

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

MARIE CHARPENTIER

**Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 14, n° 1-4 (1935), p. 1-48.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1935\\_9\\_14\\_1-4\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_1_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

**JOURNAL**  
DE  
**MATHÉMATIQUES**  
PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

*Sur des courbes fermées analogues aux courbes  
de M. Birkhoff;*

**PAR M<sup>lle</sup> MARIE CHARPENTIER.**

---

M. Birkhoff<sup>(1)</sup> définit ses courbes fermées<sup>(2)</sup> remarquables comme des ensembles invariants par de certaines transformations analytiques qui leur sont associées.

Rappelons les principales propriétés topologiques de telles courbes ou courbes  $\mathcal{C}$  :

- 1°  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée;
- 2°  $\mathcal{C}$  est invariante par une certaine transformation (analytique) topologique  $T_\varepsilon$ ;
- 3°  $\mathcal{C}$  est enroulée vers la gauche par rapport à l'extérieur et enroulée vers la gauche par rapport à l'intérieur, ou en explicitant : Tout point

---

(<sup>1</sup>) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LX, fasc. I-II, p. 1.

(<sup>2</sup>) *Courbe fermée* au sens de Schoenflies, c'est-à-dire frontière commune à deux domaines dont la somme est égale à la totalité du plan. Voir KEREKJARTO, *Vorlesungen über Topologie*, p. 90.

extérieur à  $\mathcal{C}$  est accessible de l'infini (ou d'un point d'un cercle extérieur à  $\mathcal{C}$ , contenant  $\mathcal{C}$  à son intérieur) par un arc simple régulièrement tourné à gauche *c'est-à-dire* dont la tangente fait en tout point P un angle positif <sup>(1)</sup> avec la direction radiale  $\overrightarrow{PO}$ , dirigée vers O. Cet angle positif est alors compté à gauche de la direction radiale par un observateur placé en P qui serait tourné *vers* O.

De même tout point intérieur à  $\mathcal{C}$  est accessible par un arc simple régulièrement tourné à gauche par rapport à la direction radiale  $\overrightarrow{OP}$ .

4° Tout point radialement accessible <sup>(2)</sup> est transformé en un point radialement accessible par  $T_\varepsilon^{-1}$ .

5°  $T_\varepsilon$  laisse invariant l'ensemble des points accessibles de l'intérieur, dont la transformation est douée d'un certain coefficient <sup>(3)</sup> de rotation  $\tau_i$  tandis que l'ensemble des points accessibles de l'extérieur est invariant avec un coefficient de rotation  $\tau_e$ .

On peut choisir  $T_\varepsilon$  de sorte que  $\tau_e$  et  $\tau_i$  soient de signes différents.

6° Il n'existe sur  $\mathcal{C}$  aucun point accessible à la fois de l'intérieur et de l'extérieur.

Cette dernière propriété est une conséquence immédiate de la propriété précédente 5°.

Le but de ce mémoire est de donner un exemple d'une courbe jouissant d'un certain nombre de propriétés analogues. Ceci est d'autant plus utile que M. Birkhoff pour définir la transformation  $T_\varepsilon$  utilise effectivement un anneau d'instabilité de la dynamique.

Or il a bien prouvé l'existence de tels anneaux dans un cas particulier, mais sans déterminer les courbes frontières que *l'on doit supposer connues* pour définir  $T_\varepsilon$ . Il est donc intéressant de pouvoir donner un exemple, qui, d'ailleurs est peut-être profondément différent des courbes  $\mathcal{C}$ , mais qui rend en quelque sorte intuitive la possibilité d'existence de propriétés aussi étranges que celles appartenant aux courbes  $\mathcal{C}$ , en particulier 5°.

<sup>(1)</sup> Cet angle est même uniformément  $> d > 0$  pour tout l'arc simple, sauf peut-être à son extrémité.

<sup>(2)</sup> Accessible de l'origine O par un *rayon* OP suivant la terminologie de M. Birkhoff.

<sup>(3)</sup> H. POINCARÉ, *Journal de Math.*, 1885, p. 228 et G. D. BIRKHOFF, *loc. cit.*

## I. — Construction de la courbe.

Nous allons donc construire une courbe douée des propriétés suivantes :

1° *Propriété d'être enroulée à gauche par rapport à l'intérieur et par rapport à l'extérieur.*

2° *Invariance par une transformation topologique qui avance en des sens opposés les points accessibles de l'intérieur et les points accessibles de l'extérieur.* Nous obtiendrons cette courbe  $\mathcal{C}$  comme le résidu d'un anneau auquel nous enlèverons une suite infinie de régions partielles unies à la région intérieure, et une suite infinie de régions partielles unies à la région extérieure.

Soit un anneau borné par deux cercles concentriques  $C_1$  et  $C_2$  ( $C_1$  intérieur à  $C_2$ ).

1° LA TRANSFORMATION DES BORDS DE L'ANNEAU. — Je rappellerai d'abord la notion du coefficient de rotation telle qu'elle a été étendue par M. Birkhoff (*loc. cit.*).

Soit un cercle sur lequel chaque point est défini par une coordonnée angulaire  $\theta$ , une transformation topologique du cercle en lui-même sera définie par la relation

$$\theta_1 = f(\theta)$$

$f$  continue, périodique de période  $2\pi$  en  $\theta$ .

En appelant  $a_k$  et  $b_k$  le maximum et le minimum de  $\theta_k - \theta$  pour

$$\theta_k = f_k(\theta),$$

on a

$$b_k < \theta_k - \theta < a_k$$

et, comme  $|a_k - b_k| < 2\pi$ ,

$$\lim \frac{\theta_k - \theta}{2\pi k} = \tau,$$

$\tau$  sera appelé le coefficient de rotation de la transformation du cercle. Cette définition est due à Poincaré.

Si l'on considère maintenant une courbe fermée, son intérieur peut être représenté d'après les résultats de M. Carathéodory (1) sur l'inté-

---

(1) *Math. Annalen*, Bd. 73, p. 325.

rieur d'un cercle par une représentation conforme telle que, à chaque point du cercle corresponde un point ou un bout premier de la courbe. Ainsi à une transformation topologique  $T$  de la courbe correspond une transformation topologique  $t: \theta_1 = f(\theta)$  du cercle douée d'un certain coefficient de rotation  $\tau_i$  qui sera appelé le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'intérieur. On définit de même le coefficient de rotation  $\tau_e$  de la courbe par rapport à l'extérieur en représentant conformément l'extérieur de la courbe sur un cercle. De plus M. Birkhoff a montré que lorsqu'un point radialement accessible reste toujours radialement accessible par itération de  $T$ , le coefficient de rotation de  $T$  sur  $\mathcal{C}$  peut être défini directement pour la suite des images de ce point et l'on a

$$\lim \frac{\theta_n - \theta}{2\pi n} = \tau_i.$$

Ainsi nous commencerons par définir sur les bords de l'anneau un certain ensemble de points radialement accessibles qui appartiendront tous plus tard à la courbe, qui restera invariant par  $T$ ; par conséquent le coefficient de rotation défini sur le bord intérieur de l'anneau sera le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'intérieur et le coefficient de rotation défini sur le bord extérieur de l'anneau sera le coefficient de rotation de la courbe par rapport à l'extérieur.

Nous pouvons définir sur  $C_1$  (de longueur  $2\pi$ , par exemple), une transformation topologique  $t_1$ , douée d'un coefficient de rotation arbitraire  $\tau_1$  telle que, un ensemble parfait  $P$ , de mesure  $b$ , de  $C_1$ , reste invariant et que, étant donné un intervalle quelconque  $I$  contigu à  $P$ , tout autre intervalle contigu à  $P$  soit le transformé de  $I$  par une puissance convenable, positive ou négative, de  $t_1$ .

Soit  $\Gamma$  un cercle de longueur  $a = 2\pi - b$  sur lequel nous définissons une transformation  $t: \theta_1 = \theta + \tau_1 a$ ,  $\tau_1$  incommensurable.

Nous choisissons d'autre part une suite de longueurs

$$\dots, |i_{-4}|, |i_{-2}|, |i_0|, |i_2|, |i_4|, \dots,$$

telle que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |i_{2k}| = b.$$

Soit un point  $A_0$  sur  $C_1$ , nous le choisissons comme origine de l'in-

tervalle  $i_0(A_0B_0)$  de longueur  $|i_0|$  et nous faisons correspondre à  $A_0B_0$  de  $C_1$ , un point  $a_0$  de  $\Gamma$ .

Nous pouvons maintenant établir une correspondance continue de  $C_1$  à  $\Gamma$  telle que, à tout point de  $C_1$  corresponde un point de  $\Gamma$  et à un point de  $\Gamma$  corresponde un point ou un intervalle de  $C_1$ . A tout point  $p$  de  $\Gamma$ , qui est donné par  $\theta = a_0 + k\tau_1 a$ , correspond sur  $C_1$  l'intervalle  $i_{-2k}$ .

Soit un point  $p$  de  $\Gamma$ , point qui n'est pas donné par  $\theta_1 = \theta + k\tau_1 a$  ( $k$  entier). A  $p$  correspond un point  $P$  de  $C_1$  tel que

$$A_0P = a_0p + \sum_{-\infty}^{+\infty} i_{2k_j},$$

les  $k_j$  sont choisis de façon à prendre toutes les valeurs satisfaisant à

$$la < -k_j\tau_1 a < a_0p + la,$$

$l$  étant un entier quelconque.

Soit  $t$  la transformation de  $\Gamma$ ,  $\theta_1 = \theta + \tau_1$  et  $T$  la transformation de  $\Gamma$  en  $C_1$ , on définit

$$t_1 = TtT^{-1}$$

pour tous les points où  $T$  est définie, c'est-à-dire pour les points  $P$  de l'espèce ci-dessus. Mais il est facile de prolonger  $t_1$  sur les intervalles correspondant aux points de  $\Gamma$ ;  $\theta_1 = \theta \pm k\tau_1 a$ ,  $k$  entier quelconque; en effet, il est d'abord évident que  $t_1$  fera comprendre  $i_{2k_j-2}$  à  $i_{2k_j}$ , pour définir complètement  $t_1$ , il suffit de faire correspondre les extrémités  $A_{2k_j-2}$  et  $A_{2k_j}$ ,  $B_{2k_j-2}$  et  $B_{2k_j}$  et les points intermédiaires se correspondront de façon que

$$\frac{A_{2k_j-2}P_{2k_j-2}}{A_{2k_j}P_{2k_j}} = \frac{\text{long } i_{2k_j-2}}{\text{long } i_{2k_j}},$$

$t_1$  est ainsi une transformation topologique de  $C_1$ , en lui-même jouissant des propriétés indiquées; en effet l'ordre des points est le même sur  $\Gamma$  et sur  $C_1$ , donc le coefficient de rotation sur  $C_1$ , est encore  $\tau_1$ , et il existe un ensemble parfait invariant dont tous les contigus sont les transformés de l'un quelconque d'entre eux par les puissances de  $t_1$ .

Nous définissons sur  $C_2$  une transformation analogue à l'aide du coefficient de rotation  $\tau_2$  et de la suite d'intervalles  $\dots, i_{-3}, i_{-1}$ ,

$i_1, i_3, \dots$  tels que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |i_{2k+1}| = d.$$

L'ensemble parfait de  $C_2$  qui reste invariant est de mesure  $c = 2\pi - d$ .

Nous choisissons pour  $\tau_1$ , et  $\tau_2$  des nombres irrationnels, racines d'équations du second degré à coefficients rationnels, donc développables en fractions continues périodiques et satisfaisant de plus aux inégalités

$$|\tau_2| + |\tau_1| > 2\pi, \quad |\tau_2 - \tau_1| < 2\pi.$$

2° CONSTRUCTION DES RÉGIONS PARTIELLES. — Dans ce qui suit nous supposons l'anneau développé suivant le rectangle  $(0, 0; 0, 1; 2\pi, 1; 2\pi; 0)$  du plan des coordonnées  $r, \theta$ , dont les côtés droit et gauche sont considérés comme identiques. La grande planche montre les premières régions construites (1).

$C_1$  devient la droite  $y = 1$  et  $C_2$  la droite  $y = 0$ , tandis que le domaine intérieur I est donné par  $y > 1$  et le domaine extérieur E par  $y < 0$ .

a. Nous prolongeons la région intérieure I, par une région  $r_0$  construite sur  $i_0$ ;  $r_0$  se compose principalement d'une bande de largeur  $\frac{1}{7}$  (ou en général  $\frac{1}{2\alpha + 1}$ ) située au milieu du rectangle ABCD (fig. 1).

Cette bande est unie à  $i_0$  par un rectangle de base  $i_0$ , et s'arrête à une droite issue de  $i_0$  qui fait un certain angle  $\alpha$  avec la verticale  $Oy$ .

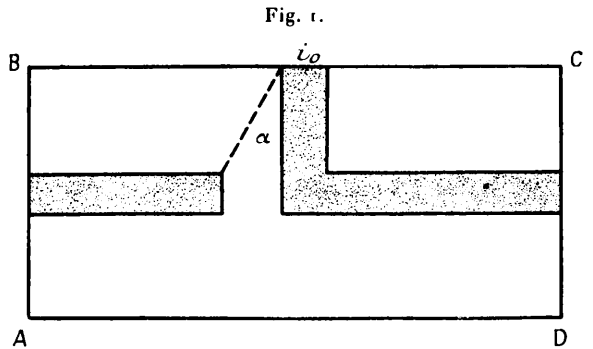
La frontière de  $r_0$  est bien *enroulée vers la gauche* puisque tout point intérieur est accessible par une courbe tournée à gauche (d'un angle  $> 0$  mais non  $> d > 0$ ).

b. Nous prolongeons maintenant E par une région  $r_1$  construite sur  $i_1$ ;  $r_1$  se compose principalement de deux bandes de largeur  $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}$

---

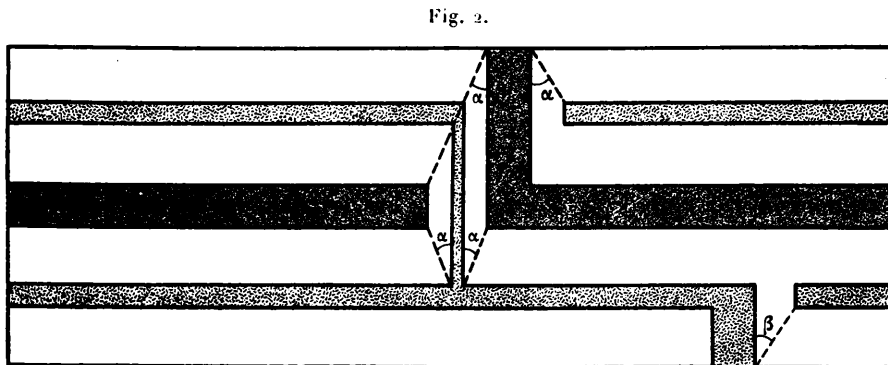
(1) Il faut noter que les proportions ne sont pas, en général, conservées dans les figures du texte. Sur la grande planche, on a donné (pour plus de clarté) aux angles  $\alpha$  et  $\beta$ , une valeur bien supérieure à celle qu'ils doivent avoir en réalité, pour satisfaire à la condition (A) (voir 4° et 5°).

situées au milieu des bandes  $0, \frac{3}{7}; \frac{4}{7}, 1$ . La première s'arrête d'un côté à un rectangle de base  $i_1$ , de l'autre, à une ligne droite issue de  $i_1$  faisant un angle  $\beta$  avec la verticale. La seconde est limitée par les deux droites issues de  $i_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec la verticale. Ces



deux parties, l'une qui entoure  $C_2$ , l'autre qui entoure  $C_1$ , sont unies par un rectangle qui passe entre l'extrémité et le début de  $r_0$  et occupe le  $\frac{1}{7}$  de l'espace qui reste là (*fig. 11*),  $r_1$  est encore tourné à gauche comme on le voit facilement.

Nous appellerons les lignes considérées ci-dessus issues de  $i_0, i_1$  et les lignes analogues, *des diagonales*.



