JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE BERNSTEIN

Sur un système d'équations indéterminées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 179-186.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_179_0>

Sur un système d'équations indéterminées;

PAR SERGE BERNSTEIN.

Dans un article, *Sur la formule d'intégration approchée de Tchebycheff* (1), j'ai montré que la formule proposée par Tchebycheff

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (0 \leqq x_i \leqq 1), \tag{1}$$

ne peut pour aucun choix des valeurs réelles x être exacte pour tout polynome de degré n, lorsque n est assez grand. Cela signifie, en d'autres termes, que toutes les n grandeurs x_i satisfaisant aux n équations

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \frac{n}{k+1} \qquad (k = 0, \ldots, n), \tag{2}$$

ne peuvent pas être réelles. D'ailleurs, dans deux Notes (2) récentes, M. Kuzmin a découvert la distribution asymptotique des grandeurs x_i satisfaisant à (2) pour n très grand, en étudiant directement le polynome

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x - x_i).$$

Mais il serait intéressant de déterminer quel est le nombre M_n

(1) *Bull. de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*, 1932.

(2) *Comptes rendus*, t. **201**, p. 1094, et t. **202**, p. 272.

d'équations (2) ($k \leqq M_n$) auxquelles il serait possible de satisfaire au moyen de $n > M_n$ grandeurs réelles x_i.

Nous nous bornerons ici à établir une limite supérieure [1] du nombre M_n en fonction de n. Il en résultera, en particulier, que le *degré* M_n *des polynomes pour lesquels la formule* (1) *est exacte ne peut atteindre* n, *dès que* $n > 9$. Dans ce but, je démontrerai d'abord deux théorèmes qui ne sont que des applications ou modifications plus ou moins immédiates d'une proposition due à Tchebycheff.

Théorème I. — *Si* $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m$ *sont les* m *racines du polynome* $P_m(x)$ *de Legendre relatif au segment* OI, *et* $\rho_m^{(1)}, \rho_m^{(2)}, \ldots, \rho_m^{(m)}$ *sont les coefficients de la formule de quadrature mécanique de Gauss*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^m \rho_m^{(k)} f(\gamma_k), \tag{3}$$

qui est exacte pour tous les polynomes de degré $2m - 1$; *si la formule* (1) *est exacte pour tous les polynomes de degré* $2m - 2$, *on a*

$$\frac{1}{n} S(\gamma_1) \leqq \rho_m^{(1)}, \tag{4}$$

où $S(\gamma_1)$ *est le nombre de valeurs* $x_i \leqq \gamma_2$.

En effet, construisons le polynome de degré $2m - 2$

$$F_{2m-2}(x) = \frac{P_m^2(x)}{(x - \gamma_1)^2 \rho_m'^2(\gamma_1)}$$

qui est déterminé par les conditions que

$$F_{2m-2}(\gamma_1) = 1, \qquad F_{2m-2}(\gamma_k) = F'_{2m-2}(\gamma_k) = 0 \quad (k = 2, \ldots, m).$$

L'équation $F'_{2m-2}(x) = 0$ aura alors, outre les $m - 1$ racines $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ encore $m - 2$ racines séparant ces grandeurs γ_k, qui sont également racines de $F_{2m-2}(x) = 0$. Donc, pour $x < \gamma_2$, la fonction $F_{2m-2}(x)$ est décroissante, car le nombre $2n - 3$ des racines de $F'_{2m-2}(x)$ est

---

[1] J'ai donné une limite inférieure de M_n dans la Note *Modifications de la formule de quadrature de Tchebycheff* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 204, p. 1526.)

épuisé par les racines indiquées plus haut. Par conséquent, on a

$$
(5)\qquad \begin{cases} F_{2m-2}(x) \geqq 1 & \text{pour} \quad x \leqq \gamma_1, \\ F_{2m-2}(x) \geqq 0 & \text{pour} \quad x > \gamma_1. \end{cases}
$$

Or, d'après les conditions du théorème, les formules (1) et (3) étant applicables au polynome $F_{2m-2}(x)$, on a

$$
\int_0^1 F_{2m-2}(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{2m-2}(x_i) = \rho_m^{(1)},
$$

et en tenant compte des inégalités (5), il en résulte que

$$
(4\ bis)\qquad \frac{1}{n}\,S(\gamma_1) \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{2m-2}(x_i) = \rho_m^{(1)}.
$$

Passons ensuite à la démonstration du théorème suivant :

Théorème II. — *Si la formule*

$$
(6)\qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i), \qquad (n > m),
$$

où $p_i > 0$ *est exacte pour tous les polynomes de degré* $2m-2$, *il y a au moins un point* $y_i < \gamma_1$.

