JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ GARNIER

Sur une propriété des matrices orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 105-110.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_105_0>

Sur une propriété des matrices orthogonales;

Par René GARNIER.

Un beau Mémoire [1] de M. Édouard Goursat utilise la théorie des substitutions orthogonales pour l'étude des divisions régulières de l'espace; ce même Mémoire débute par une démonstration simple d'un théorème classique de Liouville sur les transformations conformes de l'espace réel. Un tel rapprochement s'accorde avec la nature des choses : dans un Ouvrage actuellement sous presse [2] j'ai montré que la théorie des substitutions orthogonales à cinq variables fournit une base réduite pour le groupe des transformations conformes de l'espace réel ou complexe; le théorème de Liouville se trouve ainsi précisé. Et par la même voie on peut construire une base réelle pour le groupe des transformations conformes réelles.

De même, pour le groupe des transformations de contact conservant les lignes de courbure, la théorie des substitutions orthogonales fournit une base réduite, et l'on peut aussi construire une base réelle pour le groupe des transformations réelles. L'étude de ce dernier problème repose sur un théorème préliminaire que nous avons seulement énoncé dans l'Ouvrage précité : *il n'existe aucune matrice orthogonale du type*

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & + & + \\ - & - & - & - & + & + \\ - & - & - & - & + & + \\ - & - & - & - & + & + \\ + & + & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - \end{bmatrix}$$

(1) *Ann. sc. Éc. norm. sup.*, 3e série, t. 6, 1889, p. 9.

(2) *Leçons d'Algèbre et de Géométrie*, t. III, Chap. XXI, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

où les symboles $+$ et $-$ désignant respectivement des éléments réels (ou nuls) et purement imaginaires (ou nuls). Plus généralement, nous allons démontrer qu'*il n'existe aucune matrice orthogonale*

$$
\Sigma \equiv \begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{+\dots+}}^{2n-p} & \overbrace{\hphantom{-\dots-}}^{p-h} \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cc}
+\dots+ & -\dots- \\
\dots\dots & \dots\dots \\
+\dots+ & -\dots- \\
-\dots- & +\dots+ \\
\dots\dots & \dots\dots \\
-\dots- & +\dots+
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} 2n-p-h \end{array}
\end{array}
$$

où l'on aurait

(1) $$h \leqq p < n \qquad (h \geqq 0)$$

(près des accolades on a indiqué le nombre des colonnes ou des lignes de Σ enclavées par les accolades; on avait tout à l'heure $n = 3$, $p = 2$, $h = 0$).

1. Nous allons d'abord chercher à construire une matrice orthogonale

$$
\Sigma_1 \equiv \left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2\,2n-h} \\
\cdot & \cdot\,\cdot & \dots & \dots\dots \\
0 & a_{2n-h\,2} & \dots & a_{2n-h\,2n-h}
\end{array}\right]
$$

telle que dans le produit $\Sigma\Sigma_1$ les $2n - h - 2$ premiers éléments de la dernière colonne soient tous nuls; on a d'ailleurs $n \geqq h + 1$, d'où $2n - h - 2 \geqq h$ et, par suite, $2n - h - 2 \geqq 0$ quel que soit le signe de h; enfin l'égalité ne peut avoir lieu que pour $h = 0$, $p = 0$, $n = 1$, auquel cas le théorème est évident. Or désignons par a_{jk} l'élément qui appartient à la $j^{\text{ième}}$ ligne et à la $k^{\text{ième}}$ colonne de Σ; nous devrons avoir

$$\alpha_{j.2}a_{2.2n-h} + \dots + \alpha_{j.2n-h}a_{2n-h.2n-h} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, 2n - h - 2).$$

Il viendra donc

(2) $$\frac{a_{2.2n-h}}{A_2} = \dots = \frac{a_{2n-h.2n-h}}{A_{2n-h}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A_2^2 + \dots + A_{2n-h}^2}},$$

en désignant par A_k le mineur extrait des $2n-h-2$ premières lignes de Σ, après suppression des colonnes de rang 1 et k. Or, soit