Soient par exemple,  $AI, B\alpha, E\delta, \dots$  dans la figure 2.  
D'une diagonale à l'autre les  $r_n$  sont en ligne droite.



b. Nous prolongeons aussi E à travers  $i_{-1}$  par un rectangle  $r_{-1}$  de base  $i_{-1}$  de hauteur  $\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$ .

c. Nous prolongeons I à travers  $i_{+2}$  par  $r_{+2}$ ,  $r_{+2}$  se compose :

1° D'une bande entourant  $C_1$ , limitée au rectangle de base  $i_{+2}$  et aux diagonales issues de  $i_0, i_{+2}$ .

2° D'une bande entourant  $C_2$  et limitée aux diagonales issues de  $i_{+1}, i_{-1}$ .

Le reste de  $r_{+2}$  entoure  $r_0$  et  $r_{-1}$ .

On voit que la partie de  $r_{+2}$  qui entoure  $C_2$  se détache de la partie de  $r_{+2}$  qui entoure  $r_0$  et ceci entre les extrémités de  $r_{+1}$ . Ceci sera vrai pour tout  $r_n$  puisque celui-ci sera précédé par  $r_{n-1}$  et  $r_{n-2}$ .

c.  $r_{-2}$  est un rectangle de base  $i_{-2}$  de hauteur  $\frac{4}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^3$ ; puis nous prolongerons de même E par  $r_{+3}$  et  $r_{-3}$  à travers les intervalles  $i_{+3}$  et  $i_{-3}$ , I par  $r_{+4}$  et  $r_{-4}$  etc.

3° LES RÉGIONS SITUÉES ENTRE LES DIAGONALES. — Pour bien saisir la formation des  $r_n$ , nous procéderons de la façon suivante :

Nous construirons dans l'anneau bordé par  $C_1$  et  $C_2$  un anneau médian  $\alpha_0$  de largeur  $\frac{1}{7}$ ; cet anneau a pour complémentaire deux anneaux, l'un bordé par  $C_1$ , l'autre par  $C_2$  : construire  $r_0$ , revient à couper le premier de ces anneaux par une région issue de  $i_0$  donc de  $C_1$  et allant à  $\alpha_0$  ce qui le change en une région simplement connexe puis à couper  $\alpha_0$  de  $\beta_0$  à  $\alpha_0$  par une région n'appartenant plus à la région intérieure, on voit ainsi aisément que ce qui reste de l'anneau après que l'on a enlevé  $r_0$  est encore un anneau de largeur  $\frac{3}{7}$  et prolongé par une région simplement connexe à travers  $\beta_0 \alpha_0$ .

Pour construire  $r_1$  nous construisons dans cette région restante  $\rho_0$  une région  $\alpha_1$  en occupant le  $\frac{1}{7}$ , ce sera un anneau prolongé à travers  $\beta_0 \alpha_0$  par une région simplement connexe et son complémentaire par rapport à  $\rho_0$  est formé de deux anneaux de largeur  $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ . Pour

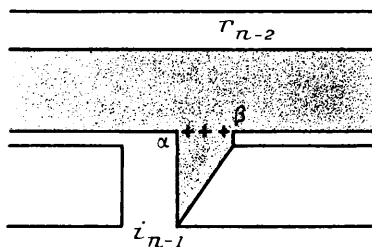
construire  $r$ , nous coupons celui de ces anneaux qui est bordé par  $C_2$  par une région allant de  $i_1$  (de  $C_2$ ) à  $\alpha_1$ , ce qui le transforme en une région simplement connexe, puis nous coupons  $\alpha_1$  de  $H_1$  à  $A_1$  par une région qui unit cette région simplement connexe à l'anneau bordé par  $C_1$ . La région qui reste est donc encore un anneau de largeur  $\left(\frac{3}{7}\right)^3$  prolongé par une région simplement connexe à travers  $H_1 A_1$ , un anneau médian  $\alpha_2$  aura encore deux anneaux complémentaires qui s'unissent par la transformation de  $\alpha_2$  en  $r_2$  etc.

On voit sans peine que  $r_n$  a pour frontière deux courbes parallèles qui ne peuvent bifurquer qu'à l'unique endroit où se rattache la région simplement connexe considérée ci-dessus c'est-à-dire en  $H_{n-1} A_{n-1}$  si  $n$  est pair,  $\beta_{n-1} \alpha_{n-1}$  si  $n$  est impair.

Appelons région  $\mathcal{R}_n$  une région bordée par les  $i_{-n}, \dots, i_n$ , les diagonales issues de ces intervalles et limitées à  $r_n$  et les bords supérieur et inférieur de  $r_n$ , situés entre les points extrémités de ces diagonales; d'après ce qui a été dit ci-dessus les  $r_{n+k}$  ont pour frontières des courbes (même des lignes brisées) parallèles à l'intérieur de  $\mathcal{R}_n$ , il n'y a dans  $\mathcal{R}_n$  aucun point de bifurcation des  $r_{n+k}$  pour  $k > 1$ .

Il nous sera donc possible de construire toutes les parties de  $r_{n+k}$

Fig. 3.



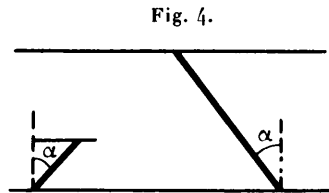
( $k > 1$ ) à l'intérieur de  $\mathcal{R}_n$  alors que les  $r_{-n}, \dots, r_n$  sont construits, c'est-à-dire que tous les  $r_{n+k}$  peuvent être supposés construits dans  $\mathcal{R}_n$ , car un  $r_{n+k}$  ne se compose que de bandes de largeur  $\frac{1}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+k}$  sauf naturellement dans les parties verticales où cette région devient de largeur  $\frac{1}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^{n+k} \text{ tang } \alpha$  (ou  $\text{tang } \beta$  suivant le cas).

Cependant pour que ceci soit exact nous avons supposé que les diagonales ne se coupaient pas, en effet dans ce dernier cas il se pourrait qu'un  $r_{n+k}$  se termine dans  $\mathcal{H}_n$  ou même qu'une région issue de  $i_{n+k}$  rencontre une diagonale avant de rencontrer  $\mathcal{A}_{n+k}$ , ce qui ne nous permettrait pas plus tard de montrer que les  $r_n$  sont tournés à gauche; il s'agira donc de choisir les angles  $\alpha$  et  $\beta$  de façon que les extrémités des  $r_{n+k}$  soient assurées d'être extérieures à  $\mathcal{H}$ . Moyennant quoi il vient :

*On peut construire une région  $r_n$  si l'on a construit  $r_0, \dots, r_{n-1}, r_{-n+1}$  et si l'on connaît les angles  $\alpha$  et  $\beta$ .*

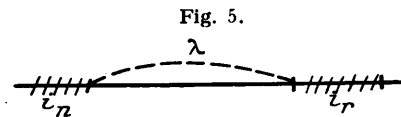
Mais la construction est-elle toujours possible, quel que soit  $n$ ?

4° CHOIX DES ANGLES  $\alpha$  ET  $\beta$  POSSIBILITÉ DE LA CONSTRUCTION. — D'après les remarques précédentes la construction sera possible, si les droites que nous appellerons toujours maintenant des diagonales ne se coupent pas (*fig. 4*).



D'après ce que nous avons vu, les diagonales issues des intervalles  $i_n$  et  $i_{-n}$  sont prolongées jusqu'à  $r_n$  ou  $r_{n-1}$ ; comme nous le verrons ultérieurement il est même nécessaire de les prolonger jusqu'à  $r_{n-1}$ .

La condition suffisante pour que le problème soit possible est donc



que les diagonales soit prolongées sans se rencontrer jusqu'à  $r_{n-1}$ . Pour cela, il suffit que leurs projections sur  $C_1$ , par exemple, n'empiètent pas. Soit  $\lambda$  la distance de  $i_n$  à l'un quelconque  $i_r$  des intervalles déjà construits (*fig. 5*)

$$i_{-n+2}, i_{-n+1}, \dots, i_{n-1}, i_{n-2}.$$

Les diagonales issues de  $i_n$  sont prolongées jusqu'à  $r_{n-1}$ , c'est-à-dire sur une hauteur  $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-3}$ . Il y a donc lieu de ne tenir compte que des projections des parties des diagonales déjà construites situées au dessous de  $r_{n-1}$ ,

La projection d'une partie ainsi déterminée sera égale à  $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-3} \text{ tang } \alpha$ .

Par conséquent la condition ci-dessus revient à exprimer que

$$\lambda > 2 \left(\frac{3}{7}\right)^{n-3} \text{ tang } \alpha$$

ou

$$(A) \quad \text{tang } \alpha < \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3}\right)^{n-3} \text{ lim. inf. des } \lambda.$$

5° CALCUL DES DISTANCES DES INTERVALLES. — Une limite inférieure des  $\lambda$  est donnée par la distance  $\mu$  des points correspondants sur  $\Gamma$  aux intervalles considérés sur  $C_1$  (voir 1°).

La distance  $\mu_{ij}$  de deux points de  $\Gamma$ ,  $a_i$ ,  $a_j$  transformés l'un de l'autre par  $\nu^m$  sera donnée par

$$\frac{\mu_{ij}}{a} = m\tau_1 - p = m \left[ \tau_1 - \frac{p}{m} \right] \quad (p \text{ entier})$$

naturellement  $\mu_{ij}$  est pris en valeur absolue.

Si  $\tau_1$  est incommensurable, on peut le développer en fraction continue illimitée, alors  $\frac{p}{m}$  est une fraction ordinaire qui ne peut approcher  $\tau_1$  plus qu'une réduite  $\frac{P_i}{Q_i}$  que si  $m > Q_i$ ; on a donc

$$(1) \quad \left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| \leq \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| \quad \text{pour } m \leq Q_i;$$

donc, si l'on prend  $Q_i \geq m$ , l'inégalité (1) sera certainement satisfaite.

D'après la théorie des fractions continues on a

$$\left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| > \frac{1}{2Q_i(Q_{i+1})}.$$

Or  $Q_{n+1} = a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$ .

Prenons pour  $\tau_1$  une irrationnelle du second degré, les  $a_n$  ont un

maximum, soit  $A$  ce maximum augmenté de 1. On a

$$Q_{n+1} < A Q_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Q_{n+1}} > \frac{1}{A Q_n};$$

donc

$$(2) \quad \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| > \left| \tau_1 - \frac{P_i}{Q_i} \right| > \frac{1}{2 A Q_i^2}$$

pour tout  $Q_i \geq m$ .

Or comme  $\frac{Q_{i+1}}{Q_i} < A$ , on a certainement un  $Q_i$  satisfaisant à

$$m \leq Q_i \leq A m \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A m} \leq \frac{1}{Q_i} \leq \frac{1}{m},$$

on peut donc remplacer dans l'inégalité (2)  $\frac{1}{Q_i}$  par  $\frac{1}{m A}$ ; d'où

$$m \left| \tau_1 - \frac{p}{m} \right| > \frac{1}{2 A^2 m}.$$

Il nous suffit de prendre la limite inférieure de  $\frac{1}{m}$  donc la limite supérieure de  $m$  pour que ceci reste vrai pour tout  $m$ .

Ainsi nous prenons pour  $m, n$  pour les intervalles  $i_{-n}, i_{-n+2}, \dots, i_n$ , puisque  $i_{-n} = i_1^n(i_n)$ .

On a donc

$$\boxed{\mu_n \geq \frac{a}{2 A^3 n}};$$

d'où la condition (A) peut s'écrire

$$\text{tang } \alpha < \frac{1}{4} \left( \frac{7}{3} \right)^{n-3} \frac{a}{A^3 n}$$

ou

$$\text{tang } \alpha < \frac{a}{4 A^3} \left( \frac{3}{7} \right)^3 \cdot \left( \frac{7}{3} \right)^n \frac{1}{n},$$

ce qui sera certainement satisfait si l'on choisit uniformément

$$\boxed{\text{tang } \alpha < \frac{a}{4 A^3} \left( \frac{3}{7} \right)^3}.$$

On a une condition analogue pour  $\text{tang } \beta$ .

6° DÉFINITION DE LA COURBE C. — Considérons l'ensemble E des

frontières des  $r_n$  ( $n$  pair et variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ),  $E'$  l'ensemble des points limités de  $E$ .

$E + E' = \bar{E}$  un ensemble fermé.

Appelons  $R_i$  le domaine intérieur  $I$  augmenté des domaines ouverts  $r_n$  ( $n$  pair),  $R_i$  est évidemment un domaine.

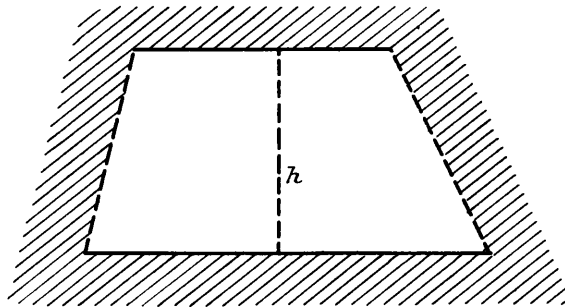
*Tout point de  $\bar{E}$  est point limite de  $R_i$ .*

C'est évident par définition mais si l'on appelle  $R_e$  le domaine extérieur  $E$  augmenté des domaines ouverts  $r_n$  ( $n$  impair), on voit que

*Tout point de  $\bar{E}$  est point limite de  $R_e$ .*

En effet soit  $\bar{K}$  l'ensemble des points limites de  $r_n$  ( $n$  impair) un point

Fig. 6.



quelconque de  $E$  est évidemment point limite de  $R_e$  puisque point limite de la suite des  $r_n$  ( $n$  impair), donc

$$\bar{K} \supset E$$

et par conséquent puisque  $\bar{K}$  est fermé

$$\bar{K} \supset \bar{E}$$

C. Q. F. D.

Mais on voit par un raisonnement analogue que les frontières des  $r_n$  ( $n$  impair) et leurs points limites appartiennent aussi à  $\bar{E}$ .

*L'ensemble  $\bar{E}$  est de mesure superficielle nulle.*

En effet, considérons une partie de l'anneau qui ne touche pas les

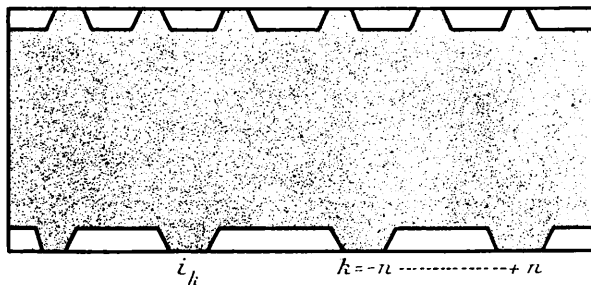
bords, on peut la décomposer en un certain nombre de trapèzes situés entre deux régions  $r_k r_l (l > k \text{ par exemple})$  et deux diagonales. Soit la hauteur  $h$  de ce trapèze (*fig. 6*), l'intervalle enlevé de  $h$  à l'opération suivante sera  $h \cdot \frac{1}{7}$ , à l'étape suivante  $h \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7}$ ; d'où la longueur de  $h$  appartenant à  $R_i + R_e$

$$h \left[ \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} + \left( \frac{6}{7} \right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \dots \right] = h;$$

donc  $\bar{E}$  est sur  $h$  de mesure linéaire nulle. Il en résulte que  $\bar{E}$  est de mesure superficielle nulle dans le trapèze.

Avec plus de précision, si l'on considère la région  $r_n$  comme dessinée, on détermine la région  $\mathcal{H}_n$  intérieure à l'anneau et intérieure aux bords inférieur et supérieur de  $r_n$  et aux diagonales issues des intervalles  $i_{-n}, \dots, i_{+n}$  (*fig. 7*).

Fig. 7.



D'après ce qui précède l'ensemble  $\bar{E}$  est entièrement déterminé dans  $\mathcal{H}_n$  et de mesure nulle dans  $\mathcal{H}_n$ .

De même  $\bar{E}$  sera déterminé dans  $\mathcal{H}_{n+1}$  et donc de mesure nulle dans  $\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n$ .

