JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. LEAU

Théorème fondamental d'existence pour un système mixte fonctionnel différentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, n° 1-4 (1938), p. 275-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_275_0>

Théorème fondamental d'existence pour un système mixte fonctionnel différentiel;

Par L. LEAU,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

INTRODUCTION.

Les théorèmes d'existence fournissent un premier point d'appui nécessaire pour entreprendre l'étude approfondie des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Si l'on envisage les équations mixtes fonctionnelles différentielles qui en constituent une extension naturelle, le même processus s'impose à l'esprit.

Assurément le problème de Cauchy ne présente la question que sous l'un de ses aspects et l'aborder par la méthode des fonctions majorantes c'est se restreindre aux fonctions analytiques. L'importance de ces considérations a depuis longtemps été mise en lumière, notamment par MM. É. Picard et J. Hadamard. Mais le problème lui-même n'en reste évidemment pas moins au premier plan du domaine à explorer. C'est à ce point de vue que l'on se place ici.

Dans une Note aux *Comptes rendus* du 26 novembre 1894 j'énonçais, sous certaines conditions, un théorème général d'existence pour un système d'équations mixtes, mis sous une forme normale et qui est le prolongement du théorème classique fondamental relatif à un système d'équations aux dérivées partielles. Lorsque, en 1924, j'eus l'idée d'en publier la démonstration, je constatai qu'elle avait été égarée et j'en édifiai une autre, certainement différente. Fondée sur la méthode des fonctions majorantes elle utilisait une remarque (*Comptes rendus*, 1er semestre 1924, p. 453) qui ramène un système majoré d'équations différentielles à une équation définissant une fonction implicite. Enfin, en 1936, désireux de faire connaître cette démonstration, j'y apportai une grande simplification à l'aide d'une autre remarque qui remplace un système mixte majoré par un système d'où les substitutions (majorées) sont en quelque sorte expulsées.

C'est cette démonstration, précédée de celle du théorème classique pour un système d'équations aux dérivées partielles, qu'on lira ci-dessous.

Jusqu'à présent, autant que je sache, lorsque l'on emploie le calcul des limites, c'est-à-dire la méthode des fonctions majorantes, on remplace le système proposé par un système très simple, mais semblable. Il me semble donc digne d'attention qu'ici, grâce à des procédés faciles, on remplace le système proposé (aux dérivées partielles ou mixte) par un système de comparaison ou même une équation, *d'une autre nature*, qui ne contient donc ni fonctions de substitution, ni dérivées différentes, c'est-à-dire qui est une simple équation définissant une fonction implicite. Peut-être cette idée est-elle susceptible d'autres réalisations.

1. Fonctions majorantes fournies par des dérivées. — Soit la série entière à termes positifs ou nuls

$$\Sigma a_i x^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, +\infty), \tag{1}$$

les séries

$$a_0 + x \Sigma i a_i x^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty), \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p \Sigma i(i-1)\ldots(i-p+1) a_i x^{i-p} \\ \qquad (i = p, p+1, \ldots, +\infty) \end{array} \right. \tag{3}$$

sont majorantes par rapport à la première et chacune par rapport à la précédente (p diminuant); de plus les coefficients des termes semblables ne diffèrent que par des facteurs numériques positifs, indépendants des coefficients a.

Des séries ainsi liées formellement sont simultanément convergentes dans un même cercle. Dans ce cas, si la somme de la série (1) est

$f(x)$, celles des séries (2), (3) sont

$$a_0 + xf'(x), \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p f^{(p)}(x)$$

et chacun des développements de Taylor est majorant par rapport au précédent.

Tout ceci s'étend aux séries entières multiples à coefficients positifs ou nuls. Ainsi, dans le cas de deux variables, la série

$$\Sigma a_{ij} x^i y^j \tag{4}$$

admet pour séries majorantes

$$\Sigma a_{0n} y^n \quad + x \Sigma i a_{ij} x^{i-1} y^j \qquad (n \geqq 0,\ i \geqq 0,\ j \geqq 0), \tag{5}$$

$$\Sigma a_{m0} x^m \quad + y \Sigma j a_{ij} x^i y^{j-1} \qquad (m \geqq 0,\ i \geqq 0,\ j \geqq 1), \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma a_{m.n} x^m y^n + x^p y^q \sum \dfrac{i!\,j!}{(i-p)!\,(j-q)!} a_{ij} x^{i-p} y^{j-q} \\ \qquad (p \text{ et } q \text{ fixes, } i \geqq p,\ j \geqq q,\ m < p \text{ ou } r < q). \end{array} \right. \tag{7}$$

