JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARMOIS

Les singularités d'une métrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 171-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__171_0>

Les singularités d'une métrique;

PAR G. DARMOIS.

La théorie de la relativité générale considère, comme il est bien connu, la multiplicité à quatre dimensions, dite *espace temps*, comme un espace de Riemann dont la métrique permet une explication des phénomènes de gravitation. Les coefficients de la forme quadratique qui définit cette métrique sont appelés, pour cette raison, les potentiels du champ de gravitation. Bien entendu, et comme dans la théorie classique, il est bon de distinguer le champ extérieur, qui vérifie les équations d'Einstein analogues à l'équation de Laplace, et le champ intérieur, qui vérifie le système analogue à l'équation de Poisson. Or, dans la théorie classique, le scalaire qui porte le nom de potentiel de gravitation a des propriétés très simples. Dans le cas d'une masse unique et ponctuelle, cette fonction scalaire est régulière partout, sauf au point attirant. Elle n'est une solution, partout régulière, de l'équation de Laplace, que si la masse attirante est nulle.

Dans le cas de la théorie d'Einstein, on sait bien qu'en l'absence de tout champ de gravitation, la métrique de l'espace temps a la forme de Minkowski ; les potentiels de gravitation peuvent être réduits à des constantes.

Il est naturel de se demander quelles particularités présente le groupe des potentiels quand il y a des masses attirantes, et en général, ce qu'on doit considérer comme particulantes ou singularités d'une métrique.

Nous ne voulons que présenter ici des remarques très simples sur ce sujet : nous les appliquerons ensuite au ds^2 de Schwarzschild.

La multiplicité. — Il convient d'abord de préciser quelles notions, posées comme propriétés géométriques, et par conséquent invariantes dans leur expression analytique, conditionnent l'étude des multiplicités envisagées.

Nous nous placerons pour fixer les idées dans le cas d'un continuum Γ à deux dimensions, conçu comme un être géométrique, et dont une représentation analytique à deux coordonnées x et y permet une image par une portion du plan des xy. Une courbe $\mathcal{L}$ de Γ, être géométrique, représentée par deux fonctions régulières x et y d'un paramètre t, passe au point M de Γ. La direction de la courbe $\mathcal{L}$ au point M sera également considérée comme géométrique, elle sera définie analytiquement par

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad \frac{dy}{dt} = b.$$

Le point de coordonnées

$$x + a\,dt, \quad y + b\,dt$$

sera dit infiniment voisin de M dans la direction a, b. L'ensemble des directions autour de M et des points infiniment voisins de M peut être ainsi obtenu en faisant varier a, b.

Qu'arrive-t-il par un changement de coordonnées? Il devra être biunivoque, soit

$$\begin{array}{ll} \mathrm{X}(xy), & x(\mathrm{XY}), \\ \mathrm{Y}(xy), & y(\mathrm{XY}). \end{array}$$

Soit A, B la nouvelle représentation d'une direction

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A} = \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} a + \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} b, & a = \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{A} + \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{Y}} \mathrm{B}, \\ \mathrm{B} = \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} a + \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} b, & b = \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{X}} \mathrm{A} + \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{Y}} \mathrm{B}. \end{array}$$

Deux directions distinctes ne conservent deux représentations distinctes que si le déterminant fonctionnel $\frac{\mathrm{D}(\mathrm{XY})}{\mathrm{D}(xy)}$ n'est pas nul. Ainsi, nous pouvons avoir une infinité d'images de Γ, mais pour que les images ne déforment pas les traits que nous avons décidé de considérer, il faut que les systèmes de coordonnées soient choisis dans une famille, qui constitue nécessairement un groupe. C'est ce que G. Bouligand appelle le groupe topologique restreint γ (1).

Il nous permet de parler, non seulement des points du continuum Γ, mais des directions autour d'un point, des points infiniment voisins de M.

Au contraire, une image (XY) du continuum Γ où le déterminant fonctionnel peut s'annuler est déformée en certains points, où les représentations dx, dy et dX, dY ne conviennent pas à un même vecteur.

Du point de vue analytique, un continuum Γ sera donc représenté nécessairement par une image (xy) ou par toutes celles du groupe précédent.

La métrique associée a une multiplicité. — Grâce aux conventions précédentes, il nous est permis de parler d'un point M du continuum, et d'un vecteur dM d'origine M. On donne alors une forme quadratique du vecteur dM, on convient de son invariance. Soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\, dx^2 + 2\mathrm{F}\, dx\, dy + \mathrm{G}\, dy^2.$$

Il faut que les fonctions E, F, G soient définies en chaque point de Γ. On peut alors, par les moyens connus, obtenir la longueur $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} ds$ d'un arc de courbe AB.

Points réguliers. — Un point de Γ sera dit régulier pour la métrique si, les fonctions E, F, G étant définies et régulières en ce point, le discriminant de la forme quadratique n'est pas nul.

Cette propriété, invariante par les transformations du groupe considéré, assure pour un point régulier, que la géométrie des directions et des vecteurs infiniment petits est une géométrie euclidienne à deux dimensions.

Points singuliers. — Les points singuliers sont :

1° Ceux où E, F, G étant régulières, le discriminant est nul;

(1) G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, p. 64.

