JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

KING-LAI HIONG

Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 233-308.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_233_0>

Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini;

PAR KING-LAI HIONG.

INTRODUCTION.

Depuis les travaux de H. Poincaré, J. Hadamard, surtout après la découverte du célèbre théorème de M. E. Picard en 1879 et sa démonstration élémentaire par M. E. Borel en 1896, la théorie des fonctions entières a suscité les recherches de nombreux géomètres. On peut distinguer deux sortes de résultats : les premiers sont d'une nature qualitative comme ceux de MM. Montel, Julia, Ostrowski, etc.; les seconds d'une nature quantitative comme les énoncés de MM. Borel, Schottky, Landau, Blumenthal, Denjoy, Valiron, Milloux, etc.

A ce dernier point de vue, c'est surtout grâce à la notion de l'ordre introduit par M. Borel [2, *d*] (1) que bien des résultats peuvent prendre une forme précise et simple. Avec cette notion, M. Borel a donné un théorème très précis concernant la densité des zéros d'une fonction entière d'ordre fini, contenus dans un cercle donné de centre o, théorème qui est trop connu pour être rappelé ici. C'est en cherchant une proposition analogue dans l'étude de la distribution des arguments, que, plus tard, M. G. Valiron a introduit ce qu'il appelle direction de Borel.

Dans le cas des fonctions d'ordre infini, M. Borel n'a pas défini explicitement les ordres, et ses résultats donnés dans son Mémoire

(1) Les numéros écrits entre crochets renvoient à l'Index bibliographique.

fondamental des *Acta math.* concernent seulement une classe de fonctions d'ordre infini, mais il a jeté les bases d'une théorie générale et, par une intuition puissante, il a reconnu les difficultés du problème et indiqué les principaux moyens de les surmonter.

En s'inspirant des idées de M. Borel et en complétant ses résultats, M. Blumenthal est parvenu, au moyen des fonctions type, à édifier une théorie comprenant toutes les fonctions entières d'ordre infini sans exception. Mais ses résultats ne sont pas aussi serrés que ceux obtenus par M. Borel dans le cas de l'ordre fini et dans le cas des fonctions d'ordre infini qui peuvent être traitées par sa méthode.

En ce qui concerne les produits canoniques d'ordre infini, M. A. Denjoy, à l'aide d'une hypothèse faite sur le mode de la croissance des zéros, a obtenu pour le module maximum une limitation très serrée.

La méthode féconde des valeurs moyennes logarithmiques créée il y a quelques années par MM. R. et F. Nevanlinna a donné à bien des résultats une forme définitive et permet de traiter un grand nombre de problèmes avec précision et simplicité.

Le présent travail a pour but principal de refaire la théorie générale des fonctions entières d'ordre infini pour chercher à obtenir des résultats meilleurs que ceux de M. Blumenthal et de l'étendre en même temps au cas plus général des fonctions méromorphes d'ordre infini; le degré de précision en vue est celui que comportent les résultats donnés par M. Borel dans le cas de l'ordre fini.

Je pars de la fonction caractéristique $T(r)$ de M. R. Nevanlinna. Après quelques préliminaires, j'établis, dans le Chapitre II, l'existence des fonctions adjointes à la fonction caractéristique $T(r)$ d'une fonction méromorphe d'ordre infini quelconque $f(z)$ et à un infiniment petit ε, autrement dit, je démontre qu'étant donnée une fonction d'ordre infini à caractéristique $T(r)$, on peut toujours trouver une fonction à croissance normale $U(r)$ telle qu'on ait

$$T(r) \leqq U(r) = r^{\rho(r)},$$

l'égalité ayant lieu pour une suite infinie de valeurs de r. Puis je définis les ordres $\rho(r)$ de $f(z)$, et alors les théorèmes de M. R. Nevanlinna conduisent à une proposition relative à la densité des valeurs de $f(z)$. Ce résultat est bien plus serré que celui de M. Blumenthal et a le degré de précision recherchée par M. Borel. M'appuyant sur les résultats de M. Denjoy, je montre ensuite que $\rho(r)$ étant l'un des ordres de $f(z)$, tel que $\rho(r)\log r$ soit une fonction convexe de $\log r$, on peut former avec les zéros ou les pôles de $f(z)-\alpha$ un produit canonique, tel qu'il existe un de ses ordres au plus égal à $\rho(r)$. Comme conséquence, on obtient une généralisation du théorème de M. Hadamard sur la décomposition en facteurs.

Le Chapitre III est consacré à l'extension de tous ces résultats aux fonctions méromorphes dans le cercle unité; en ce qui concerne les produits canoniques, j'étudie aussi le cas du genre fini $p \geq 1$. En formant le produit de Picard ou un produit que j'appelle produit de Nevanlinna, j'obtiens dans ce cas, aussi bien que dans le cas du genre infini, des résultats tout à fait analogues à ceux du chapitre précédent.

Dans le Chapitre IV, je passe à l'étude de la distribution des arguments; j'obtiens des théorèmes analogues à ceux dus à M. Valiron concernant les directions de Borel et les points de Borel dans le cas de l'ordre fini.

Enfin, le Chapitre V est réservé à l'étude sur la croissance des fonctions holomorphes d'ordre infini, définie par un développement de Taylor. Les résultats qu'on possède dans le cas de l'ordre fini y sont étendus au cas de l'ordre infini; en particulier, la condition de la croissance régulière s'obtient pour le cas général des fonctions entières d'ordre infini ainsi que pour celui des fonctions holomorphes d'ordre infini dans le cercle-unité (¹).

Il me reste, pour terminer cette introduction, à exprimer toute la reconnaissance que j'ai contractée envers MM. Borel, Hadamard. Je remercie tout particulièrement M. Valiron qui m'a suggéré ce travail et dont les indications et les critiques me furent très précieuses, et M. Denjoy qui a bien voulu aussi me donner des conseils. Qu'il me soit permis encore d'adresser l'expression de ma vive gratitude à MM. H. Villat, P. Montel et P. Humbert. Je ne saurais oublier non plus ceux qui m'aidèrent et rendirent possible mon séjour à Paris.

(¹) Les principaux résultats contenus dans le présent mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de France (séances du 23 janvier, du 12 juin 1933 et du 26 mars 1934).

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Démonstration d'une propriété de $T(r)$.

1. M. G. Valiron a énoncé sans démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [13, k] une propriété de $T(r)$ qu'on peut préciser comme il suit :

La fonction caractéristique $T(r)$ *d'une fonction méromorphe* $f(z)$ *est analytique en* $(r-r_0)^{\frac{1}{p}}$ *par segments adjacents* ([1]), *le nombre entier positif* p *dépendant de* r_0 *et se réduisant à* 1 *pour la plupart des segments; quand* $p>1$, *la fonction analytique de* $(r-r_0)^{\frac{1}{p}}$ *à gauche de* r_0 *peut différer de celle à droite de* r_0.

Ceci jouant un rôle important dans le présent travail, il convient de le rétablir.

On a suivant M. R. Nevanlinna

$$T(r)=m(r,\infty)+N(r,\infty) \tag{1}$$

avec

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \qquad N(r,\infty)=\sum_{0<|b_\nu|\leq r}\log\frac{r}{|b_\nu|},$$

où les b_ν désignent les pôles de $f(z)$ contenus dans le cercle de centre o et de rayon r, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité dans la sommation.

Il suffit évidemment d'étudier la fonction $m(r,\infty)$. Posons

$$\left\{\begin{aligned} f(z)&=P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi),\\ F(r,\varphi)&=P(r,\varphi)^2+Q(r,\varphi)^2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

---

[1] Avec M. Denjoy, j'appelle segment a, b, l'ensemble des nombres x tels que $a\leq x\leq b$.

Par chaque pôle de $f(z)$, traçons une circonférence de centre o; dans la couronne $C(R, R')$ limitée par deux consécutives quelconques des circonférences ainsi obtenues dont nous désignons les rayons par R et R', la fonction $f(z)$ est développable en série de Laurent

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n r^n e^{in\varphi}.$$

Regardons r, φ comme variables complexes en posant $r = \rho e^{i\theta}$, $\varphi = \psi + \tau i$ et supposons que

$$R \leqq \rho \leqq R', \qquad -\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_1, \qquad 0 \leqq \psi \leqq 2\pi, \qquad -\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1,$$

où θ_0, θ_1, τ_0 et τ_1 sont des quantités positives. En prenant $R_1 = Re^{\tau_1}$ et $R'_1 = R'e^{-\tau_0}$, la série à termes positifs

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| \rho^n e^{-n\tau}$$

est convergente dans la couronne $C(R_1, R'_1)$ contenue dans $C(R, R')$ et elle est une fonction majorante pour les deux fonctions

$$\left.\begin{aligned} P(r, \varphi) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (c'_n \cos n\varphi - c''_n \sin n\varphi) r^n \\ Q(r, \varphi) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (c'_n \sin n\varphi + c''_n \cos n\varphi) r^n \end{aligned}\right\} \qquad (c_n = c'_n + c''_n i).$$

Ces deux séries peuvent donc être ordonnées suivant les puissances croissantes de φ et représentent des fonctions de deux variables complexes analytiques dans le domaine

$$\text{(D)} \qquad R_1 \leqq \rho \leqq R'_1, \qquad -\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_1, \qquad 0 \leqq \psi \leqq 2\pi, \qquad -\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1.$$

Il s'ensuit que la fonction $F(r, \varphi)$ est également analytique dans (D). En revenant aux variables réelles, elle est donc analytique dans la couronne $C(R_1, R'_1)$.

Considérons maintenant la courbe (Γ) ayant pour équation

$$(3) \qquad F(r, \varphi) - 1 = 0.$$

On trouve que les coordonnées ρ, φ de ses points multiples doivent satisfaire à la relation

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)^2 = |f'(z)|^2 = 0,$$

en tenant compte des conditions d'analyticité de Cauchy; ceci montre que ces points multiples sont isolés comme le sont les zéros de $f'(z)$ qui est une fonction méromorphe.

Puis, je dis que dans une couronne quelconque de centre o, les maxima et les minima que la courbe (Γ) peut avoir par rapport à r sont en nombre fini. En effet, supposons qu'ils soient en nombre infini. Alors l'ensemble formé par ces points a au moins un point d'accumulation A dans cette couronne. Mais comme pour tout point de cet ensemble, on a

$$F(r, \varphi) = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0,$$

la continuité des fonctions $F(r, \varphi)$ et $\frac{\partial F}{\partial r}$ exige que A soit un point de (Γ) pour lequel on a $\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0$ et par suite A étant un point ordinaire, il est évident que la courbe ne peut avoir une infinité d'extréma dans son voisinage à moins que le rayon vecteur r de (Γ) y reste constant.

Or, cette dernière circonstance ne peut pas avoir lieu, car pour une valeur donnée de r, la fonction $F(r, \varphi) - 1$ est analytique dans le cercle $|\varphi| \leqq 2\pi$ et ne peut par suite admettre une infinité de racines réelles, sans être identiquement nulle. Donc l'hypothèse faite est absurde.

Ainsi dans une couronne telle que $C(R_1, R'_1)$, il ne peut exister qu'un nombre fini de points de la courbe (Γ) pour lesquels on a $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$.

Soit d'abord, dans $C(R_1, R'_1)$, (r_0, φ_0) un point de la courbe (Γ) pour lequel on a $\frac{\partial F}{\partial \varphi} \neq 0$. Dans le domaine $|r - r_0| < h$, $|\varphi - \varphi_0| < k$ avec h, k assez petits, la fonction $F(r, \varphi) - 1$ est développable en série entière de $r - r_0$ et de $\varphi - \varphi_0$, cette série ne présentant pas de terme constant et le coefficient de $\varphi - \varphi_0$ n'étant pas nul. D'après un théorème connu relatif aux fonctions implicites, on peut en conclure que l'équation (3) en φ admet dans l'intervalle $(r_0 - h,\ r_0 + h)$ une solution unique $\varphi = g(r)$ qui est analytique dans cet intervalle et qui tend vers φ_0 lorsque r tend vers r_0.

D'après une remarque faite plus haut, l'équation $F(r_0, \varphi) - 1 = 0$ n'a qu'un nombre fini de racines; donc les arcs analytiques situés dans la couronne $C(r_0 - h,\ r_0 + h)$ et traversant la circonférence $|g| = r_0$ sont en nombre fini.

Si l'on considère une couronne de largeur quelconque ne renfermant aucun point de (Γ) pour lequel $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut la couvrir d'un nombre fini de couronnes possédant la même propriété que les couronnes telles que $C(r_0 - h,\ r_0 + h)$. Donc, il n'existe qu'un nombre fini d'arcs analytiques de (Γ) dans la couronne finie considérée.

Soit ensuite, dans $C(R_1, R'_1)$, (r_0, φ_0) un point de (Γ) pour lequel $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$. L'équation $F(r_0, \varphi) - 1 = 0$ admet alors la racine r_0 à un certain degré de multiplicité n et, r, φ étant considérés comme variables complexes, l'équation (3) peut s'écrire, dans le domaine $|r - r_0| < \delta$, $|\varphi - \varphi_0| < \delta'$, sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(r)(\varphi - \varphi_0)^\nu = 0,$$

où les A sont des séries entières en $r - r_0$ et $A_0(r_0) = \ldots = A_{n-1}(r_0) = 0$, $A_n(r_0) \neq 0$. D'après le théorème de Weierstrass sur les fonctions implicites de variables complexes, cette équation en φ admet, dans le cercle $|r - r_0| < \delta$, n solutions et n seulement qui tendent vers φ_0, r tendant vers r_0; toutes ces solutions peuvent se mettre sous la même forme

$$\varphi = \varphi_0 + \chi\left[(r - r_0)^{\frac{1}{p}}\right], \tag{4}$$

p étant un certain nombre entier et $\chi(u)$ une fonction analytique de u qui tend vers zéro avec u. Comme la courbe (Γ) ne peut avoir des points isolés, parmi ces solutions, il y en a au moins une qui est réelle et l'on obtient alors une courbe algébroïde d'après la définition de M. Blumenthal. Donc, il existe dans la couronne $C(r_0-\delta, r_0+\delta)$ un nombre fini d'arcs algébroïdes de (Γ) passant au point (r_0, φ_0) du cercle $|z|=r_0$. Puisque (Γ) ne peut avoir qu'un nombre fini de points sur la circonférence $|z|=r_0$, les arcs algébroïdes de (Γ) se trouvant dans toute la couronne $C(r_0-\delta, r_0+\delta)$ sont en nombre fini.

Étudions maintenant $m(r, \infty)$. Considérons d'abord une couronne $C(R_2, R'_2)$ contenue dans $C(R_1, R'_1)$ et ne contenant ni de point extremum de (Γ) par rapport à r, ni de point multiple de (Γ); les arcs de (Γ) qui s'y trouvent en nombre fini et qui sont analytiques la divisent en des régions où $F(r, \varphi) > 1$ et des régions où $F(r, \varphi) < 1$. Traçons une circonférence (C) de centre o et dont le rayon r est compris entre R_2 et R'_2; soit $M_{i-1}M_i$ un arc de (C) situé dans une région où $F(r, \varphi) > 1$. Si $\varphi_{i-1} = g_{i-1}(r)$ et $\varphi_i = g_i(r)$ sont les équations des arcs de (Γ) où se trouvent les extrémités M_{i-1} et M_i de l'arc $M_{i-1}M_i$, on a

$$m(r, \infty) = \sum \frac{1}{4\pi} \int_{g_{i-1}(r)}^{g_i(r)} \log F(r, \varphi)\, d\varphi, \tag{5}$$

la sommation étant étendue à tous les arcs de (C) pour lesquels on a $F(r, \varphi) > 1$.

Comme $\log F(r, \varphi)$ est analytique dans la couronne $C(R_2, R'_2)$ et les fonctions $g_i(r)$ dans l'intervalle (R_2, R'_2), la fonction $m(r, \infty)$ est analytique dans (R_2, R'_2), et puisque $N(r, \infty)$ y est également analytique, il en est de même de $T(r)$.

Considérons ensuite dans $C(R_1, R'_1)$ une circonférence $|z|=r_0$ sur laquelle (Γ) a au moins un point multiple ou un extremum et prenons une couronne $C(r_0-\delta, r_0+\delta')$ de largeur assez petite. La couronne $C(r_0-\delta, r_0)$ renferme un nombre fini d'arcs analytiques ou algébroïdes de (Γ) qui la divisent en régions comme dans le cas précédent. Si $r_0-\delta \leqq r \leqq r_0$, en prenant l'intégrale le long de la circonférence $|z|=r$ dans les régions où $F > 1$, on obtient

$$m(r, \infty) = \sum \frac{1}{4\pi} \int_{h_{i-1}(v)}^{h_i(u)} \log F(r, \varphi)\, d\varphi, \tag{6}$$

où $h_i(u)$ sont des fonctions analytiques de $u=(r-r_0)^{\frac{1}{p}}$, p désignant un nombre entier qui peut se réduire à 1, et le signe Σ a la même signification que plus haut.

On voit qu'une partie du second membre de (6) peut être une fonction analytique de r dans l'intervalle fermé $(r_0 - \delta, r_0)$ et l'autre y est une fonction analytique en $(r - r_0)^{\frac{1}{p}}$, p étant un entier positif supérieur à 1. Donc, $m(r, \infty)$ par suite $T(r)$ est analytique en $(r - r)^{\frac{1}{p}}$ dans l'intervalle fermé $(r_0 - \delta, r_0)$. On montre de même que $T(r)$ est analytique en $(r - r_0)^{\frac{1}{p}}$ pour $r_0 \leqq r \leqq r_0 + \delta$.

De ce qui précède, on peut conclure que si $C(R, R')$ est une couronne ne renfermant de pôle de $f(z)$, $T(r)$ est analytique en $(r - r_0)^{\frac{1}{p}} (p \geqq 1)$ par segments adjacents couvrant le segment R, R′ et la fonction analytique de $(r - r_0)^{\frac{1}{p}} (p > 1)$ à gauche de r_0 peut différer de celle à droite de r_0.

Pour une couronne $C(R, R')$ renfermant des pôles de $f(z)$, nous pouvons considérer la fonction $\frac{1}{f(z)}$. Celle-ci n'admettant pas de pôle dans $C(R, R')$, on se trouve dans le cas précédent. Mais, d'après le premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna, [10, *a*, *b*], on a

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + h,$$

h étant une constante; donc $T(r)$ est comme $T\left(r, \frac{1}{f}\right)$ analytique en $(r - r_0)^{\frac{1}{p}}$ par segments adjacents couvrant le segment R, R′. Ainsi la proposition est complètement prouvée.

II. — Conditions de la croissance normale.

2. M. R. Borel a mis en lumière en 1897 [2, *d*] le fait suivant qui est fondamental pour la théorie des fonctions entières d'ordre infini :

Soit $U(x)$ *une fonction réelle positive d'une variable réelle positive qui est monodrome pour toute valeur de* x, *si elle est continue non* *décroissante et tend vers l'infini avec x, elle vérifie l'inégalité*

$$(7) \qquad U(x') < U(x)^{1+\alpha} \quad \text{avec} \quad x' = x + \frac{1}{[\log U(x)]^{\lambda}},$$

sauf peut-être pour des intervalles dont l'étendue totale est finie. α et λ désignent des nombres positifs donnés.

