Laplace envisagée au n° 7

$$\ldots,\quad M_3,\quad M_2,\quad M_1,\quad M,\quad R,\quad N,\quad N_1,\quad N_2,\quad \ldots$$

soient des réseaux O, et conservons toutes les notations du n° **7**.

(1) *Sur les surfaces de Voss et de Guichard*, 2e série, t. LVII, 1933.

Les surfaces M et R portant les réseaux considérés sont alors *deux surfaces de Guichard associées*, et pour avoir toutes les surfaces de Guichard, il suffit de chercher les réseaux O dont les transformés de Laplace dans un sens (u par exemple) sont O.

Avec les notations du n° **7** [ici $k=1$, et la congruence (ΔD) est la congruence des normales à la surface portant le réseau R], on voit que la congruence (CC_1), orthogonale au réseau R, est normale.

Les deux congruences focales du premier réseau focal C de la congruence ($C\Gamma$) des normales à M, étant normales, C est un réseau de Voss.

Donc, si M est un réseau de Guichard se transformant par la méthode de Laplace, dans le sens u, en un réseau de Guichard associé R, le premier réseau focal de la congruence des normales à M (celui pour lequel les courbes u sont arêtes de rebroussement) est un réseau de Voss. Par raison de symétrie, le deuxième réseau focal D de la congruence des normales à R est aussi un réseau de Voss.

Dès que M est connu, R se trouve déterminé par les formules définissant la transformation de Laplace, ainsi que le premier et le deuxième réseau focal C et D de M et R respectivement, qui constituent *deux réseaux de Voss associés*.

Supposons que l'on connaisse *a priori* un réseau de Voss C. Les tangentes aux courbes u de C forment une congruence normale; les développables de la congruence déterminent, sur une surface quelconque orthogonale aux rayons de la congruence, un réseau orthogonal M, qui, se transformant par la méthode de Laplace dans le sens u, en un réseau R orthogonal à la deuxième congruence focale du réseau C (donc en un réseau O), est un réseau de Guichard. Le deuxième réseau focal D de la congruence des normales à R, est, comme on l'a vu plus haut, un réseau de Voss associé à C.

La transformation qui fait passer de C à D est *la transformation de Guichard des surfaces* (*des réseaux*) *de Voss*.

En remplaçant M par une surface parallèle quelconque, on remplace D par un réseau parallèle.

En échangeant les rôles de u et v sur C, on fait correspondre à C une série de nouveaux réseaux transformés (D′) (définis à un parallélisme près).

En opérant sur l'un des réseaux transformés D ou D', comme on l'a fait sur le réseau initial, on obtient des chaînes de réseaux transformés, qui ne s'arrêtent que si l'on obtient un réseau sphérique. Dans ce dernier cas d'ailleurs, la connaissance d'un réseau admettant pour représentation sphérique le réseau sphérique en question, permet d'amorcer une nouvelle chaîne.

Notons que le réseau C est orthogonal à la congruence MR (*voir* le Tableau T_2), et que, de même, le réseau transformé D par la méthode de Guichard est orthogonal à (MR). Les deux réseaux R et D, orthogonaux à une même congruence sont *parallèles;* donc, dans une chaîne de réseaux de Voss transformés les uns des autres par la méthode de Guichard *tous les réseaux sont parallèles*.

Il résulte immédiatement de là que si l'on joint les points correspondants de deux réseaux quelconques d'une chaîne de Guichard, et si l'on envisage le point partageant les segments obtenus dans un rapport constant arbitraire, ce point décrit un réseau de Voss.

Montrons maintenant comment, en restant dans l'esprit de ce Mémoire, on peut déterminer (au parallélisme près) les surfaces de Guichard, et par suite leurs transformées de Voss.

$M(u, v)$ étant une surface quelconque de Guichard, la représentation sphérique de M sur la sphère S de centre O et de rayon 1, est un réseau parallèle au réseau de courbure de M. Les suites de Laplace issues de deux réseaux (ou de deux congruences) parallèles, étant formées d'éléments deux à deux parallèles, on voit aussitôt que l'un des réseaux transformés du réseau sphérique ci-dessus est O, et que par suite :

La représentation sphérique d'un réseau de Guichard est un autre réseau de Guichard.

Pour avoir les réseaux de Guichard, il suffira donc de chercher les réseaux O dont les transformés dans un sens par la méthode de Laplace sont O. Le réseau le plus général jouissant de cette propriété est la représentation sphérique du réseau de Guichard le plus général.