2° Ceux où E, F, G ne sont pas régulières.

Ces propriétés sont également invariantes.

Pour le premier cas, le type de la métrique, définie par le nombre des carrés positifs et négatifs, se modifie. S'il y a deux dimensions, la forme quadratique est soit réduite à un seul carré, soit à zéro.

Les points singuliers dont nous parlons sont ceux du système des lignes de longueur nulle.

Dans le cas de n dimensions, on peut avoir un nombre de carrés allant de zéro à $n-1$. Ces différents types de singularités ont également une signification invariante.

Exemples : (1), (2), (3), (4) :

$$ds^2 = (x\,dx)^2 - dy^2. \tag{1}$$

La métrique est partout du type hyperbolique, sauf aux points de l'axe $x = 0$, ligne singulière. Cet axe est un lieu de points où passent deux lignes de longueur nulle ayant même tangente.

Cette singularité disparaîtrait évidemment par la transformation

$$X = \frac{x^2}{2} \quad Y = y,$$

mais nous sortirions ainsi du groupe que nous avons considéré.

On voit sur cet exemple l'analogie avec les singularités des courbes définies par une équation différentielle. Ces singularités, invariantes seulement par certaines transformations, peuvent dans d'autres cas se modifier profondément ou disparaître,

$$ds^2 = dx^2 + x^2\,dy^2. \tag{2}$$

La ligne singulière est $x = 0$. Pourtant, nous avons une métrique euclidienne en coordonnées polaires. Mais, dans ce passage aux coordonnées polaires, les points de l'axe $x = 0$ sont rassemblés à l'origine, et si la métrique est la même, la multiplicité étudiée a changé :

$$ds^2 = dx^2 + (x - y)^2\,dy^2. \tag{3}$$

C'est encore une métrique euclidienne, celle d'une développable; la ligne singulière correspond à l'arête de rebroussement

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x} - x\,dy^2. \tag{4}$$

Nous sommes dans le cas (2°), la métrique est régulière partout où $x \neq 0$, mais elle n'est pas définie pour $x = 0$.

Si le système de coordonnées se trouve imposé par des considérations directes, tout ce qu'on peut dire est que la notion de métrique autour d'un point où $x = 0$ ne s'applique pas.

Si la signification des variables n'est pas précise, et que la signification essentielle soit celle de la métrique, on prendra pour variable nouvelle la distance géodésique à cet axe, en posant $(x > 0)$

$$2\sqrt{x} = X, \qquad y = 2Y.$$

La forme nouvelle est alors

$$ds^2 = dX^2 - X^2\,dY^2,$$

et pour

$$x < 0, \qquad 2\sqrt{-x} = X', \qquad y = 2Y', \qquad ds^2 = -dX'^2 + X'^2\,dY'^2.$$

Avec ces nouvelles variables, on est alors dans le cas (1), la métrique est singulière tout le long de l'axe $X = 0$.

Pourtant, comme on le voit, dans tout le plan des xy (sauf le long de $x = 0$), la métrique considérée est à courbure totale nulle.

Nous allons trouver des circonstances assez analogues à celles de ce dernier exemple dans le cas de la relativité.

LE ds^2 DE SCHWARZSCHILD. — Le problème était de trouver les potentiels, solutions des équations d'Einstein pour l'espace temps extérieur à une masse unique sphérique, isolée et sans rotation.

Les points de cet espace temps, multiplicité à quatre dimensions, sont repérés par quatre nombres, le temps t, les angles θ et φ coordonnées géographiques classiques pour l'orientation du rayon OM, et une variable radiale r, dont la signification physique n'est pas précise, mais qui est fonction de la distance géodésique ρ du point M à la sphère matérielle, ou à une sphère concentrique.

La solution de Schwarzschild a la forme bien connue

$$ds^2 = dt^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2[d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2].$$

On a fixé analytiquement la variable r de manière à avoir une expression simple pour les deux derniers termes.

On voit que si $r > 2m$, nous avons un ds^2 du type hyperbolique normal (un signe $+$, trois signes $-$) en accord avec la signification de nos variables. Si $r < 2m$, il y a désacord avec cette signification. Nous n'avons donc à considérer cette métrique que pour la multiplicité où $r \geqq 2m$. Avec la variable r, ce ds^2 est régulier partout, sauf pour $r = 2m$, où la métrique n'est pas définie.

Bien entendu, il faut adopter ici la variable ρ, de signification invariante. On a de suite

$$r = m[1 + \mathrm{ch}\, u], \qquad \rho = m[u + \mathrm{sh}\, u],$$

$$ds^2 = dt^2 \frac{\mathrm{h}^2 \frac{u}{2}}{\mathrm{ch}^2 \frac{u}{2}} - d\rho^2 - r^2[d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2].$$

Si l'on admet, comme il est naturel, que ces variables t, ρ, θ, φ donnent une image fidèle de l'espace temps, on voit immédiatement que la multiplicité $u = 0$ est singulière.

En tous ses points, le cône élémentaire qui définit les lignes de longueur nulle est réduit à un vecteur porté par la multiplicité. Celle-ci apparaît donc comme engendrée par des lignes de longueur nulle, tangentes à ce vecteur en chaque point.