On a

$$\bar{E} = \bar{E} \times \mathcal{H}_n + \bar{E} \times (\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n) + \bar{E} \times (\mathcal{H}_{n+2} - \mathcal{H}_{n+1}) + \dots + C_1^1 + C_2^2,$$

$C_1^1$  et  $C_2^2$  sont les ensembles parfaits invariants de  $C_1$  et  $C_2$ .

Chaque ensemble du second membre est de mesure superficielle nulle, donc  $\bar{E}$  étant la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

Donc

$\bar{E}$  est un ensemble fermé de mesure nulle séparant le plan en deux régions, chacun de ses points est point limite des deux régions,  $\bar{E}$  est donc une courbe fermée au sens de Schönflies, soit  $\mathcal{C}$ .

7°  $\mathcal{C}$  EST ROULÉE A GAUCHE. — Par définition tout point intérieur à  $\mathcal{C}$  ou bien appartient à I ou bien appartient à une  $r_n$  ( $n$  pair).

Il est évident que tout point de I est accessible par une courbe tournée à gauche, en est-il de même de tout point de  $r_n$  ?

LEMME. — Si la frontière de  $r_n$  est une courbe non tournée à droite, tout point de  $r_n$  est accessible par une courbe non tournée à droite.

Soit P un point intérieur à  $r_n$  menons le rayon OP (fig. 8), soit Q

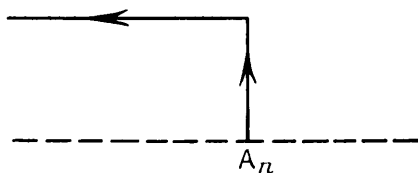
Fig. 8.



le premier point de rencontre de OP avec la frontière de  $r_n$ , on peut évidemment tracer un arc de Jordan parallèle à la frontière de  $r_n$  à l'intérieur de  $r_n$  aboutissant en R puis joindre RP, le long de RP l'angle est de  $180^\circ$  avec le rayon, OP, donc P est bien accessible par une courbe non tournée à droite.

Il suffit donc de démontrer que la frontière de  $r_n$  est non tournée à

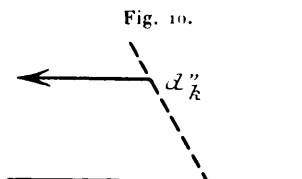
Fig. 9.



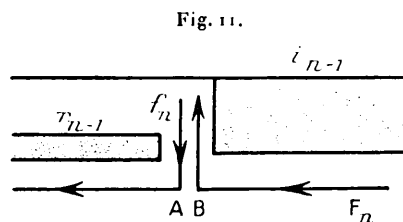
droite. Soit  $F_n$  cette frontière. Partons de l'extrémité droite de  $i_n$ ,  $A_n$ ,  $F_n$  fait avec le rayon, d'abord un angle nul, puis un angle



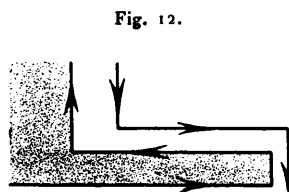
de  $90^\circ$  (*fig. 9*). A sa première rencontre avec une diagonale  $d'_k$ ,  $F_n$  devient parallèle à la frontière,  $F_k$ , de  $r_k$ , donc est non tournée à droite si celle-ci est non tournée à droite. A partir de  $d'_k$ ,  $F_n$  sort de  $\rho_k$  en faisant un angle de  $90^\circ$  avec le rayon (*fig. 10*), par conséquent reste non tournée à droite jusqu'à la prochaine diagonale, etc.



Il reste à considérer le prolongement  $f_n$  qui se détache de  $F_n$ , on voit que l'angle à l'arrivée en A, avant lui, et après lui, en B, est le même (*fig. 11*). En partant de A on suit  $C_i$  en *sens inverse* entre deux



diagonales,  $f_n$  est encore tournée à gauche de  $90^\circ$  par rapport à  $C_i$ , puis  $f_n$  tourne autour de  $r_{n-k}$  ( $k$  impair) en sens inverse; par conséquent si  $F_{n-k}$  est tournée à gauche par rapport à l'intérieur de  $C_i$ ,  $f_n$  sera

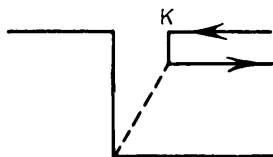


tournée à gauche par rapport à l'intérieur de  $C_{3-i}$ . L'angle étant  $\theta_1 = (\theta + 180^\circ) - 180 = \theta$  en tout point puisque cette égalité est vérifiée en A ( $\theta_1 = \theta = 0$ ) (*fig. 11*, voir *fig. 12*).

A partir de  $d''_{n-1}$ ,  $f_n$  revient parallèle à elle-même mais son angle avec le rayon est augmenté de  $180^\circ$ ; donc si la première partie de  $f_n$  est tournée à gauche la seconde partie est, *a fortiori*, tournée à gauche.

Quand  $F_n$  arrive en  $d'_n$  l'angle de  $90^\circ$  devient  $270^\circ$  et reste supérieur de  $180^\circ$  à ce qu'il était au point correspondant; donc, si jusqu'en K,  $F_n$  n'est pas tournée à droite, elle ne le sera pas après, *a fortiori*, (fig. 13).

Fig. 13.



Il vient : Si  $F_{-n+1}, \dots, F_{n-1}$  n'est pas tournée à droite,  $F_n$  ne le sera pas.

Comme il est évident que  $F_0$  n'est pas tournée à droite,  $F_n$  est non tournée à droite quel que soit  $n$ ; par conséquent tout point de  $r_n$  est accessible par une courbe non tournée à droite quel que soit  $n$ .

## II. — Définition de la transformation.

La seconde partie de ce travail est consacrée à la définition d'une transformation topologique de l'anneau en lui-même, transformation qui laisse la courbe  $\mathcal{C}$  invariante, tout en avançant en des sens opposés ses points accessibles de l'intérieur et ses points accessibles de l'extérieur.

Nous établirons d'abord que toute région  $r_n$  doit se changer en une région  $r_{n+h}$  et déterminerons  $h = -2$  en choisissant la transformation des bords de l'anneau (I).

Nous considérerons ensuite la région  $R_n$  qui sera l'anneau diminué des domaines ouverts  $r_{-n}, \dots, r_n$ ; d'après I, à  $R_n$  doit correspondre une région  $S_n$  (l'anneau diminué des domaines ouverts  $r_{-n-2}, \dots, r_{n-2}$ ). Nous appellerons  $G_n$  une transformation topologique de l'anneau en lui-même changeant  $R_n$  en  $S_n$ ; cela est toujours possible l'ordre des points étant le même sur les deux frontières et pour simplifier nous

admettrons que

$$G_i \left[ \sum_{-n}^{+n} r_k \right] = G_n \left[ \sum_{-n}^{+n} r_k \right] \quad (\text{pour } i \geq n).$$

Si nous pouvons construire une suite  $G_i$  telle que, aussi bien la suite  $G_n$  que la suite  $G_n^{-1}$  soit uniformément convergente, la transformation limite est bicontinue donc topologique et change la courbe  $\mathcal{C}$  en elle-même puisque changeant l'ensemble des  $r_n$  en l'ensemble des  $r_n$ .

Or, d'après ce qui précède, une transformation  $G_{n+1}$  est une transformation  $G_n$ , choisie de façon à transformer  $R_{n+1}$  en  $S_{n+1}$  et  $R_{n+1}$  n'est autre que  $R_n$  diminué des domaines ouverts  $r_{n+1}$  et  $r_{-n-1}$  comme  $S_{n+1}$  est la région  $S_n$  diminuée des domaines ouverts  $r_{n-1}$  et  $r_{-n-3}$ ; mais dans la première partie du Mémoire nous avons vu que  $r_{n+1}$  est bien déterminé quand on a construit tous les  $r_k$  ( $|k| \leq n$ ) et les diagonales qui aboutissent sur ces  $r_k$ ;  $f_{n+1}$  (la frontière de  $r_{n+1}$ ) débute sur  $i_{n+1}$  qui est bien déterminé, se compose de lignes droites allant d'une diagonale à l'autre et doit s'arrêter aux deux diagonales  $J'\Omega$  et  $\alpha'\gamma'(r_{n+1})$  <sup>(1)</sup> et  $AO$  et  $\varphi H$ , diagonales qui aboutissent sur  $r_{n+1}$  et viennent de  $i_n, i_{n+1}, r_n$  et qui suffiront plus tard, avec les diagonales déjà tracées à définir  $r_{n+2}$ , ainsi la connaissance de la région  $R_n$  et de ses transversales situées sur les diagonales qui sont tracées suffit à déterminer  $r_{n+1}$ , et de même, la construction de  $r_{n-1}$  est déterminée par la connaissance de  $S_n$  et de ses transversales.

Nous n'oublierons pas cependant qu'il faut encore tracer  $r_{-n-1}$  et  $r_{-n-3}$  ainsi que les diagonales issues d'eux aboutissant sur  $r_{n+1}$  et  $r_{n+5}$  et sur  $r_{n-1}$  et  $r_{-n+3}$  (voir le tracé de ces diagonales à « Détail des transformations »).

Puisque ces transversales jouent un rôle aussi fondamental il est naturel de chercher à choisir des transformations  $G_n$  qui transforment  $R_n$  et ses transversales en  $S_n$  et ses transversales. Ceci est possible (II) car les transversales de  $R_n$  et  $S_n$  sont « semblablement disposées » à condition que celles de  $R_1$  et  $S_1$  le soient; en effet les correspondantes des transversales de  $R_1$  ne sont pas « marquées » dans  $S_1$ , on peut les choisir arbitrairement, à condition qu'elles ne rencontrent aucune dia-

---

(1) Dans le cas où  $n$  est impair, pour  $n$  pair on a  $\delta'D$  et  $A'J'$ .

gonale de  $S_n - S_1$ . Je les ai choisies des lignes droites quand cela est possible, ou des lignes brisées (III).

Nous avons tout avantage à procéder ainsi, car (IV) alors on peut choisir les  $G_n$  de façon que, quand une  $G_n$  transforme une transversale  $d$  de  $R_n$  en une transversale  $\delta$  de  $S_n$  (et que  $G_n^{-1}$  transforme  $\delta$  en  $d$ ),  $d$  soit transformée en  $\delta$  (et réciproquement) par toute  $G_i$  pour  $i \geq n$  (et réciproquement  $G_i^{-1}(\delta) = d$  pour  $i \leq n$ ) et cette permanence de  $\delta$ , correspondante de  $d$ , suffit à assurer la convergence uniforme des  $G_i$  sur  $d$  (des  $G_i^{-1}$  sur  $\delta$ ).

Dans une quatrième partie, nous verrons comment choisir les fonctions de transformation (et leurs inverses) *entre deux diagonales* pour assurer la convergence à l'intérieur de cette région.

Nous verrons qu'il est même possible de choisir  $G_n$  dans toute région interdiagonalaire de façon que  $G_{n+p} = G_n$  ( $p > 0$  quelconque), ceci uniformément dans une région  $\mathcal{R}_n$  dont la distance de tout point de la frontière aux bords de l'anneau est inférieure à  $\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}$ .

Nous appellerons  $T_n$  la transformation  $G_n$  ainsi choisie qui est une transformation quadratique dans chaque trapèze tracé.

Il est alors facile de démontrer la convergence uniforme des  $T_n$  (et  $T_n^{-1}$ ) dans tout l'anneau et la transformation limite obtenue  $\mathfrak{C}$  satisfait bien aux conditions requises.

1° Considérons un arc de la courbe  $\mathcal{C}$ ; cet arc  $A$  peut, soit appartenir à la frontière d'un  $r_n$  unique, soit contenir des points  $a$  et  $b$  de deux  $r_n$  différents; dans le premier cas,  $A'$  est une ligne brisée, continu de condensation de  $\mathcal{C}$ ; en effet,  $\overline{\mathcal{C} - A} \supset A^{(1)}$ ; dans le second cas,  $A$  contient tous les points accessibles de  $a$  à  $b$ ; il contient donc les frontières d'une infinité de  $r_n$ , et comme  $A$  est fermé, il est identique à la courbe  $\mathcal{C}$  elle-même, et il n'y a pas d'autre genre d'arcs  $A$  possibles. Par une transformation topologique de la courbe en elle-même, deux arcs du premier genre doivent se correspondre et deux arcs du second genre doivent aussi se correspondre.

---

(<sup>1</sup>) Voir pour la notion de continu de condensation et ces notations, les *Fundamenta Mathematicæ*, en particulier, KURATOWSKI, *Fundamenta Mathematicæ*, t. I, III et X, et JANISZEWSKI, *Thèse*, Paris, 1912.

Soit  $F_n$  la frontière d'un  $r_n$ , d'après ce qui précède,

$$T(F_n) \subset F_{n+h} \quad (h \text{ entier});$$

mais alors

$$T^{-1}(F_{n+h}) \supset F_n.$$

Or, en appliquant à  $T^{-1}$  la remarque précédente, on a aussi

$$T^{-1}(F_{n+h}) \subset F_n;$$

donc

$$T^{-1}(F_{n+h}) = F_n \quad \text{ou} \quad T(F_n) = F_{n+h};$$

il vient :

*Toute transformation topologique de la courbe  $\mathcal{C}$  en elle-même, conservant les bords de l'anneau, transforme une région  $r_n$  en une région  $r_{n+h}$ .*

Il nous faut maintenant choisir  $h$ , car *a priori*, nous ne pouvons décider s'il doit être le même pour tout  $r_n$ .

Considérons le cercle  $\Gamma$  sur lequel nous définissons l'ensemble des points  $P_n$  qui se déduisent d'un point de  $\Gamma$ ,  $P_0$  par rotation du nombre  $\gamma$  incommensurable avec  $2\pi$ , c'est-à-dire  $P_0 P_n = n\gamma \bmod 2\pi$ .

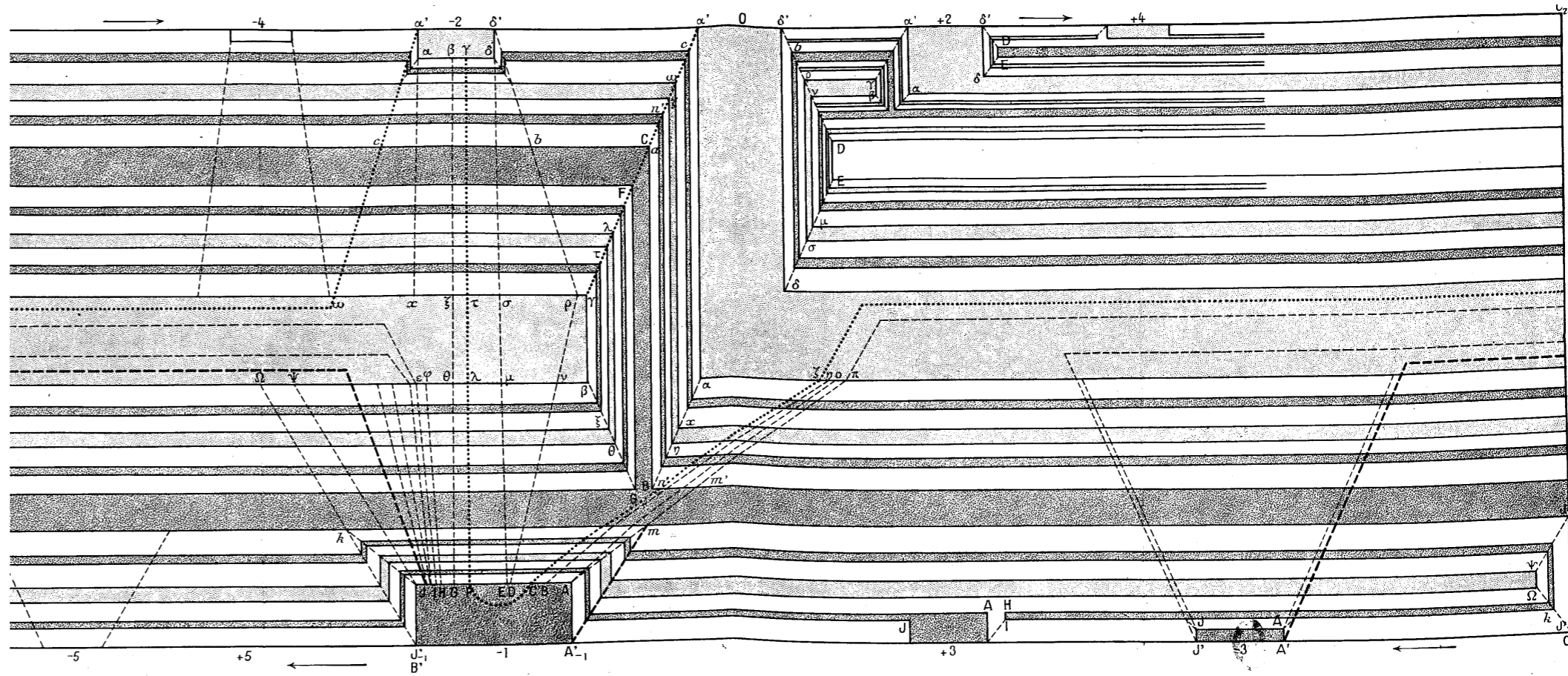
Si une transformation topologique  $t$  de  $\Gamma$  en lui-même transforme l'ensemble des  $P_n$  en l'ensemble des  $P_n$ , chaque point  $P_n$  devient un point  $P_{n+h}$  de façon que l'ensemble des points  $P_n$  soit identique à l'ensemble des points  $P_{n+h}$  et que l'ordre des points  $P_{n+h}$  soit le même que celui des points  $P_n$  sur  $\Gamma$ .