On peut introduire avec M. O. Blumenthal [2], au lieu du nombre fixe α, un infiniment petit $\varepsilon(x)$ dont la décroissance est assez lente et remplacer dans cette proposition l'inégalité (7) qui est la *condition de la croissance normale* de $U(x)$ par

$$(\mathrm{I}) \qquad U(x') < U(x)^{1+\varepsilon(x)} \quad \text{avec} \quad x' = x\left[1 + \frac{1}{\log U(x)}\right].$$

3. Dans le présent travail, j'ai à utiliser surtout la condition

$$(\mathrm{II}) \qquad \varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] < (1+\varepsilon)\,\varphi(X) \qquad \left(\varepsilon \to 0 \text{ avec } \frac{1}{X}\right).$$

Je dis que si $\log x = X$, $\log U(x) = \varphi(X)$ les conditions (I) et (II) sont équivalentes, pourvu qu'on change au besoin l'infiniment petit ε.

En effet, avec ce changement de variables, l'inégalité (I) s'écrit

$$\varphi\left\{X + \log\left[1 + \frac{1}{\varphi(X)}\right]\right\} < (1+\varepsilon)\,\varphi(X)$$

et l'on voit immédiatement que (II) entraîne bien (I) avec le même ε.

Réciproquement, si l'on a (I), on a aussi

$$\varphi\left\{X' + \log\left[1 + \frac{1}{\varphi(X')}\right]\right\} < (1+\varepsilon)\,\varphi(X')$$

avec

$$X' = X + \log\left[1 + \frac{1}{\varphi(X)}\right], \qquad \varphi(X') < (1+\varepsilon)\,\varphi(X);$$

donc il vient

$$(8) \quad \varphi\left\{X + \log\left[1 + \frac{1}{\varphi(X)}\right] + \log\left[1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)\,\varphi(X)}\right]\right\} < (1+\varepsilon)^2\,\varphi(X).$$

Mais on constate facilement que

$$\log\left[1 + \frac{1}{\varphi(X)}\right] + \log\left[1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)\,\varphi(X)}\right] \geqq \frac{1}{\varphi(X)},$$

si $\varphi(X)$ est assez grand. Donc, en prenant $1+\varepsilon'=(1+\varepsilon)^2$, l'inégalité (8) peut se mettre sous la forme (II) avec l'infiniment petit ε' et, elle est vérifiée si petit que soit ε', pourvu que X soit suffisamment grand.

Remarques. — I. Si $U(x)$ est une fonction à croissance normale, on a

$$U\left[x+\frac{Ax}{\log U(x)}\right]<U(x)^{1+\eta} \qquad \left(\eta\to 0 \text{ avec } \frac{1}{x}\right), \tag{9}$$

A étant un nombre positif. En effet, prenons un nombre entier positif p, on a en appliquant la condition (I) p fois

$$U\left[x+\frac{px}{\log U(x)}\right]<U(x)^{(1+\varepsilon)^p}=U(x)^{1+\eta}$$

et en supposant $A<p$, on obtient (9).

II. $U(x)$ étant une fonction à croissance normale, on a

$$U\left[x-\frac{x}{\log U(x)}\right]>U(x)^{1-\eta} \qquad \left(\eta\to 0 \text{ avec } \frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

Car, d'après la remarque I,

$$U(x'')=U\left[x'+\frac{2x'}{\log U(x')}\right]<U(x')^{1+\varepsilon}; \tag{11}$$

si l'on prend $x'=x-x/\log U(x)$, on trouve que

$$x''=x'+\frac{2x'}{\log U(x')}>x\left[1+\frac{1}{\log U(x')}-\frac{1}{\log U(x)}\right].$$

Comme $x'<x$, ceci montre que $x''>x$. Alors de (11) on déduit *a fortiori* l'inégalité

$$U(x)<U\left[x-\frac{x}{\log U(x)}\right]^{1+\varepsilon}$$

qui donne immédiatement (10).

CHAPITRE II.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE INFINI.

I. — Fonctions adjointes à $T(r)$.

4. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini, $T(r)$ la fonction caractéristique de M. R. Nevanlinna. Cette fonction $T(r)$ est, comme on sait, une fonction continue croissante, mais peut présenter des vitesses de croissance exceptionnelles. Je vais établir qu'on peut toujours trouver une fonction continue non décroissante $U(r)$ telle qu'on ait, à partir d'une certaine valeur de r,

$$T(r) \leqq U(r),$$

et pour une suite de valeurs r tendant vers l'infini,

$$T(r) = U(r),$$

et qui vérifie de plus la condition de la croissance normale (I). Je dirai, pour employer une expression de M. Blumenthal, qu'une telle fonction $U(r)$ est *adjointe* à la fonction $T(r)$ et à l'infiniment petit ε.

5. Posons

$$(1)\qquad T(r) = r^{\mu(r)},$$
$$\log T(e^X) = X\,\mu(e^X).$$

La fonction $\mu(e^X)$ est continue et par hypothèse $\overline{\lim\limits_{X=\infty}}\,\mu(e^X) = \infty$; elle prend donc entre autres des valeurs de plus en plus grandes, lorsque X augmente. Si elle n'est pas non décroissante, je la remplace par la fonction $\nu(X)$ égale pour chaque valeur de X au maximum de $\mu(e^{X'})$, $X' \leqq X$, puis je considère la fonction

$$(2)\qquad v(X) = X\,\nu(X).$$

Pour étudier la croissance de cette fonction, je vais chercher une fonction $\varphi(X)$ vérifiant la condition de la croissance normale (II) et représentée par une ligne polygonale (L). On peut construire une telle ligne de la façon suivante par exemple : Désignons par η une variable positive; avec $\eta_0 = \frac{1}{2}$, prenons comme les n_0+1 premiers sommets de (L) les points

$$\begin{gathered}\varphi(1)=1,\\ \varphi(2)=1+\eta_0,\\ \varphi\left(2+\frac{1}{1+\eta_0}\right)=(1+\eta_0)^2,\\ \dots\dots\dots\dots,\\ \varphi\left[2+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0-1}}\right]=(1+\eta_0)^{n_0}.\end{gathered}$$

Puis, avec $\eta = \frac{\eta_0}{2}$, prenons comme sommets suivants les n_1 points

$$\varphi\left[2+\frac{1}{1+\eta_0}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}}\right]=(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right);$$

$$\varphi\left[2+\frac{1}{1+\eta_0}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}}+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)}\right]$$
$$=(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varphi\left[2+\frac{1}{1+\eta_0}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1-1}}\right]$$
$$=(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}.$$

D'une façon générale, en posant

$$S_{n_0}=1+\frac{1}{1+\eta_0}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0-1}},$$

$$S_{n_1}=\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}}+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)}+\dots+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1-1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{n_p}=\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}\dots\left(1+\frac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}}+\dots$$
$$+\frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}\dots\left(1+\frac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\frac{\eta_0}{p+1}\right)^{n_p-1}},$$

prenons avec $\eta = \frac{\eta_0}{p+1}$ les n_p sommets successifs :

$$(3)\quad \begin{cases} X_{\sigma+m} = 1 + \sum_{i=0}^{p-1} S_{n_i} + \dfrac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}} + \dots \\ \qquad + \dfrac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\dfrac{\eta_0}{p+1}\right)^{m}}, \\ Y_{\sigma+m} = (1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\dfrac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\dfrac{\eta_0}{p+1}\right)^{m+1}, \end{cases}$$

où $\sigma = 1 + n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1}$ et $m = 0, 1, \dots, n_{p-1}$.

Dans cette construction, je soumets n_p à la condition que $\frac{n_p}{p}$ tende vers une limite différente de zéro, lorsque p augmente indéfiniment.

Montrons d'abord que la ligne polygonale ainsi obtenue représente une fonction satisfaisant à la condition (II). Si $X = X_{\sigma+m}$, on a

$$\varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] = (1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}\dots\left(1+\frac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\frac{\eta_0}{p+1}\right)^{m+2},$$

d'où

$$(4)\qquad \varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] = \varphi(X)(1+\eta),$$

par suite l'inégalité (II) est vérifiée avec $\varepsilon > \eta$.

Si $X_{\sigma+m} < X < X_{\sigma+m+1}$, on a

$$X + \frac{1}{\varphi(X)} < X_{\sigma+m+1} + \frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\dfrac{\eta_0}{p+1}\right)^{m+1}};$$

ceci peut s'écrire

$$X + \frac{1}{\varphi(X)} < X_{\sigma+m+1} + \frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\dfrac{\eta_0}{p+1}\right)^{m+2}}$$
$$+ \frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}\dots\left(1+\dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\dfrac{\eta_0}{p+1}\right)^{m+3}},$$

car $\eta \leqq \frac{1}{2}$ satisfait à l'inégalité $1 < \frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{(1+\eta)^2}$. Donc

$$\varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] < \varphi(X_{\sigma+m+3}) = \varphi(X_{\sigma+m})\left(1 + \frac{\eta_0}{p+1}\right)^3,$$

ce qui donne

$$\varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] < \varphi(X)(1+\eta)^3. \tag{5}$$

Donc la condition (II) est vérifiée dans le dernier cas, si l'on prend $1+\varepsilon = (1+\eta)^3$, et ε ainsi déterminé convient aussi au cas précédent, par conséquent $\varphi(X)$ vérifie complètement (II).

Prouvons ensuite que (L) a une asymptote verticale. On a

$$S_{n_0} < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+\eta_0}} = \frac{1+\eta_0}{\eta_0} = u_1,$$

$$S_{n_1} < \frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0}} \frac{2+\eta_0}{\eta_0} = u_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_{n_p} < \frac{1}{(1+\eta_0)^{n_0} \cdots \left(1 + \dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}} \frac{p+1+\eta_0}{\eta_0} = u_{p+1};$$

par suite

$$X_{\sigma+m} < 1 + \sum_{\nu=1}^{p+1} u_\nu$$

$$(\sigma = 1 + n_0 + \ldots + n_{p-1} + m;\ m = 0, 1, \ldots, n_p - 1).$$

Comme par hypothèse n_p/p tend vers une limite positive différente de zéro, la limite

$$\lim_{v=\infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} = \lim \frac{p+1+\eta_0}{p+\eta_0} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}} = \frac{1}{e^{\eta_0 \lim \frac{n_{p-1}}{p}}}$$

a une valeur positive plus petite que 1 et la série Σu_p est convergente. Donc X qui va en croissant tend vers une limite A, tandis que $\varphi(X)$ augmente indéfiniment, ce qu'il fallait prouver.

Ainsi on obtient une fonction croissante $\varphi(X)$ qui vérifie la condition de la croissance normale (II) et qui devient infinie pour une valeur finie A de X, ε étant un infiniment petit pour $X \to A$.

Il est évident que, pour $\varphi(X) = \varphi(X' + a)$, on a

$$\varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X)}\right] = \varphi\left[X' + a + \frac{1}{\varphi(X' + a)}\right]. \tag{6}$$

6. Soit $\psi(y)$ la fonction inverse de $y = \varphi(X)$; si, quel que soit $X > X_0$, on a

$$\nu(X') \leqq \varphi\{X' - X + \psi[\nu(X)]\} \qquad \text{pour } X \leqq X' \leqq X + A - \psi[\nu(X)],$$

la fonction $\nu(X)$ vérifie la condition (II). Sinon, je procède à un ajustement au moyen des courbes déduites de (Γ) par translation.

Remarquons tout d'abord que la fonction $\varphi(X - a)$ avec $a > 0$ est continue croissante pour $a + 1 \leqq X < a + A$ et qu'elle est égale à 1 pour $X = a + 1$ et devient infinie pour $X = a + A$, donc on a $\nu(a + 1) > \varphi(1)$, si a est assez grand et $\nu(X) < \varphi(X - a)$ au voisinage de $X = a + A$.

Puis, du fait établi au paragraphe **1**, on déduit que $\nu(X)$ est analytique en $(X - X_0)^{\frac{1}{p}}$ par segments adjacents, p étant un nombre entier qui se réduit à 1 pour la plupart des intervalles; par suite, si l'on a un intervalle fini (X_1, X_2) où $\nu(X)$ existe, on peut le diviser en un nombre fini d'intervalles, de façon que $\nu(X)$ soit analytique en $(X - X_0)^{\frac{1}{p}}$ dans chaque intervalle partiel *fermé*.

Maintenant, supposons qu'on n'ait pas toujours

$$\nu(X') \leqq \varphi\{X' - X + \psi[\nu(X)]\}, \qquad X \leqq X' < X + A - \psi[\nu(X)].$$

Si X est un point pour lequel on a

$$\nu(X') > \varphi\{X' - X + \psi[\nu(X)]\}$$

pour un X' entre X et $X + A - \psi[\nu(X)]$, la courbe

$$y = \varphi\{x - X + \psi[\nu(X)]\} \tag{7}$$

est au-dessous de $y = \nu(x)$ pour certaines valeurs de x, mais elle est au-dessus pour les valeurs de x plus grandes que X'' défini par

$$\varphi(X'' - a) = \nu(a + A) \qquad \text{avec} \qquad a = X - \psi[\nu(X)].$$

Pour $x < X''$, la courbe (7) est composée d'un nombre fini de segments de droite, et d'après la remarque faite plus haut, la courbe $y = v(x)$ est composée d'un nombre fini d'arcs formés de courbes analytiques en $(x - x_0)^{\frac{1}{p}}$. Il s'ensuit que parmi les courbes

$$(8) \qquad y = \varphi(x - a) \qquad \{a < X - \psi[v(X)]\},$$

il y en a un nombre fini qui sont tangentes à la courbe (v). En outre, une courbe tangente à la courbe (v) ne coupe celle-ci qu'en nombre fini de points.

Parmi ces courbes, supprimons toutes celles pour lesquelles le point en commun avec (v) qui a la plus grande abscisse n'est pas un point de contact. Alors pour une courbe conservée, X étant l'abscisse du point de contact le plus à droite, on a

$$\varphi\{x - X + \psi[v(X)]\} > v(x) \qquad \text{si } x > X,$$

et la différence

$$\varphi\{x - X + \psi[v(X)]\} - v(x)$$

est, soit négative, soit positive pour $X_1 < x < X$, X_1 étant l'abscisse du point d'intersection le plus à gauche de la courbe considérée avec (v).

Si cette différence est négative, on supprime encore la courbe; si elle est positive, on la conserve et l'on a tout un arc limité par l'intervalle $(X_1 \leqq x \leqq X)$ pour lequel

$$v(x) \leqq \varphi\{x - X + \psi[v(X)]\}$$

et

$$v(X_1) = \varphi\{X_1 - X + \psi[v(X)]\},$$

tandis que

$$v(x) > \varphi\{x - X + \psi[v(X)]\},$$

si $x < X_1$ {et naturellement $> X - \psi[v(X)] + 1$}. On remplace dans cet intervalle $v(x)$ par $\varphi\{x - X + \psi[v(X)]\}$.

En faisant cette opération tout le long de la courbe (v), on obtient ainsi une fonction $u(X) = X\rho(e^X)$ à croissance normale telle que

$$v(X) \leqq u(X),$$

l'égalité ayant lieu pour une suite infinie de valeurs de X.

Je vais montrer que $u(X)$ et $X\mu(e^X)$ sont égaux pour une suite infinie de valeurs de X. Pour cela, démontrons qu'une courbe (8) ne peut, du moins à partir d'une certaine valeur de X, être tangente à la courbe (v) en un point $M(\xi, \eta)$ d'un arc sur lequel $v(X) = XC$, C étant une constante.

Supposons que le contraire ait lieu, alors la tangente (Δ) de la courbe (8) en M passerait par l'origine et

$$\varphi'(X-a) = \frac{\varphi(X-a)}{X},$$

X étant l'abscisse d'un point quelconque du segment de (8) qui est confondu avec (Δ). Si M est situé sur le côté dont les extrémités ont pour abscisses X_k, X_{k+1}, on en déduit

$$\varphi'(X_k+0-a) < \frac{\varphi(X_{k+1}-a)}{X_k}.$$

D'après (3) et en remarquant que

$$\varphi(X_{k+1}-a) - \varphi(X_k-a) = \varphi(X_k-a)\frac{\eta_0}{p+1} \qquad (k = \sigma + m),$$

on a

$$X_k\varphi'(X_k+0-a) < \varphi(X_k-a) + \varphi(X_k-a)\frac{\eta_0}{p+1}.$$

D'autre part, on a

$$\varphi'(X_k+0-a) = \frac{\varphi(X_{k+1}-a)-\varphi(X_k-a)}{X_{k+1}-X_k} = \frac{\eta_0}{p+1}\varphi(X_k-a)^2.$$

Donc, on devrait avoir

$$\frac{\eta_0}{p+1}X_k\varphi(X_k-a) < 1 + \frac{\eta_0}{p+1}.$$

En remplaçant dans l'expression de X_k, le dénominateur de chaque terme par

$$(1+\eta_0)^{n_0}\left(1+\frac{\eta_0}{2}\right)^{n_1}\cdots\left(1+\frac{\eta_0}{p}\right)^{n_{p-1}}\left(1+\frac{\eta_0}{p+1}\right)^{m},$$

on aurait *a fortiori*

$$\eta_0(1+n_0+n_1+\ldots+n_{p-1}+m) < p+1+\eta_0,$$

ce qui est impossible dès que par exemple $n_0 \geqq 2$, $n_1 \geqq 2$, ..., $n_{p-1} \geqq 2$, $m \geqq 2$.

Par conséquent, à partir d'une certaine valeur de X, il y a bien des points jusqu'à l'infini, pour lesquels on a

$$u(X) = X\mu(e^X).$$

En conclusion, étant donné $f(z)$ à caractéristique $T(r)$, on peut toujours trouver une fonction croissante $u(X)$ satisfaisant à la condition (II) telle que

$$\log T(e^X) \leqq u(X) \qquad \text{pour } X > X_0$$

et

$$\log T(e^X) = u(X) \qquad \text{pour } X = X_n \quad (n = 1, 2, \ldots, X_n \to \infty).$$

En revenant à la variable r, on a donc une fonction cherchée

$$\text{(9)} \qquad U(r) = e^{u(X)} = r^{\rho(r)} \qquad (X = \log r),$$

qui vérifie toutes les conditions imposées et l'on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\rho(r) \log r} = 1.$$

7. En vue de l'application aux produits canoniques, je vais encore montrer qu'on peut trouver une fonction $W(r)$ adjointe à $T(r)$ telle que $\log W(r)$ soit une fonction convexe de $\log r$.

Partons de la fonction adjointe $u(X)$ obtenue plus haut. Pour abréger le langage, un arc d'une courbe sera dit convexe, si sa concavité tourne vers le haut et concave dans le cas contraire. L'ordre de $f(z)$ étant infini, la courbe $y = X\mu(e^X)$ par suite la courbe (u) présente nécessairement une infinité d'arcs convexes. $v(X)$ est analytique en $(X - X_0)^{\frac{1}{p}}$ comme on a remarqué au paragraphe **6**, il en résulte que ces arcs ainsi que les arcs concaves sont dénombrables.