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{2n-p-2} & \overbrace{}^{p-h} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +\dots+ & -\dots- \\ \dots\dots & \dots\dots \\ +\dots+ & -\dots- \\ -\dots- & +\dots+ \\ \dots\dots & \dots\dots \\ -\dots- & +\dots+ \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} p \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 2n-p-h-2 \end{array}$$

En multipliant les $p-h$ dernières colonnes et les $2n-p-h-2$ dernières lignes par $\sqrt{-1}$, on voit que A_2 est réel; et il en est de même de $A_3, \dots, A_{2n-p}$, tandis que $A_{2n-p+1}, \dots, A_{2n-h}$ sont purement imaginaires.

Cela étant, une propriété des matrices orthogonales (*cf. loc. cit.*, p. 217), montre que

$$A_2^2 + \dots + A_{2n-h}^2 = \alpha_{2n-h-1,1}^2 + \alpha_{2n-h,1}^2,$$

les indices supérieurs étant des exposants. Le second membre est réel et négatif ou nul, car on a d'après (1)

$$2n-h-1 > p.$$

Il ne pourrait être nul que pour $\alpha_{2n-h-1,1} = 0 = \alpha_{2n-h,1}$. S'il en était ainsi, on remplacerait dans les raisonnements la première colonne de Σ par la seconde, ..., ou par la $(2n-p)^{\text{ième}}$. Si tous les éléments appartenant à ces colonnes et aux deux dernières lignes étaient nuls, on remplacerait les deux dernières lignes de Σ par deux autres, choisies parmi les $2n-p-h$ dernières. Si tous les éléments des $2n-p$ premières colonnes et des $2n-p-h$ dernières lignes (ou de $2n-p-h-1$ de ces lignes, pour $p+h$ impair) étaient nuls, il résulterait de l'inégalité

$$2n-p-h \geqq p-h+2$$

que Σ posséderait au moins $p-h+1$ lignes du type

$$\underbrace{0\dots0}^{2n-p} \quad \overbrace{+\dots+}^{p-h};$$

d'après les relations d'orthogonalité une ligne au moins serait formée d'éléments tous nuls, ce qui est absurde.

Le dénominateur de la dernière fraction de (2) peut donc être supposé différent de 0; ainsi les $a_{k,2n-h}$ peuvent être déterminés par (2), et d'après ce que l'on a établi pour les A_k, ils sont purement imaginaires ou nuls pour $k=2, \ldots, 2n-p$ et réels ou nuls pour $k>2n-p$. Il reste à choisir les coefficients restants de Σ_1 de manière à constituer une matrice orthogonale. Or posons, avec $i=\sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} f &\equiv x_2^2+\ldots+x_{2n-p}^2-x_{2n-p+1}^2-\ldots x_{2n-h}^2, \\ f_j &\equiv x_{2,j}^2+\ldots+x_{2n-p,j}^2-x_{2n-p+1,j}^2-\ldots x_{2n-h,j}^2, \end{aligned}$$

$$\frac{a_{2,j}}{x_{2,j}}=\ldots=\frac{a_{2n-p,j}}{x_{2n-p,j}}=\frac{a_{2n-p+1,j}}{i x_{2n-p+1,j}}=\ldots=\frac{a_{2n+h,j}}{i x_{2n-h,j}}=\frac{1}{\sqrt{f_j}}.$$