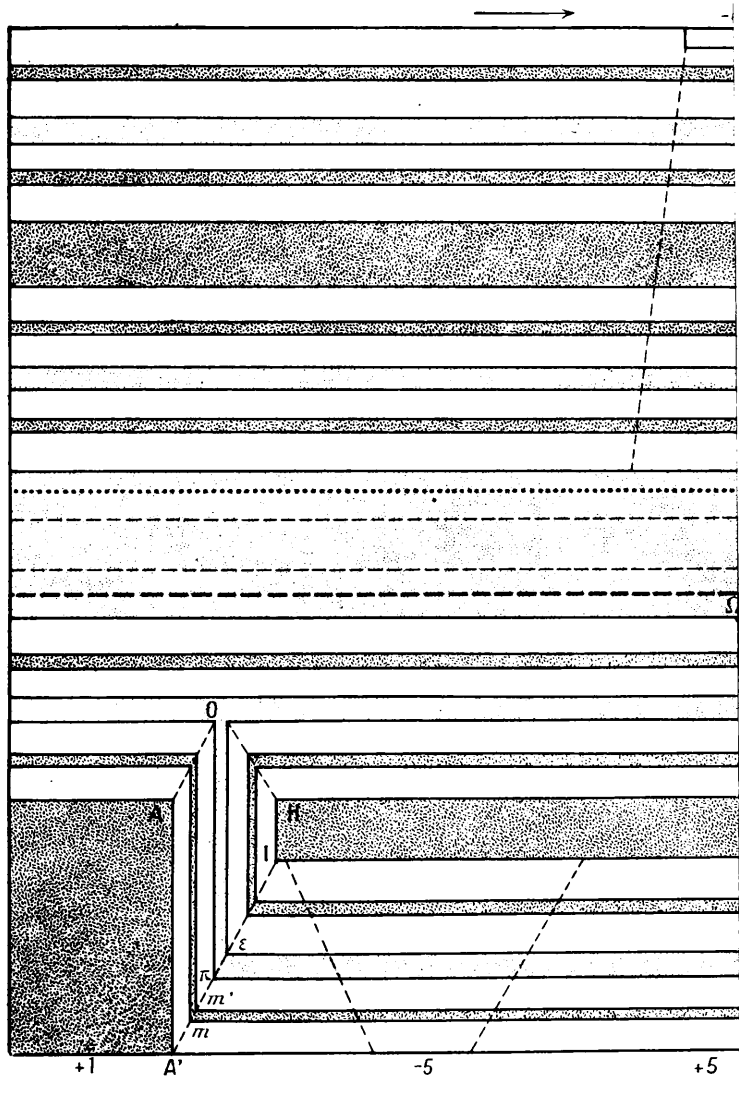
LEMME. — *Si pour  $n \geq N$ ,  $h$  est borné,  $h$  est constant pour  $n \geq N$ .*

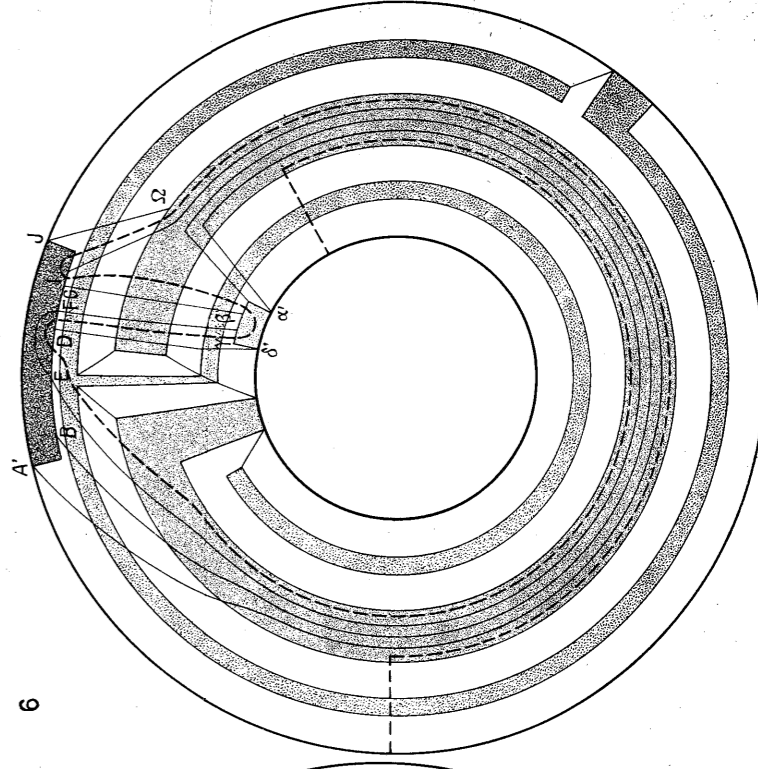
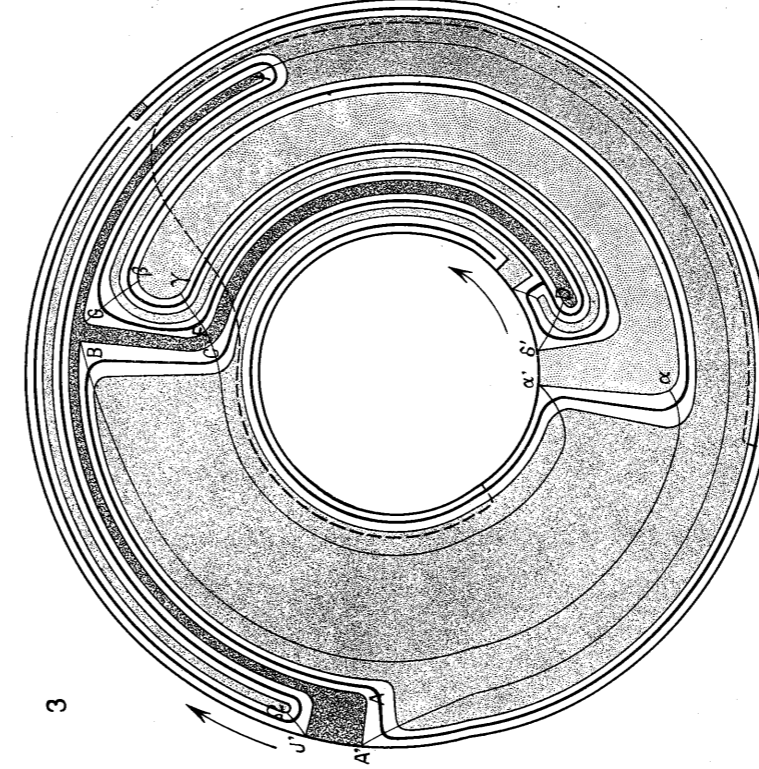
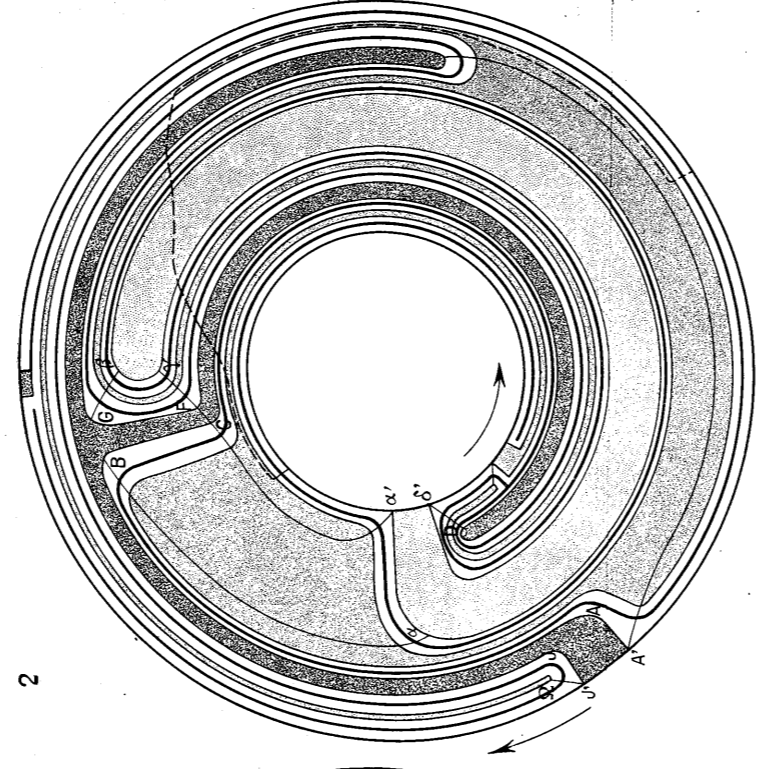
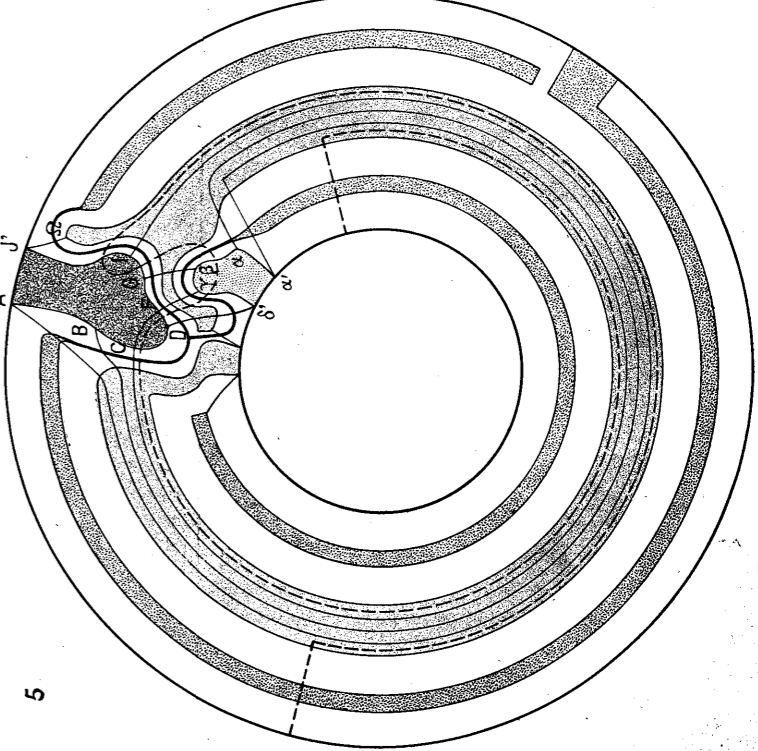
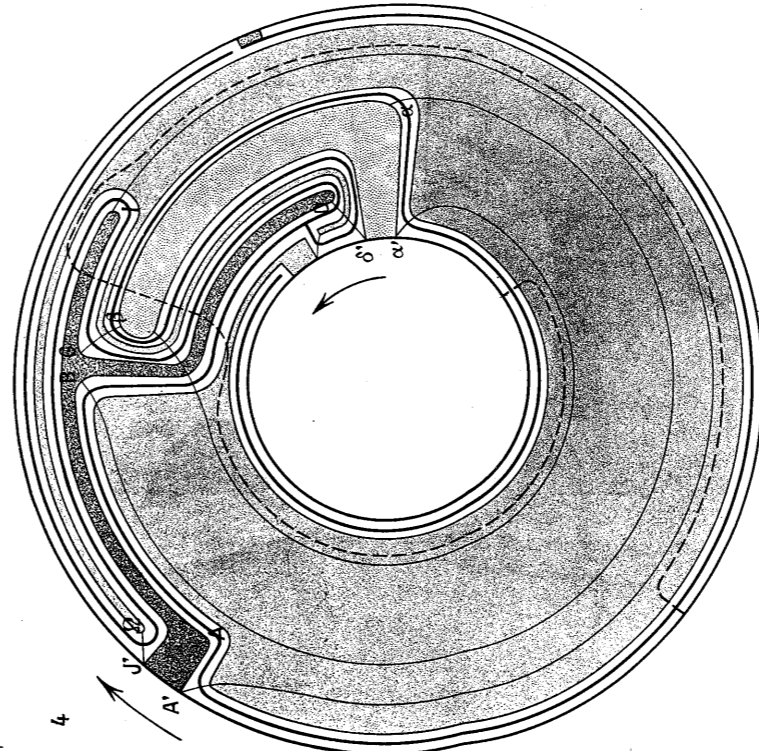
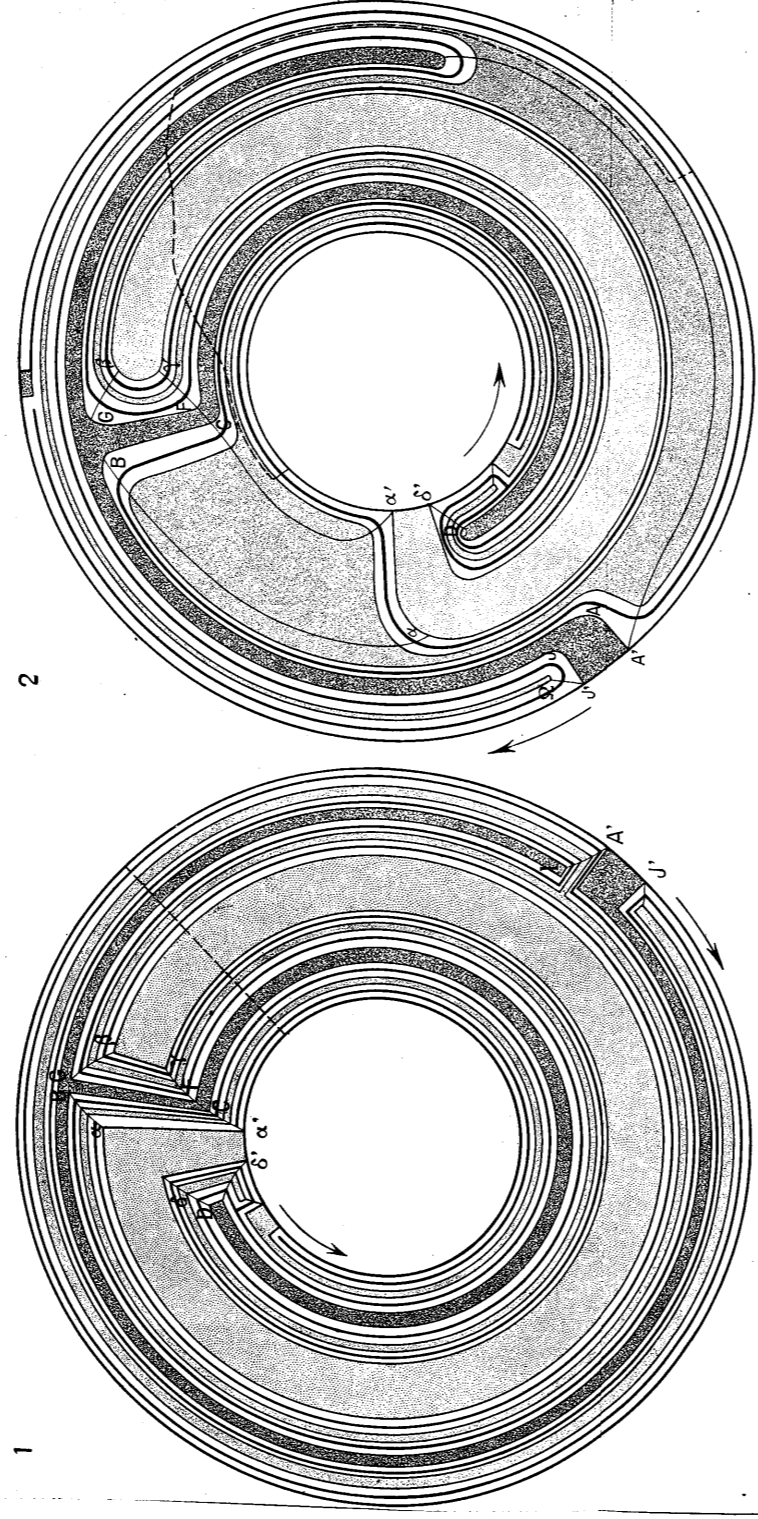
En effet, l'ensemble des points  $P_n$  ( $n \geq N$ ) est partout dense sur  $\Gamma$ ; d'autre part, appelons  $G_h$  l'ensemble des points  $P_n$  qui deviennent des points  $P_{n+h}$ , l'ensemble  $G_h$  subit une rotation d'ensemble de  $h\gamma$  <sup>(1)</sup>. Il n'y a qu'un nombre borné d'ensembles  $G_h$  par hypothèse; considérons un ensemble déterminé  $G_i$ , ou bien il est partout dense, ou bien  $\overline{G}_i$  a un dernier point  $\rho$  à droite. Dans le premier cas, tout point d'un  $\overline{G}_h$  ( $h \neq i$ ) est point d'accumulation de  $G_i$ ; dans le second cas,  $Q$  est alors au moins point d'accumulation d'un  $G_k$  puisqu'il n'y a