Considérons les courbes d'ajustement déduites de $y = \varphi(X)$ par translation. Commençons par mener une droite

$$Y = Y_1 + \alpha_1(X - X_1) = g_1(X)$$

tangente au premier arc concave de (u), le point de contact (X_1, Y_1) étant choisi de façon que $g_1(X) > u(X)$ pour $X < X_1$ et que $\alpha_1 \leqq \varphi'(x_1 + 0)$ avec $\varphi(x_1) = u(X_1)$. Elle rencontre (u) en un autre point $N_1(X'_1, Y'_1)$ tel que $g_1(X) \geqq u(X)$ pour $X_1 \leqq X \leqq X'_1$; si, à partir de X'_1, $u'(X + 0)$ va toujours en croissant, il suffit de remplacer, pour $X \leqq X'_1$, $u(X)$ par $g_1(X)$ pour que la fonction ainsi obtenue soit convexe. Sinon, on remplace $u(X)$ par $g_1(X)$ pour $X \leqq X_1$, et l'on continue l'opération d'ajustement à partir de M_1 de la façon suivante :

Distinguons trois cas :

1° Parmi les droites

$$(10) \qquad Y = Y_1 + \alpha(X - X_1) \qquad \text{avec} \qquad \alpha_1 < \alpha \leqq \lambda_1 = \varphi'(x_1 + 0),$$

il en existe qui sont tangentes à (u). Ces tangentes sont en nombre fini et chacune ne rencontre (u) qu'en nombre fini de points à moins qu'elle ait un segment commun avec (u).

Prenons parmi ces droites une quelconque qui est, entre M_1 et un point de contact $M_2(X_2, Y_2)$, complètement au-dessus de (u); si son équation est

$$Y = Y_1 + \alpha_2(X - X_1) = g_2(X),$$

on remplace, pour $X_1 < X \leqq X_2$, $u(X)$ par $g_2(X)$.

2° Aucune des droites (10) n'est tangente à (u), mais il en existe une qui passe par un point $M_2(X_2, Y_2)$ vérifiant la condition que $u'(x+0)$ croît dans $(X_2 - \delta, X_2)$ et décroît dans $(X_2, X_2 + \delta)$; et puis le segment M_1M_2 est au-dessus de l'arc M_1M_2 de (u). Si l'équation de cette droite est

$$Y = Y_1 + \beta_2(X - X_1) = h_2(X),$$

on remplace $u(X)$ par $h_2(X)$ pour $X_1 < X \leqq X_2$.

On remarque qu'on a nécessairement $u'(X_2 + 0) > \beta_2$, car, sinon, on retombe dans le cas précédent.

3° Les circonstances précédentes ne se présentent pas. Menons alors la droite

$$Y = Y_1 + \lambda_1(X - X_1) = l_2(X) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1 = \varphi'(x_1 + 0)$$

qui coupe nécessairement (u) à cause de la croissance rapide de $u(X)$. En désignant par $N_1(X'_1, Y'_1)$ le premier point de rencontre, remplaçons $u(X)$ par $l_2(X)$ dans (X_1, X'_1).

Si N_1 se trouve sur un arc convexe ou un segment de droite de (u), on conserve la valeur de $u(X)$ jusqu'au premier point $M_2(X_2, Y_2)$

où $u'(X+0)$ cesse de croître; si N_1 est sur un arc concave, on le prend comme M_2 pour continuer l'ajustement. On remarque comme dans le cas 2° que $\lambda_1 < u'(X_2+0) < \varphi'(x_2+0)$ avec $\varphi(x_2) = u(X_2)$.

A partir de M_2, on procédera de la même façon en considérant les droites

$$Y - Y_2 + \alpha(X - X_2),$$

où $\alpha_2 \leqq \alpha \leqq \varphi'(x_2+0)$ dans le cas 1° et $u'(X_2+0) < \alpha \leqq \varphi'(x_2+0)$ dans les autres cas.

La fonction $w(X)$ ainsi obtenue est évidemment convexe et l'on a $w(X) \geqq u(X)$. Si l'opération d'ajustement s'achève à un moment donné, $w(X)$ coïncide complètement avec $u(X)$ à partir d'une certaine valeur de X. Dans le cas contraire, les points M_i qui sont en nombre infini se trouvent sur des arcs concaves de (u), ils ne peuvent donc appartenir ni aux segments de la droite $y = CX$, ni aux arcs de

$$y = \varphi(X - a) \qquad (a > 0),$$

sauf s'ils sont situés aux extrémités de ces segments ou de ces arcs. Il s'ensuit que les courbes $y = w(X)$ et $y = X\mu(X)$ ont en commun une suite de points s'éloignant indéfiniment.

Je vais démontrer maintenant que la fonction $w(X)$ vérifie la condition de la croissance normale (II). Quatre cas sont possibles :

1° X et X′ appartiennent au même segment de droite M_iM_{i+1}. Considérons la ligne polygonale

$$y = \varphi(x - a) \qquad \text{avec} \qquad a = X - \psi[w(X)].$$

Comme par construction le coefficient angulaire de M_iM_{i+1} est inférieur ou égal à $\varphi'(\xi_i + 0)$ avec $\varphi(\xi_i) = u(X_i)$, par suite à $\varphi'(X + 0 - a)$, X_i désignant l'abscisse de M_i, on a $w(X') < \varphi(X' - a)$, c'est-à-dire

$$w\left[X + \frac{1}{w(X)}\right] < \varphi\left[X + \frac{1}{w(X)} - a\right]$$

et puisque

$$w(X) = \varphi(X - a),$$

il vient

$$w\left[X + \frac{1}{w(X)}\right] < \varphi\left[X + \frac{1}{\varphi(X - a)} - a\right] < (1 + \varepsilon)\,\varphi(X - a),$$

donc

$$\varpi\left[X+\frac{1}{\varpi(X)}\right]<(1+\varepsilon)\,\varpi(X).$$

2° X appartient à un segment $M_{i-1}M_i$ et X' au segment M_iM_{i+1}. En considérant

$$y=\varphi(X-a_i) \quad \text{avec} \quad a_i=X_i-\psi[\varpi(X_i)]$$

et en remarquant que le coefficient angulaire de $M_{i-1}M_i$ est plus petit que $\varphi'(X+0-a_i)$ et que celui de M_iM_{i+1} est plus petit que $\varphi'(X_i+0-a_i)$, on a

$$\varpi(X)>\varphi(X-a_i) \quad \text{et} \quad \varpi(X')<\varphi(X'-a_i);$$

par suite

$$X'=X+\frac{1}{\varpi(X)}<X+\frac{1}{\varphi(X-a_i)}.$$

L'inégalité

$$\varphi\left[X+\frac{1}{\varphi(X-a_i)}-a_i\right]<(1+\varepsilon)\,\varphi(X-a_i)$$

donne donc

$$\varphi\left[X+\frac{1}{\varpi(X)}-a_i\right]<(1+\varepsilon)\,\varphi(X-a_i),$$

a fortiori

$$\varpi\left[X+\frac{1}{\varpi(X)}\right]<(1+\varepsilon)\,\varpi(X).$$

3° X appartient à un segment M_iN_i et X' à un arc M_iM_{i+1} de (u). Considérons la ligne polygonale

$$y=\varphi(X-a'_i) \quad \text{avec} \quad a'_i=X'_i-\psi[\varpi(X'_i)],$$

X'_i étant l'abscisse de N_i.

On a ici

$$\varpi(X)>\varphi(X-a'_i) \quad \text{et} \quad \varpi(X')=u(X')\leqq\varphi(X'-a'_i),$$

et l'on démontre de la même façon que dans le cas précédent, qu'on a encore

$$\varpi(X')<(1+\varepsilon)\,\varpi(X).$$

4° X appartient à un arc $N_{i-1}M_i$ de (u) et X' à un segment M_iM_{i+1}. On considère

$$y=\varphi(X-a_i) \quad \text{avec} \quad a_i=X_i-\psi[\varpi(X_i)],$$

et l'on constate que

$$w(X) \geqq \varphi(X - a_i), \qquad w(X') < \varphi(X' - a_i),$$

la démonstration se poursuit alors de la même manière que dans les deux cas précédents.

Donc on obtient bien une fonction convexe $w(X)$ adjointe à $\log T(e^X)$, c'est-à-dire une fonction convexe telle que, pour toutes les valeurs de X

$$\log T(e^X) \leqq w(X)$$

et pour une suite de valeurs de X tendant vers l'infini,

$$\log T(e^X) = w(X)$$

et qui vérifie, de plus, la condition (II).

II. — L'ordre des fonctions méromorphes et la densité de la distribution de leurs valeurs.

8. Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini et $T(r)$ sa fonction caractéristique. D'après le résultat précédent, on peut appeler *ordre* de $f(z)$ toute fonction $\rho(r)$ non décroissante telle que, si petit que soit le nombre positif δ, on ait, à partir d'une certaine valeur $r_0(\delta)$ de r,

$$(11) \qquad T(r) < r^{\rho(r)(1+\delta)}$$

et pour une suite de valeurs r_n de r tendant vers l'infini,

$$(12) \qquad T(r) > r^{\rho(r)(1-\delta)},$$

la fonction $r^{\rho(r)}$ vérifiant la condition de la croissance normale de M. Borel (I).

9. A l'aide de cette définition de l'ordre, les théorèmes de M. R. Nevanlinna relatifs à $T(r)$ permettent de démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si $n(r, \alpha)$ est le nombre des zéros de $f(z) - \alpha$ pour* $|z| \leqq r$ (chacun d'eux compté avec son ordre de multiplicité; si $\alpha = \infty$, il s'agit des pôles), *on a, si petit que soit le nombre positif* δ,

(13) $$n(r, \alpha) < r^{\rho(r)(1+\delta)} \quad \text{pour } r > r_0(\delta)$$

et

(14) $$n(r, \alpha) > r^{\rho(r)(1-\delta)} \quad \text{pour } r = r_n \quad (n = 1, 2, \ldots, r_n \to \infty),$$

la première inégalité valant, quel que soit α, *la seconde sauf pour deux valeurs de* α *au plus.*

En effet, d'après le premier théorème fondamental de M. R. Navanlinna [10, *a*, p. 12], on a

$$N(r, \alpha) < T(r) + O(1).$$

Si $U(r)$ est une fonction adjointe à $T(r)$ et à $\varepsilon(r)$, on déduit de ceci l'inégalité

(15) $$N(r, \alpha) < U(r)(1 + \eta),$$

η étant une fonction positive de r qui tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ (¹).

En supposant $f(0) - \alpha \neq 0$, ce qui ne restreint pas la généralité, on peut écrire, avec M. Valiron,

$$N(r, \alpha) = \int_0^r \frac{n(x, \alpha)}{x} dx.$$

Par suite, on a, en désignant par k un nombre quelconque plus grand que 1,

$$\int_{\frac{r}{k}}^{r} \frac{n(x, \alpha)}{x} dx < (1 + \eta) U(r).$$

Comme $n(x, \alpha)$ va en croissant, lorsque x varie de $\frac{r}{k}$ à r, on obtient *a fortiori*

$$n\left(\frac{r}{k}, \alpha\right) \int_{\frac{r}{k}}^{r} \frac{dx}{x} < (1 + \eta) U(r),$$

(¹) On désigne dans ce Chapitre par ε', ε'', ... et η', η'', ... comme par ε, η des fonctions positives de r qui tendent vers zéro lorsque r croît indéfiniment.

d'où

$$n(r, \alpha) < \frac{1}{\log k}[1 + \eta(kr)]\, U(kr).$$

Posons $k = 1 + \frac{1}{\log U(r)}$. Si l'on remarque que $\log k \sim \frac{1}{\log U(r)}$, on obtient en tenant compte de la croissance normale de $U(r)$

$$n(r, \alpha) < (1 + \eta') \log U(r)\, U(r)^{1+\varepsilon} = U(r)^{1+\varepsilon'}.$$

Ce qui montre qu'on a, si petit que soit le nombre positif δ,

$$n(r, \alpha) < U(r)^{1+\delta} \qquad \text{pour } r > r_0(\delta),$$

c'est-à-dire l'inégalité (13); la première partie du théorème se trouve donc démontrée.

Pour établir la seconde partie, supposons que δ étant un nombre positif donné, on ait

$$(16) \qquad n(r, \alpha) < r^{\rho(r)(1-\delta)}$$

pour trois valeurs différentes α_1, α_2 et α_3 de α et pour toutes les valeurs de r plus grandes qu'une certaine valeur $r_0(\delta)$. En multipliant par $t^{-(\lambda+1)}$ les deux membres de (16) où r est remplacé par t, et en les intégrant ensuite de 1 à r, il vient pour $\lambda > 0$

$$\int_1^r \frac{n(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\, dt < r^{\rho(r)(1-\delta)} \int_1^r \frac{dt}{t^{\lambda+1}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ceci peut s'écrire en désignant par A une certaine constante

$$\int_1^r \frac{n(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\, dt < A\, r^{\rho(r)(1-\delta)} = A\, U(r)^{1-\delta}.$$

Mais si l'on suppose, comme plus haut, que $f(0) - \alpha_i \neq 0$, on a

$$\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\, dt = \frac{N(1, \alpha_i)}{\lambda} - \frac{N(r, \alpha_i)}{\lambda r^\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_1^r \frac{n(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\, dt,$$

inégalité obtenue en intégrant par parties le premier membre; par conséquent, on a

$$\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\, dt - \frac{N(1, \alpha_i)}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} A\, U(r)^{1-\delta},$$

ou

$$\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\,dt < \frac{1}{\lambda} A\, U(r)^{1-\delta}(1+\eta). \tag{17}$$

D'autre part, du second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna [9, *a*, p. 69]

$$T(r) < \sum_{i=1}^{3} N(r, \alpha_i) + S(r),$$

on déduit

$$\int_1^r \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt < \sum_{i=1}^{3}\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\,dt + \int_1^r \frac{S(r)}{t^{\lambda+1}}\,dt.$$

Comme on sait que

$$\int_1^r \frac{S(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt = O\left(\int_1^r \frac{\log T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt\right),$$

l'inégalité précédente peut s'écrire encore

$$\int_1^r \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt < \sum_{i=1}^{3}\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\,dt + B\int_1^r \frac{\log T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt,$$

B étant une certaine constante positive. Remarquons de plus que les intégrales

$$\int_1^r \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^r \frac{\log T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt$$

croissent indéfiniment toutes les deux avec r et que la dernière est un infiniment grand d'ordre inférieur par rapport à la première, par suite nous avons

$$(1-\eta')\int_1^r \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt < \sum_{i=1}^{3}\int_1^r \frac{N(t, \alpha_i)}{t^{\lambda+1}}\,dt. \tag{18}$$

Les inégalités (17) et (18) nous donnent donc

$$(1-\eta')\int_1^r \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt < \frac{3A}{\lambda} U(r)^{1-\delta}(1+\eta).$$

Si k est un nombre compris entre 1 et r, on a *a fortiori*

$$T\left(\frac{r}{k}\right)\int_{\frac{r}{k}}^{r}\frac{dt}{t^{\lambda+1}} < \frac{3A}{\lambda}U(r)^{1-\delta}(1+\eta').$$

Après avoir effectué l'intégration et en substituant kr à r, il vient

$$T(r) < 3A\frac{1}{k^{\lambda}-1}(kr)^{\lambda}U(kr)^{1-\delta}(1+\eta''),$$

ou, en faisant $\lambda = 1$,

$$(19) \qquad T(r) < 3A\frac{k}{k-1}r\,U(kr)^{1-\delta}(1+\eta'').$$

Prenons maintenant $k = 1 + \frac{1}{\log U(r)}$ et par suite

$$\frac{k}{k-1} = \log U(r) + 1 < 2\log U(r);$$

l'inégalité (19) s'écrit alors, en tenant compte de la condition de la croissance normale,

$$T(r) < 6A(1+\eta'')r\log U(r)\,U(r)^{(1+\varepsilon)(1-\delta)},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(20) \qquad T(r) < U(r)^{(1+\varepsilon')(1-\delta)}.$$

Alors, en supposant r suffisamment grand, on peut choisir ε' de façon que l'inégalité

$$T(r) < U(r)^{1-\delta_1} = r^{\rho(r)(1-\delta_1)}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de r plus grandes qu'une certaine valeur fixe, et quelque petit que soit le nombre positif donné δ_1, ce qui est en contradiction avec la définition de $\rho(r)$. Donc on doit avoir

$$T(r) > r^{\rho(r)(1-\delta)}$$

pour une suite infinie de valeurs de r, sauf pour deux valeurs exceptionnelles de α au plus.

III. — L'ordre des produits canoniques d'ordre infini et la décomposition en facteurs des fonctions méromorphes d'ordre infini.

10. Le résultat obtenu plus haut a le degré de précision de ceux obtenus par M. Borel pour le cas de l'ordre fini. Pour étendre complètement les résultats de ce dernier cas, étant donnée une fonction méromorphe d'ordre infini $f(z)$, il convient de voir si l'on peut former avec les zéros (ou les pôles) de $f(z)-\alpha$ un produit canonique dont il existe un des ordres au plus égal à l'un des ordres de $f(z)$. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi, en m'appuyant sur le résultat suivant, auquel est parvenu M. Denjoy dans ses pénétrantes recherches [5, *b*, p. 76] :

Étant donnée une suite de zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *rangés par ordre de modules non décroissants, si l'on pose* $\log|a_n| = x(n)$, $\log n = y(n)$ *et si les points* $x(n)$, $y(n)$ *viennent se placer sur une courbe* x, $y(x)$ *jouissant de la propriété suivante : il existe un entier croissant p tel que, si* $x_p \leqq x < x_{p+1}$,

$$p-\lambda \leqq y' < p+1-\lambda, \tag{21}$$

λ *étant fixe positif, on choisit pour exposant de convergence attaché à chaque zéro* a_n *tel que* $x_p \leqq \log r_n < x_{p+1}$, *l'entier p. De plus, si l'on désigne* $\log r$ *par* X *et* $y(\mathrm{X})$ *par* Y, *à tout nombre* σ *on peut faire correspondre un nombre h, tel que, si* X_1 *et* X_2 *sont les abscisses des points de la courbe x, y dont les ordonnées diffèrent de* Y *de la quantité h, le module maximum du produit*

$$\mathrm{P}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right) \tag{22}$$

formé avec l'exposant de convergence $p_n = p$ *a son logarithme inférieur, à partir d'une certaine valeur de r, à*

$$(1+\sigma)e^{\mathrm{Y}}\left(\sigma e^{\lambda \mathrm{X}} + \log\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1} + \log\frac{1}{\mathrm{X}_2-\mathrm{X}}\right). \tag{23}$$

Supposons que $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient les zéros (ou les pôles) de $f(z)-\alpha$. Considérons une fonction $W(r)$ adjointe à $T(r)$, telle que $\log W(r)=w(X)$ soit convexe par rapport à la variable $X=\log r$. En posant $w(X)=X\rho(e^X)$, on a, d'après le théorème du paragraphe **9**,

$$n(r, \alpha) \leqq r^{\rho(r)(1+\delta)} \qquad \text{pour } r > r_0(\delta),$$

δ étant un nombre positif arbitraire; par suite, on a, à partir d'une certaine valeur X,

$$(24) \qquad \log n \leqq (1+\delta)\, w(X),$$

n étant le rang du zéro a_n tel que $\log|a_n| < X < \log|a_{n+1}|$.