Désignons par $M(u, v)$ un réseau sphérique de Guichard, tracé sur la sphère S. Supposons que le réseau R de Guichard associé à M, soit le transformé de M dans le sens u.

Soit

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2,$$

l'élément linéaire de S rapporté au réseau (u, v).

Les paramètres normaux (ξ_i, η_i), $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ du réseau M et de son transformé ont les expressions données au numéro précédent.

Exprimons que le réseau R est O; la condition est

$$\sum \xi\bar{\xi} = 0,$$

soit

$$\sum \xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi\right) = 0,$$

et, en tenant compte des valeurs (9) de ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$\frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

En remplaçant n par son expression $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)$, nous obtenons finalement la condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = 0. \tag{17}$$

L'équation (17), jointe à l'équation de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\sqrt{EG}, \tag{18}$$

qui, en vertu de (17) même prend la forme simple

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\sqrt{EG}, \tag{19}$$

fournit un système de deux équations [(17), (19)] dont l'intégration donne les coefficients E et G de la représentation sphérique de Guichard.

On déduit de l'équation (17)

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = V \qquad (V = \text{fonction de } v).$$

En changeant le paramètre v, on peut prendre $V = 1$; on a alors

$$\sqrt{E} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v},$$

et l'on est conduit à la forme caractéristique suivante (obtenue différemment par M. Lebel dans le Mémoire cité plus haut) de l'élément linéaire de la représentation sphérique des surfaces de Guichard

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 du^2 + G\, dv^2.$$

Cette forme de l'élément linéaire appartient aussi aux surfaces de Guichard elles-mêmes, et non pas seulement à leur représentation sphérique, et se prête à des méthodes analytiques de transformations pour l'exposé desquelles je renvoie au Mémoire de M. Lebel.

Demandons-nous s'il existe des suites de Laplace dont tous les réseaux sont des réseaux de Guichard.

Pour qu'un réseau O donne lieu à une telle suite, il faut et il suffit, d'après les résultats du n° 8, *que ses transformés de Laplace dans les deux sens soient* O.

En supposant le réseau O envisagé, sphérique (négligeant ainsi une transformation par parallélisme), la condition s'exprime, avec les notations du paragraphe actuel, par les deux équations

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0.$$

Le système de ces deux équations est manifestement incompatible avec l'équation (18) de Gauss.

Il n'existe donc pas de suites de Laplace dont tous les réseaux sont O (*réseaux de Guichard*), tout au moins si l'on n'a égard qu'aux réseaux non tracés sur des surfaces développables. On voit aussitôt que les surfaces développables proprement dites sont à écarter, et que *seul le plan* peut donner des réseaux O donnant lieu à des suites de Laplace dans lesquelles *tous les réseaux sont* O.

Les réseaux plans donnant lieu à de telles suites sont d'ailleurs les projections des réseaux de l'espace dont l'une des congruences focales est normale et dont l'autre appartient à un complexe linéaire, sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe (1).

11. La transformation d'Eisenhart des surfaces de Voss, rattachée a la transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard. — Ce dernier paragraphe est consacré à une étude nouvelle, et purement géométrique, de la transformation des surfaces de Voss envisagée par M. Eisenhart dans son Mémoire de 1914, cité dans l'introduction.

En étudiant la possibilité de transformer, par la méthode de Ribaucour (par systèmes cycliques, ou enveloppes de sphères), une surface de Guichard en une autre surface de Guichard, j'ai reconnu simultanément, *que le problème est possible, et que cette nouvelle méthode de transformation des surfaces de Guichard correspond à la transformation d'Eisenhart de leurs développées de Voss.*

Il était dès lors naturel d'essayer de rattacher les propriétés de la transformation d'Eisenhart à celles de la transformation de Ribaucour. La possibilité de *ramener à une inversion suivie d'une transformation par parallélisme* (transformation de Combescure) toute transformation de Ribaucour, conduit, en particulier, sans effort, à la notion de *surfaces spéciales* de Voss qui joue un rôle si important dans la présentation de la méthode d'Eisenhart.

Je commence par rappeler très brièvement en quoi consiste la transformation d'Eisenhart.

Envisageons une surface pseudosphérique quelconque Σ (de courbure -1 par exemple) et donnons-nous une constante arbitraire α. Il existe ∞^1 congruences (pseudosphériques) ayant Σ pour première nappe focale et α pour angle des plans focaux. La deuxième nappe focale Σ' de cette congruence est une nouvelle surface pseudosphérique de même rayon que Σ, et, sur Σ et Σ', les asymptotiques se correspondent.