---

(1) A  $2m\pi$  près bien entendu.











qu'un nombre déterminé de  $G_k$ , et il appartient à  $G_i$  ou il en est point d'accumulation; donc, en tout cas, on a deux points de  $G_i$  et de  $G_k$  qui sont aussi voisins que l'on veut. La transformation  $t$  est continue sur un ensemble fermé, donc uniformément continue.

Par  $t$ ,  $G_i$  subit une rotation  $i\gamma$  et  $G_k$  une rotation  $k\gamma$  si nous appelons  $d$  la distance de deux points de  $G_i$  et  $G_k$ , leur distance devient (en valeur absolue)

$$(i - k)\gamma \bmod 2\pi \pm d;$$

or, nous pouvons choisir deux points de  $G_i$  et  $G_k$  dont la distance est inférieure à  $\eta$  en choisissant pour  $\eta$  un nombre positif inférieur à la fois à  $\frac{(i - k)\gamma \bmod 2\pi}{4}$ , et à  $\delta$  qui est un nombre positif tel que deux points dont la distance est inférieure à  $\delta$ , se transforment en deux points, dont la distance est inférieure à  $\frac{(i - k)\gamma \bmod 2\pi}{4}$ , il en résulte que la distance de ces points puisqu'ils appartiennent à  $G_i$  et  $G_k$  doit devenir égale à  $(i - k)\gamma \bmod 2\pi \pm \eta$ , c'est-à-dire supérieure à  $\frac{(i - k)\gamma}{2} \bmod 2\pi$ , ce qui est impossible par hypothèse.

**THÉORÈME.** — Si pour  $n \geq N$ ,  $h$  est borné,  $h$  est constant pour tout  $n$ . En effet, d'après le lemme,  $h$  est constant pour  $n \geq N$ . Soit un point  $P_i (n < N)$ ; il est point d'accumulation de points  $P_n (n > N)$ , son transformé est le point d'accumulation des transformés des points  $P_n (n > N)$ , c'est-à-dire le point d'accumulation des points  $P_{n+h}$  où  $h$  est constant; le transformé de  $P_i$  est donc le point  $P_{i+h}$ , la longueur  $P_i P_{n+h}$  tendant vers  $h\gamma \bmod 2\pi$  quand  $P_n$  tend vers  $P_i$ . Donc,  $h$  est le même pour tous les points  $P_n$ .

Considérons une région  $r_n$  telle que  $T(r_n) = r_{n+h}$ , et en particulier le point  $T\Omega_n$  de  $r_{n+h}$ . Soit  $\rho$  la longueur de la distance  $T\Omega_n P$  de  $T\Omega_n$  au point  $P$  de la frontière de  $r_{n+h}$  qui en est le plus proche, en considérant exclusivement la partie de la frontière de  $r_{n+h}$  qui est séparée de  $T\Omega_n$  par  $\Omega_{n+h}$ .  $\sigma$  sera la longueur de la distance  $T^{-1}\Omega_{n+h}$  au point  $Q$  de la frontière de  $r_n$  qui en est le plus proche en considérant exclusivement la partie de la frontière de  $r_n$  qui est séparée de  $T\Omega_{n+h}$  par  $\Omega_n$ .

On a

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{n+h} \frac{1}{7} \tan \alpha \leq \rho \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{n+h} \frac{1}{7} \frac{1}{\cos \alpha}$$

et

$$\left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{7} \operatorname{tang} \alpha \leq \sigma \leq \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{7} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Supposons que  $T\Omega_n$  précède  $\Omega_{n+h}$  <sup>(1)</sup>, alors  $\Omega_n$  précède  $T^{-1}\Omega_{n+h}$ .

La transversale  $T\Omega_n P$  doit donc par  $T^{-1}$  se transformer en une transversale de  $r_n$  allant de  $\Omega_n$  à un point qui *suit*  $T^{-1}\Omega_{n+h}$ , donc  $T^{-1}[T\Omega_n, P]$  doit rencontrer la transversale  $T^{-1}\Omega_{n+h} Q$ ; ainsi, son *diamètre* ne peut être inférieur à la plus courte distance de  $\Omega_n$  à cette transversale, une limite inférieure de cette distance est évidemment donnée <sup>(2)</sup> par

$$\operatorname{dist}_{(\text{le long de } r_n)} \Omega_n, T^{-1}\Omega_{n+h} - T^{-1}\Omega_{n+h}, Q$$

ou

$$\operatorname{dist}_{(\text{le long de } r_n)} \Omega_n, T^{-1}\Omega_{n+h} - \sigma;$$

appelons  $m$  le diamètre du plus petit arc  $\Omega_n T^{-1}\Omega_{n+h}$  appartenant à  $r_n$  ( $l$  sera le diamètre du plus petit arc  $\Omega_{n+h} T\Omega_n$  appartenant à  $r_{n+h}$ ), il vient

$$\operatorname{diam} T^{-1}[T\Omega_n, P] > m - \sigma.$$

On a de même

$$\operatorname{diam} T[T^{-1}\Omega_{n+h}, Q] > l - \rho;$$

il vient alors :

**THÉORÈME.** — *A tout nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ , on peut faire correspondre un entier  $N$  tel que*

$$\operatorname{dist}_{(r_{n+h})} T\Omega_n, \Omega_{n+h} < \varepsilon, \quad \operatorname{dist}_{(r_n)} T^{-1}\Omega_{n+h}, \Omega_n < \varepsilon$$

(pour  $n, n+h > N$ ).

En effet, s'il en était autrement, il serait possible de trouver une suite d'entiers  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , telle que

$$\operatorname{diam} T^{-1}[T\Omega_{n_i} P] \rightarrow M > 0.$$

<sup>(1)</sup> Le raisonnement serait en tous points semblable si l'on faisait l'hypothèse contraire.

<sup>(2)</sup> Dans un triangle  $T^{-1}\Omega_{n+h}, \Omega_n, I$ , en appelant  $I$  un point commun à  $(\Omega_n, T^{-1}P)$  et à  $T^{-1}\Omega_{n+h} Q$ ,  $\Omega_n I > \Omega_n T^{-1}\Omega_{n+h} - T^{-1}\Omega_{n+h} I$  (voir pour les distances relatives MAZURKIEWICZ, *Fund. Math.*, t. I). Cette distance avait été définie par M. Denjoy (*C. R. Acad. Sc.*, 1911), j'appelle  $\operatorname{dist}_{r_n}(P, Q)$  la distance de  $P$  à  $Q$  relativement à  $r_n$ .

Mais puisque  $T^{-1}$  est une transformation continue, on peut faire correspondre à  $\frac{M}{3}$  un entier positif  $\eta$  tel que  $\text{dist RS} < \eta$  entraîne  $\text{dist } T^{-1}RT^{-1}S < \frac{M}{3}$ .

Or, il est possible de choisir un  $n_i$ , tel que pour  $n_k > n_i$  on ait simultanément

$$\text{diam } T^{-1}[T\Omega_{n_k}P] > \frac{2M}{3}$$

et

$$\max \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k+n_k}, \quad \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k} < \min \eta, \quad \frac{M}{6}$$

ce qui est toujours possible, la suite  $n_k$  et  $n_k + h_k$  croissant indéfiniment. Il existe alors des points J et K de  $T\Omega_n, P$  dont la distance des transformés par  $T^{-1}$  est égale à

$$\text{diam } T^{-1}[T\Omega_{n_k}, P] > \frac{2M}{3} - \sigma$$

ou puisque  $\sigma < \frac{M}{6}$ ; ou  $-\sigma > -\frac{M}{6}$

$$\text{dist}(T^{-1}J, T^{-1}K) > \frac{2M}{3} - \frac{M}{6} > \frac{M}{2};$$

mais d'autre part, comme J et K sont sur la transversale de longueur  $\rho$

$$\text{dist}(J, K) < \frac{1}{7 \cos \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{n_k+h_k} < \eta,$$

ce qui doit entraîner

$$\text{dist}(T^{-1}J, T^{-1}K) < \frac{M}{3}.$$

Il y a donc contradiction et le théorème est établi.

Les suites  $T\Omega_n$  et  $\Omega_{n+h}$  ont donc même limite, comme les suites  $T\Omega_{n+h}$  et  $\Omega_n$ .

Dans la suite, nous écrirons toujours non pas  $h$  mais  $2h$  puisque les différences d'indices des  $i_n$  sur un même bord sont paires.

Considérons l'égalité suivante entre les angles décrits par les différents points de  $r_n$  ( $n$  pair,  $r_n$  est donc issu de  $C_1$ ) :  $\alpha_n \Omega_n$  et  $\alpha_{n+2h} \Omega_{n+2h}$

sont comptés le long de  $r_n$  et  $r_{n+2h}$

$$\alpha_n \alpha_{n+2h} \equiv \alpha_n \Omega_n + \Omega_n \Omega_{n+2h} + \Omega_{n+2h} \alpha_{n+2h},$$

$$(A) \quad \boxed{\alpha_n \alpha_{n+2h} - \Omega_n \Omega_{n+2h} = \alpha_n \Omega_n - \alpha_{n+2h} \Omega_{n+2h}}.$$

Si nous considérons le plan des coordonnées  $r, \theta$ , et si nous nous reportons à la définition du coefficient de rotation (1<sup>re</sup> Partie, 1<sup>o</sup>), nous savons que le maximum de  $\alpha_n \alpha_{n+2h}$  n'en peut dépasser le minimum de plus de  $2\pi$ , puisque l'ordre des points de  $C_1$  doit être conservé par T.

Soit A le point de  $C_2$  le plus près de  $\Omega_n$ , pour  $n > N$  et  $A \Omega_n < \eta$  on a

$$\text{dist}(\Omega_{n+2h}, TA) < \text{dist}(\Omega_{n+2h}, T\Omega_n) + \text{dist}(T\Omega_n, TA),$$

ou, comme  $n > N$  entraîne  $\text{dist}(\Omega_{n+2h}, T\Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  [égalité qui est encore vraie si l'on considère la différence angulaire  $\theta(\Omega_{n+2h}) - \theta(T\Omega_n)$ ] et que  $\text{dist}(A, \Omega_n) < \eta$  entraîne  $\text{dist}(TA, T\Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  pour un  $\eta$  convenablement choisi, il vient

$$\text{dist}(\Omega_{n+2h}, TA) < \varepsilon$$

ou encore

$$\theta(\Omega_n, \Omega_{n+2h}) = \theta(\Omega_n, A) + \theta(A, TA) + \theta(TA, \Omega_{n+2h}),$$

puisque nous avons évalué  $\Omega_{n+2h}$  dans  $r_n$ ; d'où

$$\theta(\Omega_n, \Omega_{n+2h}) \leq \eta + \theta(A, TA) + \varepsilon,$$

or  $\theta(A, TA)$  varie d'au plus  $2\pi$  pour la même raison que  $\alpha_n \alpha_{n+2h}$ ; donc  $\Omega_n \Omega_{n+2h}$  variera d'au plus  $2\pi + \delta(\varepsilon)$ ,  $\delta(\varepsilon)$  pouvant être choisi aussi petit que l'on veut.

Il en résulte que

$$\alpha_n \alpha_{n+2h} - \Omega_n \Omega_{n+2h}$$

ne peut varier de plus de  $4\pi + \delta$  pour  $n > N$ .

Considérons  $\alpha_{n+2} \Omega_{n+2} - \alpha_n \Omega_n$ ; par construction  $\alpha_{n+2} \Omega_{n+2}$  tourne de  $\alpha_{n+2} \alpha_n$ , puis de  $\alpha_n \Omega_n$ , puis de  $\Omega_n \Omega_{n+2}$ ;  $\Omega_n \Omega_{n+2}$  est avec une différence de

$$\left[ \left( \frac{3}{7} \right)^{n+1} - \left( \frac{3}{7} \right)^{n-1} \right] \pm k(n)$$

la rotation de  $J'_{n+1} J'_{n-1}$  il vient

$$2\pi(\tau_1 - \tau_2) - 4\pi - \varepsilon \leq \alpha_{n+2}\Omega_{n+2} - \alpha_n\Omega_n \leq 2\pi(\tau_1 - \tau_2) + 4\pi + \varepsilon ;$$

pour  $\alpha_{n+2h}\Omega_{n+2h} - \alpha_n\Omega_n$ , on aura

$$2\pi h(\tau_1 - \tau_2) - 4\pi - \varepsilon \leq \alpha_{n+2}\Omega_{n+2h} - \alpha_n\Omega_n \leq 2\pi h(\tau_1 - \tau_2) + 4\pi + \varepsilon \text{ (pour } n > N).$$

On peut choisir  $N$  assez grand pour que  $\varepsilon$  reste petit même pour  $h$  assez grand, c'est-à-dire qu'il y aura un  $N$  tel que  $\varepsilon < \pi$  même pour des valeurs de  $h$  telles que

$$h_1 - h_2 > \frac{(13\pi + \delta)}{2\pi(\tau_1 - \tau_2)}.$$

Il arrive alors, si l'on donne à  $h_1 - h_2$  d'assez grandes valeurs, que

$$2\pi h_1(\tau_1 - \tau_2) - 2\pi h_2(\tau_1 - \tau_2) - 8\pi \pm \varepsilon \quad \text{ou} \quad (h_1 - h_2) 2\pi(\tau_1 - \tau_2) - 9\pi$$

donnera la valeur minimum de la variation du second membre de l'égalité (A); or nous avons vu que le maximum de variation du premier membre était  $4\pi + \delta$ , donc

$$2\pi(\tau_1 - \tau_2)(h_1 - h_2) - 9\pi < 4\pi + \delta$$

ou

$$h_1 - h_2 < \frac{13\pi + \delta}{2\pi(\tau_1 - \tau_2)}.$$

Il y a donc contradiction et  $h_1 - h_2$  doit être borné, c'est-à-dire que si l'on désigne par  $h_0$  une valeur fixe de  $h$

$$|h - h_0| \leq \frac{13\pi + \delta}{\tau_1 - \tau_2}$$

et ainsi

$$h \text{ est borné pour } n \geq N.$$

*Du théorème précédemment démontré, il résulte que  $h$  est constant pour tout  $n$ .*

Donnons à  $h$  une valeur —  $H_1$  sur  $C_1$ , quelle valeur en résultera-t-il pour  $h$  le long de  $C_2$ ?