Considérons la fonction $w_1(X)=(1+\delta)w(X)$; δ étant fixe, $w_1(X)$ est convexe comme $w(X)$, ce qu'on voit immédiatement d'après la condition de convexité. Je dis ensuite que $w_1(X)$ est à croissance normale. En effet, on a

$$w\left[X+\frac{1}{w(X)}\right] < (1+\varepsilon)\, w(X),$$

a fortiori

$$w\left[X+\frac{1}{(1+\delta)\, w(X)}\right] < (1+\varepsilon)\, w(X),$$

par suite

$$w_1\left[X+\frac{1}{w_1(X)}\right] < (1+\varepsilon)\, w_1(X).$$

D'après (24), les points $x(n)=\log r_n$, $y(n)=\log n$ sont, au moins à partir d'une certaine position, tous situés sur la courbe $y=w_1(X)$ ou au-dessous d'elle. En remplaçant alors, s'il le faut, un premier arc de cette courbe (w_1) par un autre arc de courbe convenable, on obtient une courbe croissante convexe $y=w_2(X)$ telle que tous les points $x(n), y(n)$ se trouvent sur elle ou au-dessous d'elle et qu'on ait $w_2(X)=w_1(X)$ à partir d'une certaine valeur de X.

Remplaçons maintenant tout point $x(n), y(n)$ situé au-dessous de la courbe (w_2) par le point de cette courbe qui a pour ordonnée $y(n)=\log n$, soit $\log|a'_n|$ l'abscisse de ce point. Alors on a une suite de nombres

$$a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_n, \quad \ldots \qquad (|a'_n| \leqq |a_n|),$$

tels que tous les points $X=\log|a'_n|$, $Y=\log n$ se trouvent sur la courbe convexe (w_2) qui admet en chaque point une tangente ou une tangente à gauche et une tangente à droite.

Remarquons que, dans le raisonnement de M. Denjoy, il suffit de considérer la dérivée à droite $Y'(X+0)$ au lieu de $Y'(X)$; donc son résultat est applicable à la suite de nombres a'_n et l'on peut donc choisir l'exposant de convergence p_n attaché à a'_n de façon que le logarithme du module maximum du produit canonique obtenu

$$P_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a'_n}, p_n\right) \tag{25}$$

est inférieur, à partir d'une certaine valeur de r, à la quantité (23). Construisons maintenant le produit canonique (22) avec la suite des zéros (ou pôles) a_n et avec les mêmes exposants de convergence que pour $P_1(z)$. Comme $E(u, p) = (1-u)e^{u+\ldots+\frac{1}{p}u^p}$ est une fonction entière de u, son module maximum pour $|u| = r$ augmente avec r; en désignant celui-ci par $M[r, E(u, p)]$, on a donc

$$M\left[\frac{r}{r_n}, E(u, p_n)\right] \leqq M\left[\frac{r}{r'_n}, E(u, p_n)\right] \qquad (r'_n = |a_n|).$$

Puisque la limitation fournie par le théorème de M. Denjoy est le produit des maxima des facteurs primaires, on a *a fortiori*, en désignant par $M(r, P)$ le module maximum de $P(z)$,

$$\log M(r, P) < (1+\sigma)e^{Y}\left(\sigma e^{\lambda X} + \log\frac{1}{X - X_1} + \log\frac{1}{X_2 - X}\right) \tag{26}$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Donnons-nous un nombre positif $\sigma < 1$; on a, à partir d'une certaine valeur de X, $Y = w_1(X)$ et l'on sait que

$$w_1\left[X + \frac{1}{w_1(X)}\right] < (1+\varepsilon)w_1(X).$$

Posons $k = w_1\left[X + \frac{1}{w_1(X)}\right] - w_1(X)$. Si $k > h$, on a, en remarquant que $w'_1(X+0)$ est croissant,

$$\frac{X_2 - X}{h} > \frac{1}{k\, w_1(X)} > \frac{1}{\varepsilon\, w_1(X)}$$

ou

$$\frac{1}{X_2 - X} < \frac{\varepsilon w_1(X)^2}{h} = \frac{\varepsilon Y^2}{h}; \tag{27}$$

si $k < h$, on a

$$\frac{1}{X_2 - X} < w_1(X) = Y. \tag{27'}$$

Posons ensuite $k_1 = w_1\left[X_1 + \frac{1}{w_1(X_1)}\right] - w_1(X_1)$. Si $k_1 > h$, on a

$$\frac{1}{X - X_1} < \frac{\varepsilon w_1(X)^2}{h} = \frac{\varepsilon Y^2}{h}; \tag{28}$$

si $k_1 < h$, on trouve

$$\frac{1}{X - X_1} < w_1(X) = Y. \tag{28'}$$

Alors, dans tous les cas, on obtient

$$\log M(r, P) < (1 + \sigma) e^Y (\sigma e^{\lambda X} + 4 \log Y);$$

par suite, à partir d'une certaine valeur de X,

$$\log M(r, P) < (1 + \sigma) e^{(1+\delta) w(X)} [\sigma e^{\lambda X} + 4 \log w(X) + 4 \log(1 + \delta)].$$

En passant à la variable r, on a donc pour $r > r_0$

$$\begin{aligned} \log M(r, P) &< (1 + \sigma) W(r)^{1+\delta} [\sigma r^\lambda + 4 \log_2 W(r) + 4 \log(1 + \delta)] \\ &< W(r)^{1+\eta} = r^{\rho(r)(1+\eta)}. \end{aligned}$$

Or on sait [10, *a*, p. 24] que

$$T(r, f) < \log M(r, f);$$

donc on a *a fortiori*

$$T(r, P) < r^{\rho(r)(1+\delta)} \qquad \text{pour } r > r_0(\delta), \tag{29}$$

si petit que soit le nombre positif δ et l'on en conclut qu'*il existe un des ordres du produit canonique* $P(z)$ *inférieur ou égal à* $\rho(r)$.

Maintenant je dis que α étant une valeur non exceptionnelle de $f(z) - \alpha$, on a, si petit que soit δ,

$$T(r, P) > r^{\rho(r)(1-\delta)} \tag{30}$$

pour une suite de valeurs de r croissant à l'infini.

En effet, supposons qu'on ait pour toutes les valeurs $r > r_0$

$$T(r, P) < r^{\rho(r)(1-\delta)},$$

δ étant fixé; alors d'après le théorème de Jensen

$$m\left(r, \frac{1}{P}\right) + N\left(r, \frac{1}{P}\right) = T(r, P) + h(r),$$

on aurait en supposant $f(0) - \alpha \neq 0$,

$$\int_0^r \frac{n(t, \alpha)}{t} dt < A r^{\rho(r)(1-\delta)} = A W(r)^{1-\delta},$$

A étant une constante. On déduit de ceci

$$n(r, \alpha) \log k < A W(kr)^{1-\delta} \qquad (k > 1).$$

Prenons $k = 1 + 1/\log w(r)$; en vertu de la condition de la croissance normale, il vient

$$n(r, \alpha) < \frac{A}{\log\left[1 + \frac{1}{\log W(r)}\right]} W(r)^{(1-\delta)(1+\varepsilon)};$$

comme

$$\log\left[1 + \frac{1}{\log W(r)}\right] \sim \frac{1}{\log W(r)},$$

on a

$$n(r, \alpha) < \frac{A \log W(r)}{1 - \gamma(r)} W(r)^{(1-\delta)(1+\varepsilon)},$$

$\gamma(r)$ désignant une fonction positive tendant vers zéro avec $1/r$.

Donc

$$n(r, \alpha) < W(r)^{(1-\delta)(1+\varepsilon)+\eta} < W(r)^{(1-\delta)(1+\varepsilon')},$$

ε, ε' tendant vers zéro, lorsque r croît indéfiniment; par conséquent, étant donné un nombre positif δ_1 aussi petit qu'on veut, on peut déterminer une valeur suffisamment grande de r à partir de laquelle l'inégalité

$$n(r, \alpha) < W(r)^{1-\delta_1} = r^{\rho(r)(1-\delta_1)}$$

a lieu. Ce qui est inadmissible d'après le théorème du paragraphe **9**.

Ainsi on peut en conclure que $\rho(r)$ *est un des ordres de* $P(z)$, si l'on suppose que $X\rho(e^X)$ soit convexe.

11. Une fonction méromorphe d'ordre infini $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$F(z) = z^s e^{G(z)} \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{31}$$

où s désigne un nombre entier positif ou négatif; $G(z)$ une fonction entière; $P(z)$ et $Q(z)$ désignent respectivement les produits canoniques formés avec les zéros et les pôles de $F(z)$ d'après la méthode de M. Denjoy.

Je vais montrer que, avec l'hypothèse sur la convexité, $e^{G(z)}$ a un de ses ordres $\rho_1(r)$ au plus égal à l'un quelconque des ordres de $F(z)$. Écrivons

$$\Phi(z) = e^{G(z)} = \frac{F(z)\,Q(z)}{z^s\,P(z)}.$$

D'après une propriété des valeurs moyennes, on a

$$m(r, \Phi) \leqq m(r, F) + m(r, Q) + m\left(r, \frac{1}{z^s}\right) + m\left(r, \frac{1}{P}\right); \tag{32}$$

et si $F(z)$, $P(z)$ et $Q(z)$ ont pour des ordres $\rho(r)$, $\rho_2(r)$ et $\rho_3(r)$ respectivement, on a, à partir d'une certaine valeur de r,

$$m(r, F) < T(r, F) < r^{\rho(r)(1+\varepsilon)},$$
$$m(r, Q) < r^{\rho_3(r)(1+\varepsilon''')},$$
$$m\left(r, \frac{1}{z^s}\right) = \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{r^s}\right| = 0 \text{ ou } s\log r$$

suivant que $s > 0$ ou $s < 0$,

$$m\left(r, \frac{1}{P}\right) < m(r, P) + h < r^{\rho_2(r)(1+\varepsilon'')};$$

et l'on déduit de (32)

$$m(r, \Phi) < r^{\rho(r)(1+\varepsilon)}(1+\eta) < r^{\rho(r)(1+\delta)} \qquad \text{pour } r > r_0,$$

δ étant un nombre positif arbitraire. C'est ce qu'il fallait prouver, puisque $m(r, \Phi) = T(r, \Phi)$.

Donc on peut énoncer la proposition suivante qui généralise le théorème fondamental de M. Hadamard relatif à la décomposition en facteurs des fonctions entières d'ordre fini :

THÉORÈME. — *Une fonction méromorphe d'ordre infini* $F(z)$ *peut se mettre sous la forme* (31); *si* $\rho(r)$ *est l'un des ordres de* $F(z)$, *il existe des ordres* $\rho_1(r)$, $\rho_2(r)$ *et* $\rho_3(r)$ *pour* $e^{G(z)}$, $P(z)$ *et* $Q(z)$ *respectivement tels* que, pour chaque valeur de r,

$$\rho_1(r) \leqq \rho(r), \qquad \rho_2(r) \leqq \rho(r), \qquad \rho_3(r) \leqq \rho(r),$$

et $\rho(r)$ *ne dépasse pas pour chaque valeur de* $r > r_0$, *la plus grande des trois fonctions* $\rho_1(r)$, $\rho_2(r)$ *et* $\rho_3(r)$.

CHAPITRE III.

FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE INFINI DANS LE CERCLE-UNITÉ.

I. — L'ordre et la distribution des valeurs.

12. M. Valiron a étudié les fonctions holomorphes d'ordre infini dans le cercle-unité au moyen des fonctions-types [12, *c*]; je me propose ici d'étendre la théorie du Chapitre II aux fonctions méromorphes d'ordre infini dans le cercle-unité.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini pour $|z| < 1$, $T(r)$ sa fonction caractéristique qui croît indéfiniment, r tendant vers 1. Posons $T(r) = \mathfrak{T}(X)$ avec $X = (1-r)^{-1}$. D'après ce qui a été établi à propos des fonctions méromorphes dans tout le plan, on peut trouver une fonction à croissance normale $\mathfrak{U}(X) = X^{\rho(X)}$ telle que pour $X > X_0 > 1$

$$(1) \qquad \mathfrak{T}(X) \leqq \mathfrak{U}(X),$$

l'égalité ayant lieu pour une suite infinie de valeurs X_n.

J'appelle alors *ordre* de $f(z)$ toute fonction $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ non décroissante quand r tend vers 1, telle que si petit que soit le nombre positif δ, on ait

$$(2) \quad T(r) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+\delta)} \qquad \text{pour } r_0(\delta) < r < 1,$$

et

$$(3)\quad T(r) > \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta)} \qquad \text{pour } r = r_n \quad (n = 1, 2, \ldots, r_n \to 1),$$

$X^{\rho(X)}$ vérifiant la condition de la croissance normale (I) de M. Borel.

13. Le théorème du paragraphe **9** s'étend ici aisément :

Théorème. — *Si $n(r, \alpha)$ est le nombre des zéros de $f(z) - \alpha$ pour* $|z| \leqq r < 1$ (chacun d'eux étant compté autant de fois qu'exige son ordre de multiplicité; si $\alpha = \infty$, il s'agit des pôles), *on a, quelque petit que soit le nombre positif δ,*

$$(4)\quad n(r, \alpha) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+\delta)} \qquad \text{pour } r(\delta) < r < 1$$

et

$$(5)\quad n(r, \alpha) > \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta)} \qquad \text{pour } r = r_n \quad (n = 1, 2, \ldots, r_n \to 1),$$

la première inégalité valant quel que soit α et la seconde sauf pour deux valeurs de α au plus.

Pour démontrer la première partie, on part encore de l'inégalité

$$N(r, \alpha) < T(r) + O(1).$$

En posant $\mathfrak{N}(X, \alpha) = n(r, \alpha)$ et en supposant que $f(z) \neq \alpha$, on trouve

$$\int_0^r \frac{n(t, \alpha)}{t}\, dt = \int_1^X \frac{\mathfrak{N}(x, \alpha)}{x(x-1)}\, dx < \mathfrak{U}(X)[1 + \eta(X)],$$

où $\eta(X)$ tend vers zéro quand X tend vers l'infini ([1]). On déduit de ceci l'inégalité

$$\mathfrak{N}(X, \alpha)\frac{X' - X}{X'^2} < \mathfrak{U}(X')[1 + \eta(X)] \qquad (X < X')$$

et si l'on prend

$$X' = X\left[1 + \frac{1}{\log \mathfrak{U}(X)}\right],$$

([1]) On désigne ici par $\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \eta, \eta', \ldots$ des infiniment petits positifs pour $X \to \infty$ ou $r \to 1$.

il vient, en tenant compte de la condition de la croissance normale (1),

$$\mathfrak{N}(X, \alpha) < (1 + \eta')X^2 \mathfrak{U}(X)^{1+\varepsilon} \log \mathfrak{U}(X).$$

Cette inégalité s'écrit facilement sous la forme

$$\mathfrak{N}(X, \alpha) < X^{\rho(X)(1+\varepsilon')};$$

donc étant donné un nombre positif δ si petit que soit, on peut trouver une valeur $r(\delta)$ pour qu'on ait (4).

Pour établir la seconde partie du théorème, on procède encore comme dans le cas des fonctions méromorphes dans tout le plan. Supposons que l'inégalité (5) n'ait pas lieu pour une suite infinie de valeurs de r et pour trois nombres $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$. Alors, de l'inégalité

$$\mathfrak{N}(X, \alpha_i) < X^{\rho(X)(1-\delta)},$$

on déduit, pour $1 < X_0 < X$,

$$\int_{X_0}^{X} \frac{\mathfrak{N}(x, \alpha_i)}{x^{\lambda+1}} dx < A X^{\rho(X)(1-\delta_1)},$$

où A est une constante. En passant à la variable r, on obtient

$$(6) \qquad \int_{r_0}^{r} n(u, \alpha_i)(1-u)^{\lambda-1} du < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta')} \qquad (r_0 < r < 1),$$

δ' étant un certain nombre positif fixe.

Si l'on prend $r_0 > \frac{1}{2}$, on aura $(1-u)/u < 1$ pour $r_0 \leqq u \leqq r$, alors, de l'identité connue [10, *a*, p. 139]

$$\lambda \int_{r_0}^{r} N(u, \alpha_i)(1-u)^{\lambda-1} du$$
$$= N(r_0, \alpha_i)(1-r_0)^{\lambda} - N(r, \alpha_i)(1-u)^{\lambda} + \int_{r_0}^{r} n(u, \alpha_i)(1-u)^{\lambda} \frac{du}{u},$$

on déduit de (6) l'inégalité

$$(7) \qquad \int_{r_0}^{r} N(u, \alpha_i)(1-u)^{\lambda-1} du < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta'')} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

δ'' étant un nombre positif.

Or le second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna [10, *a*, p. 143] donne l'inégalité

$$(8)\qquad \int_{r_0}^{r} \mathrm{T}(u)(1-u)^{\lambda-1}\,du$$
$$<\sum_{i=1}^{3}\int_{r_0}^{r} \mathrm{N}(u,\alpha_i)(1-u)^{\lambda-1}\,du+\int_{r_0}^{r}\mathrm{S}(u)(1-u)^{\lambda-1}\,du.$$

En tenant compte de la relation [10, *a*, p. 143]

$$\int_{r_0}^{r}\mathrm{S}(u)(1-u)^{\lambda-1}\,du=\mathrm{O}\left(\int_{r_0}^{r}\overset{+}{\log}\,\mathrm{T}(u)(1-u)^{\lambda-1}\,du\right),$$

on déduit de (7) et (8) l'inégalité

$$\int_{r_0}^{r}\mathrm{T}(u)(1-u)^{\lambda-1}\,du<\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta''')}.$$

Si l'on pose $(1-u)^{-1}=t$, il vient

$$\int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}}\frac{\mathfrak{T}(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt<\mathrm{X}^{\rho(\mathrm{X})(1-\delta''')}.$$

D'après un calcul qu'on a déjà fait à propos des fonctions méromorphes, on trouve, quelque petit que soit le nombre positif δ_1,

$$\mathfrak{T}(\mathrm{X})<\mathrm{X}^{\rho(\mathrm{X})(1-\delta_1)}\qquad \text{pour } \mathrm{X}>\mathrm{X}_0>1$$

ou

$$\mathrm{T}(r)<\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta_1)}\qquad \text{pour } r_0<r<1.$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse et la proposition se trouve démontrée.

II. — Décomposition en facteurs des fonctions méromorphes dans le cercle-unité.

14. M. E. Picard a étudié la décomposition en facteurs primaires d'une fonction holomorphe dans un cercle [11] et M. R. Nevanlinna a traité celle d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité dont le genre est zéro [10, *a*, p. 136]; je vais m'occuper ici du cas du genre fini $p \geqq 1$ en même temps que du cas du genre infini.

15. Cas de l'ordre fini. — Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ dans le cercle-unité, et $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les zéros (ou les pôles) de $f(z) - \alpha$ rangés par ordre de modules non décroissants.

D'après un théorème de M. Nevanlinna, on sait que, en posant $r_\nu(\alpha) = |a_\nu|$, la série

$$\Sigma[1 - r_\nu(\alpha)]^{\tau+1} \tag{9}$$

converge pour $\tau > \rho$ et diverge pour $\tau < \rho$, sauf pour deux valeurs de α au plus. Considérons un α non exceptionnel quelconque et en prenant p comme genre, formons le produit canonique de M. Picard

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{z - a_\nu}{z - e^{i\varphi_\nu}} e^{\Phi_\nu(z)} \tag{10}$$

avec

$$\Phi_\nu(z) = \frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}}\right)^p,$$

où φ_ν est l'argument de a_ν. Par définition, le genre p est un nombre entier positif tel que la série (9) soit convergente pour $\tau = p$ et divergente pour $\tau = p - 1$. Le théorème de M. Nevanlinna montre que $p - 1 < \rho < p$ si ρ n'est pas entier et que, si ρ est entier, on a $p = \rho$ ou $\rho + 1$ suivant que la série

$$\Sigma[1 - r_\nu(\alpha)]^{\rho+1}$$

converge ou diverge.