A la surface Σ correspondent une infinité de surfaces de Voss, parallèles entre elles au sens de Peterson, leur réseau géodésique correspondant aux asymptotiques de Σ.

(1) *Voir* la *Thèse* de M. Jacques. Paris, 1922.

De même, l'une quelconque des transformées Σ' de Σ donne lieu à une infinité de surfaces de Voss.

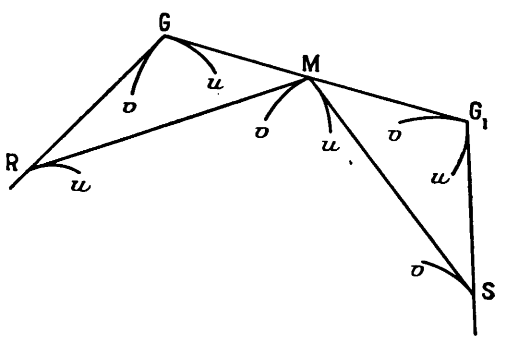
Eisenhart a été conduit à sa méthode de transformation en cherchant à associer les surfaces V relatives à Σ aux surfaces V' relatives à Σ'. Il a montré qu'à chaque surface V on peut associer ∞^1 surfaces V', jouissant entre autres propriétés, de la propriété suivante (caractéristique de la transformation) : *les tangentes aux courbes du réseau de Voss, de même nom, sur* V *et l'une quelconque de ses associées* V', *sont concourantes.*

Une transformation convenable par parallélisme de Peterson, permet de placer deux surfaces de Voss transformées l'une de l'autre, en *correspondance perspective* (surfaces spéciales de Voss).

Je me borne à ces indications, renvoyant pour une analyse complète de la méthode d'Eisenhart au Mémoire de M. Gambier de 1931 cité plus haut.

Envisageons maintenant (*fig.* 6) une surface de Guichard quel-

Fig. 6.



conque G. Soient (u, v) le réseau des lignes de courbure de G, et G_1 la surface de Guichard associée à G obtenue en transformant le réseau (u, v), par la méthode de Laplace dans le sens u.

Considérons une congruence cyclique quelconque (MR) harmonique au réseau (G) [M est sur GG_1]. La transformation de Laplace effectuée dans le sens u, transforme G en G_1, et la congruence cyclique (MR) en une congruence (MS) qui, étant harmonique au réseau orthogonal (G_1), est également cyclique.

Le réseau (M), conjugué à la congruence (de Guichard) (GG_1), jouit donc de cette propriété que ses deux congruences focales sont cycliques, et d'ailleurs, *tout réseau conjugué à une congruence de Guichard possède la propriété énoncée* (¹).

Cela étant, appliquons au réseau G la transformation de Ribaucour, définie par la congruence cyclique (MR), qui remplace la surface G successivement par les ∞^1 surfaces orthogonales aux cercles de la congruence cyclique envisagée.

Je dis que s'il existe, parmi les ∞^1 réseaux transformés de G, des réseaux de Guichard autres que G, leur nombre est nécessairement limité.

Si les ∞^1 réseaux transformés de G par (MR) étaient de Guichard, leurs transformés de Laplace dans le sens u le seraient aussi, et l'on pourrait réaliser un mouvement *continu* de la droite GG_1 au cours duquel les points G et G_1 décriraient des cercles d'axes *différents* (MR et MS), ce qui est impossible.

Il résulte même du raisonnement précédent, que *le nombre maximum de surfaces de Guichard pouvant faire partie de la famille orthogonale aux cercles d'un système cyclique déterminé est deux.*

L'existence de trois surfaces de Guichard, dans une même famille, entraînerait en effet l'existence d'un cône de révolution de sommet M (*fig.* 6), contenant deux cercles ayant pour axes, l'un MR, l'autre MS, ce qui ne peut avoir lieu que si MR et MS sont en prolongement.

Si donc il est possible de transformer, d'une façon continue, par la méthode de Ribaucour, un réseau de Guichard G_1 en une suite de réseaux analogues, les paramètres de la transformation doivent affecter la congruence cyclique qui sert de base à la transformation.

Il est dès lors intéressant de se poser le problème suivant : *Un réseau de Guichard étant donné, existe-t-il des transformations de Ribaucour le transformant en un autre réseau de Guichard ?*

C'est ce problème que nous allons résoudre.