Soit un point  $J'_{n_0}$  et une suite de points  $\Omega_{n_k}$  tendant vers lui, la suite des transformés  $T(\Omega_{n_k})$  a même limite que la suite  $\Omega_{n_k - 2H_1}$  et celle-ci a nécessairement pour limite  $J'_{n_0 - 2H_1}$ , ainsi  $J'_{n_0}$  vient sur  $J'_{n_0 - 2H_1}$  et ceci en tournant vers la gauche de  $J'_{n_0}$  à  $J'_{n_0 - 2}$  puis à  $J'_{n_0 - 4}$ , etc.

Il en résulte que puisque  $h$  est constant aussi le long de  $C_2$  il sera égal à  $-H_1$  et que le coefficient de rotation sera  $H_1\tau_2$  ( $\tau_2$  est ici compté dans le même sens que  $\tau_1$ , ce que nous ne conserverons plus dans la suite).

*Dans la suite nous choisirons  $H_1 = 1$  et nous prendrons  $T(\Omega_n)$  en  $\Omega_{n-2}$ .*

2° La région  $R_n$  sera, par définition, l'anneau diminué des domaines ouverts  $r_n, \dots, r_{-n}$ ; par toute transformation du type cherché (I) $R_n$  doit se transformer en l'anneau diminué des domaines ouverts  $r_{n-2}, \dots, r_{-n-2}$ , nous appellerons une telle région  $S_n$  et une transformation de l'anneau en lui-même transformant  $R_n$  en  $S_n$  sera une transformation  $G_n$ . Il s'agit, comme nous l'avons vu dans l'introduction, de choisir une suite de transformations  $G_n$  telle que la suite  $G_n$  et la suite  $G_n^{-1}$  convergent uniformément et par suite d'étudier le passage d'une  $G_n$  à une  $G_{n+1}$ . Pour simplifier, nous considérerons exclusivement dans la suite, des transformations telle qu'une transformation

$G_{n+1}$  soit égale à la précédente,  $G_n$  sur  $\sum_{-n}^{+n} r_k$ , il suffira donc d'étudier la formation de  $G_{n+1}$  dans  $R_n$ , c'est-à-dire dans le domaine où se dessinent deux régions :  $r_{-n-1}$  et  $r_{n+1}$ . Réciproquement  $G_{n+1}^{-1}$  n'aura plus à être définie qu'à l'intérieur de  $S_n$ , région à laquelle appartiennent  $r_{-n-3}$  et  $r_{n-1}$ .

$G_n$  sera choisie sur  $C_1$  et  $C_2$  égale à  $t_1$  et  $t_2$  définies au numéro précédent, elle change donc tout  $i_n$  en  $i_{n-2}$ ; par conséquent sur  $C_1$  et  $C_2$ ,  $G_n$  est choisie de façon définitive, la transformation entre les intervalles ouverts  $i_n$  et  $i_{n-2}$  peut être choisie arbitrairement, par exemple ils peuvent se correspondre par segments proportionnels. *A priori*, il semble qu'on puisse laisser arbitraire la correspondance entre l'intérieur de  $r_n$  et  $r_{n-2}$ , cela est vrai, sans doute, tant que  $n$  n'est pas trop grand, mais n'est pas possible indéfiniment. Il vient :

*Il est toujours possible pour un  $n$  déterminé de choisir une transformation  $G_n$  égale à  $t_1$  et  $t_2$  sur  $C_1$  et  $C_2$  et changeant  $r_k$  en  $r_{k-2}$  pour  $k = -n, \dots, n$ .*

Ceci est évident, car l'ordre des extrémités des entailles  $r_{k-2}$  sur  $C_1$

et  $C_2$  se déduit de l'ordre des extrémités des entailles  $r_k$  par les transformations  $t_1$  et  $t_2$ .

Nous avons à considérer maintenant dans le domaine  $R_n$  non plus seulement sa frontière, mais toutes ses transversales situées sur des diagonales. Il y a quatre de ces transversales qui jouent un rôle particulier et qui, d'autre part, sont situées sur des diagonales qui s'arrêtent à  $r_n$ ; ce sont (en supposant  $n$  impair)  $A'_n I_n$ ,  $\delta'_{n-1} D_n$ ,  $\beta_{n-1} G_n$  et  $B_n \alpha_{n-1}$ .

$A'_n I_n$  unit l'intervalle  $i_n$  à l'extrémité de  $r_n$ ,  $\delta'_{n-1} D_n$  unit l'intervalle  $i_{n-1}$  à l'autre extrémité (prolongement) de  $r_n$  et les transversales  $\beta_{n-1} G_n$  et  $\alpha_{n-1} B_n$  vont de  $r_{n-1}$  à la naissance de ce prolongement.

Si nous considérons  $r_{n-2}$  dans le domaine  $S_n$  nous avons encore à considérer à part quatre transversales  $A'_{n-2} I_{n-2}$ ,  $\delta'_{n-3} D_{n-2}$ ,  $\beta_{n-3} G_{n-2}$  et  $\alpha_{n-3} B_{n-2}$ , ces transversales jouent pour  $r_{n-2}$  le même rôle que les transversales de même nom jouaient pour  $r_n$ , il est donc naturel en faisant correspondre les transversales des deux domaines de chercher à faire correspondre ces quatre transversales une à une.

Nous démontrerons d'abord un théorème préliminaire (1).

Considérons deux domaines  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de même connexion dont chaque frontière  $\mu$  ( $\mu'$ ) est une courbe de Jordan; chaque  $\mu$ , ( $\mu'$ ) est douée d'un numéro d'ordre, choisi de façon que les frontières extérieures des deux domaines aient le même numéro d'ordre. Supposons tracées dans ces deux domaines  $m$  transversales  $\lambda$  qui seront encore douées de numéros d'ordre, de façon que sur deux courbes frontières  $\mu_i$  et  $\mu'_i$  les extrémités des transversales soient douées de mêmes numéros et rangées dans le même ordre. Je dirai que *ces domaines sont à transversales semblablement disposées*.

Si deux domaines sont à transversales semblablement disposées, il est toujours possible de faire correspondre topologiquement les frontières et les transversales, mais à quelles conditions cette correspondance peut-elle s'étendre à l'intérieur des deux domaines ?

**THÉORÈME.** — *L'extension de la correspondance des frontières et des*

---

(1) J'insiste sur des détails évidents, car ils ont une grande importance dans la suite.



*transversales à l'intérieur du domaine est toujours possible pour deux domaines simplement connexes.*

Nous allons d'abord montrer que si le problème est possible pour deux domaines simplement connexes contenant  $1, \dots, (n-1)$  transversales, il est possible pour deux domaines simplement connexes possédant  $n$  transversales. En effet considérons une transversale  $\lambda_i$  de  $\mathcal{O}$  et la transversale  $\lambda'_i$  de  $\mathcal{O}'$  qui a le même numéro que  $\lambda_i$ ;  $\lambda_i$  divise  $\mathcal{O}$  en deux domaines  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  dont chacun contient au plus  $(n-1)$  transversales,  $\lambda'_i$  divisera de même  $\mathcal{O}'$  en deux domaines  $\mathcal{O}'_1$  et  $\mathcal{O}'_2$ . *Les domaines  $\mathcal{O}'_1$  et  $\mathcal{O}'_2$  sont à transversales semblablement disposées.* En effet, soient A, B les extrémités de  $\lambda_i$  sur la frontière de  $\mathcal{O}$ ,  $\mu_\alpha$  et  $\mu_\beta$  les arcs de la frontière de  $\mathcal{O}$  déterminés par  $\lambda_i$ . La correspondance choisie sur les frontières et les transversales fait correspondre à  $\lambda_i$ ,  $\lambda'_i$ , à A, A' et à B, B', puis à  $\mu_\alpha$  un arc  $\mu'_\alpha$  et à  $\mu_\beta$  un arc  $\mu'_\beta$ , de façon que les extrémités des transversales situées sur  $\mu'_x$  correspondent aux extrémités des transversales sur  $\mu_x$ ; il en résulte qu'aux extrémités d'une transversale de  $\mathcal{O}_1$  (frontière :  $\lambda_i, \mu_\alpha$ ) correspondent les extrémités d'une transversale situées sur  $\mu'_\alpha$  donc d'une transversale située dans  $\mathcal{O}'_1$ . Ainsi à toute transversale de  $\mathcal{O}_1$  correspond une transversale de  $\mathcal{O}'_1$  et ses extrémités ont même rang sur les frontières de  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}'_1$ , ainsi les transversales  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}'_1$  sont semblablement disposées.

Par conséquent, si l'on peut faire correspondre topologiquement deux domaines simplement connexes dont les  $(1, \dots, n-1)$  transversales sont semblablement disposées, on peut faire correspondre topologiquement  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}'_1$  d'une part,  $\mathcal{O}_2$  et  $\mathcal{O}'_2$  de l'autre, ainsi l'on a bien une correspondance topologique entre  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  tout entiers.

Il suffit donc maintenant de démontrer que la correspondance peut s'étendre à l'intérieur de  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  quand  $n=1$ .

Mais pour  $n=1$ , les deux domaines  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  ne contiennent aucune autre transversale et T est définie sur leurs frontières il est alors évident que T peut être définie de façon à faire correspondre  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  (voir KEREKJARTÓ, *Topologie*, p. 72).

Le théorème est donc démontré.

Il reste à chercher une condition suffisante assurant l'extension de T quand le domaine n'est plus simplement connexe.

Il existe alors des transversales qui ne coupent pas  $\mathcal{O}$  : nous choisissons parmi les transversales un certain nombre  $\lambda_1 \dots \lambda_i$ , tel que leur ensemble ne coupe pas  $\mathcal{O}$  mais que néanmoins l'ensemble E des frontières et des  $\lambda_1 \dots \lambda_i$  soit connexe — alors le domaine limité par E est simplement connexe — E et E' sont à transversales semblablement disposées et l'on peut appliquer le théorème.

Je dis que l'on peut toujours transformer  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  en deux domaines simplement connexes en ajoutant à leurs frontières des transversales convenablement choisies si toute courbe de Jordan fermée intérieure à  $\mathcal{O}$  (ou à  $\mathcal{O}'$ ) et contenant à son intérieur une des frontières rencontre au moins l'une des transversales (condition A).

En effet, supposons cette condition réalisée, pour des domaines  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  contenant  $m$  transversales et bornés par  $k$  frontières, évidemment  $m \geq k - 1$  et soient  $\mathcal{F}$  la frontière extérieure,  $P^1$  une extrémité d'une transversale allant sur une autre frontière  $f_i$  qu'elle rencontre en  $Q^i$ , en tournant sur  $f_i$  dans le sens des aiguilles d'une montre, nous rencontrons une autre transversale n'allant ni à  $\mathcal{F}$  ni à  $f_i$ , soit à  $f_l$ , nous la suivons jusqu'à  $f_l$  et nous continuons jusqu'à ce que nous ayons épuisé ces  $k$  frontières — comme aucune de ces transversales n'a coupé le domaine et que chaque fois le domaine avait une frontière de moins — le domaine final est bien simplement connexe.

Mais est-on sûr de rejoindre toutes les frontières? en effet, il se peut que le long de  $f_q$  par exemple on revienne à  $Q_q$  sans rencontrer de transversales allant à des frontières non encore utilisées. Mais alors il est facile de revenir le long de  $Q_q P_p$  jusqu'à  $f_p$ , et, ou bien de suivre la première transversale satisfaisant aux conditions voulues, ou bien s'il n'y en a pas, de suivre la transversale  $Q_p P_o$ , etc. puisque l'on est sûr qu'il n'y a pas de point cherché sur l'arc de frontière  $Q_o P_o$ .

Il n'y a que deux hypothèses possibles : on revient à P sans être allé à toutes les frontières ou après les avoir toutes parcourues.

Dans le premier cas l'ensemble des transversales et des frontières parcourues forment un ensemble fermé E auquel on peut même ajouter toutes les transversales qui ont un point sur E. Les autres frontières et transversales forment un autre ensemble fermé F qui n'a aucun point commun avec le premier, soit M un composant de F. Il existe une courbe de Jordan intérieure à  $\mathcal{O}$  ayant M à son

intérieur et ne rencontrant ni E ni F, donc ne rencontrant aucune transversale ce qui est contraire à la condition A qui est ainsi prouvée suffisante pour permettre l'extension de T dans les domaines multiple-ment connexes  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ . En particulier si  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  sont doublement connexes l'existence d'une transversale unissant les deux frontières suffit.

**THÉORÈME.** — Si pour  $n = N$ ,  $R_n$  et  $S_n$  sont à transversales semblablement disposées, les  $4\delta_n$  particulières signalées plus haut, ayant même numéro, pour  $n > N$ ,  $R_n$  et  $S_n$  sont encore à transversales semblablement disposées à condition que  $f_{N+1}$  ne rencontre chacune des diagonales de  $R_N$ ,  $S_N$  qu'en deux points et que cette condition soit permanente.

Il suffit de le montrer pour  $n = N + 1$  et de montrer que les transversales de  $R_{N+1}$  se divisent en deux groupes de même que pour  $R_N$  de façon à assurer la permanence de cette condition.

Les transversales de  $R_N$  sont de deux sortes : celles qui vont d'une frontière à l'autre et celles qui ont leurs deux extrémités sur la même frontière. Comme  $r_N$  coupe toutes les diagonales, les transversales de  $R_N$  vont de  $r_N$  au reste des frontières : les  $l$  seront les transversales qui vont de  $r_N$  à l'autre frontière de  $R_N$  et les  $\lambda$  les transversales qui vont de  $r_N$  à la frontière dont il est issu.

Ces dernières ont leurs extrémités P sur  $r_N$  et sur le reste de la frontière, rangées en ordre inverse, la transversale  $\alpha_N \gamma_N$  (ou  $A'_N I_N$  si N est impair) ayant ses extrémités finissant l'ensemble P des deux côtés, ou si l'on préfère, on peut dire que les domaines limités par ces transversales sont emboîtés et tous contenus dans le domaine limité par  $\alpha_N \gamma_N$  ou  $(A'_N I_N)$ . Toutes les autres transversales vont de  $r_N$  à l'autre bord de  $R_N$ , elles sont alors nécessairement rangées dans le même ordre des deux côtés puisqu'elles ne se rencontrent pas.

Donc si les diagonales de  $R_N$  et  $S_N$  sont semblablement disposées, pour toute  $l_i$  de  $R_N$  il existe une transversale  $l'_i$  de  $S_N$  et réciproquement; l'ordre des  $l_i$  sur les frontières de  $R_N$  est le même que celui des  $l'_i$  sur les frontières de  $S_N$  et si toutes les  $\lambda_k$  sont entre  $l_p$  et  $l_q$  sur la frontière de  $R_N$ , les  $\lambda'_k$  seront sur la frontière de  $S_N$  entre  $l'_p$  et  $l'_q$ .

Nous supposons ainsi que les  $\delta'D$  (ou  $J'\Omega$ ) se correspondent dans les deux domaines (voir I).