Le produit $P(z)$ est absolument et uniformément convergent dans un cercle quelconque de centre o et de rayon $R < 1$; je vais déterminer l'ordre de $P(z)$. Comme on sait que, k désignant une constante,

$$\left|(1 - u)e^{u + \ldots + \frac{u^p}{p}}\right| < e^{K\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}},$$

on a, en écrivant pour plus de simplicité r_ν au lieu de $r_\nu(\alpha)$,

$$\log|P(z)| < K \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{|z - e^{i\varphi_\nu}|}} \left(\frac{1 - r_\nu}{|z - e^{i\varphi_\nu}|}\right)^{p+1},$$

par suite, si $m(r, \mathrm{P})$ désigne la valeur moyenne de $\mathrm{P}(z)$, on obtient

$$m(r, \mathrm{P}) < \frac{\mathrm{K}}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - r_\nu}{|z - e^{i\varphi_\nu}|} \right)^{p+1} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{|z - e^{i\varphi_\nu}|}} d\theta.$$

En substituant z à $ze^{-i\varphi_\nu}$, l'intégrale figurant dans cette inégalité peut s'écrire

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - r_\nu}{|1 - z|} \right)^{p+1} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{|1 - z|}} d\theta,$$

et tout revient à calculer une limite supérieure de cette intégrale qui s'écrit

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r_\nu)^{p+1}}{\left[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]^{\frac{p+1}{2}}} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{\sqrt{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}}}} d\theta.$$

On se rend compte facilement que dans le calcul du maximum du module de $\mathrm{P}(z)$, ce sont les affixes des points situés dans le voisinage du point $+1$ qui l'emportent; divisons donc l'intervalle d'intégration $(0, 2\pi)$ en $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$. En supposant $r > \frac{1}{4}$, on a

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi - \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - r_\nu)^{p+1}}{\left[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]^{\frac{p+1}{2}}} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{\sqrt{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}}}} d\theta$$
$$< \mathrm{H}(1 - r_\nu)^{p+1},$$

où H désigne une constante.

Calculons ensuite une limite supérieure de l'intégrale

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - r_\nu)^{p+1}}{\left[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]^{\frac{p+1}{2}}} \frac{1}{1 + \frac{1 - r_\nu}{\sqrt{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}}}} d\theta.$$

En posant $2\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}=t$, on obtient

$$\mathrm{I}_2=\int_{-\sqrt{r}} \frac{(1-r_\nu)^{p+1}}{[(1-r)^2+t^2]^{\frac{p+1}{2}}} \frac{1}{1+\dfrac{1-r_\nu}{\sqrt{(1-r)^2+t^2}}} \frac{dt}{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Si $r>\frac{1}{4}$, comme $\cos\frac{\theta}{2}>\frac{1}{2}$, on a

$$\mathrm{I}_2<\int_{-1}^{+1} \frac{(1-r_\nu)^{p+1}}{[(1-r)^2+t^2]^{\frac{p+1}{2}}} \frac{4}{1+\dfrac{1-r_\nu}{\sqrt{(1-r)^2+t^2}}}\,dt.$$

et en posant $t=(1-r)u$, il vient

$$\mathrm{I}_2<\frac{(1-r_\nu)^{p+1}}{(1-r)^p}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\,du}{(1+u^2)^{\frac{p+1}{2}}\left[1+\dfrac{1-r_\nu}{(1-r)\sqrt{1+u^2}}\right]}.$$

Si $r_\nu>r$, on peut remplacer par 1 la quantité située entre les crochets, et l'on obtient

$$\mathrm{I}_2<\frac{(1-r_\nu)^{p+1}}{(1-r)^p}\mathrm{H}', \qquad \mathrm{H}'=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{p+1}{2}}};$$

l'intégrale H′ a un sens pour $p\geqq 1$ et dans ce cas H′ est une constante finie.

Si $r_\nu\leqq r$, en remplaçant $1+\dfrac{1-r_\nu}{(1-r)\sqrt{1+u^2}}$ par $\dfrac{1-r_\nu}{1-r}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, on a

$$\mathrm{I}_2<\frac{(1-r_\nu)^p}{(1-r)^{p-1}}\mathrm{H}'', \qquad \mathrm{H}''=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

Ce qui suppose $p\geqq 2$ pour que H″ soit une constante finie.

Donc pour $p\geqq 2$, on a pour le produit de Picard $\mathrm{P}(z)$

$$(11)\qquad m(r,\mathrm{P})<\mathrm{K}'\sum_{r_\nu\leqq r}\frac{(1-r_\nu)^p}{(1-r)^{p-1}}+\mathrm{K}''\sum_{r_\nu>r}\frac{(1-r_\nu)^{p+1}}{(1-r)^p}+\mathrm{K}''',$$

où K′, K″ et K‴ désignent des constantes.

Pour déterminer l'ordre du produit canonique $P(z)$, distinguons trois cas. Si $\rho = p - 1$, on peut écrire (11)

$$m(r, P) < K' \sum_{r_\nu \leqq r} \frac{(1 - r_\nu)^{p+\delta}}{(1 - r)^{p-1+\delta}} + K'' \sum_{r_\nu > r} \frac{(1 - r_\nu)^{p+\delta}}{(1 - r)^{p-1+\delta}} + K''',$$

où δ est un nombre positif inférieur à 1. Ceci peut être mis sous la forme

$$m(r, P) < \frac{1}{(1 - r)^{\rho+\delta}} \left[K' \sum_{r_\nu \leqq r} (1 - r_\nu)^{\rho+1+\delta} + K'' \sum_{r_\nu > r} (1 - r_\nu)^{p+1+\delta} + K''' \right].$$

Comme la série $\Sigma(1 - r_\nu)^{\rho+1+\delta}$ est convergente, on a

$$m(r, P) < \left(\frac{1}{1 - r}\right)^{\rho+\delta} (A + \eta),$$

ce qui donne

$$\text{(12)} \qquad T(r, P) < \left(\frac{1}{1 - r}\right)^{\rho+\varepsilon}.$$

Si ensuite $p - 1 < \rho < p$, et qu'on a $\rho = p - 1 + h$, on peut mettre (11) sous la forme

$$m(r, P) < \frac{1}{(1 - r)^{\rho+\delta}} \left[K' \sum_{r_\nu \leqq r} (1 - r_\nu)^{\rho+1+\delta} + K'' \sum_{r_\nu > r} (1 - r_\nu)^{\rho+1+\delta} + K''' \right].$$

On en déduit encore l'inégalité (12).

Enfin, si $\rho = p$, (11) peut s'écrire

$$m(r, P) < \frac{1}{(1 - r)^{\rho}} \left[K' \sum_{r_\nu \leqq r} (1 - r_\nu)^{p+1} + K'' \sum_{r_\nu > r} (1 - r_\nu)^{p+1} + K''' \right].$$

Comme la série $\Sigma(1 - r_\nu)^{p+1}$ est convergente par définition du genre p, on obtient encore l'inégalité (12).

16. Dans le cas où $p = 1$, au lieu du produit de Picard, je forme le produit suivant que j'appelle produit de Nevanlinna :

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu - z}{e^{i\varphi_\nu} - r_\nu z} e^{\Psi_\nu(z)}, \qquad \Psi_\nu(z) = \frac{(r_\nu - 1)(z + e^{i\varphi_\nu})}{e^{i\varphi_\nu} - r_\nu z}.$$

On démontre facilement qu'il converge absolument et uniformément dans un cercle quelconque de centre o et de rayon $R < 1$; il s'agit de déterminer son ordre.

En raisonnant comme plus haut, on trouve

$$m(r, P) < \frac{K}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{(1-r_\nu)(1+z)}{1-r_\nu z} \right|^2 d\theta$$
$$< \frac{2K}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r_\nu)^2}{(1-r_\nu r)^2 + 4r_\nu r \sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta,$$

et l'on a à calculer approximativement les intégrales

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{(1-r_\nu)^2}{(1-r_\nu r)^2 + 4r_\nu r \sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta, \quad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{(1-r_\nu)^2}{(1-r_\nu r)^2 + 4r_\nu r \sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta.$$

On obtient immédiatement, en supposant que $r_\nu > k > 0$, $r > \frac{1}{4}$,

$$I_1 < H(1-r_\nu)^2, \qquad H = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{k \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Quant à I_2, par les mêmes changements de variable que plus haut, on arrive à l'inégalité

$$I_2 < \frac{2}{k}(1-r_\nu)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1-r_\nu r)(1+u^2)} \qquad \text{pour } r > \frac{1}{4}.$$

Si $r_\nu > r$, on a, en substituant 1 à r_ν dans $(1-r_\nu r)(1+u^2)$ et $(1-r_\nu)(1-r)$,

$$I_2 < \frac{(1-r_\nu)^2}{1-r} H', \qquad H' = \frac{2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\pi}{k}.$$

Si $r_\nu < r$, on substitue 1 à r dans $(1-r_\nu r)(1+u^2)$ et $(1-r_\nu)(1-r)$ et il vient

$$I_2 < (1-r_\nu)H'.$$

Donc

$$m(r, P) < K' \sum_{r_\nu \leqq r} (1-r_\nu) + K'' \sum_{r_\nu > r} \frac{(1-r_\nu)^2}{1-r} + K''',$$

et l'on a encore

$$(12') \qquad T(r, P) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\varepsilon} < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho+\varepsilon}.$$

On peut former aussi le produit de Nevanlinna dans le cas où $p \geqq 2$.

17. Je dis maintenant que, α étant une valeur non exceptionnelle, si petit que soit le nombre positif δ, on a pour une suite infinie de valeurs de r

$$(13) \qquad T(r, P) = m(r, P) > \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho-\delta},$$

$P(z)$ étant le produit de Picard ou celui de Nevanlinna.

En effet, supposons qu'on ait au contraire pour $r > r_0$

$$m(r, P) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho-\delta}.$$

Alors le théorème de Jensen donnerait ici

$$N\left(r, \frac{1}{P}\right) < A\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho-\delta},$$

A désignant une constante positive. Comme

$$N\left(r, \frac{1}{P}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right) = N(r, \alpha),$$

on a

$$N(r, \alpha) < A\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho-\delta},$$

et l'on en déduit

$$\int^1 N(r, \alpha)(1-r)^{\rho+\frac{\delta}{2}-1}\, dr < A\int^1 \frac{dr}{(1-r)^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

L'intégrale du second membre est convergente, il en est donc de même de celle du premier membre; alors d'après un théorème de M. Nevanlinna [10, *a*, p. 139], on peut conclure que la série

$$\Sigma(1-r_\nu)^{1+\rho-\frac{\delta}{2}}$$

converge aussi, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse sur ρ. On a donc bien l'inégalité (13).

Des inégalités (12), (12') et (13), on conclut que α étant une valeur non exceptionnelle, *l'ordre du produit canonique de Picard* (*quand* $p \geqq 2$) *ou celui du produit de Nevanlinna, formé avec les zéros de* $f(z) - \alpha$ (il s'agit des pôles pour $\alpha = \infty$) *est égal à l'ordre* ρ *de* $f(z)$, il sera inférieur à ρ pour α exceptionnel.

18. Une fonction $F(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ peut se mettre sous la forme

$$F(z) = z^s e^{G(z)} \frac{\Pi D_p(z, a_\mu)}{\Pi D_q(z, b_\nu)} = z^s e^{G(z)} \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{14}$$

où a_μ désigne le $\mu^{\text{ième}}$ zéro de $F(z)$ et b_ν, son $\nu^{\text{ième}}$ pôle; $\Pi D_n(z, c_\lambda)$ représente un produit de Nevanlinna quand $n = 1$ et un produit de Picard (ou de Nevanlinna) lorsque $n \geqq 2$; enfin $G(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| < 1$ et s un nombre entier.

Je vais montrer que l'ordre de $e^{G(z)}$ est au plus égal à celui de $F(z)$. Écrivons

$$\Phi(z) = e^{G(z)} = \frac{F(z)\, Q(z)}{z^s P(z)}.$$

En désignant respectivement par ρ, ρ_1 et ρ_2 les ordres de $F(z)$, $P(z)$ et $Q(z)$, et en procédant de la même façon qu'au paragraphe **11**, on obtient

$$m(r, \Phi) < \left(\frac{1}{1 - r}\right)^{\rho + \delta}$$

à partir d'une certaine valeur de r. Ce qui fallait prouver, puisque $T(r, \Phi) = m(r, \Phi)$.

Ainsi, on a la généralisation du théorème fondamental de M. Hadamard relatif aux fonctions entières :

Théorème. — *Une fonction* $F(z)$ *méromorphe pour* $|z| < 1$ *d'ordre* ρ *peut se mettre sous la forme* (14). *Si* ρ_1, ρ_2 *et* ρ_3 *sont les ordres de* $e^{G(z)}$, $P(z)$ *et* $Q(z)$, *on a*

$$\rho_1 \leqq \rho, \qquad \rho_2 \leqq \rho, \qquad \rho_3 \leqq \rho,$$

et ρ *ne dépasse pas le plus grand des trois nombres* ρ_1, ρ_2 *et* ρ_3.

19. Cas de l'ordre infini. — Avec les zéros de $f(z) - a$, je forme le produit de Picard

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} P(z) &= \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{z - a_\nu}{z - e^{i\varphi_\nu}} e^{\Phi(z, p_\nu)}, \\ \Phi(z, p_\nu) &= \frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}} + \ldots + \frac{1}{p_\nu}\left(\frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}}\right), \end{aligned} \right.$$

où $a_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$. Je vais chercher une limite supérieure du module maximum $M(r, P)$ de $P(z)$ pour $|z| = r$. Pour cela je commence par remplacer chaque facteur de $P(z)$ par son maximum. Si l'on pose

$$E(u, p) = (1 - u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{1}{p} u^p},$$

le maximum de

$$E\left(\frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}}, p_\nu\right)$$

pour $|z| = r$ est atteint en un certain point $z_0 = re^{i\theta_0}$. Comme $E(u, p)$ est une fonction holomorphe de u, on a, en désignant par $M[r, E(u,p)]$ le maximum de $E(u, p)$ pour $|u| = r$,

$$|E(u, p)| \leqq M[r, E(u, p)] \qquad \text{si } |u| \leqq r,$$

donc

$$\left|E\left(\frac{a_\nu - e^{i\varphi_\nu}}{z - e^{i\varphi_\nu}}, p_\nu\right)\right| \leqq M\left[\frac{r_\nu - 1}{r - 1}, E(u, p_\nu)\right]$$

et par suite

$$M(r, P) \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} M\left[\frac{r_\nu - 1}{r - 1}, E(u, p_\nu)\right],$$

ou en posant $X = (1 - r)^{-1}$ et $X_\nu = (1 - r_\nu)^{-1}$,

$$(16)\quad M(r, P) \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} M\left[\frac{X}{X_\nu}, E(u, p_\nu)\right].$$

Si l'on remplace les nombres r_ν par les nombres $r'_\nu \leqq r_\nu$ c'est-à-dire les nombres X_ν par les nombres $X'_\nu = \frac{1}{1 - r'_\nu} \leqq X_\nu$ sans changer les exposants de convergence p_ν, chaque facteur du produit infini du second membre de (16) devient plus grand. Donc on a *a fortiori*

$$M(r, P) \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} M\left[\frac{X}{X'_\nu}, E(u, p_\nu)\right].$$

En raisonnant comme au paragraphe **10**, on peut choisir les X'_ν de façon que les points $\log X'_\nu$, $\log\nu$ soient tous situés sur une courbe convexe qui coïncide, à partir d'un certain point, avec la courbe $x = \log X, y = (1+\delta)\rho(X)\log X$ et le théorème de M. Denjoy permet d'obtenir

$$\log M(r, P) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+\varepsilon)} \qquad [r_0(\alpha) < r < 1],$$

par suite

$$T(r, P) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+\varepsilon)} \qquad [r_0(\alpha) < r < 1].$$

On démontre ensuite à l'aide du théorème de Jensen comme dans le cas des fonctions méromorphes que α étant une valeur non exceptionnelle de $f(z) - \alpha$, on a, pour une suite infinie de valeurs de r tendant vers 1,

$$\log M(r, P) > \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-\delta)}$$

si petit que soit le nombre positif δ. Donc $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *est un ordre de* P.

On peut établir enfin comme dans le cas de l'ordre fini le

THÉORÈME. — *Une fonction* $F(z)$ *méromorphe pour* $|z| < 1$ *d'un ordre infini* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *tel que* $\rho(X)\log X$ *soit une fonction convexe de* $\log X$ *peut se mettre sous la forme*

$$F(z) = z^\lambda e^{G(z)} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où $G(z)$ *est une fonction holomorphe pour* $|z| < 1$, $P(z)$ *et* $Q(z)$ *désignent respectivement les produits canoniques de Picard formés avec les zéros et les pôles de* $F(z)$. $\rho_1\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\rho_2\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\rho_3\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *étant* *des ordres de* $e^{G(z)}$, $P(z)$ *et* $Q(z)$, *on a*

$$\rho_1\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqq \rho\left(\frac{1}{1-r}\right), \qquad \rho_2\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqq \rho\left(\frac{1}{1-r}\right), \qquad \rho_3\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqq \rho\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

et $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *ne dépasse pas la plus grande des trois fonctions* $\rho_1\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\rho_2\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\rho_0\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *pour chaque valeur de* $r > r_0$.

CHAPITRE IV.

DIRECTIONS DE BOREL ET POINTS DE BOREL.

20. Dans ses recherches sur les fonctions méromorphes, M. Valiron a découvert l'existence de ce qu'il appelle *direction de Borel* [13, *g*]. Une telle direction D, $\varphi = \text{const.}$ $(z = re^{i\varphi})$ pour une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, est telle que l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - \alpha$, situés dans un angle quelconque de bissectrice D, est égal à ρ, sauf pour deux valeurs de α au plus. Cherchons à obtenir, dans le cas de l'ordre infini, un résultat analogue au moyen des ordres définis au paragraphe **8**.

21. Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini à caractéristique $T(r)$ et $\rho(z)$ l'un de ses ordres. Considérons une valeur quelconque R de r, telle qu'on ait, en posant $U(r) = r^{\rho(r)}$,

$$T(R) = U(R) \tag{1}$$

et prenons

$$R' = R + \frac{R}{\log T(R)}. \tag{2}$$

En supposant $f(0) - \alpha \neq 0$, on déduit de

$$N(R, \alpha) = \int_0^{r_0} \frac{n(t, \alpha)}{t}\, dt + \int_{r_0}^{R} \frac{n(t, \alpha)}{t}\, dt \qquad (0 < r_0 < R)$$

l'inégalité

$$n(R, \alpha) \log \frac{R}{r_0} > N(R, \alpha) - N(r_0, \alpha). \tag{3}$$

D'autre part, considérons la seconde inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna :

$$T(r) < N(r, \alpha_1) + N(r, \alpha_2) + N(r, \alpha_3) + S(r)$$

en prenant $S(r)$ sous la forme suivante due à M. Valiron :

$$\begin{aligned} S(r) = 24 \log T(R) + 12 \log \frac{1}{R-r} \\ + 8 \overset{+}{\log} R + C_2(f) + 8 \overset{+}{\log} \frac{1}{|\alpha_1 - \alpha_2||\alpha_2 - \alpha_3||\alpha_3 - \alpha_1|}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est valable pour $r < R < 2r$ et dès que $T(r)$ dépasse les quantités

$$C(f), \quad \overset{+}{\log}|\alpha|, \quad \overset{+}{\log} \frac{1}{|\alpha - f(0)|},$$

et $C(f)$, $C_2(f)$ désignent des constantes dépendant uniquement de $f(z)$.