Elles sont convergentes dans un même système de cercles. S'il existe un tel système à rayons non nuls et si la série (4) représente la fonction $f(x, y)$, les suivantes sont

$$f(0, y) + x f'_x(x, y) = g_{1.0}(x, y),$$
$$f(x, 0) + y f'_y(x, y) = g_{0.1}(x, y),$$
$$\Sigma a_{m.n} x^m y^n + x^p y^q f^{(p+q)}_{x^p y^q} = g_{p.q}(x, y) \qquad (m < p \text{ ou } n < q).$$

2. Usage de ces fonctions dans l'étude des équations différentielles. Exemples. — D'ordinaire l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{8}$$

est ramenée à un système d'équations différentielles du premier ordre lorsque l'on veut établir l'existence des solutions holomorphes. On peut la traiter directement, par exemple par la méthode des limites. Supposons donc F holomorphe par rapport aux différentes lettres dans le voisinage d'un point qu'il est permis de prendre à l'origine; on peut même admettre qu'elle s'y annule (il suffirait de changer linéairement la fonction inconnue).

Je prends l'équation de comparaison

$$(9)\qquad y^{(n)} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y+y'+\ldots+y^{(n-1)}}{R}\right)} - M.$$

Je lui substitue la nouvelle équation

$$(10)\qquad y^{(n)} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1}{R}xy^{(n)}\right)} - M.$$

Il est clair que les coefficients du développement formel calculé avec (9) en vue de la solution cherchée sont majorés par ceux que fournit l'équation (10).

Posant $y^{(n)} = z$ nous avons avec cette dernière

$$(11)\qquad z = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1}{R}xz\right)} - M,$$

équation qui, en z, admet une solution holomorphe et une seule, nulle à l'origine. D'où pour y une et une seule, nulle à l'origine ainsi que ses n premières dérivées.

On voit donc comment, en employant la méthode des fonctions majorantes, calcul des limites de Cauchy, on ramène la démonstration de la convergence des solutions formelles à la simple constatation de l'existence d'une fonction implicite.

Dans une Note intitulée *Sur certaines formes de fonctions majorantes* et insérée au *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy*, 1924, j'ai passé en revue les cas les plus classiques. Je n'y reviens pas, sauf pour faire remarquer que la substitution de nouvelles fonctions majorantes aux anciennes peut avoir pour effet, ce qui était évident *a priori*, de réduire le rayon de convergence minimum assigné aux solutions. Ainsi, avec un système d'équations linéaires,

$$(12)\qquad y_i' = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on se sert de l'équation de comparaison

$$(13)\qquad y' = \frac{M}{1-\frac{x}{r}}(1+ny)$$

que nous remplaçons par la nouvelle

$$y' = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}(1 + ny'x), \tag{14}$$

d'où

$$y' = \frac{M}{1 - x\left(\frac{1}{r} + nM\right)}.$$

Tandis que le rayon de convergence de la solution de (13) est r, celui de la solution de (14) est $\frac{r}{1 + nMr}$.

Mais l'inconvénient n'est pas fort grand, car, à ce point de vue, le calcul des limites n'est pas le meilleur; il est surtout une méthode pour établir l'existence des solutions.

5. Application au théorème fondamental concernant les équations aux dérivées partielles. — Soit un système d'équations aux dérivées partielles mis sous forme normale

$$\frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi_1, \qquad \frac{\partial^{r_2} u_2}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial^{r_m} u_m}{\partial x_1^{r_m}} = \Phi_m, \tag{15}$$

dans lequel les lettres Φ désignent des fonctions des variables x_i, des fonctions inconnues u_i, de leurs dérivées

$$u_{i;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$
$$(\alpha_1 < r_i,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leqq r_i,\ i = 1, 2, \dots, m),$$

holomorphes au voisinage d'un point que l'on a ramené à l'origine. On sait que, par un changement linéaire des fonctions inconnues on peut supposer les conditions initiales telles que, ordonné par rapport à x_1, le développement de chaque fonction u_i doive commencer par un terme de degré r_i au moins, et même que les seconds membres des équations proposées soient nulles à l'origine (¹).

(¹) *Voir*, par exemple GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 5ᵉ édition, t. 2, p. 376. Il suffit d'imiter ici le raisonnement qui s'y trouve exposé.