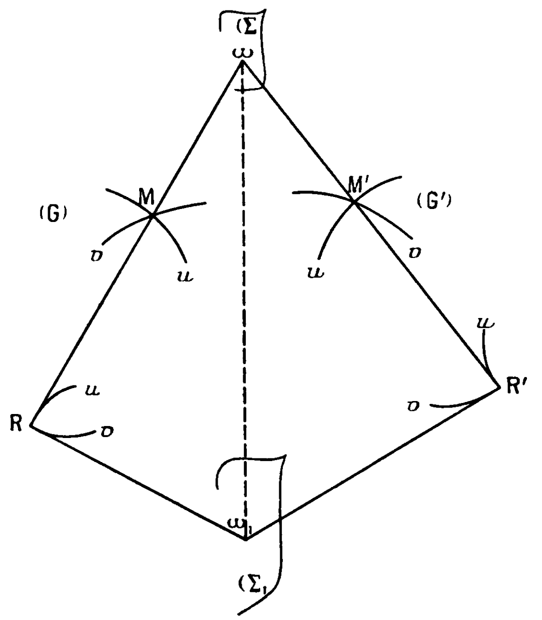
Soit G (*fig.* 7) un réseau de Guichard arbitrairement donné; M le point qui le décrit; u et v les lignes de courbure de la surface G, et R son premier centre de courbure.

(¹) Une étude spéciale des congruences cycliques se transformant en congruences analogues par la méthode de Laplace, serait sans doute intéressante.

Par hypothèse, la tangente à la courbe v du réseau R (u, v) (réseau de Voss) décrit une congruence normale.

Désignons par G′ un réseau de Guichard *transformé de Ribaucour de* G, par M′ le point (homologue de M) qui le décrit, et par u et v les lignes de courbure de G′ correspondant aux lignes u et v de G.

Fig. 7.



G et G′ sont les deux nappes focales de l'enveloppe d'une famille de sphères, dont les centres sont sur une certaine surface Σ, les points de contact M et M′ étant symétriques par rapport au plan tangent en ω à Σ et les courbes de Σ correspondant aux lignes de courbure u, v de G et G′ déterminant sur la surface un réseau conjugué.

Considérons les deux congruences (MR) et (M′R); elles déterminent sur Σ un même réseau conjugué (u, v). Il résulte alors d'un théorème bien connu [1] que les droites joignant les foyers de même rang sur MR et M′R engendrent des congruences dont les développables

[1] *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* t. IV, p. 108.

correspondent aux courbes u, v du réseau ; et qu'en outre, ces droites sont des tangentes conjuguées sur la surface enveloppée par le plan (ωMM′). On conclut de là que la congruence (RR′) est conjuguée aux deux réseaux R et R′. Ces deux derniers réseaux étant conjugués à une même congruence sont, comme l'on sait, *harmoniques à une même congruence*. Cela exige que les tangentes en R et R′ aux courbes v des deux réseaux se coupent en un certain point ω_1 ; la congruence harmonique commune est ($\omega\,\omega_1$).

Les tangentes aux courbes v sur G et G′ se coupent en un point de $\omega\omega_1$ équidistant de M et M′ (propriété de la transformation de Ribaucour); donc $\omega\omega_1$ est dans le plan médiateur de MM′, qui est tangent en ω à Σ; la surface Σ est par suite l'une des nappes focales de la congruence ($\omega\omega_1$), le plan focal correspondant bissectant le dièdre (R, $\omega\omega_1$, R′); l'autre nappe focale est une certaine surface Σ_1.

Le fait que les tangentes conjuguées de même rang des deux réseaux de Voss R et R′ se coupent, est, comme on l'a rappelé plus haut, caractéristique de la transformation d'Eisenhart. Donc, *les deux réseaux* R *et* R′ *sont transformés d'Eisenhart l'un de l'autre.*

Réciproquement, supposons que les deux réseaux R et R′ soient en transformation d'Eisenhart; les tangentes aux courbes u des deux réseaux se coupent en un point ω décrivant un réseau (Σ) *conjugué aux congruences normales décrites par les deux tangentes*, et alors, les surfaces normales aux deux congruences (surfaces de Guichard) sont deux à deux en transformation de Ribaucour.

En faisant jouer aux courbes v le rôle qu'on a fait jouer aux courbes u sur R et R′ (le point ω_1 où se coupent les tangentes aux courbes v remplaçant le point ω), on voit que les surfaces de Guichard normales aux congruences (Rω_1), (R′ω_1) sont aussi deux à deux en transformation de Ribaucour.

On a observé plus haut que le plan focal de la congruence ($\omega\omega_1$) relatif au foyer ω est l'un des plans bissecteurs du dièdre (R, $\omega\omega_1$, R′); le rôle symétrique que jouent u et v sur R et R′ montre que le plan focal relatif à ω_1 est l'autre bissecteur du dièdre mentionné, de sorte que la congruence ($\omega\omega_1$) est *normale* (cette propriété se trouve indiquée dans le Mémoire de M. Gambier).