*Je dis que  $R_{N+1}$  et  $S_{N+1}$  seront encore à diagonales semblablement disposées.*

En effet construisons  $r_{N+1}$ ,  $f_{N+1}$ , sa frontière, part de  $i_{N+1}$ , se coude à angle droit lorsqu'arrivée à  $\left(\frac{3}{7}\right)^{N+2}$  de  $r_N$ , en  $A_{N+1}$ , et à partir de ce point suit la frontière  $\varphi$  de  $R_N$  en s'en tenant toujours à la même distance.  $f_{N+1}$  coupe alors toutes les transversales issues de  $\varphi$  suivant l'ordre inverse de celui qu'elles ont sur  $\varphi$ , arrivée au domaine simplement connexe ne contenant aucune transversale et dont la frontière contient le point  $\alpha_N$  qui appartient donc à tous les domaines emboîtés considérés plus haut.  $f_{N+1}$  rencontre une transversale non encore construite  $\alpha'_N D_{N+1}$ , puis une autre  $\alpha_N E_{N+1}$ ,  $f_{N+1}$  continue ensuite à suivre  $\varphi$ , jusqu'au moment où elle se heurte à  $A_{N+1}$  elle doit alors tourner, rencontrer la diagonale  $A'_{N+1} I_{N+1}$  et suivre ensuite  $\psi$ , la frontière dont elle est issue, jusqu'au moment où elle arrivera à l'autre extrémité de  $i_{N+1}$ .

En résumant, les transversales issues de  $\varphi$  et les transversales issues de  $\psi$  qui formaient précédemment les  $l$  et les  $\lambda$  sont coupées par  $r_{N+1}$  et se disposent sur  $r_{N+1}$  de la façon suivante : soit  $l_a$  la première transversale rencontrée par  $f_{N+1}$ ,  $l_p$  la transversale limitant le domaine contenant les  $\lambda$ ,  $l_b$  la transversale limitant le domaine contenant  $i_{N+1}$ ,  $l_p = \alpha'_N \gamma_N$ ).

$f_{N+1}$  rencontre :

- $l_a \dots l_p$  suivant l'ordre inverse de  $\varphi$ ,
- $\lambda_1 \dots \lambda_m \rightarrow \alpha' D$  et  $\alpha E$  suivant l'ordre inverse de  $\varphi$ ,
- puis  $\lambda_m \dots \lambda_1$  .....
- $l_p \dots l_b$  suivant l'ordre inverse de  $\varphi$ , +  $A'_{N+1} I_{N+1}$ ,
- puis  $l_b \dots l_a$  suivant l'ordre inverse de  $\psi$ ,

les sens adoptés sur  $\varphi$  et  $\psi$  étant différents,  $\varphi$  sera  $C_1$  si  $N$  est pair,  $C_2$  si  $N$  est impair, et  $\psi$  sera  $C_2$  quand  $\varphi$  sera  $C_1$ , et réciproquement.

En faisant la même étude pour la construction de  $r_{N-1}$  dans  $S_N$  on voit :

$f_{N-1}$  rencontre :

- $l'_a \dots l'_p$  dans l'ordre inverse de  $\varphi'$ ,
- $\lambda'_1 \dots \lambda'_m \rightarrow \alpha'_{N-2} D_{N-1}$  et  $\alpha_{N-2} E_{N-1}$ ,
- $\lambda'_m \dots \lambda'_1$  dans l'ordre inverse de  $\varphi'$ ,
- $l'_p \dots l'_b$  ..... +  $A'_{N-1} I_{N-1}$ ,

*k trans.* :

$l'_b \dots l'_a$  dans l'ordre inverse de  $\psi'$ .

Or nous savons que l'ordre de  $l_a \dots l_p$  est sur  $\varphi$  le même que l'ordre  $l'_a \dots l'_p$  sur  $\varphi'$ , etc.

Les transversales qui vont d'un bord à l'autre de  $R_{N+1}$  sont d'abord les parties des  $l$  qui s'arrêtent à  $r_{N+1}$ , les deux parties des  $\lambda$  et  $\alpha'_{N-2}D_{N-1}$  et  $\alpha_{N-2}E_{N-1}$ , les autres parties des  $l$  qui vont de  $\psi$  à  $r_{N+1}$  restent sur le même bord de  $R_{N+1}$  et appartiennent toutes au domaine limité par  $A'_{N+1}I_{N+1}$ .

Si les transversales sont semblablement disposées pour  $R_N$  et  $S_N$  de façon que la correspondance choisie pour  $C_1$  et  $C_2$  soit  $t_1$  et  $t_2$ ; on voit que, puisqu'à  $i_{N+1}$  doit correspondre  $i_{N-1}$ , les transversales qui suivent  $l_a$  et  $l'_a$  ont nécessairement même numéro, ainsi  $r_{N+1}$  et  $r_{N-1}$  rencontrent les transversales de même numéro jusqu'en  $\lambda_m$  et  $\lambda'_m$  les deux transversales qui suivent, ont nécessairement même rang dans  $R_{N+1}$  et  $S_{N+1}$  (ce sont  $\delta'_N D_{N+1}$  et  $\delta_N E_{N+1}$  et celles analogues pour  $r_{N-1}$ ), puis des transversales  $\lambda_m$  et  $\lambda'_m$  jusqu'à  $l_b$  vont avoir même rang sur  $R_{N+1}$  et  $r_{N-1}$ , et enfin après avoir donné le même numéro à  $A'_{N+1}J'_{N+1}$  et  $A'_{N-1}I'_N$  les transversales  $l_b, \dots, l_a$  sont rangées de même sur  $r_{N+1}$  et  $r_{N-1}$  puisqu'elles le sont sur  $\psi$  et  $\psi'$ .

Donc les transversales sont encore semblablement disposées pour  $R_{N+1}$  et  $S_{N+1}$ , car elles gardent leurs numéros correspondants sur les frontières communes à  $R_N$  et  $R_{N+1}$  d'une part, à  $S_{N+1}$  et  $S_N$  d'autre part, et elles se disposent de même façon sur  $r_{N+1}$  et  $r_{N-1}$ , de plus, deux transversales de même numéro de  $R_N$ ,  $S_N$  sont coupées en des transversales de même numéro de  $R_{N+1}$ ,  $S_{N+1}$ .

D'autre part, la disposition des transversales reste la même qu'à l'étape précédente : une famille de transversales unissant les deux bords de  $R_{N+1}$  et dont les extrémités sur  $C_1$  et  $C_2$  se transforment par  $t_1$  et  $t_2$  en les extrémités sur  $C_1$  et  $C_2$  des transversales de mêmes numéros de  $S_{N+1}$  et une autre famille de transversales s'échelonnant entre la transversale  $A'_{N+1}I_{N+1}$  et  $J'$ ; le raisonnement s'appliquera donc encore identiquement au passage de  $R_{N+1}$  à  $R_{N+2}$ .

Donc si  $R_N$  et  $S_N$  sont à transversales semblablement disposées,  $\delta''_N D_N$  et  $\delta''_{N-2} D_{N-2}$  se correspondant ainsi que les cercles  $C_1$  et  $C_2$ , toutes deux régions  $R_{N+k}$  et  $S_{N+k}$  seront à transversales semblablement disposées.

Il suffit donc de construire des transversales de  $S_N$  de même disposition que les transversales de  $R_N$  pour un  $N$  fixe.

Les transversales construites à chaque étape  $k$  sont, nous l'avons vu,  $A'_k I_k$ ,  $\delta'_{k-1} D_k$ ,  $\delta_{k-1} E_k$ ,  $\beta_{k-1} G_k$  et  $\alpha_{k-1} B_k$ , plus les transversales issues de  $r_{-k}$  qui s'arrêtent à  $r_k$ .

Toutes ces transversales font avec la verticale un angle  $\alpha$  ou  $\beta$  suivant la parité de  $[i_n]$ , et nous avons choisi ces angles de façon que ces transversales ne se rencontrent pas. De même dans  $S_k$  les transversales  $A'_{k-2} I_{k-2}$ , etc. ne se rencontrent pas et n'ont aucun point commun avec celles qui les suivent ou les précèdent; même les transversales issues de  $r_{-k-2}$  qui sont prolongées jusqu'à  $r_{k-2}$  satisfont à cette condition.

Ainsi il suffit de donner mêmes numéros aux transversales caractéristiques pour  $k$  quelconque  $> 3$ .

3° Nous considérons la région  $\mathcal{H}_3$  et les diagonales qui lui appartiennent : ce sont celles terminées sur  $r_{-3} \dots r_0 \dots r_{+3}$  et toutes les diagonales qu'il faudra ajouter pour  $n > 3$  sont extérieures à  $\mathcal{H}_3$ . De même les diagonales que l'on devra ajouter à  $\mathcal{H}_3$  pour former  $\mathcal{H}_n$  seront toutes extérieures à  $\mathcal{H}_3$ . Si donc nous pouvons faire correspondre biunivoquement à des diagonales de  $\mathcal{H}_3$  des lignes de  $\mathcal{H}_3$  et réciproquement et si d'autre part elles sont choisies de façon à ne rencontrer que le nombre minimum de fois toutes les  $r_n$  entre leurs extrémités, ce qui permettra d'affirmer que semblablement disposées pour  $R_3$  et  $S_3$ , elles resteront semblablement disposées pour  $R_n$  et  $S_n$ , les régions  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_3$ , donc  $R_3$  et  $S_3$  seront bien à diagonales semblablement disposées et, comme nous aurons fait correspondre les points des frontières de  $R_3$  et  $S_3$  de façon que la transformation sur les bords soit précisément égale à  $t_1$  et  $t_2$  sur  $C_1$  et  $C_2$ , respectivement, nous aurons bien satisfait aux conditions désirées.

Il existe sur les deux anneaux  $R_n$  et  $S_n$  des arcs des bords dont la correspondance est complètement définie, par hypothèse, ce sont ceux qui appartiennent à  $C_1$  et  $C_2$ .

Si une transversale joint les deux bords de l'un et si on lui fait correspondre une transversale joignant les deux bords du second (les extrémités se correspondant d'avance naturellement) et si l'on unit

deux points qui se correspondent à deux autres points qui se correspondent par des transversales ne rencontrant pas les premières, on peut toujours faire correspondre ces transversales, c'est là la propriété exprimée du théorème précédent.

Il nous faudra donc seulement vérifier 1° que les transversales et leurs correspondantes ont leurs extrémités rangées dans le même ordre sur la frontière de  $R_3$  et  $S_3$ ; 2° qu'elles sont disjointes entre elles; 3° qu'elles ne sortent pas de  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{K}_3$  respectivement.

Pour satisfaire à cette dernière condition il suffira de commencer par déterminer les transversales qui forment les bords de  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{K}_3$  et il est évident que si alors toutes les transversales satisfont à 1° et 2°; 3° sera satisfait ipso facto, puisqu'alors toutes les autres transversales ne pourront sortir du domaine limité par les premières.

Prenons (1)  $A'_1 m_3$  dans  $\mathcal{H}_3$ , pour satisfaire à 3° nous devons chercher à faire coïncider sa transformée avec la diagonale aboutissant en  $A'_1$  et allant à  $r_{+1}$ . Cela est possible, si les extrémités se correspondent et si les domaines partiels qu'elles déterminent ont des frontières correspondantes.  $A'_1$  correspond bien à  $A'_1$ . Nous ferons correspondre  $m_1$  extrémité de la diagonale  $d_{-1}$  sur  $r_1$  à  $m_3$ . En effet les seuls points de  $r_1$  dont les correspondants sont connus, sont  $A'_1$ ,  $J'_1$  et  $D_1$ ; or l'ordre  $A'_1 D_1 m_1 J'_1$  est bien le même que celui de  $A'_3 D_3 m_3 J'_3$ . Donc  $A'_1 m_1$  correspondra à  $A'_1 m_3$ , puisque, d'autre part, le domaine simplement connexe limité par  $A'_1 m_1$  a sur sa frontière  $A'_1$  et que le domaine simplement connexe limité par  $A'_1 m_3$ , a  $A'_3$  sur sa frontière.

De même  $A'_3 I_3$  et  $A'_1 I_1$  peuvent se correspondre. Nous considérons maintenant  $J'_1 k_3$ , la diagonale  $J'_1 k_1$  peut lui correspondre, en effet,  $J'_1$  et  $J'_1$  se correspondent par  $t_2$  et  $k_3$  est situé sur  $r_3$  entre  $m_3$  et  $I_3$  de même que  $k_1$  est situé sur  $r_1$  entre  $m_1$  et  $I_1$ .

Nous passons maintenant à l'autre bord ( $C_1$ ).

Considérons  $\delta'_2 D_3$ , sa correspondante pourra être la diagonale  $\delta'_0 D_1$ , puisque nous savons que  $\delta'_2$  et  $\delta'_0$ , d'une part,  $D_3$  et  $D_1$ , de l'autre, se correspondent et elles ne se rencontrent pas, ni ne rencontrent les autres transversales. De plus  $\alpha'_2 a_3$  peut correspondre à  $\alpha'_0 a_1$ , puisque

---

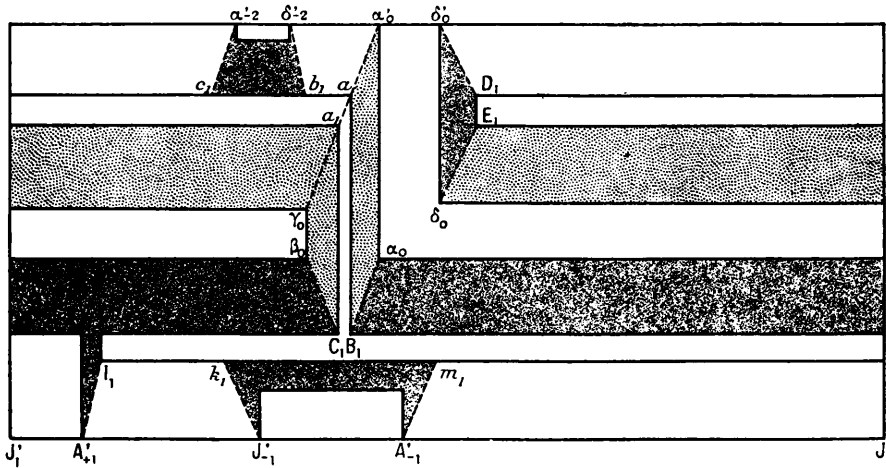
(1) Voir figure 14 et la planche hors texte.

$\alpha'_2$  et  $\alpha'_0$  se correspondent et que  $a_3$  est entre  $A_3$  et  $D_3$  comme  $a_1$  est entre  $A_1$  et  $D_1$ .

Il nous reste à déterminer la correspondante de  $\delta'_0 D_3$ , ce sera  $\delta'_{-2} D_1$ , puisque  $\delta'_{-2}$  correspond à  $\delta'_0$  et que  $D_3$  étant sur  $r_3$  entre  $a_3$  et  $D_3$  il peut correspondre à  $b_1$  qui est sur  $r_1$  entre  $a_1$  et  $D_1$ , et enfin, celle de  $\alpha'_0 c_3$  qui devient  $\alpha'_{-2} c_1$ , puisque  $\alpha'_0$  et  $\alpha'_{-2}$  se correspondent et que  $c_3$  est sur  $r_3$  entre  $b_3$  et  $D_3$  comme  $c_1$  est sur  $r_1$  entre  $b_1$  et  $D_1$ .

Nous considérons actuellement  $\mathcal{H}_3$  à l'exclusion des régions com-

Fig. 14.



prises entre  $r_{-1}$  et  $r_3$ ,  $r_{-3}$  et  $r_3$ ,  $r_{-2}$  et  $r_3$  et  $\mathcal{H}_2$  à l'exclusion des régions comprises entre  $r_{-3}$  et  $r_1$ ,  $r_{-5}$  et  $r_1$ ,  $r_{-4}$  et  $r_1$ ; nous verrons plus tard qu'il sera très facile de définir les transversales de ces régions. Soient  $\mathcal{H}'_3$  et  $\mathcal{H}_3$ , les régions  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_3$  ainsi réduites. Par le choix que nous avons fait des couples de points se correspondant :

$a_1 a_3, k_1 k_3, m_1 m_3, b_1 b_3, c_1 c_3$  nous avons fait correspondre *ipso facto* les arcs de  $r_1$  et  $r_3$

$$\begin{array}{llll} J'_{+3} m_3, & m_3 k_3, & k_3 I_3, & I_3 D_3 \rightarrow J'_1 m_1, & m_1 k_1, & k_1 I_1, & I_1 D_1; \\ D_3 c_3, & c_3 b_3, & b_3 a_3, & & D_1 c_1, & c_1 b_1, & b_1 a_1; \end{array}$$

et enfin  $a_3 A'_3$  et  $a_1 A'_1$ .