Si r est le plus grand des r_i, à chacune des fonctions inconnues u_i on peut associer une autre fonction U_i telle que $\frac{\partial^{r-r_i} U_i}{\partial x_1^{r-r_i}} = u_i$ et dont le développement, ordonné par rapport à x_1, commence par un terme de degré r au moins.

Nous avons ainsi, en U_i, un système (16), analogue au système (15), mais où tous les r_i sont égaux à r, et la question est de prouver la convergence des développements formels. On peut remplacer les seconds membres par une même fonction majorante où les variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ jouent le même rôle. Dès lors, posant $x_1 = x$, $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = y$, on est ramené à la recherche d'une seule fonction U satisfaisant à une équation

$$\frac{\partial^r U}{\partial x^r} = F \tag{17}$$

et dont le développement est formellement défini.

Or, *on majore ce développement* en remplaçant dans F

$$\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2} U}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}} \quad (\beta_1 + \beta_2 < r, \ \beta_2 > 0) \qquad \text{par} \quad x^{r-(\beta_1+\beta_2)} \frac{\partial^r U}{\partial x^{r-\beta_2} \partial y^{\beta_2}}$$

et

$$\frac{\partial^{\beta} U}{\partial x^{\beta}} \quad (\beta < r - 1) \qquad \text{par} \quad x^{r-1-\beta} \frac{\partial^{r-1} U}{\partial x^{r-1}}.$$

L'équation (17) ainsi modifiée peut, en majorant le second membre, être remplacée, par une équation de la forme

$$\frac{\partial^r U}{\partial x^r} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y}{R}\right)\left[1 - \frac{\frac{\partial^{r-1} U}{\partial x^{r-1}} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^{r-1} \partial y} + \ldots + \frac{\partial^r U}{\partial y^r}}{R'}\right]} - M. \tag{18}$$

On achève la démonstration en reprenant, à peu de chose près, un calcul connu. Si A est plus grand que 1 on force les coefficients du développement en remplaçant l'équation (18) par l'équation

$$\frac{\partial^r U}{\partial x^r} = \frac{M}{\left(1 - \frac{Ax+y}{R}\right)\left[1 - \frac{\frac{\partial^{r-1} U}{\partial x^{r-1}} + \frac{\partial^r U}{\partial x^{r-1} \partial y} + \ldots + \frac{\partial^r U}{\partial y^r}}{R'}\right]} - M. \tag{19}$$

Enfin, si l'on peut trouver une solution qui soit une fonction de $Ax+y=z$, régulière pour $z=0$ et à coefficients nuls ou positifs, son développement par rapport à x et à y aura ses coefficients au moins égaux aux coefficients des termes semblables du développement relatif à la solution de (19) envisagée d'abord.

On a ainsi l'équation

$$(20)\qquad A^r\frac{d^rU}{dz^r}=\frac{M}{\left(1-\frac{z}{R}\right)\left[1-\dfrac{A^{r-1}\dfrac{d^{r-1}U}{dz^{r-1}}+(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+1)\dfrac{d^rU}{dz^r}}{R'}\right]}-M.$$

Or elle va admettre une solution régulière, nulle ainsi que ses $r-1$ premières dérivées, pour $z=0$, à coefficients positifs, si A est assez grand.

Posons $\frac{d^{r-1}U}{dz^{r-1}}=V$ on la met sous la forme

$$(21)\qquad \left(A^r-\frac{A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+1}{R'}M\right)\frac{dV}{dz}$$
$$=\frac{M}{1-\frac{z}{R}}-M+MA^{r-1}V+A^{2r-1}V\frac{dV}{dz}+A^r(A^{r-1}+\ldots+1)\left(\frac{dV}{dz}\right)^2.$$

Cette équation admet en $\frac{dV}{dz}$ une racine holomorphe des différentes lettres pour $z=V=0$; $\frac{dV}{dz}=\psi(z,\ V)$ et cette dernière équation donne une fonction V de z dont les coefficients sont positifs ou nuls, si $A^r>\frac{A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+1}{R'}$ M (condition facile à réaliser), ainsi que le montre l'équation (21) que l'on peut dériver indéfiniment.

