JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CERF

Sur des transformations d'équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes obtenues par une propriété d'invariance du groupe des transformations du contact

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 1-10.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur des transformations d'équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes obtenues par une propriété d'invariance du groupe des transformations de contact;

PAR G. CERF
(Strasbourg).

La théorie des groupes de fonctions, exposée en français pour la première fois par M. Goursat ([1]), constitue un chapitre de l'étude des propriétés d'invariance du groupe des transformations de contact; c'est le problème de l'utilisation, pour l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, d'intégrales premières connues qui a conduit Lie à cette théorie. La recherche de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre, à une inconnue, fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes, conduit à mettre en évidence une notion un peu plus

([1]) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 1891.

générale que celle de groupe de fonctions, et qui est aussi invariante par rapport au groupe des transformations de contact. Nous commençons par exposer cette notion et nous l'appliquons ensuite aux transformations indiquées.

I.

1. On sait que les transformations de contact sont définies par les changements de variables qui laissent invariante l'équation de Pfaff

$$(1) \qquad dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_n\, dx_n = 0.$$

Si Z, X_i, P_i sont les nouvelles variables,

$$(2) \quad dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n = \rho(x, z, p)(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n)$$

avec $\rho(x, z, p) \neq 0$.

f et φ étant deux fonctions quelconques de x, z, p, et F et Φ ce qu'elles deviennent après le changement de variables, si l'on désigne par $[F, \Phi]_Z$ le crochet jacobien relativement aux grandes lettres, par $[f, \varphi]_z$ le crochet jacobien relativement aux petites lettres, on a

$$(3) \qquad \rho[F, \Phi]_Z = [f, \varphi]_z.$$

Les transformations de contact forment un groupe, soit G. Parmi les propriétés d'invariance de G, la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre a mis en évidence celles qui concernent les *groupes de fonctions*. Nous dirons, d'abord, que q fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ des x, z, p étant données, toutes les fonctions qui peuvent s'exprimer sous la forme $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_q)$, Φ étant une fonction arbitraire des q arguments, constituent une *famille* d'ordre q. Un problème important consiste à reconnaître si deux familles de fonctions sont équivalentes par rapport au groupe G. On est conduit, éventuellement, à étendre la famille, par l'adjonction de nouvelles fonctions de base, jusqu'à obtenir un *groupe de fonctions*, c'est-à-dire une famille telle que :

1° Les rapports mutuels des crochets des fonctions de la famille, prises deux à deux, appartiennent à la famille (il suffit pour cela que la propriété soit vérifiée pour les fonctions de base);

2° Si W désigne l'inverse du crochet de deux fonctions de la famille qui ne soient pas en involution, l'expression

$$[W, f] - W\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4}$$

appartient à la famille si f en est un élément quelconque (il suffit que cela soit vrai pour les fonctions de base). En particulier, si $W = 1$, l'expression (4) se réduit, au signe près, à $\frac{\partial f}{\partial z}$. Il faut mettre à part les groupes involutifs, où deux fonctions quelconques du groupe sont en involution; un tel groupe est au plus d'ordre $n+1$.

2. Supposons maintenant que seule soit vérifiée la première propriété qui définit un groupe, c'est-à-dire que les rapports mutuels des crochets des fonctions $f_1, \ldots, f_q$ prises deux à deux s'expriment au moyen de ces fonctions : nous dirons alors qu'elles définissent une famille $\mathcal{F}$ de rang q. D'après (3), toute transformation de contact transforme une famille $\mathcal{F}$ en une autre de même rang. Nous allons nous occuper en premier lieu de la détermination des familles $\mathcal{F}$, en nous appuyant sur l'identité fondamentale (5),

$$\begin{aligned}\big[[f_i, f_j], f_l\big] + \big[[f_j, f_l], f_i\big] + \big[[f_l, f_i], f_j\big] \\ = [f_i, f_j]\frac{\partial f_l}{\partial z} + [f_j, f_l]\frac{\partial f_i}{\partial z} + [f_l, f_i]\frac{\partial f_j}{\partial z}.\end{aligned} \tag{5}$$