Dans l'espace projectif $(x_2, \ldots, x_{2n-h})$ les points $(x_{2j}, \ldots, x_{2n-h,j})$ où l'on a $j=2, \ldots, 2n-h$, seront conjugués deux à deux par rapport à la quadrique $f=0$. Mais, d'après la loi d'inertie des formes quadratiques, si tous ces points sont réels, $2n-p-1$ sont dans la région $f>0$ et les $p-h$ restants dans la région $f<0$. L'un de ces points (celui qui correspond à $j=2n-h$) est connu, d'après ce qui précède; il est réel et n'appartient pas à la quadrique $f=0$; il est donc possible, et d'une infinité de façons, de choisir pour les autres des points réels appartenant aux régions précitées (*cf. loc. cit.*, p. 250). On aura obtenu ainsi la matrice cherchée,

$$\begin{array}{ll} & \hphantom{\Big|\ 1\ \ }\overbrace{\hphantom{0\ldots0}}^{2n-p-1}\ \ \overbrace{\hphantom{0\ldots0}}^{p-h} \\ \Sigma_1= & \left|\begin{matrix} 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ 0 & +\ldots+ & -\ldots- \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & +\ldots+ & -\ldots- \\ 0 & -\ldots- & +\ldots+ \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & -\ldots- & +\ldots+ \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} 2n-p-1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} p-h \end{matrix} \end{array}$$

2. En vertu de cette structure de Σ_1 et du choix des éléments de la dernière colonne, il viendra, α et β étant réels,

$$\Sigma\Sigma_1 = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{matrix}\overbrace{\hphantom{+\cdots+}}^{2n-p} & \overbrace{\hphantom{-\cdots-}}^{p-h-1} & \hphantom{0}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} +\cdots+ & -\cdots- & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ +\cdots+ & -\cdots- & 0 \\ -\cdots- & +\cdots+ & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ -\cdots- & +\cdots+ & 0 \\ -\cdots- & +\cdots+ & \alpha \\ -\cdots- & +\cdots+ & \beta \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}2n-p-h \end{matrix} \end{array}$$

et, en multipliant à gauche par la matrice orthogonale

$$\Sigma_2 = \begin{array}{@{}c@{}l} \overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdots\quad \beta\ -\alpha}}^{2n-h} & \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \end{matrix}\right] & \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}2n-h \end{array}$$

on obtiendra

$$\Sigma_2\Sigma\Sigma_1 = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{matrix}\overbrace{\hphantom{0\quad\cdots\quad 0}}^{2n-h-1} & \hphantom{1}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} \begin{matrix} & & \\ & \Sigma_3 & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \\ 0\quad\cdots\quad 0 & 1 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}2n-h-1 \\ \vphantom{a} \end{matrix} \end{array}$$

avec

$$\Sigma_3 = \begin{array}{@{}c@{}l} \begin{matrix}\overbrace{\hphantom{+\cdots+}}^{2n-p} & \overbrace{\hphantom{-\cdots-}}^{p-h-1}\end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} +\cdots+ & -\cdots- \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ +\cdots+ & -\cdots- \\ -\cdots- & +\cdots+ \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\cdots- & +\cdots+ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}2n-p-h-1 \end{matrix} \end{array}$$

Or la matrice orthogonale Σ_3 est du même type que Σ_1, mais avec h remplacé par $h_1 = h+1$. Si $h+1 \leqq p$ les inégalités (1) seront encore vérifiées par h_1, p, n; si $p \geqq h+2$, on procédera sur Σ_3 comme sur Σ et l'on diminuera encore d'une unité la valeur de $p-h$. Or, pour $h=p$,

Σ se réduit à

$$\begin{array}{cl} \overbrace{\hphantom{+\ldots+}}^{2n-p} & \\ \left[\begin{array}{c} +\ldots+\\ \ldots\ldots\\ +\ldots+\\ -\ldots-\\ \ldots\ldots\\ -\ldots- \end{array}\right] & \begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}p\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}2n-2p\end{array}\end{array}\cdot$$

et puisque $n > p$ une telle matrice ne peut être orthogonale.

C. Q. F. D.

Remarques. — Les inégalités (1) sont les meilleures possibles, car on a nécessairement $p \geqq h$; d'autre part pour $p = n$ le théorème est en défaut, comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

($n = 1$, $p = 1$, $h = 0$) où α est purement imaginaire. Enfin on ne peut remplacer $2n$ par un nombre impair, car le déterminant de Σ serait purement imaginaire.