On peut d'ailleurs ne pas faire appel à l'intégration de la dernière équation différentielle. Le coefficient de $\frac{dV}{dz}$ dans le premier membre de l'équation (21) étant supposé positif on majore le développement en remplaçant dans le membre de droite V par $z\frac{dV}{dz}$ et l'on a

$$(22)\qquad \left(A^r-\frac{A^{r-1}+\ldots+1}{R'}M\right)\frac{dV}{dz}$$
$$=\frac{M}{1-\frac{z}{R}}-M+MA^{r-1}z\frac{dV}{dz}+[A^{2r-1}z+A^r(A^{r-1}+\ldots+1)]\left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

équation qui définit une fonction implicite $\frac{dV}{dz}$ de z, régulière et nulle pour $z = 0$ et qui en fournit, par dérivation, un développement à coefficients positifs. Ce calcul ne suppose donc finalement que des quadratures grâce à l'application renouvelée du principe énoncé au n° **1**.

4. De certaines fonctions majorantes dans le cas de substitutions. — *Cas d'une variable.* — On donne une substitution $x^{(1)} = \varphi(x)$, φ étant régulier et nul à l'origine, soit une fonction $\psi(x)$ majorante de φ

$$\psi(x) = \frac{hx}{1 - \frac{x}{\rho}}. \tag{23}$$

D'autre part nous avons une série entière $g(x)$

$$\Sigma a_i x^i \tag{24}$$

à coefficients positifs ou nuls, majorante d'un développement donné $f(x)$. Si l'on effectue dans ce dernier (convergent ou non) la substitution $\varphi(x)$, la série $g[\psi(x)]$ est majorante par rapport à la série $f[\varphi(x)]$. Or si l'on suppose $h < 1$ et que l'on remplace

$$a_i x^i \left(\frac{h}{1 - \frac{x}{\rho}}\right)^i \quad \text{par} \quad a_i x^i \sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^n},$$

donc $g[\psi(x)]$ par le produit de séries

$$g(x) \frac{1}{1-h} \frac{1 - \frac{x}{\rho}}{1 - \frac{x}{\rho(1-h)}},$$

on majore le développement en série.

Pour ne pas nous restreindre à l'hypothèse $h < 1$ prenons un membre k supérieur à h et remplaçons

$$a_i x^i \left(\frac{h}{1 - \frac{x}{\rho}}\right)^i \quad \text{par} \quad a_i k^i x^i \left[\frac{h}{k\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)}\right]^i,$$

puis par

$$a_i k^i x^i \sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{k^n \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^n},$$

nous constatons que le développement de

$$(25) \qquad g(kx) \frac{k}{k-h} \frac{1 - \frac{x}{\rho}}{1 - \frac{kx}{\rho(k-h)}}$$

majore celui de $g[\psi(x)]$.

De plus, si l'un est convergent dans le voisinage de l'origine, il en est de même de l'autre et de $g(x)$.

Cas de deux variables. — On donne la substitution

$$x^{(1)} = \varphi_1(x, y), \qquad y^{(1)} = \varphi_2(x, y),$$

φ_1 et φ_2 réguliers et nuls pour $x = y = 0$. Soit une substitution majorante

$$(26) \quad x^{(2)} = \psi_1(x, y) = \frac{ax + by}{1 - \frac{x+y}{\rho}}, \qquad y^{(2)} = \psi_2(x, y) = \frac{cx + dy}{1 - \frac{x+y}{\rho}},$$

a, b, c, d, r positifs. Proposons-nous de trouver trois nombres positifs λ, μ et h tels que

$$(27) \qquad \lambda x^{(2)} + \mu y^{(2)} = h \frac{(\lambda x + \mu y)}{1 - \frac{x+y}{\rho}}.$$

On doit avoir

$$(28) \qquad \begin{cases} \lambda(a-h) + \mu c = 0, \\ \lambda b + \mu(d-h) = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(29) \qquad (a-h)(d-h) - bc = 0.$$

Les racines de l'équation (29) sont réelles et séparées par a et d; on prendra la plus grande et, pour λ et μ des nombres positifs, tels que

$$(30) \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c}{h-a} = \frac{h-d}{b}.$$

Cela posé, si nous avons une série entière en x et y, $f(x, y)$ majorée par une série $g(x, y)$ (ayant, ou non, un couple de cercles de convergence de rayons non nuls) du type

$$\sum_{0}^{+\infty} a_i(\lambda x + \mu y)^i, \tag{31}$$

soit $g(\lambda x + \mu y)$, le développement de $f(\varphi_1, \varphi_2)$ sera majoré par celui de $g(\psi_1, \psi_2)$. Or $a_i(\lambda x^{(2)} + \mu y^{(2)})^i$ devient

$$a_i(\lambda x + \mu y)^i \frac{h^i}{\left(1 - \frac{x+y}{\rho}\right)^i},$$

ou, en introduisant un nombre k supérieur à h,

$$a_i(\lambda x + \mu y)^i k^i \left[\frac{h}{k\left(1 - \frac{x+y}{\rho}\right)}\right]^i.$$