En effet, construisons le polynome

$$
R_{2m-1}(x) = \frac{P_m^2}{\left(1 - \dfrac{x}{\gamma_1}\right) P_m^2(0)}.
$$

On aura, évidemment, d'après la formule (6),

$$
(7)\qquad \int_0^1 R_{2m-1}(x)\,dx = 0 = \sum_1^{n} p_i R_{2m-1}(y_i).
$$

Or, on a

$$
R_{2m-1}(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x < \gamma_1
$$

et

$$
R_{2m-1}(x) \leqq 0 \quad \text{pour} \quad x \geqq \gamma_1,
$$

le signe d'égalité $R_{2m-1}(x) = 0$ n'ayant lieu que pour les m valeurs

$x=\gamma_i (i=1, \ldots, m)$. Comme, par hypothèse, $n > m$, tous les termes de la somme (7) ne sont pas nuls; donc, il y a au moins une valeur $y_i < \gamma_1$.

Du théorème II nous concluons que, si la formule (1) est applicable à tous les polynomes de degré $2m-1$, il y a au moins une valeur $x_i < \gamma_1$ Donc, à cause de l'inégalité (4) on aura

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n} S(\gamma_1) \leqq \rho_m^{(1)}. \tag{8}$$

D'où résulte le

Théorème III. — *Si la formule* (1) *est valable pour tous les polynomes de degré* $2m-1$, *on a*

$$\rho_m^{(1)} \geqq \frac{1}{n}. \tag{8 bis}$$

Appliquons notre théorème aux cas de $m=5, 6, 7, 8$. On a :

$$\frac{1}{9} < \rho_5^{(1)} = 0,11846344 < \frac{1}{8},$$
$$\frac{1}{12} < \rho_6^{(1)} = 0,08566225 < \frac{1}{11},$$
$$\frac{1}{16} < \rho_7^{(1)} = 0,06474248 < \frac{1}{15},$$
$$\frac{1}{20} < \rho_8^{(1)} = 0,05061427 < \frac{1}{19}.$$

De l'inégalité $\rho_5^{(1)} < \frac{1}{8}$, nous concluons que la formule de quadrature de Tchebycheff, pour $n=8$, ne peut être applicable aux polynomes de 9^e^ degré; donc, elle ne saurait aussi être applicable aux polynomes de 8^e^ degré, car, à cause de la distribution symétrique des valeurs x déterminées par les équations (2), l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} = \frac{n}{n+2}$$

en est une conséquence, lorsque n est pair. On sait, d'ailleurs, par le calcul effectif, que les abscisses de Tchebycheff deviennent complexes pour $n=8$. Pour $n=9$, l'inégalité $\rho_5^{(1)} > \frac{1}{9}$ confirme que la supposition $M_n = 9$ n'est pas contradictoire (le calcul montre qu'elle est vraie).

L'inégalité $\rho_6^{(1)} < \frac{1}{11}$ prouve que

$$M_{10} < 10, \qquad M_{11} < 11;$$

l'inégalité $\rho_7^{(1)} < \frac{1}{15}$ prouve que

$$M_{12} < 12, \qquad M_{13} < 13, \qquad M_{14} < 13, \qquad M_{15} < 13;$$

l'inégalité $\rho_8^{(1)} < \frac{1}{19}$ prouve que

$$M_{16} < 15, \qquad M_{17} < 15, \qquad M_{18} < 15, \qquad M_{19} < 15.$$

Pour montrer que l'on a

$$M_n < n, \tag{9}$$

à partir de $n > 9$, il nous suffira donc à présent d'établir l'inégalité

$$M_n < \pi n \sin \frac{2\pi}{M_n + 1}, \tag{10}$$

valable pour toute valeur de $n > 0$, puisqu'on a

$$\pi \sin \frac{2\pi}{M_n + 1} < \frac{2\pi^2}{M_n + 1} < 1,$$

lorsque $M_n \geqq 19$, et le cas de $n \leqq 19$ vient d'être examiné directement.

L'inégalité (10) est une conséquence d'une inégalité correspondante, concernant la valeur $\rho_m^{(1)}$ dans l'inégalité (8 *bis*). Dans ce but nous observons que

$$\rho_m^{(1)} = \frac{1}{2} \rho_m,$$

où ρ_m est le coefficient correspondant à la plus grande racine ξ_1 du polynome $R_m(x)$ de Legendre dans la formule de quadrature mécanique relative au segment $(-1, +1)$.

On sait que

$$\rho_m = \frac{2}{(1 - \xi_1^2) R_m'^2(\xi_1)},$$

donc

$$\rho_m^{(1)} = \frac{1}{(1 - \xi_1^2) R_m'^2(\xi_1)}, \tag{11}$$

où $R'_m(x)$ est la dérivée du polynome de Legendre de degré m, relatif au segment $(-1, +1)$.