Nous y associons l'observation suivante : à toute fonction de la famille, disons f_1, on peut en associer $q-2$ de la famille $\mathcal{F}$, distinctes entre elles et distinctes de f_1, et qui soient toutes en involution avec f_1. Nous supposons naturellement que la famille ne constitue pas un groupe involutif et que f_1 ne soit pas déjà en involution avec $f_2, \ldots, f_q$. Soit $A(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une des fonctions à associer à f_1, elle doit vérifier la relation

$$[f_2, f_1]\frac{\partial A}{\partial f_2} + [f_3, f_1]\frac{\partial A}{\partial f_3} + \ldots + [f_q, f_1]\frac{\partial A}{\partial f_q} = 0; \tag{6}$$

puisqu'il s'agit d'une famille $\mathcal{F}$, (6) constitue une équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire, homogène, pour déterminer la fonction A des arguments $f_1, f_2, \ldots, f_q$; elle admet un système de $q-1$ intégrales distinctes, dont f_1; nous supposerons désormais, ce qui ne nuit pas à la généralité, que ce système se compose de $f_1, f_2, \ldots, f_{q-1}$. D'autre part, par une transformation de contact quelconque, on peut s'arranger pour que le crochet de deux fonctions f, qui ne sont pas en involution, soit égal à 1; nous supposerons que

$$[f_1 f_q] = 1. \tag{7}$$

Il en résulte que les crochets non nuls de deux fonctions de la famille s'expriment au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_q$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $q > 3$; appliquons l'identité (5) à f_1, f_2, f_3,

$$\big[[f_2, f_3], f_1\big] = [f_2, f_3]\frac{\partial f_1}{\partial z}. \tag{8}$$

Donc, si $[f_2, f_3] \neq 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ doit s'exprimer au moyen des fonctions de la famille, d'après la remarque qui suit la relation (7). Comme dans (8) on peut remplacer les indices 2 et 3 par deux quelconques des nombres $2, 3, \ldots, q-1$, la conclusion que nous venons d'énoncer est valable pourvu que $f_2, \ldots, f_{q-1}$ ne soient pas deux à deux en involution; c'est-à-dire qu'il n'y aurait d'exception que si $f_1, f_2, \ldots, f_{q-1}$ constituaient un groupe involutif (cela est du reste impossible si $q-1 > n+1$ ou $q > n+2$).

Supposons que nous ne sommes pas dans le cas d'exception et appliquons l'identité (5) à f_1, f_2, f_q,

$$\big[[f_2, f_q], f_1\big] + \big[[f_q, f_1], f_2\big] = [f_2, f_q]\frac{\partial f_1}{\partial z} + [f_q, f_1]\frac{\partial f_2}{\partial z},$$

et, d'après (7) et (8), $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ pourra s'exprimer au moyen des fonctions de la famille; il en sera de même évidemment de $\frac{\partial f_3}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f_{q-1}}{\partial z}$. Comme $f_2, \ldots, f_{q-1}$ ne forment pas un groupe involutif, on peut supposer, par exemple, $[f_2, f_3] \neq 0$ et appliquer l'identité à f_2, f_3, f_q,

$$\begin{aligned}\big[[f_2, f_3], f_q\big] + \big[[f_3, f_q], f_2\big] + \big[[f_q, f_3], f_2\big] \\ = [f_2\, f_3]\frac{\partial f_q}{\partial z} + [f_3, f_q]\frac{\partial f_2}{\partial z} + [f_q, f_2]\frac{\partial f_3}{\partial z},\end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer aussi $\frac{\partial f_q}{\partial z}$ au moyen des fonctions de la famille; celle-ci, par conséquent constitue un groupe. Nous sommes donc arrivé au résultat suivant; si $q > 3$, deux cas sont possibles :

1° Ou bien la famille $\mathcal{F}$ constitue un groupe, involutif ou non;

2° Ou bien $q-1$ fonctions distinctes de $\mathcal{F}$, et pas plus, constituent un groupe involutif.

Dans ce dernier cas, qui suppose $q \leqq n+2$, on peut, par une transformation de contact, se ramener à celui où les $q-1$ fonctions sont x_1, $x_2, \ldots, x_{q-1}$, si $q \leqq n+1$; à celui où les $q-1$ fonctions sont x_1, $x_2, \ldots, x_n$, z si $q = n+2$.

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où $q \leqq n+1$ et soit $\varphi(x, z, p)$ la $q^{\text{ième}}$ fonction; pour écrire que les q fonctions $x_1, \ldots, x_{q-1}$, φ déterminent une famille $\mathcal{F}$, il suffit d'écrire les conditions où interviennent les crochets dans lesquels figure φ, $[\varphi, x_i] = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$; il doit donc exister des fonctions

$$A_i(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, \varphi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1),$$

telles que

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}{A_1(x_1, \ldots, x_{q-1}, \varphi)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{A_2(x, \varphi)} = \ldots = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_{q-1}}}{A_{q-1}(x, \varphi)}.$$

La fonction φ est alors déterminée par une relation de la forme

$$(9) \quad \begin{aligned} & p_1 A_1(x_1, \ldots, x_{q-1}, \varphi) + p_2 A_2(x, \varphi) + \ldots \\ & \qquad + p_{q-1} A_{q-1}(x_1, \ldots, x_{q-1}, \varphi) = H(\varphi, x_1, \ldots, x_n, z, p_q, \ldots, p_n), \end{aligned}$$

les fonctions $A_1, \ldots, A_{q-1}$, H sont des fonctions arbitraires des arguments qui y figurent.