Donc, achevant comme dans le premier cas, $g(\psi_1, \psi_2)$ a son développement majoré par celui de

$$g[k(\lambda x + \mu y)] \frac{k}{k-h} \frac{1 - \frac{x+y}{\rho}}{1 - \frac{k(x+y)}{\rho(k-h)}}. \tag{32}$$

De plus les développements en question sont simultanément convergents dans le voisinage de $x = y = 0$ et, dans ce cas, il en est de même de $g(\lambda x + \mu y)$, c'est-à-dire de $g(x, y)$.

5. Application à une équation différentielle fonctionnelle :

THÉORÈME I. — *Soit la substitution* $x^{(1)} = \varphi(x)$, φ *régulier et nul à l'origine. On suppose* $|\varphi'(0)| < 1$. H *étant une fonction quelconque de* x, *nous désignons* $H[\varphi(x)]$ *par* $H^{(1)}$.

On donne l'équation

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \Phi\left[x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{r-1} u}{dx^{r-1}}, u^{(1)}, \left(\frac{du}{dx}\right)^{(1)}, \ldots, \left(\frac{d^{r-1} u}{dx^{r-1}}\right)^{(1)}\right], \tag{33}$$

Φ holomorphe de toutes les lettres et nul en un point

$$x=0,\quad u=u^{(1)}=b_0,\quad \frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\right)^{(1)}=b_1,\quad \ldots,\quad \frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}=\left(\frac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}\right)^{(1)}=b_{r-1}.$$

Elle admet, comme dans le cas où ne figurent pas de substitutions, comme solution, une fonction holomorphe et une seule se réduisant ainsi que ses $r-1$ premières dérivées, pour $x=0$, respectivement à b_0, $b_1, \ldots, b_{r-1}$.

Le théorème subsiste si Φ contient, dans les mêmes conditions, les résultats d'autres substitutions, les fonctions qui les définissent étant aussi régulières et nulles à l'origine.

On simplifie l'exposé en ne considérant qu'une substitution.

Usant toujours du même procédé nous ramenons le point b_0, $b_1, \ldots, b_{r-1}$ à l'origine en posant

$$u=b_0+b_1x+\frac{b_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{b_{r-1}}{(r-1)!}x^{r-1}+v,$$

et même nous pouvons admettre par un nouveau changement du type $v=cx^r+w$ que le second membre est nul à l'origine. Nous imaginons ces transformations déjà effectuées et conservons l'équation (33). Employons le calcul des limites.

Introduisons la fonction majorante

$$(23)\qquad \psi(x)=\frac{hx}{1-\dfrac{x}{\rho}}\qquad (|\varphi'(0)|<h<1),$$

et posant pour toute fonction $H(x)$, $H[\psi(x)]=H^{(2)}$, nous associons successivement à l'équation (33) les équations majorantes suivantes :

$$(34)\quad \frac{d^ru}{dx^r}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left[1-\dfrac{u+\dfrac{du}{dx}+\ldots+\dfrac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}+u^{(2)}+\left(\dfrac{du}{dx}\right)^{(2)}+\ldots+\left(\dfrac{d^{r-1}u}{dx^{r-1}}\right)^{(2)}}{R'}\right]}-M,$$

$$(35)\quad \frac{d^ru}{dx^r}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left[1-\dfrac{(x^r+x^{r-1}+\ldots+x)\dfrac{d^ru}{dx^r}+(x^r+x^{r-1}+\ldots+x)^{(2)}\left(\dfrac{d^{r-1}u}{dx^r}\right)^{(2)}}{R'}\right]}-M,$$

par application du n° **1**,

$$(36)\quad \frac{d^r u}{dx^r} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left[1-\frac{(x^r+x^{r-1}+\ldots+x)\frac{d^r u}{dx^r}+(k^r x^r+\ldots+kx)\left(\frac{d^r u}{dx^r}\right)^{(3)}\theta(x)}{R'}\right]} - M,$$

en désignant par $H^{(3)}(x)$ l'expression $H(kx)$ et en posant

$$\theta(x) = \frac{k}{k-h}\,\frac{1-\frac{x}{\rho}}{1-\frac{kx}{\rho(k-h)}}$$

par application du n° **4**, et si, comme il est permis, on suppose $k=1$

$$(37)\quad \frac{d^r u}{dx^r} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left[1-\frac{2(x^r+\ldots+x)\left(\frac{d^r u}{dx^r}\right)\theta(x)}{R'}\right]} - M.$$

On achève le raisonnement comme avec l'équation (10).