Le problème que nous nous étions posé est complètement résolu, et sa solution, en même temps qu'elle a prouvé l'existence de surfaces de Guichard transformées de Ribaucour d'une surface de Guichard *arbitrairement donnée*, a mis en évidence un lien remarquable entre le problème de la transformation de Ribaucour d'une congruence de Guichard, et celui de la transformation d'Eisenhart de sa développée de Voss. Nous résumons cette solution :

Soient G une surface Guichard quelconque rapportée à ses lignes de courbure, $M(u, v)$ l'un quelconque de ses points, R sa développée de Voss lieu des arêtes de rebroussement des développables des normales à G le long des courbes u.

Transformons R par la méthode d'Eisenhart, soit R′ une surface de Voss transformée, les développantes de R′ normales aux tangentes le long des géodésiques u sont parallèles à une transformée de Ribaucour G′ de G.

Pour fixer complètement G′ dans la famille de surfaces parallèles, il suffit de dire que c'est la seconde nappe de l'enveloppe de la famille des sphères de centre ω (ω est le point où se coupent les tangentes aux courbes u de R et R′) et de rayon ωM.

L'énoncé que voici condense l'étude qui vient d'être faite :

Les transformées de Ribaucour d'une famille (G) *de surfaces de Guichard parallèles, sont les développantes* (*suivant une famille de géodésiques convenable*) *des transformées d'Eisenhart de la développée de Voss de* (G).

Le lien exprimé par l'énoncé qui précède entre la transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard et la transformation d'Eisenhart des surfaces de Voss, explique géométriquement, de la façon la plus simple, la possibilité de mettre en perspective deux surfaces quelconques transformées d'Eisenhart l'une de l'autre, moyennant une transformation par parallélisme de Peterson de chacune d'elles.

Envisageons deux surfaces de Voss R et R′, en transformation d'Eisenhart, et soient G et G′ deux de leurs développantes de Guichard transformées de Ribaucour l'une de l'autre.

Toute transformation par parallélisme des réseaux de Guichard G et G′ (transformation de Combescure des surfaces G et G′) remplace les réseaux de Voss associés R et R′ par des réseaux *parallèles;* et l'on sait d'autre part que tout couple de surfaces transformées de Ribaucour l'une de l'autre, peut toujours être transformé, moyennant une transformation de Combescure convenable ([1]), en un nouveau couple de surfaces *transformées par inversion l'une de l'autre*.

Cela étant, au moyen d'une transformation de Combescure, transformons les deux surfaces de Guichard G et G′ en deux nouvelles surfaces G_0 et G'_0 inverses l'une de l'autre dans une inversion de pôle O. G_0 et G'_0 étant respectivement parallèles à G et G′ sont, elles aussi, des surfaces de Guichard (en transformation spéciale de Ribaucour).

Désignons par R_0 et R'_0 les développées de Voss de G_0 et G'_0. On a vu plus haut (théorème de Darboux rappelé) que la droite joignant les différents couples de points homologues sur R_0 et R'_0, est tangente à la surface enveloppée par le plan de deux normales correspondantes de G_0 et G'_0. Ici cette surface se réduit visiblement au point O. La droite $R_0 R'_0$ joignant les couples de points homologues sur R_0 et R'_0 *passe donc constamment par* O, et les surfaces de Voss R_0 et R'_0 sont en correspondance perspective (surfaces spéciales), tout comme les surfaces de Guichard associées G_0 et G'_0.

Nous terminerons par la remarque suivante.

Effectuons sur les deux réseaux de Guichard les plus généraux, G et G′, transformés de Ribaucour l'un de l'autre, envisagés plus haut, une transformation de Laplace dans le sens u. On voit aussitôt que les deux réseaux transformés G_1 et G'_1 sont eux aussi transformés de Ribaucour l'un de l'autre. Les réseaux de Voss R_1 et R'_1 attachés à G_1 et G' sont, d'après ce qui précède, en transformation d'Eisenhart; or, ces réseaux sont les réseaux *associés* à R et R′ par la méthode de Guichard (voir le numéro X); donc :

Si deux réseaux de Voss sont en transformation d'Eisenhart, il en est de même de leurs associés.

([1]) Pour l'exposé détaillé de cette transformation de Combescure, *Voir* L. Bianchi, *Lezioni di geométria differenziale*, vol. II, p. 181.