Prenons R pour r et R' pour R. Je dis que pour tout α tel que $|\alpha| < e^{T(R)}$ et $|\alpha - f(0)| > e^{-T(R)}$, on a

$$N(R, \alpha) > \frac{1}{4} T(R), \tag{4}$$

sauf peut-être des points intérieurs à deux petits cercles de rayon $\frac{1}{T(R)}$. En effet, si le contraire avait lieu, on trouverait trois points α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\begin{aligned} S(R) < 24(1+\varepsilon) \log T(R) + 12 \log_2 T(R) \\ + 8 \log\left[R + \frac{R}{\log T(R)}\right] + C_2(f) + 24 \overset{+}{\log} T(R), \end{aligned}$$

ou pour R assez grand

$$S(R) < K \log T(R),$$

K désignant une constante. Alors, on a

$$T(R) < \frac{3}{4} T(R) + K \log T(R),$$

ce qui est absurde.

D'après (3) et (4), on a pour tout R suffisamment grand

$$(5)\qquad n(R, \alpha) > (1-\eta)\frac{1}{8\log R}T(R) \qquad \left(\eta \to 0 \text{ avec } \frac{1}{R}\right),$$

quel que soit α, sauf au plus pour des points α, dont les représentations sphériques sont incluses dans quatre cercles de rayon arbitrairement petit.

Maintenant, décrivons à l'intérieur de la circonférence (C) de centre o et de rayon R

$$20\log T(R) - 1,$$

circonférences équidistantes (C_p) $(p = 1, 2, \ldots, m-1)$ concentriques à (C), (C_m) coïncidant avec (C), puis divisons, à l'aide des rayons formant des angles égaux entre eux, la couronne limitée par (C_{p-1}) et (C_p) en $2p\pi$ quadrilatères égaux.

On obtient ainsi

$$20\log T(R)[20\log T(R)+1]\pi,$$

quadrilatères dans le cercle (C). Chacun d'eux peut être enfermé dans un cercle (γ) de rayon

$$\lambda = \frac{R}{20\sqrt{2}\log T(R)};$$

décrivons un cercle (Γ) concentrique à (γ) et de rayon $\lambda' = 20\lambda$.

D'après un théorème de M. Milloux [9, *b*, p. 202], si $f(z)$ ne prend pas dans (Γ) plus de $\mathfrak{N}$ fois trois valeurs α_1, α_2 et α_3, dont les distances sphériques supérieures à δ, dès que $\mathfrak{N}$ dépasse une certaine limite numérique, le nombre de zéros de $f(z) - \alpha$ intérieurs à (γ) est moindre que

$$670\,\mathfrak{N} + 11\log\frac{1}{d} + 11\log\frac{1}{\delta},$$

d désignant la distance sphérique de α à une certaine valeur exceptionnelle possible.

En supposant que $d > \frac{1}{T(R)}$, $\delta = \frac{1}{T(R)}$, et en prenant

$$\mathfrak{N} = \frac{T(R)}{32 \times 670\pi[20\log T(R)+1]^2\log R},$$

il s'ensuit qu'on a, pour R suffisamment grand,

$$(6)\quad n(\mathrm{R}, \alpha) < \frac{1}{32 \log \mathrm{R}} \frac{20 \log \mathrm{T}(\mathrm{R})}{20 \log \mathrm{T}(\mathrm{R}) + 1} \mathrm{T}(\mathrm{R})(1 + \eta') \qquad \left(\eta' \rightarrow 0 \text{ avec } \frac{1}{\mathrm{R}}\right),$$

sauf au plus pour des α représentés sur la sphère de Riemann à l'intérieur des cercles dont la somme des rayons peut devenir aussi petite qu'on veut.

Si l'on compare les inégalités (5) et (6), on est conduit à une contradiction. Donc, il existe dans le cercle (C) au moins un petit cercle (Γ) dans lequel $f(z)$ prendra au moins $\mathfrak{N}$ fois toutes les valeurs α autres que celles voisines de deux points. De plus, comme $\mathfrak{N}$ croît indéfiniment avec R, il existe forcément une infinité de tels cercles s'éloignant indéfiniment de l'origine.

Considérons une suite infinie de tels cercles (Γ_n), dont le $n^{\text{ième}}$ est obtenu en donnant à R une valeur R_n. Si $r(n, \alpha)$ désigne le module d'un zéro de $f(z) - \alpha$ dans (Γ_n), on a

$$r(n, \alpha) < \mathrm{R}'_n = \mathrm{R}_n \left[1 + \frac{1}{\log \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)}\right],$$

par suite

$$\mathrm{T}[r(n, \alpha)] < \mathrm{T}\left[\mathrm{R}_n + \frac{\mathrm{R}_n}{\log \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)}\right] < \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)^{1+\varepsilon}.$$

Ceci donne à partir d'une certaine valeur de n

$$\left[\frac{1}{r(n, \alpha)}\right]^{\rho[r(n, \alpha)](1-\delta)} > \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)^{-(1-\delta')},$$

δ et δ' étant des nombres positifs arbitraires $(\delta' > \delta)$, donc on obtient

$$\sum \left[\frac{1}{r(n, \alpha)}\right]^{\rho[r(n, \alpha)](1-\delta)} > \mathfrak{N}_n \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)^{-(1-\delta')},$$

la sommation étant étendue à tous les zéros dans (Γ_n). En remplaçant $\mathfrak{N}_n$ par sa valeur, il vient

$$\sum \left[\frac{1}{r(n, \alpha)}\right]^{\rho[r(n, \alpha)](1-\delta)} > \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)^{\delta' - \eta(n)} \qquad \left(\eta \rightarrow 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right).$$

Donc, on a, à partir d'une certaine valeur R_n,

$$(7)\qquad \sum \left[\frac{1}{r(n, \alpha)}\right]^{\rho[r(n, \alpha)](1-\delta)} > \mathrm{T}(\mathrm{R}_n)^{\delta_1},$$

δ_1 étant un nombre positif fixe. Par conséquent, la somme du premier membre de l'inégalité est divergente, R_n tendant vers l'infini.

Soit (L) une courbe quelconque qui s'éloigne à l'infini; on peut, par une rotation autour de l'origine, l'amener à une position (L_n) passant par le centre x_n du cercle (Γ_n). Alors si Ω désigne le domaine balayé par (L) en lui faisant tourner d'un angle très petit ε de deux côtés d'une courbe d'accumulation des (L_n), il existe dans Ω une suite infinie de cercles (Γ_n). En appelant $r_\nu(\Omega, \alpha)$ le $\nu^{\text{ième}}$ des zéros de $f(z) - \alpha$ situés dans Ω, la série

$$\sum_\nu \left[\frac{1}{r_\nu(\Omega, \alpha)}\right]^{\rho[r_\nu(\Omega, \alpha)](1-\delta)}$$

est *a fortiori* divergente, sauf pour deux valeurs de α au plus.

Du théorème du paragraphe **9**, il résulte immédiatement que la série

$$\sum_\nu \left[\frac{1}{r_\nu(\Omega, \alpha)}\right]^{\rho[r_\nu(\Omega, \alpha)](1+\delta)}$$

est convergente quel que soit α.

Ainsi, on est conduit à énoncer en particulier le

Théorème. — *Étant donnée une fonction méromorphe d'ordre infini* $\rho(r)$, *il existe au moins une direction* D *telle que dans un angle quelconque* Ω *de bissectrice* D, *si petit que soit le nombre positif* δ, *la série*

$$\sum_\nu \left[\frac{1}{r_\nu(\Omega, \alpha)}\right]^{\rho[r_\nu(\Omega, \alpha)](1+\delta)} \tag{8}$$

converge pour tous les α, *et la série*

$$\sum_\nu \left[\frac{1}{r_\nu(\Omega, \alpha)}\right]^{\rho[r_\nu(\Omega, \alpha)](1-\delta)} \tag{9}$$

diverge, sauf pour deux α *au plus*, $r_\nu(\Omega, \alpha)$ *étant le* $\nu^{\text{ième}}$ *zéro de* $f(z) - \alpha$ *dans* Ω.

On peut appeler une telle direction D, *direction de Borel d'ordre* $\rho(r)$.

22. Dans l'étude de l'accumulation des valeurs d'une fonction méromorphe pour $|z|<1$, M. Valiron a introduit la notion du *point de Borel* et a donné un théorème pour le cas de l'ordre fini (13, h). Je vais considérer le cas de l'ordre infini.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z|<1$ d'ordre infini à caractéristique $T(r)$. Désignons par $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ l'un des ordres de $f(z)$, et considérons une valeur quelconque R de r telle que

$$(10)\qquad T(R)=U(R)\qquad \text{si } U(r)=\mathfrak{U}\left(\frac{1}{1-r}\right)=\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

puis prenons

$$(11)\qquad R'=\frac{1+R\log T(R)}{1+\log T(R)},$$

de sorte que $X'=X\left[1-\frac{1}{\log\mathfrak{U}(X)}\right]$ avec $X=(1-R)^{-1}$ et $X'=(1-R')^{-1}$.

Si $n(R,\alpha)$ désigne le nombre de zéros de $f(z)-\alpha$ contenus dans le cercle $|z|<r$, on démontre comme dans le cas des fonctions méromorphes dans le plan qu'on a pour R suffisamment grand

$$(12)\qquad n(R,\alpha)>(1-\eta)\frac{1}{8\log R}T(R)\qquad \left(\eta\to 0 \text{ avec } \frac{1}{R}\right),$$

sauf au plus pour des points α dont les représentations sphériques sont incluses dans deux cercles de rayon arbitrairement petit.

Décrivons à l'intérieur de la circonférence (C) de centre O et de rayon R,

$$\frac{[\log T(R)+1]R}{1-R}-1,$$

circonférences équidistantes (C_p) $(p=1,2,\ldots,m-1)$ concentriques à (C), (C_m) coïncidant avec (C); puis, divisons, comme au paragraphe **21**, la couronne (C_{p-1}, C_p) en $2p\pi$ quadrilatères égaux.

Le cercle (C) se trouve ainsi divisé en

$$\frac{[\log T(R)+1][R\log T(R)+1]\pi}{(1-R)^2}$$

quadrilatères; chacun d'eux peut être entouré par une petite circonférence (γ) de rayon

$$\lambda = \frac{1-R}{\sqrt{2}[\log T(R)+1]}.$$

Décrivons une circonférence (Γ) concentrique à (γ) et de rayon

$$\lambda' = \frac{3}{2}\,\frac{1-R}{\log T(R)+1}.$$

D'après un théorème de M. Valiron (1), si $f(z)$ ne prend que dans le

(1) Ce théorème [13, f] peut être modifié comme il suit : « En posant

$$z = (x - x_0):\lambda',$$

on en déduit que si une fonction $f_1(x)$ est méromorphe dans un cercle de centre x_0 et de rayon λ', et ne prend que $\mathfrak{N}$ fois au plus les valeurs 0, 1 et ∞, le nombre de zéros de $f_1(x) - \alpha$ dans un cercle de centre x_0 et de rayon $\lambda < \lambda'$ est moindre que

$$\frac{A_1\mathfrak{N} + B_1}{(\lambda' - \lambda)^p} + \frac{\lambda'^q}{(\lambda' - \lambda)^q}\log\frac{1}{d} \qquad (p > 2,\ q = 2),$$

sauf au plus pour les α représentés sur la sphère de Riemann à l'intérieur d'un cercle de rayon d. »

Considérons ensuite une fonction $g(x)$ ne prenant pas plus de $\mathfrak{N}$ fois trois valeurs α_1, α_2 et α_3 dont les distances sphériques prises deux à deux sont supérieures à σ; la transformation

$$f_1(x) = \frac{g(x) - \alpha_1}{g(x) - \alpha_1} : \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

fait correspondre, à une telle fonction, une fonction $f_1(x)$ du type considéré ci-dessus. On constate facilement que la transformation multiplie la distance sphérique de deux valeurs quelconques de $g(x)$ par une quantité supérieure à $k\sigma$, k désignant une constante numérique. Ainsi, le théorème de M. Valiron peut s'énoncer comme suit : « Si une fonction $g(x)$ est méromorphe dans un cercle de centre x_0 et de rayon λ' et ne prend pas plus de $\mathfrak{N}$ fois trois valeurs α_1, α_2 et α_3 dont les distances sphériques sont supérieures à σ, le nombre des zéros de $g(x) - \alpha$ dans un cercle de centre x_0 et de rayon $\lambda < \lambda'$, est moindre que

$$\frac{A_1\mathfrak{N} + B_1}{(\lambda' - \lambda)^p} + \frac{\lambda'_q}{(\lambda' - \lambda)^q}\log\frac{1}{\delta} \qquad (\delta = k\sigma d),$$

sauf au plus les α représentés sur la sphère de Riemann à l'intérieur d'un cercle de rayon δ. »

cercle (Γ) π fois au plus trois valeurs α_1, α_2 et α_3, dont les distances sphériques prises deux à deux sont supérieures à σ, le nombre de zéros de $f(z)-\alpha$ contenus dans le cercle (γ) est inférieur à

$$(A_1\mathfrak{N}+B_1)\left\{\frac{2[\log T(R)+1]}{(3-2\sqrt{2})(1-R)}\right\}^p+\frac{9}{(3-2\sqrt{2})^2}\log\frac{1}{\delta}$$

(A_1, B_1 deux constantes), sauf au plus pour les α représentés sur la sphère de Riemann à l'intérieur d'un cercle de rayon δ. Donc, en prenant $\sigma=\frac{1}{T(R)}$, $d=\frac{1}{T(R)}$, par suite, $\delta=\frac{k}{T(R)^2}$ et

$$\mathfrak{N}=\frac{(3-2\sqrt{2})^p(1-R)^{p+2}\,T(R)}{32\times 2^p A\log R[\log T(R)+1]^{p+2}},$$

on trouve que

$$(13)\quad n(R,\alpha)<\frac{1}{32\log R}\,\frac{R\log T(R)+1}{\log T(R)+1}T(R)(1+\eta)\qquad\left(\eta\to 0 \text{ avec } \frac{1}{R}\right),$$

quel que soit α, sauf au plus un ensemble de points contenus dans des cercles dont la somme des rayons sur la sphère est arbitrairement petite.

En comparant (12) et (13), on voit qu'il y a contradiction à partir d'une certaine valeur de r pour tous les α extérieurs à un ensemble de mesure linéaire arbitrairement petit. Donc, il existe au moins un cercle (Γ) à l'intérieur duquel $f(z)$ prendra au moins $\mathfrak{N}$ fois les valeurs des α autres que celles voisines de deux points.

Comme $\mathfrak{N}$ croît indéfiniment avec R, on conclut qu'il existe une infinité de petits cercles tels que (Γ). Considérons une suite de tels cercles (Γ_n), dont le $n^{\text{ième}}$ est obtenu en donnant à R une valeur R_n. En désignant par $r(n,\alpha)$ le module d'un zéro de $f(z)-\alpha$ dans (Γ_n), et en raisonnant comme dans le cas des fonctions méromorphes dans le plan, on établit que la somme

$$\sum[1-r(n,\alpha)]^{\rho\left[\frac{1}{1-r(n,\alpha)}\right](1-\delta)}$$

étendue à tous les zéros de $f(z)-\alpha$ dans (Γ_n) diverge, sauf pour deux α au plus, lorsque n croît indéfiniment, de sorte que R_n tende vers un.

Lorsque R_n tend vers un, les centres de cercles (Γ_n) tendent au moins vers un point z_0 de la circonférence-unité. Décrivons un petit cercle de centre z_0 et de rayon η arbitrairement petit, et soit σ le domaine commun à ce cercle et au cercle de centre o et de rayon $r < 1$. Comme le rayon de (Γ_n) tend vers zéro lorsque R_n tend vers un, il existe certainement des cercles (Γ_n) dans le domaine σ si petit que soit η, pourvu que r soit suffisamment approché de un. Si $r_\nu(\sigma, \alpha)$ désigne le module du $\nu^{\text{ième}}$ des zéros situés dans σ, la somme

$$\sum [1 - r_\nu(\sigma, \alpha)]^{\rho\left[\frac{1}{1 - r_\nu(\sigma, \alpha)}\right](1-\delta)},$$

étendue à tous les zéros dans σ diverge évidemment, sauf pour deux α au plus lorsqu'on fait r tendre vers un.

On démontre, comme dans le cas des fonctions méromorphes dans le plan, que la somme

$$\sum [1 - r_\nu(\sigma, \alpha)]^{\rho\left[\frac{1}{1 - r_\nu(\sigma, \alpha)}\right](1+\delta)}$$

converge pour toutes les valeurs de α.

Donc, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| < 1$ et d'ordre infini, si $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ est l'un de ses ordres, il existe sur la circonférence-unité au moins un point z_0 tel que si petit que soit le nombre positif η, en désignant par $r_\nu(\sigma, \alpha)$ le module du $\nu^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - \alpha$ appartenant au domaine σ défini par $|z| < 1$ et $|z - z_0| < \eta$ la série*

$$\sum_\nu [1 - r_\nu(\sigma, \alpha)]^{\rho\left[\frac{1}{1 - r_\nu(\sigma, \alpha)}\right](1+\delta)}$$

converge pour tous les α et la série

$$\sum_\nu [1 - r_\nu(\sigma, \alpha)]^{\rho\left[\frac{1}{1 - r_\nu(\sigma, \alpha)}\right](1-\delta)}$$

diverge, sauf pour deux α au plus

On peut dire que z_0 est *un point de Borel d'ordre* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ suivant la terminologie de M. Valiron.

CHAPITRE V.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS HOLOMORPHES D'ORDRE INFINI DÉFINIES PAR UN DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

I. — Fonctions entières.

23. On sait depuis les travaux de Poincaré, Hadamard, Borel, Lindelöf que l'ordre d'une fonction entière est déterminé par la décroissance des coefficients de son développement de Taylor et l'on possède des résultats précis et généraux dans le cas de l'ordre fini. Je me propose d'étendre ces résultats au cas de l'ordre infini en obtenant une approximation analogue. J'utilise principalement la méthode du polygone de Newton introduite par M. Hadamard telle qu'elle a été employée par M. Valiron dans le cas des fonctions d'ordre fini.

24. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{1}$$

son développement de Taylor. Désignons par $M(r)$ ou $M(r, f)$ son module maximum pour $|z| = r$ et démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme I. — *Si le rang $\mathfrak{N}(r,f)$ du terme maximum de la série* (1) *est plus petit qu'une fonction croissante* $V(r)$ *pour toute valeur* $r > r_0$, *on a pour* $r > r_0$

$$M(r) < A\, e^{V(r)\log r}\, V\left[r + \frac{r}{(1-\eta)V(r)}\right], \tag{2}$$

A *étant une constante et* η *un infiniment petit positif pour* $r \to \infty$.

Formons une autre fonction entière

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots \tag{3}$$

avec $A_n > 0$ telle que le rang $\mathfrak{N}(r, F)$ de son terme maximum soit la partie entière de $V(r)$. Par hypothèse, $\mathfrak{N}(r, F)$ est supérieur ou égal à $\mathfrak{N}(r, f)$ pour toute valeur r, et en posant

$$\log|a_n| = -g_n, \qquad \log A_n = -G_n,$$

on doit avoir

$$G_{\mathfrak{N}'} - \mathfrak{N}' \log r \leqq g_{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N} \log r,$$

où $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(r, f)$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}(r, F)$. Si l'on construit le polygone de Newton $\pi(f)$ relatif à $f(z)$ et qu'on trace sa tangente D_r qui a pour coefficient angulaire $\log r$, cette inégalité montre que le point $P_{\mathfrak{N}'}(N', G_{\mathfrak{N}'})$ est situé sur D_r ou au-dessous de D_r.