Cette équation (37) qui admet un développement formel à coefficients positifs ou nuls, les premiers jusqu'à celui de x^r inclusivement étant nuls, définit une fonction implicite, $\frac{d^r u}{dx^r}$, de x, régulière et nulle à l'origine.

6. Application à un système normal mixte d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles :

Théorème II. — *Soient les substitutions*

$$\begin{aligned} x_1^{(j)} &= \varphi_{1j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s^{(j)} &= \varphi_{sj}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (j=1, 2, \ldots, p), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(j)} &= \varphi_{nj}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

où les fonctions φ_{sj} holomorphes au point $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se réduisent à a_s pour $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, où, de plus, les fonctions φ_{ij} se réduisent à a_1 pour $x_1 = a_1$; et soit $z^{(j)}$ le résultat de la substitution de $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ à $x_1, \ldots, x_n$ dans une fonction z.

Soit, d'autre part, le système S

$$(38)\qquad \frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi_1, \qquad \frac{\partial^{r_2} u_2}{\partial x_1^{r_2}} = \Phi_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{r_m} u_m}{\partial x_1^{r_m}} = \Phi_m,$$

où les quantités Φ *désignent des fonctions des variables* x_i, *des quantités* u_i, $u_i^{(j)}$,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (\alpha_1 < r_i,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqq r_i),$$

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^{(j)} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < r_i),$$

i parcourant les valeurs 1, 2, ..., *m et j les valeurs* 1, 2, ..., *p*.

On peut étendre à un tel système, de la manière suivante, le théorème fondamental des équations aux dérivées partielles.

Ces quantités

$$x_i, \quad u_i, \quad u_i^{(j)},$$

$$u_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad (u_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n})^{(j)} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^{(j)}$$

étant regardées comme des variables indépendantes, les fonctions Φ *sont supposées holomorphes pour le système* $x_i = a_i$, $u_i = u_i^{(j)} = b_i$

$$u_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = (u_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n})^{(j)} = b_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}.$$

Si les conditions ci-dessous [(C) *et* (44)] *sont réalisées, il existe un système de fonctions* u_1, u_2, ..., u_m *et un seul, vérifiant le système* S, *holomorphes au voisinage du point* $x_1 = a_1$, ..., $x_n = a_n$, *et telles que l'on ait*

$$u_i = \psi_i, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \psi_{i,1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u_i^{r_i-1}}{\partial x_1^{r_i-1}} = \psi_{i,r_i-1} \qquad \text{pour} \quad x_1 = a_1,$$

pourvu que les fonctions ψ_i, $\psi_{i,1}$, ..., ψ_{i,r_i-1} *soient des fonctions de* x_2, ..., x_n *régulières au voisinage du point* a_2, ..., a_n, *et telles que l'on ait*

$$\psi_i = b_i, \qquad \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\psi_{i,\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = b_{i;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \qquad \text{pour} \quad x_2 = a_2, \ \ldots, \ x_n = a_n.$$

Nous commençons par opérer les mêmes simplifications qu'au n° **3** pour la démonstration du théorème concernant un système normal d'équations aux dérivées partielles. Ces calculs effectués, nous avons avec les nouvelles fonctions inconnues U_i un système S_1, analogue à S, mais où tous les r_i sont remplacés par le plus grand d'entre eux, r

$$(39)\ S_1 \qquad \frac{\partial^r U_i}{\partial x_1^r} = \psi_i.$$

Les fonctions U_i doivent être nulles pour $x_1 = 0$ ainsi que leurs dérivées par rapport à x_1 jusqu'à l'ordre $r - 1$. De plus, on peut supposer que les membres de droite sont nuls, quand toutes les quantités dont ils dépendent sont nulles également.

Le problème est de montrer la convergence des développements.