En supposant maintenant que $q = n+2$, le système d'équations aux dérivées partielles pour déterminer φ doit être prolongé jusqu'aux rapports

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}{A_n(x_1, \ldots, x_n, z, \varphi)} \quad \text{et} \quad \frac{p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}{A_{n+1}(x, z, \varphi)},$$

tous les A pouvant dépendre de $x_1, \ldots, x_n$, z et φ. La fonction q

s'obtient alors à partir d'une relation telle que

$$(9') \qquad p_1 A_1(x, z, \varphi) + \ldots + p_n A_n(x, z, \varphi) = H(x, z, \varphi),$$

la fonction A_{n+1} étant désignée par H.

Nous avons laissé de côté le cas où $q = 3$; si les trois fonctions ne forment pas un groupe involutif, on peut en trouver deux de la famille qui soient en involution et la troisième sera déterminée par la relation (9) où $q = 3$.

3. En général, les fonctions $x_1, \ldots, x_{q-1}, \varphi$ ne constituent pas un groupe; pour s'en assurer, il faut contrôler que les relations (4) ne sont pas vérifiées en général. On pourra prendre $W = \dfrac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}}$, c'est-à-dire

$$W = \frac{H' - p_1 A'_1 - \ldots - p_{q-1} A'_{q-1}}{A_i},$$

l'accent désignant la dérivée par rapport à φ; il est bien clair que si les fonctions $A_1, \ldots, A_{q-1}$, H ne sont pas choisies d'une façon particulière, $[W, x_i]$ par exemple, c'est-à-dire $\dfrac{\partial W}{\partial p_i}$, ne s'exprime pas au moyen seulement de $x_1, \ldots, x_{q-1}$ et φ,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}}, x_i\right] &= \left(\frac{H' - p_1 A'_1 - \ldots - p_{q-1} A'_{q-1}}{A_i}\right)_\varphi \frac{A_i}{H' - p_1 A'_1 - \ldots - p_{q-1} A'_{q-1}} - \frac{A'_i}{A_i} \\ &= \frac{H'' - p_1 A''_1 - \ldots - p_{q-1} A''_{q-1}}{H' - p_1 A'_1 - \ldots - p_{q-1} A'_{q-1}} - 2\frac{A'_i}{A_i}; \end{aligned}$$

le second terme ne dépend que de $x_1, \ldots, x_{q-1}, \varphi$ et visiblement, à moins que les $H_1, A_1, \ldots, A_{q-1}$ ne s'expriment, par rapport à φ, linéairement au moyen de l'un d'entre eux, le premier terme dépendra de $p_1, \ldots, p_{q-1}$. Comme exemple de famille $\mathcal{F}$ qui ne constitue pas un groupe, indiquons $x_1, x_2, x_3, z, \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2 + z}}$.

II.

L'application que nous avons en vue à la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre s'appuie sur les résultats précédents, q étant égal à $n+2$, nous ne l'indiquerons que dans le cas de $n=3$, la généralisation se faisant d'elle-même; le cas de $n=2$ rentre dans la théorie des transformations de Bäcklund.

1. A un élément du premier ordre $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$, faisons correspondre une hypersurface Σ à trois dimensions; pour la simplicité de l'écriture, nous la supposerons donnée sous la forme

$$Z = F(X_1, X_2, X_3;\, x, z, p). \tag{10}$$

A une hypersurface (s) (où un point a pour coordonnées x_1, x_2, x_3, z), nous faisons correspondre, en général, l'enveloppe S des Σ correspondant à ses éléments; cela se fait en adjoignant à (10), les trois relations

$$F_i = \frac{dF}{dx_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial F}{\partial p_1} + p_{12}\frac{\partial F}{\partial p_2} + p_{13}\frac{\partial F}{\partial p_3} = 0; \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

avec

$$p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Considérons l'équation du second ordre, (θ), obtenue par l'élimination de X_1, X_2, X_3 entre les relations (11) et (12),

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = 0. \tag{12}$$

D'un travail précédent [1], il résulte que cette équation (θ) admet deux familles de caractéristiques à une dimension, qui sont, en général, du second ordre. Soit (s') une intégrale de (θ); les formules de la transformation $(s \rightarrow S)$ ne s'appliquent pas à s'. Toutefois, l'élimination qui conduit à (θ) fournit des expressions de X_1, X_2, X_3 en fonction des x, de z et de ses dérivées du premier et du second ordre; lorsque

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1927, p. 334.