Menons par $P_{\mathfrak{N}'}$ une parallèle D'_r à D_r; le polygone de Newton $\pi(F)$ relatif à $F(z)$ s'obtient en cherchant l'enveloppe de D'_r. Je dis que $\pi(F)$ ne peut avoir des points situés au-dessus de $\pi(f)$. En effet, supposons qu'on ait un tel point Q_1; menons par Q_1 une droite Δ_1 de coefficient angulaire $\log r_1$, puis la tangente D_{r_1} de $\pi(f)$ parallèle à Δ_1. Alors, comme le point $(\mathfrak{N}_1, g_{\mathfrak{N}_1})$ correspondant au terme maximum de $f(z)$ pour la valeur r_1 se trouve sur D_{r_1}, le point $P_{\mathfrak{N}'_1}(\mathfrak{N}'_1, G_{\mathfrak{N}'_1})$ qui correspond à celui de $F(z)$ pour la même valeur r_1 sera sur Δ_1.

Mais $\pi(f)$ étant convexe, $P_{\mathfrak{N}'_1}$ serait au-dessus de D_{r_1}, ce qui est inadmissible d'après ce qu'on a remarqué plus haut. Donc $\pi(F)$ est complètement au-dessous de $\pi(f)$.

Ainsi, si l'on prend comme coefficients A_n les valeurs telles que, en posant $\log A_n = -G_n$, les G_n soient les ordonnées de $\pi(F)$, on voit que la fonction $F(z)$ majore $f(z)$.

$F(z)$ ainsi choisi, d'après l'inégalité connue [13, *a*, p. 32],

$$(4) \qquad M(r, f) < \mathfrak{M}(r)\left[2\mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}, f\right) + 1\right],$$

$\mathfrak{M}(r, f)$ désignant le module du terme maximum de $f(z)$, on a

$$\log M(r, F) < \int_{r_0}^{r} \frac{\mathfrak{N}(x, F)}{x}\,dx + \log \mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r, F)}, F\right) + \log\left[1 + \frac{1}{2\mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r, F)}, F\right)}\right] + \log 2\,\mathfrak{M}(r_0),$$

ou, en supposant $r_0 > 1$ et, en désignant par A une certaine constante positive

$$\log M(r, F) < \mathfrak{N}(r, F)\log r + \log \mathfrak{N}\left[r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r, F)}, F\right] + \log A.$$

Comme on a par hypothèse $\mathfrak{N}(r, f) \leqq \mathfrak{N}(r, F) \leqq V(r) < \mathfrak{N}(r, F) + 1$, il vient donc

$$M(r, F) < A\, e^{V(r)\log r}\, V\left[r + \frac{r}{(1-\eta)V(r)}\right] \qquad \left(\eta \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right),$$

et l'on a *a fortiori* l'inégalité (2).

25. Revenons à la fonction (1), r étant le rayon d'un cercle entourant l'origine, il est bien connu que l'intégrale de Cauchy donne

$$(5) \qquad |a_n| < \frac{M(r)}{r^n}.$$

Si $\rho(r)$ est un ordre de $f(z)$ d'après la définition du Chapitre II, l'inégalité de M. R. Nevanlinna

$$T(r) \leqq \overset{+}{\log} M(r) \leqq \frac{k+1}{k-1} T(kr) \qquad (k > 1)$$

montre que

$$\log M(r) < r^{\rho(r)[1+\varepsilon(r)]} \qquad \left[\varepsilon(r) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right].$$

On a donc

$$|a_n| < e^{U(r)^{1+\varepsilon(r)}} : r^n \qquad \text{avec } U(r) = r^{\rho(r)}.$$

Déterminons la valeur de r par la relation

$$(6) \qquad U(r)^{1+\varepsilon} = n \log\left[1 + \frac{1}{\log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}\right];$$

il vient alors

$$r < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\left[1 + \frac{1}{\log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}\right].$$

D'où

$$U(r) < U\left[\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\left(1 + \frac{1}{\log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}\right)\right],$$

ou

$$U(r) < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon'(n)} \qquad \left[\varepsilon'(n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right].$$

Ceci donne, en tenant compte de (6), l'inégalité

$$n \log\left[1 + \frac{1}{\log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}\right] < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon''}.$$

et l'on en déduit que, à partir d'un certain indice n_0,

$$n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\eta(n)} \qquad \left[\eta(n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right].$$

On est ainsi conduit à énoncer la proposition :

I. *Si* $\rho(r)$ *est l'un des ordres de la fonction entière* $f(z)$ *ayant* (1) *pour développement de Taylor de sorte que, à partir d'une certaine valeur* r_0,

$$(7) \qquad \log M(r) < r^{\rho(r)[1+\varepsilon(r)]} \qquad \left[\varepsilon(r) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right],$$

alors on a, à partir d'un certain indice n_0,

$$(8) \qquad n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\eta(n)} \qquad \left[\eta(n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right],$$

où $U(r) = r^{\rho(r)}$.

26. Supposons maintenant qu'on ait une fonction entière $f(z)$ définie par son développement (1) et que la condition (8) soit vérifiée, $U(r)$ étant une fonction qui satisfait à la condition de la croissance normale

$$U\left[r + \frac{r}{\log U(r)}\right] < U(r)^{1+\varepsilon(r)}.$$

Si l'on désigne par $\varphi(x)$ la fonction inverse de U, l'inégalité (8) s'écrit

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\varphi\left(n^{\frac{1}{1+\eta}}\right)},$$

et le terme général de (1) est en module plus petit que

$$\left[\frac{r}{\varphi\left(n^{\frac{1}{1+\eta}}\right)}\right]^n.$$

Prenons comme relation entre r et n

$$(9)\qquad r=\varphi\left(n^{\frac{1}{1+\eta}}\right),$$

de sorte que le terme du rang n de (1) soit plus petit que 1. Or le terme maximum de (1) croît indéfiniment, donc on a certainement

$$(10)\qquad \mathfrak{N}(r)<n,$$

n étant lié à r par (9). Puisque, par hypothèse $n<\mathrm{U}(r)^{1+\eta}$, il vient

$$\mathfrak{N}(r)<\mathrm{U}(r)^{1+\eta}.$$

Alors, d'après le lemme, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{M}(r,f)<\mathrm{A}\,e^{\mathrm{U}(r)^{1+\eta}\log r}\,\mathrm{U}\left[r+\frac{r}{(1-\eta')\,\mathrm{U}(r)^{1+\eta}}\right]^{1+\eta}.$$

Comme on constate que $(1-\eta)\mathrm{U}(r)^{1+\eta}>\log\mathrm{U}(r)$, on en déduit

$$\mathrm{M}(r,f)<e^{\mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon(r)}}\qquad\left[\varepsilon(r)\to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right],$$

et l'on peut énoncer la réciproque de I :

II. *Étant donnée une fonction entière $f(z)$ par son développement* (1), *si, à partir d'un certain indice n_0, l'inégalité* (8) *est vérifiée et que* $\mathrm{U}(r)$ *est une fonction satisfaisant à la condition de la croissance normale de Borel, alors, en posant* $\mathrm{U}(r)=r^{\rho(r)}$ *on a, à partir d'une certaine valeur r, l'inégalité* (7).

Des résultats précédents, découlent les propositions suivantes :

I'. *Si $\rho(r)$ désigne un ordre de $f(z)$ de sorte qu'en posant* $\mathrm{U}(r)=r^{\rho(r)}$ *on ait, pour une suite de valeurs r_ν croissant à l'infini*

$$(7')\qquad \log\mathrm{M}(r_\nu)>\mathrm{U}(r_\nu)^{1-\varepsilon}\qquad(\nu=1,2,\ldots),$$

si petit que soit le nombre positif ε, *alors on a pour une suite infinie* *d'indices n_ν*

(8′) $$n_\nu > U\left(\frac{1}{\sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|}}\right)^{1-\eta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

si petit que soit η.

II′. *Étant donnée une fonction entière $f(z)$ par son développement* (1), *si l'on a l'inégalité* (8′) *pour une suite infinie d'indices n_ν si petit soit-il η et que* $U(r)$ *satisfait à la condition de la croissance normale, on a pour une suite r_ν croissant à l'infini, l'inégalité* (7′) *si petit soit-il ε.*

En effet, si l'on avait pour tout indice $n > n_0$

$$n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1-\eta}$$

si petit que soit η, on aurait, d'après la proposition II,

$$\log M(r) < U(r)^{(1-\eta)[1+\varepsilon(r)]} < U(r)^{1-\delta},$$

δ étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc la proposition I′ est prouvée.

Inversement, si l'on avait pour toute valeur $r > r_0$

$$\log M(r) < U(r)^{1-\varepsilon}$$

si petit que soit ε, on obtiendrait alors, d'après la proposition I,

$$n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{(1-\varepsilon)[1+\eta(n)]} < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1-\delta},$$

δ étant un nombre positif arbitraire, ce qui contredit l'hypothèse, et la proposition II′ se trouve démontrée.

27. Il y a intérêt de chercher la condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les coefficients de la série (1) pour que $M(r)$ soit à *croissance regulière* par rapport à l'un des ordres $\rho(r)$ de $f(z)$ en ce sens que, à partir d'une certaine valeur r_0, on a

(11) $$\log M(r) > r^{\rho(r)(1-\varepsilon)}$$

aussi bien que l'inégalité (7), de sorte qu'on puisse écrire

(12) $$\log M(r) = r^{\rho(r)[1+\gamma(r)]} \qquad \left[\gamma(r) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right].$$

Supposons que l'égalité (12) ait lieu pour $r > r_0$, comme *a fortiori*

$$\int_0^r \frac{\mathfrak{n}(r)}{r} dr < \mathrm{U}(r)^{1+\gamma(r)}, \qquad \mathrm{U}(r) = r^{\rho(r)},$$

$\mathfrak{n}(r)$ étant toujours le rang du terme maximum de (1), on aura, d'après un calcul déjà fait plusieurs fois,

$$\mathfrak{n}(r) < \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon(r)}. \tag{13}$$

D'autre part, on a, en suivant une méthode de M. Valiron [13, *a*, p. 131] :

$$\mathrm{M}(r) < \mathrm{A}\, e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{n}(r)}{r} dr} n_1 + \sum_{n_1}^{\infty} (r \sqrt[n]{|a_n|})^n. \tag{14}$$

Or, d'après la proposition I,

$$n < \mathrm{U}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon(r)}.$$

Si l'on prend comme valeur de n_1 la partie entière de

$$\mathrm{U}\left[r + \frac{r}{\log \mathrm{U}(r)}\right]^{1+\varepsilon(r)} + 1.$$

on a pour $n > n_1$

$$r + \frac{r}{\log \mathrm{U}(r)} < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

par suite

$$\sum_{n_1}^{\infty} (r \sqrt[n]{|a_n|})^n < \sum_{n_1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\log \mathrm{U}(r)}}\right)^n < 2 \log \mathrm{U}(r).$$

Donc l'inégalité (14) donne

$$\mathrm{M}(r) < \mathrm{A}\left[\mathrm{U}\left(r + \frac{r}{\log \mathrm{U}(r)}\right)^{1+\varepsilon(r)} + 1\right] e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{n}(r)}{r} dr} + 2 \log \mathrm{U}(r)$$

$$< \mathrm{A}[\mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon'(r)} + 1]\, e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{n}(r)}{r} dr} + 2 \log \mathrm{U}(r) \qquad \left[\varepsilon'(r) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right],$$

où B, désignant une certaine constante,

$$\mathrm{M}(r) < \mathrm{B}\, \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon'} e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{n}(r)}{r} dx}. \tag{15}$$

De cette inégalité, et de (11), on déduit

$$U(r)^{1-\delta} < \int_0^r \frac{\mathfrak{U}(r)}{r}\,dr$$

pour toutes les valeurs $r > r_0$, δ étant un nombre positif arbitraire. Ceci donne encore

$$U(r)^{1-\delta} < \mathfrak{U}(r)\log r$$

ou ε étant un nombre positif arbitraire,

(16) $$\mathfrak{U}(r) > U(r)^{1-\varepsilon}.$$

Ainsi si l'on a (12) ou

(17) $$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log U(r)} = 1,$$

on conclut de (13) et (16) que

(18) $$\lim_{r=\infty} \frac{\log \mathfrak{U}(r)}{\log U(r)} = 1.$$

Inversement si (18) a lieu, on a $\mathfrak{U}(r) < U(r)^{1+\eta(r)}$ et d'après un calcul fait au paragraphe **26**,

(19) $$M(r) < e^{U(r)^{1+\varepsilon(r)}}.$$

Et puis on sait que

(20) $$M(r) > e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{U}(x)}{x}\,dx}.$$

Puisque $\mathfrak{U}(r) > U(r)^{1-\eta}$ d'après (18), on a, en posant $r_0 = r - \frac{r}{\log U(r)}$,

$$\log M(r) > \int_{r_0}^{r} U(x)^{1-\eta}\frac{dx}{x} > U(r_0)^{1-\eta}\log\frac{1}{1-\frac{1}{\log U(r)}}$$

ou

$$\log M(r) > \frac{A}{\log U(r)}\, U\left[r - \frac{r}{\log U(r)}\right]^{1-\eta},$$

A étant une constante.

Mais $U(r)$ étant à croissance normale, on a vu au paragraphe **28** que

$$U\left[r - \frac{r}{\log U(r)}\right] > U(r)^{1-\varepsilon(r)},$$

donc l'inégalité précédente donne

$$\log M(r) > U(r)^{1-\varepsilon}. \tag{21}$$

On peut conclure alors de (19) et (21) que (18) entraîne (17). Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait* (17) *est que* (18) *ait lieu.*

Considérons maintenant l'inégalité (15). En posant

$$B\,U(r)^{1+\varepsilon'} = e^{\lambda(r)\int_0^r \frac{\mathfrak{U}(x)}{x}dx},$$

on trouve

$$\lambda(r) < \frac{(1+\eta')\log(Ur)}{\mathfrak{U}\left(\frac{r}{k}\right)\log k} \qquad \left(\eta' \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right)$$

ou, en prenant $k = 1 + \frac{1}{\log U(r)}$,

$$\lambda(kr) < \frac{(1+\eta')[\log U(r)]^2}{(1-\eta'')\mathfrak{U}(r)} \qquad \left(\eta' \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right).$$

Si (18) a lieu, on a $\mathfrak{U}(r) = U(r)^{1+\sigma(r)}$ où $\sigma(r) \to 0$ avec $\frac{1}{r}$, donc

$$\lambda(r) < \frac{(1+\eta')[\log U(r)]^2}{(1-\eta'')U(r)^{1+\sigma}};$$

le second membre tend vers zéro, r croissant indéfiniment, par suite il en est de même de $\lambda(r)$ qui est positif, et l'on a

$$M(r) < e^{(1+\lambda)\int_0^r \frac{\mathfrak{U}(x)}{x}dx}. \tag{22}$$

En joignant cette inégalité à (20), on peut conclure que si (18) a lieu, on a

$$M(r) = e^{[1+\varepsilon(r)]\int^r \frac{\mathfrak{U}(x)}{x}dx} = \mathfrak{M}(r)^{1+\varepsilon(r)} \qquad \left[\varepsilon(r) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{r}\right], \tag{23}$$

$\mathfrak{M}(r)$ étant le module du terme maximum de la série (1).

On sait déjà que si la condition (17) a lieu, on a l'inégalité (8) à partir d'un certain indice n_0 et l'inégalité (8′) pour une suite infinie d'indices. Montrons que (8′) a lieu pour toutes les valeurs $n > n_0$

telles que, pour une certaine valeur de r, n est le rang du terme maximum.

Supposons que pour une suite de tels n, on ait

$$(24) \qquad n < \mathrm{U}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1-\alpha},$$

α étant un nombre positif fixe. D'après (23), on a pour les r correspondants

$$\mathrm{M}(r) < \mathfrak{M}(r)^{1+\varepsilon(r)}$$

et *a fortiori*

$$\mathrm{M}(r) < \mathrm{F}(r)^{1+\varepsilon(r)},$$

$\mathrm{F}(r)$ désignant une fonction entière à coefficients positifs, pour lesquels l'inégalité (24) a lieu pour tous les $n > n_0$. Mais alors d'après le théorème II, on a pour certains r

$$\mathrm{M}(r) < e^{\mathrm{U}(r)^{(1-\alpha)[1+\varepsilon(r)]}} < e^{\mathrm{U}(r)^{1-\delta}};$$

quelque petit que soit le nombre positif δ, donc on est conduit à une contradiction avec l'hypothèse.

Ainsi l'inégalité (8′) a lieu pour tous les n considérés qui sont les valeurs entières prises par $\mathfrak{N}(r)$. Si n_ν et $n_{\nu+1}$ sont deux valeurs successives prises par $\mathfrak{N}(r)$, on a

$$n_\nu = \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon(r)}, \qquad n_{\nu+1} = \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon'(r)},$$

r étant la valeur de r pour laquelle $\mathfrak{N}(r)$ saute de la valeur n_ν à la valeur $n_{\nu+1}$. Donc

$$(25) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{\log n_{\nu+1}}{\log n_\nu} = 1.$$

Par suite, pour que la condition (17) ait lieu, il est nécessaire que l'inégalité (8′) ait lieu pour une suite de valeurs n_ν vérifiant la condition (25).

Je vais démontrer que les conditions (8), (8′) et (25) sont aussi suffisantes. On a tout d'abord, d'après le théorème II,

$$(26) \qquad \log \mathrm{M}(r) < \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon(r)},$$

à partir d'une certaine valeur r_0. Puis (25) s'écrit

$$\log n_{\nu+1} = [1 + \gamma(\nu)] \log n_\nu \qquad \left[\gamma(\nu) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{\nu}\right]$$

et en établissant entre n_ν et r_ν la relation $r_\nu = 1 : \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|}$, les inégalités (8), (8′) donnent

$$n_\nu < \mathrm{U}(r_\nu)^{1+\eta(\nu)} \qquad \left[\eta(\nu) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{\nu}\right],$$

et, si petit que soit le nombre positif η,

$$n_{\nu+1} > \mathrm{U}(r_{\nu+1})^{1-\eta},$$

on a donc

$$(1-\eta) \log \mathrm{U}(r_{\nu+1}) < [1+\gamma(\nu)]\,[1+\eta(\nu)] \log \mathrm{U}(r_\nu),$$

d'où

$$(27) \qquad \log \mathrm{U}(r_{\nu+1}) < [1+\eta'(\nu)] \log \mathrm{U}(r_\nu) \qquad \left[\eta'(\nu) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{\nu}\right].$$

Maintenant si l'on suppose que $r_\nu < r < r_{\nu+1}$, on a, d'après le théorème II′,

$$\log \mathrm{M}(r) > \log \mathrm{M}(r_\nu) > \mathrm{U}(r_\nu)^{1-\varepsilon}.$$

En tenant compte de (27), il vient donc

$$\log \mathrm{M}(r) > \mathrm{U}(r_{\nu+1})^{\frac{1-\varepsilon}{1+\eta'(\nu)}} > \mathrm{U}(r_{\nu+1})^{1-\delta},$$

δ étant un nombre positif arbitraire; par suite on a *a fortiori*

$$(28) \qquad \log \mathrm{M}(r) > \mathrm{U}(r)^{1-\delta}$$

à partir d'une certaine valeur r_0 et si petit que soit δ.