Posons

$$(12)\qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}} R_m(x) = f_m(x);$$

il est aisé de vérifier que $f_m(x) = f_m(\cos\theta)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(13)\qquad \frac{d^2 f_m}{d\theta^2} + \frac{1}{\lambda_m^2} f_m = 0,$$

où

$$(14)\qquad \lambda_m^2 = \frac{1-x^2}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2(1-x^2)+\frac{1}{4}}.$$

Pour obtenir une limite inférieure de $\rho_m^{(1)}$ nous reproduirons sous une forme particulière les résultats de mon Mémoire : *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini* (¹). Formons la fonction

$$(15)\qquad u(x) = f_m^2 + \lambda_m^2 \left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2.$$

En tenant compte de (13), nous aurons

$$\frac{du}{d\theta} = 2 f_m \frac{df_m}{d\theta} + 2\lambda_m^2 \frac{df_m}{d\theta}\cdot\frac{d^2 f_m}{d\theta^2} + 2\lambda \frac{d\lambda}{d\theta}\left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2 = \frac{d\lambda_m^2}{d\theta}\cdot\left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2,$$

d'où

$$(16)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{d\lambda_m^2}{dx}\left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2 = -\frac{x}{2\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2(1-x^2)+\frac{1}{4}\right]^2}\left(\frac{df_m}{d\theta}\right)^2.$$

Donc, $u(x)$, ainsi que λ_m^2, atteint son maximum pour $x=0$, et pour $x>0$, $\frac{du}{dx} \leqq 0$. Par conséquent, on a, en supposant $x>0$,

$$0 \geqq \frac{du}{dx} \geqq \frac{u(x)}{\lambda_m^2(x)}\,\frac{d\lambda_m^2}{dx},$$

d'où

$$0 > \int_0^x \frac{d\log u}{dx}\,dx > \int_0^x \frac{d\log\lambda_m^2}{dx}\,dx \qquad (0 < x \leqq 1).$$

(¹) *Journal de Mathématiques*, t. X, 1931, p. 219-286; *voir*, en particulier, les pages 226-233.

Donc

$$o > \log \frac{u(x)}{u(o)} > \log \left(m^2 + m + \frac{1}{2}\right) \lambda_m^2(x),$$

c'est-à-dire

$$u(o) > u(x) > u(o) \frac{\left(m^2 + m + \frac{1}{2}\right)(1 - x^2)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 (1 - x^2) + \frac{1}{4}}.$$

En particulier, au point ξ_1, où $R_m(x) = o$, on a

$$u(\xi_1) = \lambda_m^2(\xi_1)(1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1);$$

donc

$$(1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1) > \left(m^2 + m + \frac{1}{2}\right) u(o).$$

Lorsque m est pair,

$$u(o) = R_m^2(o) = \left[\frac{1.3\ldots(m-1)}{2.4\ldots m}\right]^2;$$

lorsque m est impair,

$$u(o) = \frac{1}{m^2 + m + \frac{1}{2}} R_m'^2(o) = \frac{m^2}{m^2 + m + \frac{1}{2}} \left[\frac{1.3\ldots(m-2)}{2.4\ldots(m-1)}\right]^2.$$

Ainsi, en vertu de la formule de Wallis,

$$\left[\frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots 2s}\right]^2 = \frac{1}{\pi(s+\theta)} \qquad \left(o < \theta < \frac{1}{2}\right),$$

on a, quel que soit m,

$$(1 - \xi_1^2)^{\frac{3}{2}} R_m'^2(\xi_1) > \frac{2m}{\pi}.$$

Donc, d'après (11),

$$\rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{2m} \sqrt{1 - \xi_1^2}. \tag{17}$$

De plus, à cause de l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda_m^2} > \left(m + \frac{1}{2}\right)^2,$$

la distance entre deux racines d'une solution $f_m(\cos\theta)$ de l'équation (13) est inférieure à $\dfrac{\pi}{m+\frac{1}{2}}$; donc, si l'on pose

$$\xi_1 = \cos\theta_1,$$

on a

$$\theta_1 < \frac{\pi}{m+\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\sqrt{1-\xi_1^2} = \sin\theta_1 < \sin\frac{\pi}{m+\frac{1}{2}}$$

et finalement, il résulte de (17) que

$$\rho_m^{(1)} < \frac{\pi}{2m}\sin\frac{\pi}{m+\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Par conséquent, d'après le théorème III, si la formule (1) est exacte pour tous les polynomes de degré $M_n = 2m - 1$, on doit avoir

$$\frac{\pi}{M_n+1}\sin\frac{2\pi}{M_n+2} > \frac{1}{n}. \tag{19}$$

Dans le cas où M_n est pair, la formule (1), étant, par hypothèse, exacte pour tous les polynomes de degré inférieur à M_n, sera également vraie pour les polynomes de degré impair $M_n - 1$; on aura donc l'inégalité

$$\frac{\pi}{M_n}\sin\frac{2\pi}{M_n+1} > \frac{1}{n}, \tag{19 bis}$$

qui est par conséquent valable, quel que soit le nombre entier M_n.

Ainsi, *a fortiori*, pour que le système d'équations (2) possède des solutions réelles, il est nécessaire que

$$M_n < \pi\sqrt{2n}.$$