Nous allons remplacer à la fois les φ par des fonctions majorantes, les ψ par des fonctions majorants par rapport à toutes les quantités; les développements relatifs du nouveau système, avec les mêmes conditions initiales, seront majorants par rapport à ceux de S_1.

Si l'on veut aborder la question d'une manière simple et générale il est naturel de remplacer par une même substitution toutes les substitutions données et d'y traiter de la même façon les variables x_k autres que x_1. On aura ainsi la substitution, si d'une part l'on définit α, β, γ, δ par les conditions (à l'origine)

$$(C) \quad \left|\frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial x_1}\right| \leqq \alpha, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial x_k}\right| \leqq \beta, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_1}\right| \leqq \gamma, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_k}\right| \leqq \delta \qquad (s > 1,\ k > 1),$$

et si d'autre part a, b, c, d désignent des nombres positifs respectivement supérieurs à α, β, γ, δ,

$$x'_1 = \frac{a x_1 + b(x_2 + \ldots + x_n)}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\rho}}, \qquad x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{c x_1 + d(x_2 + \ldots + x_n)}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\rho}}.$$

On obtient par là un système dans lequel les seconds membres sont identiques et dont les fonctions inconnues doivent satisfaire aux mêmes conditions initiales; ces fonctions doivent donc être elles-mêmes identiques; on a un seul développement fourni par une seule équation (40) E qu'il est inutile d'écrire; le membre de droite ne contient pas d'autres variables indépendantes que x_1 et $x_2 + \ldots + n_n$; nous poserons $x = x_1$, $y = x_2 + \ldots + x_n$; la substitution deviendra

$$(41) \qquad x' = \frac{ax + by}{1 - \dfrac{x+y}{\rho}}, \qquad y' = \frac{(n-1)cx + (n-1)dy}{1 - \dfrac{x+y}{\rho}}.$$

Désignons l'unique fonction inconnue par $U(x, y)$. Avec les nouvelles variables l'équation E devient

$$(42)\ E_1 \qquad \frac{\partial^r U}{\partial x^r} = F.$$

Reportons-nous au nº **4**, cas de deux variables. L'équation (29) est remplacée par la suivante :

$$(43) \qquad [h - a][h - (n-1)d] - (n-1)bc = 0.$$

La racine la plus grande sera inférieure à 1 si

$$(1 - a)[1 - (n-1)d] - (n-1)bc > 0$$

et de plus on doit avoir $a < 1$ $\left[\text{et } d < \frac{1}{n-1}\right]$.

Ces diverses conditions seront réalisables si

$$(44) \quad \alpha < 1, \qquad \delta < \frac{1}{n-1}, \qquad (1-\alpha)[1-(n-1)\delta] - (n-1)\beta\gamma > 0,$$

ce que nous allons supposer.

La quantité k du même numéro pourra être prise égale à 1. Cela posé, nous choisissons pour λ et μ deux nombres positifs tels que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(n-1)c}{1-a},$$

et au moins égaux à 1.

Appliquons alors, dans le membre de droite de E_1 à U et à ses dérivées ayant subi la substitution (41) la formule de remplacement (32)

$$(45) \qquad f(x', y') \quad \text{par} \quad f(x, y)\frac{1}{1-h}\,\frac{1 - \dfrac{x+y}{\rho}}{1 - \dfrac{x+y}{\rho(1-h)}}$$

comme si elles étaient des fonctions de $\lambda x + \mu y$; nous obtenons une équation E_2 dans laquelle le second membre ne contient plus, outre x et y, que U et ses dérivées, *sans substitution.* Dès lors, par la même majoration de ce second membre, qui a permis de passer de l'équation (17) à l'équation (18) dans la démonstration du théorème fondamental du système d'équations aux dérivées partielles, nous avons une équation E_3 du même type que l'équation (18). Ici on raisonne comme au n° **3**.

L'équation (19) admet une solution régulière $f(z)$, z désignant $Ax+y$, dont une fonction de x et y, convergente dans un système de cercles à rayons non nuls. Mais le développement de $f[A(\lambda x+\mu y)]$ lui est majorant, et d'ailleurs lui aussi est convergent dans un tel système de cercles. Il est donc majorant par rapport à celui relatif à E_3 et *a fortiori* par rapport à celui qui a trait à E_2 et *enfin donc, vis-à-vis du précédent relatif à* E_1, *puisqu'il est un développement en* $\lambda x+\mu y$, *à coefficients réels non négatifs.*

Ici nous rejoignons nos raisonnements du début et la démonstration est achevée.