Les inégalités (26), (28) prouvent que (17) a bien lieu et l'on peut énoncer le théorème :

III. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini définie par un développement de Taylor* (1), *pour que son module maximum* $\mathrm{M}(r)$ *soit à croissance régulière par rapport à l'un de ses ordres* $\rho(r)$, *il faut et il suffit que si l'on pose* $\mathrm{U}(r) = r^{\rho(r)}$, *l'inégalité* (8) *soit vérifiée à partir d'un certain indice n_0 et l'inégalité* (8′) *pour une suite d'indices n_ν tels que*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\log n_{\nu+1}}{\log n_\nu} = 1.$$

II. — Fonctions holomorphes dans le cercle-unité.

28. MM. Borel, Valiron ont également étudié, au point de vue où l'on se place ici, les séries entières à rayon de convergence fini [2, *c*; 13, *d*], je vais considérer le cas de l'ordre infini et étendre les résultats précédents.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe d'ordre infini définie par son développement de Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1'}$$

le rayon de convergence étant supposé égal à 1. Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme II. — *Si le rang* $\mathfrak{N}(r, f)$ *du terme maximum de* $f(z)$ *est plus petit qu'une fonction* $v(r)$, *on a, en posant* $(1-r)^{-1} = X$ *et* $v(r) = V(X)$,

$$M(r) < e^{2V(X)\log\left[\frac{X_0}{X_0-1}\left(1-\frac{1}{X}\right)\right]}\left\{V\left[X + \frac{X}{(1-\eta)V(X)}\right] + XV(X) + X + 2\right\}, \tag{29}$$

η *étant infiniment petit positif pour* $X \to \infty$.

Formons une autre fonction

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots \qquad (A_n > 0) \tag{3'}$$

admettant le même rayon de convergence, telle que

$$\mathfrak{n}(X, f) \leqq \mathfrak{n}(X, F) \leqq V(X) < \mathfrak{n}(X, F) + 1, \tag{30}$$

où l'on a posé $\mathfrak{N}(r, g) = \mathfrak{n}(x, g)$ et $\mathfrak{N}(r, g)$ désigné le rang du terme maximum de $g(z)$. Par la considération des polygones d'Hadamard, on montre comme au paragraphe **26** que le module maximum $M(r, F)$ de $F(z)$ majore celui de $f(z)$, $M(r, f)$.

Si $\mathfrak{M}(r, F)$ désigne le module du terme maximum de $F(z)$, on a l'inégalité suivante due à M. Valiron [13, *d*] :

$$M(r, F) < \mathfrak{M}(r, F)\left[\mathfrak{N}(r', F) + 1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}}\right] \qquad (r < r' < 1), \tag{4'}$$

et l'on sait que

$$\log \mathfrak{M}(r, F) = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathfrak{N}(x, F)}{x} dx + \log \mathfrak{M}(r_0, F).$$

Prenons

$$r' = r + \frac{1 - r}{1 + \mathfrak{N}(r, F)};$$

alors

$$\log \mathfrak{M}(r, F) = \int_{X_0}^{X} \frac{\mathfrak{n}(x, F)}{x(x-1)} dx + \log \mathfrak{M}(r_0, F) \qquad (X_0 > 1),$$

d'où

$$\begin{aligned}\log \mathfrak{M}(r, F) &< \mathfrak{n}(X, F)\left[\log\left(1 - \frac{1}{X}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{X_0}\right)\right] + \log \mathfrak{M}(r_0, F) \\ &< (1 + \varepsilon)\, \mathfrak{n}(X, F) \log \frac{X_0}{X_0 - 1}\left(1 - \frac{1}{X}\right).\end{aligned}$$

Et puis, la quantité dans les crochets de (31) s'écrit

$$\mathfrak{n}\left[X + \frac{X}{\mathfrak{n}(X, F)}, F\right] + X[1 + \mathfrak{n}(X, F)] + 2.$$

Donc, si x est assez grand, l'inégalité (4′) donne

$$\begin{aligned}\log M(r, F) < 2\, \mathfrak{n}(X) \log\left[\frac{X_0}{X_0 - 1}\left(1 - \frac{1}{X}\right)\right] \\ + \log\left\{\mathfrak{n}\left[X + \frac{X}{\mathfrak{n}(X, F)}, F\right] + \mathfrak{n}(X, F) + X + 2\right\}.\end{aligned}$$

En tenant compte de (30) et en se rappelant que $M(r, f) \leqq M(r, F)$, on obtient (29).

29. On a encore ici

$$|a_n| < \frac{M(r)}{r^n} < e^{U(r)^{1+\varepsilon}} : r^n$$

en posant $U(r) = \mathfrak{U}(X) = X^{\rho(X)}$, $X = \frac{1}{1 - r}$. Mais pour que le cercle unité soit le cercle de convergence de la série (1′), il faut supposer qu'on ait $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Dans ce qui suit, je considère uniquement les valeurs de $|a_n|$ supérieures à 1.

Établissons entre r et n la relation

$$(31)\qquad U(r)^{1+\varepsilon} = n \log \left[\frac{\sqrt[n]{|a_n|} + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}{1 + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)} \right];$$

il vient

$$r < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \left[\frac{\sqrt[n]{|a_n|} + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}{1 + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)} \right].$$

En observant que la condition de la croissance normale s'écrit

$$U\left[\frac{1 + r \log U(r)}{1 + \log U(r)}\right] < U(r)^{1+\varepsilon(r)},$$

on a donc

$$(32)\qquad U(r) < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon'(n)} \qquad \left[\varepsilon'(n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right].$$

De (31) (32), on déduit

$$(33)\qquad n \log \left[\frac{\sqrt[n]{|a_n|} + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}{1 + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)} \right] < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon''(n)} \qquad [\varepsilon''(n) \to 0].$$

Mais

$$\log \left[\frac{\sqrt[n]{|a_n|} + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)}{1 + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)} \right] \sim \frac{\sqrt[n]{|a_n|} - 1}{1 + \log U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)},$$

et la fonction $f(z)$ étant d'ordre infini, on a

$$U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right) : \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \to \infty \qquad \text{si } n \to \infty;$$

donc l'inégalité (33) s'écrit

$$(34)\qquad n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\eta(n)} \qquad \left[\eta(n) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\right].$$

30. Supposons inversement que l'inégalité (34) ait lieu pour les valeurs $|a_n| > 1$. Désignons par $\varphi(x)$ la fonction inverse de U et prenons comme relation entre r et n

$$r = \varphi\left(n^{\frac{1}{1+\eta}}\right), \tag{35}$$

et l'on voit comme dans le cas des fonctions entières que

$$\mathfrak{N}(r) < n, \tag{36}$$

$\mathfrak{N}(n)$ étant le rang du terme maximum de (1') et n étant lié à r par (35). Alors (34), (35) et (36) donnent

$$\mathfrak{N}(r) < \mathrm{U}(r)^{1+\eta} = \mathfrak{U}(\mathrm{X})^{1+\eta(\mathrm{X})} \qquad \left[\eta(\mathrm{X}) \to 0 \text{ avec } \frac{1}{\mathrm{X}}\right].$$

D'après le lemme II, on obtient

$$\log \mathrm{M}(r) < \mathrm{U}(r)^{1+\varepsilon(r)} \qquad [\varepsilon(r) \to 0 \text{ avec } 1 - r]. \tag{37}$$

Par le même raisonnement que pour les fonctions entières, on prouve que des résultats précédents, découlent les suivants :

Si l'on a pour une suite infinie de valeurs r_ν,

$$\log \mathrm{M}(r_\nu) > \mathrm{U}(r_\nu)^{1-\varepsilon} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{37'}$$

si petit que soit ε, alors en considérant les valeurs $|a| > 1$, on a pour une suite infinie d'indices

$$n_\nu > \mathrm{U}\left(\frac{1}{\sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|}}\right)^{1-\eta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{34'}$$

si petit que soit η.

Inversement, si l'inégalité (34') a lieu pour une suite infinie d'indices n_ν et pour les valeurs $|a_n| > 1$ si petit soit-il η, et que $\mathrm{U}(r)$ est une fonction satisfaisant à la condition de la croissance normale, on a pour une suite infinie de valeurs r_ν l'inégalité (37') si petit soit-il ε.

Donc on aboutit aux théorèmes suivants :

IV. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe d'ordre infini définie par son développement* (1') *dont le rayon de convergence est supposé égal à* 1 ; *si $f\left(\frac{1}{1-r}\right)$ est l'un des ordres de $f(z)$, on a, à partir d'un certain* *indice n_0, l'inégalité*

$$(34) \qquad n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\eta(n)} \qquad [|a_n| > 1,\ \eta(n) \to 0 \text{ pour } n \to \infty],$$

où $U(r) = X^{\rho(X)}$, $X = \frac{1}{1-r}$, *et pour une suite infinie d'indices* n_ν,

$$(34') \qquad n_\nu > U\left(\frac{1}{\sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|}}\right)^{1-\eta} \qquad (|a_n| > 1,\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

si petit que soit le nombre positif η.

V. *Si l'on a, en considérant les valeurs* $|a_n| > 1$, *l'inégalité* (34) *à partir d'un indice* n_ν *et l'inégalité* (34′) *pour une suite infinie d'indices* n_ν, *la fonction* $U(r)$ *étant égale à une certaine fonction* $U(X)$ *à croissance normale* $\left(X = \frac{1}{1-r}\right)$, *alors la fonction* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *définie par*

$$U(r) = X^{\rho(X)} \qquad \text{avec } X = \frac{1}{1-r}$$

est un des ordres de $f(z)$.

31. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $M(r)$ soit à *croissance régulière* par rapport à l'un des ordres $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ de $f(z)$.

Supposons qu'on ait, en posant $U(r) = (1-r)^{-\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)}$,

$$(38) \qquad \log M(r) = U(r)^{1+\gamma(r)} \qquad [\gamma(r) \to 0 \text{ avec } 1-r].$$

Si $\mathfrak{N}(r)$ est le rang du terme maximum de la série (1′), on trouve d'abord, comme dans le cas des fonctions entières,

$$(39) \qquad \mathfrak{N}(r) < U(r)^{1+\varepsilon(r)}.$$

D'autre part, on a

$$(40) \qquad M(r) < A\, e^{\int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx}\, n_1 + \sum_{n_1}^{\infty} (r\sqrt[n]{a_n})^n$$

et

$$(41) \qquad n < U\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Si l'on prend comme n_1 la partie entière de

$$U\left[\frac{1+r\log U(r)}{1+\log U(r)}\right]^{1+\varepsilon(r)}+1,$$

on a pour $n > n_1$

$$\frac{1+r\log U(r)}{1+\log U(r)} < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

donc

$$\sum^{\infty}(r\sqrt[n]{|a_n|})^n < \sum^{\infty}\left[\frac{r+r\log U(r)}{1+r\log U(r)}\right]^n < \frac{1}{1-\dfrac{r+r\log U(r)}{1+r\log U(r)}} < \frac{2}{1-r}\log U(r).$$

Par conséquent, l'inégalité (40) donne

$$M(r) < A\left\{U\left[\frac{1+r\log U(r)}{1+\log U(r)}\right]^{1+\varepsilon(r)}+1\right\}e^{\int_0^r\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}}+\frac{2}{1-r}\log U(r)$$

$$< A[U(r)^{1+\varepsilon(r)}+1]\,e^{\int_0^r\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}dx}+\frac{2}{1-r}\log U(r) \qquad (\varepsilon'\to 0 \text{ avec } 1-r),$$

ce qui s'écrit encore

(42) $$M(r) < B\,U(r)^{1+\varepsilon'}e^{\int_0^r\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}dx}.$$

De cette inégalité et de (38), on déduit

$$U(r)^{1-\delta} < \int_0^r\frac{\mathfrak{N}(x)}{x} \qquad \text{pour } r > r_0,$$

δ étant un nombre positif arbitraire. Ceci donne

$$\mathfrak{N}(r) > U(r)^{1-\varepsilon}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Ainsi on établit que

(43) $$\lim_{r=1}\frac{\log_2 M(r)}{\log U(r)} = 1$$

entraîne

(44) $$\lim_{r=1}\frac{\log\mathfrak{N}(r)}{\log U(r)} = 1.$$

Inversement si (44) a lieu, on a d'après un résultat du paragraphe **30**

$$\log M(r) < U(r)^{1+\varepsilon(r)}. \tag{45}$$

Et puis on sait qu'on a

$$\log M(r) > \int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x} dx; \tag{46}$$

il vient, en tenant compte de $\mathfrak{N}(r) > U(r)^{1-\eta}$ déduit de (44),

$$\log M(r) > \int_0^r \frac{U(x)^{1-\eta}}{x} dx$$

ou, en prenant comme variable $X = 1 : (1-r)$,

$$\log M(r) > \int_1^X \frac{\mathfrak{U}(X)^{1-\eta}}{X(X-1)} dX,$$

où $\mathfrak{U}(X) = U(r)$. Si l'on pose $X_0 = X - \dfrac{X}{\log \mathfrak{U}(X)}$ on a *a fortiori*

$$\log M(r) > \int_{X_0}^X \frac{\mathfrak{U}(X)^{1-\eta}}{X(X-1)} dX > \mathfrak{U}(X_0)^{1-\eta} \log \frac{X_0(X-1)}{X(X_0-1)}.$$

Mais

$$\log \frac{X_0(X-1)}{X(X_0-1)} = \log\left[1 + \frac{1}{(X-1)\log \mathfrak{U}(X) - X}\right] > \log\left[1 + \frac{1}{X \log \mathfrak{U}(X)}\right].$$

Donc on a, en désignant par A une certaine constante,

$$\log M(r) > \frac{A}{X \log \mathfrak{U}(X)} \mathfrak{U}\left[X - \frac{X}{\log \mathfrak{U}(X)}\right]^{1-\eta}$$

et l'on en déduit que, $\mathfrak{U}(X)$ étant à croissance normale,

$$\log M(r) > \mathfrak{U}(X)^{1-\varepsilon} = U(r)^{1-\varepsilon} \tag{47}$$

si petit que soit ε.

On peut conclure ainsi comme dans le cas des fonctions entières que (44) entraîne (43).

Prenons l'inégalité (42). En posant

$$B\, U(r)^{1+\varepsilon'} = e^{\lambda(r)} \int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x} dx$$

et $\lambda_1(X) = \lambda(r)$, $X = \frac{1}{1-r}$, on trouve

$$\lambda_1 < \frac{(1+\eta')X[\log \mathfrak{U}(X) + 1]\log \mathfrak{U}(X)}{(1-\eta'')\mathfrak{N}(X)}$$
$$< \frac{(1+\eta')X[\log \mathfrak{U}(X) + 1]\log \mathfrak{U}(X)}{(1-\eta'')\mathfrak{U}(X)^{1+\sigma(X)}},$$

où η', η'' et σ tendent vers zéro, X croissant indéfiniment. On voit que $\lambda_1(X) \to 0$ pour $X \to 0$, par suite

$$\log M(r) < (1+\lambda)\int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx. \tag{48}$$

On peut conclure de (46), (48) que si (44) a lieu, on a

$$\log M(r) = [1+\varepsilon(r)]\int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx = \mathfrak{M}(r)^{1+\varepsilon(r)} \qquad (\varepsilon \to 0 \text{ avec } 1-r), \tag{49}$$

$\mathfrak{M}(r)$ étant le module du terme maximum de (1′).

La condition (43) étant vérifiée, l'inégalité (34) a lieu à partir d'un certain indice n_0 et l'inégalité (34′), pour une suite infinie d'indices n_ν.

On démontre de la même façon que dans le cas des fonctions entières que (34′) a lieu pour toutes les valeurs $n > n_0$ telles que pour une certaine valeur de r, n soit le rang du terme maximum, et puis, que si n_ν et $n_{\nu+1}$ sont deux valeurs successives prises par $\mathfrak{N}(r)$, on a (25).

Donc pour que (43) ait lieu, il est nécessaire que (34′) ait lieu pour une suite de valeurs n_ν vérifiant (25).

La méthode utilisée dans le cas des fonctions entières permet d'établir que (34), (34′) et (25) forment une condition suffisante pour que (43) ait lieu.

Ainsi on a le théorème :

VI. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe d'ordre infini qui est définie par une série entière* (1′) *ayant* 1 *comme rayon de convergence et qui a* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *pour l'un des ordres; pour que son module maximum* $M(r)$ *soit à croissance régulière par rapport à* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$, *r tendant vers* 1, *il faut* *et il suffit que en posant* $U(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)}$ *et en considérant les valeurs* $|a_n| > 1$, *on ait l'inégalité* (34) *à partir d'un certain indice* n_0 *et l'inégalité* (34′) *pour une suite d'indices* n_ν *tels que*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\log n_{\nu+1}}{\log n_\nu} = 1.$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Blumenthal (O.). — *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, 1910).

2. Borel (E.). — *a. Leçons sur les fonctions entières* (Paris, 1921); *b. Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, 1903); *c. Leçons sur les séries à termes positifs* (Paris, 1902); *d. Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta math.*, t. **20**, 1897, p. 357).

3. Boutroux (P.). — *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta math.*, t. **98**, 1904, p. 97).

4. Cartan (H.). — *Sur un théorème de M. A. Bloch et sur les questions d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **186**, 1928, p. 624).

5. Denjoy (A.). — *a. Sur l'intégration de certaines inéquations fonctionnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **148**, 1909, p. 98); *b. Sur les produits canoniques d'ordre infini* (*Thèse; Journ. de Math.*, 1910).

6. Hadamard (J.). — *a. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journ. de Math.*, 4e série, t. **9**, p. 171); *b. Sur la croissance des fonctions entières* (*Bull. Société math.*, 1896).

7. Kraft (A.). — *Ueber ganze transzendente Funktionen von unendlicher Ordnung* (*Diss. Inaug. Göttingen*, 1903).

8. Lindelöf (E.). — *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières dénfiies par un développement de Taylor* (*Bull. Sc. math.*, 1903).

9. Milloux (H.). — *a. Le théorème de M. Picard, suite de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (*Thèse; Journ. de

Math., 3e série, t. 3, 1924, p. 345-427); *b. Les cercles de remplissages des fonctions méromorphes ou entières* (*Acta math.*, t. 52,, 1928, p. 189-255).

10. NEVANLINNA (R.). — *a. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, 1929); *b. Zur Theorie der méromorphen Funktionen* (*Acta math.*, t. 46, 1925, p. 1-98).

11. PICARD (E.). — *Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 690).

12. POINCARÉ (H.). — *Sur les fonctions entières* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 11, 1883, p. 136-144).

13. VALIRON (G.). — *a. Lectures on the general Theory of integral Functions* (Deighton, Bulle and Co Cambridge, 1923); *b. Fonctions entières et fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. math.*, fasc. II, Paris, 1925); *c. Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 741); *d. Sur la croissance du module maximum des séries entières* (*Bull. Sc. math.*, t. 44, 1916, p. 45-64); *e. Sur la distribution des fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. 47, 1926, p. 47-142); *f. Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928, p. 935); *g. Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. 52, 1928, p. 67-92); *h. Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle* (*Bull. Sc. math.*, t. 36, 1932, p. 10-32); *i. Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1305).