JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ GARNIER

Remarques sur la Note de M. A. Danilewsky

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 15-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_15_0>

Remarques sur la Note de M. A. Danilewsky;

Par René GARNIER.

Dans ma Note antérieure j'ai établi un théorème qui s'applique à la résolution de certains problèmes de géométrie conforme (*Journ. Math. pures et appl.*, 1937, p. 105). La méthode de récurrence que j'ai employée dans cette Note trouve tout naturellement son origine dans un mode de décomposition des substitutions orthogonales qui est utilisé systématiquement dans la résolution de ces problèmes. Elle fait appel aussi (*loc. cit.*, p. 108) à la loi d'inertie.

La démonstration de M. A. Danilewsky est très simple et très élégante; de la théorie des substitutions orthogonales elle n'utilise que la définition. De plus, *elle fournit immédiatement la relation remarquable* $n = p$ (d'où la proposition énoncée ci-dessous, à la fin).

Mais cette égalité peut être établie aussi comme corollaire de l'inégalité $n \leqq p$ de ma Note antérieure. En effet, écrivons pour abréger

$$\Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{2n-p} & \overbrace{}^{p-h} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, p \\ \}\, 2n-p-h \end{array}.$$

Si Σ est orthogonale, il en est de même de

$$\Sigma_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{p-h} & \overbrace{}^{2n-p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, 2n-p-h \\ \}\, p \end{array}.$$

Mais on peut écrire

$$\Sigma_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{2n_1-p_1} & \overbrace{}^{p_1-h_1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, p_1 \\ \}\, 2n_1-p_1-h_1 \end{array},$$

avec

$$\begin{aligned} n_1 &= \quad n - h, \\ p_1 &= \quad 2n - p - h. \\ h_1 &= -h. \end{aligned}$$

D'après ma Note, on doit avoir $n \leqq p$ et $n_1 \leqq p_1$, soit

$$n \leqq p \qquad \text{et} \qquad p \leqq n,$$

d'où $p = n$.

En définitive, *si une matrice orthogonale contient deux sous-matrices rectangulaires complémentaires, soient* A *et* D, *à éléments réels, les éléments restants étant purement imaginaires* (*ou nuls*), *les sous-matrices* A *et* D *sont nécessairement carrées.*