le point de coordonnées x_1, x_2, x_3, z décrit s', en général X_1, X_2, X_3 varient d'une manière indépendante, et en leur adjoignant la relation (10), on constate qu'à (s') on peut faire correspondre une hypersurface (S'). Nous n'insistons pas ici sur les relations entre S' et les Σ correspondant aux divers points de s'; constatons que la différentiation de la relation (10), en tenant compte de (11), prouve que les dérivées premières de Z sur S' se calculent au moyen de

$$(13) \qquad P_i = \frac{\partial F}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Mais la différentiation de ces relations (13) donne

$$(14) \qquad \sum_1^3{}^j \left(P_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}\right) dX_j = \sum_1^3{}^l \frac{d}{dx_l}\frac{\partial F}{\partial X_i} dx_l \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Comme

$$\frac{d}{dx_l}\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}\frac{dF}{dx_l} = \frac{\partial F_l}{\partial X_i},$$

en tenant compte de (12), il vient

$$(15) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} P_{11} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} & P_{12} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} & P_{13} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1 dX_3} \\ P_{21} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_1} & P_{22} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} & P_{23} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3} \\ P_{31} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3 \partial X_1} & P_{32} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3 \partial X_2} & P_{33} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, des relations (14) nous déduisons, grâce à (15), les nouvelles relations (nous laissons de côté une discussion sans grande importance ici) :

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} P_{11} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} & P_{12} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} & \dfrac{\partial F_l}{\partial X_1} \\ P_{21} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_1} & P_{22} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} & \dfrac{\partial F_l}{\partial X_2} \\ P_{31} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3 \partial X_1} & P_{32} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3 \partial X_2} & \dfrac{\partial F_l}{\partial X_3} \end{vmatrix} = 0 \qquad (l = 1, 2, 3).$$

Sans nous attarder à leur interprétation, nous constatons qu'adjointes aux relations (10) elles permettent d'écrire une nouvelle relation où ne figurent plus les dérivées secondes de z,

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} P_{11}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} & P_{12}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_1\,\partial X_2} & [F, F_{X_1}]_x \\ P_{21}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2\,\partial X_1} & P_{22}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} & [F, F_{X_2}]_x \\ P_{31}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3\,\partial X_1} & P_{32}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial X_3\,\partial X_2} & [F, F_{X_3}]_x \end{vmatrix} = 0.$$

F_{X_1} étant égal à $\dfrac{\partial F}{\partial X_1}$, et $[F, F_1]_x$ désignant le crochet jacobien.

Nous arrivons ainsi au résultat que nous avions en vue : les hypersurfaces (S′) seront, en général, solutions d'une équation aux dérivées partielles Θ, du deuxième ordre, si l'élimination des x, z, p est possible entre les relations (10), (13), (15) et (17), soit 6 relations. L'équation Θ admet deux familles de caractéristiques à une dimension, dont l'une au moins, est du premier ordre.

Remarquons qu'une discussion s'impose.

2. Cela posé, supposons que les x, z, p figurent dans F par l'intermédiaire de seulement 5 fonctions : $\varphi_i(x, z, p)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Dans (10), (13) et (15) ils ne figurent aussi que par l'intermédiaire des φ; dans (17), ils figureront en outre dans les crochets $[\varphi_i, \varphi_j]_x$; mais ces différents crochets entrent dans (17) d'une façon linéaire et homogène. Si donc leurs rapports s'expriment au moyen des φ, les x, z, p ne figureront aussi dans (17) que par l'intermédiaire de φ; par conséquent, en général, l'élimination des x, z, p entre les relations indiquées sera possible. Autrement dit, si les fonctions φ constituent une famille $\mathcal{F}$ (ou un groupe), à l'équation (θ) nous pouvons faire correspondre l'équation (Θ) et définir une transformation des intégrales de ces deux équations : une intégrale de (θ) se transforme, en général, en une intégrale bien déterminée de (Θ); mais à une intégrale de (Θ) correspondent une infinité d'intégrales de (θ).

On peut, par transformation de contact, se ramener à des cas simples. Si les φ forment un groupe, dans la relation (10) les arguments x, z, p ne figureront plus que par les éléments de la forme canonique d'un groupe de 5 fonctions; il n'y aura donc plus d'arbitraire sous le signe F.

Si les φ forment une famille $\mathcal{F}$, d'après ce qui a été vu ci-dessus, par une transformation de contact, on pourra se ramener au cas où quatre des fonctions φ sont x_1, x_2, x_3, z, la cinquième étant déterminée par la relation déduite de (9'):

$$p_1 A_1(x, z, \varphi) + p_2 A_2(x, z, \varphi) + p_3 A_3(x, z, \varphi) = H(x, z, \varphi),$$

A_1, A_2, A_3, H étant des fonctions arbitraires de leurs arguments; la relation (10) est alors

$$Z = F(X_1, X_2, X_3; x_1, x_2, x_3, z, \varphi).$$