Toutes les transversales que nous avons marquées sont, elles et



leurs correspondantes, semblablement disposées et suffisent à assurer que  $\mathcal{H}'_3$  et  $\mathcal{K}'_3$  se correspondent dans toute transformation topologique transformant  $R_3$  en  $S_3$  de façon à transformer chaque diagonale que nous avons étudiée, en la ligne que nous lui avons fait correspondre.

Nous pourrions encore faire correspondre  $\alpha_2 B_3$  et (dans  $\mathcal{K}'_3$ )  $\alpha_0 B_1$ , puisque  $\alpha_0$  suit  $\alpha'$  immédiatement comme  $\alpha_2$  suit  $\alpha'_2$ , de même  $B_1$  est entre  $a_1$  et  $A'_1$  comme  $B_3$  entre  $b_3$  et  $A'_3$ ; puis  $\delta_2 E_3$  et  $\delta_0 E_1$  pour les mêmes raisons; ensuite  $c_3 \beta_2$  et  $c_1 \beta_0$ , puisque  $\beta_2$  est situé entre  $\delta_2$  et  $\alpha_2$ ; et  $C_3$  entre  $E_3$  et  $I_3$  comme  $\beta_0$  entre  $\delta_0$  et  $\alpha_0$  puis  $C_1$  entre  $E_1$  et  $I_1$ , et enfin  $a'_3 \gamma_2$  et  $a'_1 \gamma_0$ , puisque  $a'_1$  entre  $E_1$  et  $c_1$  et  $a'_3$  entre  $E_3$  et  $c_3$ ; et  $\gamma_2$  entre  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  comme  $\gamma_0$  entre  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que des diagonales de  $\mathcal{K}'_3$  toutes tracées que nous avons pu faire correspondre à des diagonales de  $\mathcal{H}'_3$ . Il nous restera maintenant à définir dans  $\mathcal{K}'_3$  des lignes qui auront la même disposition que les diagonales de  $\mathcal{H}'_3$  non encore utilisées.

Or les diagonales tracées divisent  $\mathcal{H}'_3 - (r_0 + r_1 + r_{-1} + r_{-2})$  en un certain nombre de régions dont seulement quatre vont contenir toutes les transversales qu'il reste à définir ce sont :

$$A'_{-1} m_1 k_1 J'_{-1}, \quad A'_{+1} I_1 G_1 \beta_0 \alpha_0 B_1, \quad \gamma_0 a'_1 E_1 \delta_0 \quad \text{et} \quad \delta'_{-2} \alpha'_{-2} c_1 b_1.$$

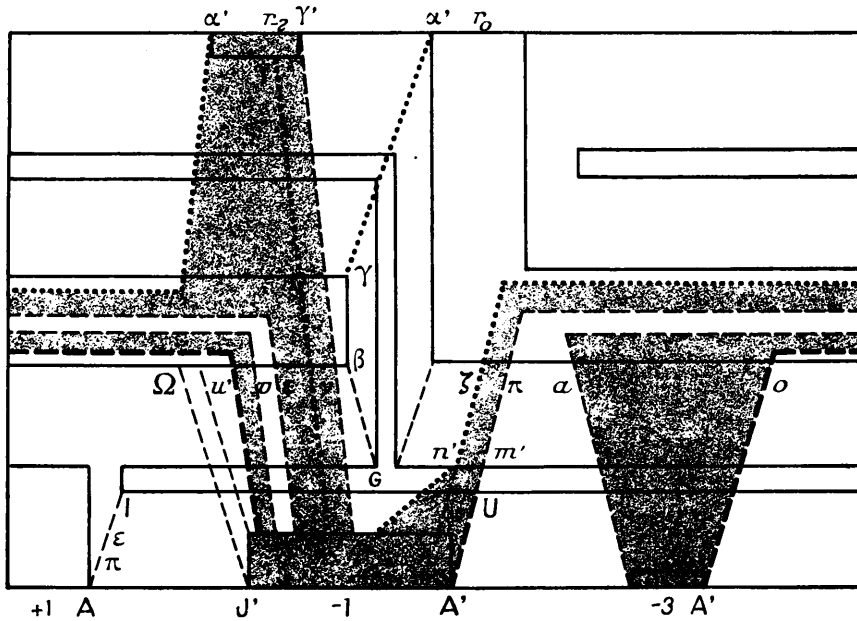
Mais alors il suffira de prendre pour chaque transversale dans le trapèze auquel ses extrémités appartiennent, une courbe de Jordan joignant ces extrémités qui sont situées sur les deux bases du trapèze et ne rencontrant qu'une fois toute la partie de la courbe située dans cette région, il suffit de prendre par exemple une droite.

Cela sera toujours possible car, par notre choix des premières transversales deux bases d'un trapèze de  $\mathcal{K}'_3$  correspondent respectivement à deux bases d'un même trapèze de  $\mathcal{H}'_3$  quel que soit le choix ultérieur de la transformation sur les bases de ces trapèzes, puisque les extrémités de ces bases sont invariantes.

Ceci n'est cependant tout à fait exact que lorsqu'il s'agit effectivement de transformation de trapèze à trapèze alors que certaine région, telle  $A'_{-1} m_1 k_1 J'_{-1}$ , n'est pas tout à fait un trapèze, mais elle peut facilement se ramener à un trapèze augmenté de certaines régions élémentaires (voir plus loin au «*Détail des transformations*») de

même pour  $\alpha_{-2}, \delta_{-2}, b, c_1$ . En tout cas, topologiquement, la difficulté n'existe pas, chacune de ces régions s'appuie sur deux arcs des bords de l'anneau et se termine à droite et à gauche par une transversale rencontrant seulement une fois toute  $r_n$  entre une  $r_{n-k}$  et une  $r_{n-l}$  et

Fig. 15.



théoriquement il suffit de conserver l'ordre des points sur les bases pour que le problème soit résolu.

Cependant, comme je désirais déterminer complètement la transformation, j'ai réduit autant qu'il était possible le nombre des régions élémentaires obtenues qui seront, soit des trapèzes, soit des triangles; c'est dans ce but que, non seulement, j'ai choisi pour transversales des droites, mais encore que j'ai amené  $r_{-2}$  et  $r_{-1}$ , en face l'un de l'autre de façon à pouvoir remplacer quatre droites différentes par une seule, ce remplacement n'est pas toujours possible, il suffit de regarder la figure, je donne plus loin le nombre des régions élémentaires obtenues à chaque étape, mais toujours en faisant cette hypothèse  $r_{-1}$  en face de  $r_{-2}$ .

Finalement nous avons donc trouvé dans  $\mathcal{H}_3$  des transversales qui ont la même disposition que les diagonales de  $\mathcal{H}_3$  et  $R_3$  et  $S_3$  sont à transversales semblablement disposées, ce qui entraînera :

$R_n$  et  $S_n$  sont à transversales semblablement disposées.

Il résulte du théorème ci-dessus qu'on peut faire correspondre topologiquement  $R_n$  et  $S_n$  de façon à faire correspondre les transversales de même numéro.

D'autre part, nous avons vu que si une transversale était coupée par  $r_{n+1}$  les deux transversales obtenues avaient mêmes numéros que les transversales obtenues en coupant  $\delta'$  par  $r_{n-1}$  ainsi. Si deux transversales  $\delta$  et  $\delta'$  se correspondent à une étape, leurs parties intérieures à  $R_N$  et  $S_N$  se correspondent encore. Pour simplifier on peut aussi faire correspondre leur parties intérieures à  $\sum_{-N}^{+N} r_n$ ; il en résulte que si nous appelons  $G_n$  la transformation qui fait passer de  $R_n$  à  $S_n$ , nous pouvons toujours choisir cette transformation de façon à faire correspondre les transversales de même numéro, la même transversale  $\delta'$  correspondant toujours à la même  $\delta$  quand  $n$  change.

Nous n'oublierons pas aussi que ces conditions pour avoir toute leur efficacité doivent être réalisées, tant pour  $G_n$  que pour  $G_n^{-1}$ ; par conséquent il convient de tracer dans  $R_n$  des transversales correspondant aux diagonales non utilisées de  $S_n$ , ce sont celles qui vont de  $r_{-n-2}$  à  $r_{n+2}$ , elles doivent donc aller de  $r_{-n}$  à  $r_{n+4}$ , leur construction est facile, nous compterons plus tard, le nombre de régions élémentaires formées.

Ainsi, à partir du moment où elles sont tracées, deux diagonales de même numéro se correspondront par  $G_n$  ( $n \geq N$ ) et aussi bien  $r_{n+1}$  que  $r_{n-1}$  sont formés de droites allant d'une diagonale à l'autre.

4° Soit  $\alpha$  l'angle minimum d'une transversale  $\delta$  avec les régions  $r_n$  qu'elle rencontre, la distance de deux points consécutifs d'une  $r_n$  et d'une  $r_{n-k}$  sur la même transversale n'est pas supérieure à

$$\frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{3}{7} \right)^{n+1} \quad \left[ \text{ou } \frac{1}{\sin \beta} \left( \frac{3}{7} \right)^{n+1} \text{ si } n \text{ est impair} \right].$$

Par hypothèse ces points communs à  $r_N r_{N-k}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) et leurs

correspondants sont choisis définitivement pour  $G_n (n > N)$ . Soit un point  $P$  de  $\delta$  n'appartenant pas à  $(r_N, \dots, r_0)$ , la distance de ses transformés par  $G_{n+i}$  ne peut dépasser  $\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{3}{7}\right)^{N+i}$  car ils appartiennent toujours à l'intervalle dont les deux extrémités sont sur  $(r_n, \dots, r_0)$ . Donc :

**THÉORÈME.** — *Étant donné un nombre arbitraire positif  $\varepsilon$ , on peut choisir un entier  $N$  tel que pour tout point  $P$  d'une transversale  $\delta$  on ait*

$$\text{dist. } [G_i(P), G_j(P)] < \varepsilon \quad (i, j > n)$$

*et pour tout point de  $\delta'$  (de  $S_n$ )*

$$\text{dist. } [G_i^{-1}(Q), G_j^{-1}(Q)] < \varepsilon \quad (i, j > n).$$

Ainsi la permanence de  $\delta$  et  $\delta'$  suffit à assurer l'uniformité de la convergence des suites  $G_n$  et  $G_n^{-1}$  sur  $\delta$  et  $\delta'$ .

Nous irons même plus loin :

*Il suffit de faire correspondre les transversales de même numéro par segments proportionnels pour que, pour  $n_1, n_2 > N$ , on ait  $G_{n_1}(P) = G_{n_2}(P)$ , toujours sur les transversales.*

Ceci est valable naturellement lorsque les deux transversales sont des lignes droites, ce qui est réalisé à partir de  $R_3$ .

En effet, puisque les transversales doivent se correspondre, l'ensemble des points de rencontre de  $\delta$  avec une  $r_n (n > N)$ , devient l'ensemble des points de rencontre de  $\delta'$  avec  $r_{n-2}$ , mais comme  $\delta$  et  $\delta'$  sont des droites,  $r_n$  et  $r_{n-2}$  les divisent bien en segments proportionnels par construction; en général, le rapport est  $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ ; les segments sont tous égaux entre eux, tant pour  $\delta$  que pour  $\delta'$ .

Ainsi une correspondance par segments proportionnels de  $\delta$  à  $\delta'$  fait correspondre l'ensemble des points communs à  $r_n$  et à  $\delta$ , à l'ensemble des points communs à  $r_{n-2}$  et à  $\delta'$  pour  $n$  quelconque. Comme la courbe  $\mathcal{C}$  est un ensemble fermé, cette correspondance, qui est uniformément continue, fait passer de l'ensemble des points communs à  $\mathcal{C}$  et à  $\delta$  à l'ensemble des points communs à  $\mathcal{C}$  et à  $\delta'$ .

Il nous reste à choisir la correspondance entre deux diagonales consécutives. Supposons les bases des deux trapèzes horizontales.

La transformation  $G_i$  s'écrira

$$\begin{aligned} X_i &= f_i(x, y), \\ Y_i &= g_i(x, y). \end{aligned}$$

Si le point  $P(x, y)$  est sur une diagonale, on a

$$X_i = X_j \quad \text{et} \quad Y_i = Y_j.$$

Soient  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  les extrémités de la parallèle aux bases du trapèze dans  $R_n$ , soit  $y_1 = y_2$ , les points correspondants sont

$$Q_1(X_1^!, Y_1^!); \quad Q_2(X_2^!, Y_2^!); \quad Y_1^! = Y_2^!.$$

(Le raisonnement est semblable, si l'on a  $x_1 = x_2$  ou  $X_1 = X_2$ ) on prendra

$$\frac{X_i - X_1^!}{X_2^! - X_1^!} = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad Y_i = Y_1^! = Y_2^!,$$

cette transformation continue fait correspondre les deux trapèzes, de façon que toute parallèle à la base du premier devienne une parallèle à la base du second, et réciproquement.

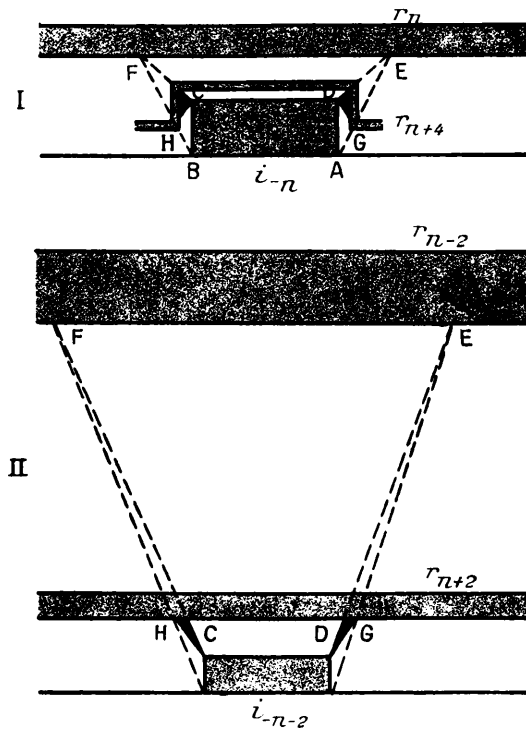
Considérons une partie d'une  $r_n$  intérieure au premier trapèze, elle est bordée par des parallèles à la base de ce trapèze. Il lui correspondra par la transformation choisie, une région comprise entre deux parallèles aux bases du trapèze correspondant, ces parallèles étant issues des points des diagonales correspondant aux extrémités de  $r_n$  sur les diagonales, c'est-à-dire des points de  $r_{n-2}$  correspondant aux points de  $r_n$ , ainsi cette transformation fait passer d'une partie de  $r_n$  à la partie correspondante de  $r_{n-2}$  quel que soit  $n$ , à l'intérieur d'un trapèze quelconque limité par des diagonales et des frontières de  $r_k$  ( $k < n$ ).

Nous appellerons  $T_n$ , une transformation  $G_n$  choisie de cette façon sur la frontière et les transversales de  $R_n$  (et  $S_n$ ). Chaque transformation  $T_{n+1}$  sera égale à la transformation précédente  $T_n$  sur  $\sum_{k=-n}^{k=+n} r_k$ , et à l'intérieur de  $R_n$  (et  $S_n$ ) à l'exception des trapèzes situés entre  $C_1$  (et  $C_2$ ) et le bord le plus proche de  $r_n$  d'une part, entre les diagonales  $d_k$  et  $d'_k$  ( $k = -n, \dots, n$ ) d'autre part.

$T_{n+1}$  peut donc être choisie arbitrairement à l'intérieur de  $r_{n+1}$  seulement jusqu'à la première diagonale que cette région rencontre, nous appellerons  $\theta_{n+1}$  la transformation arbitraire de cette région.

5° DÉTAIL DES TRANSFORMATIONS. — Nous avons à définir la transformation de la figure AEFB (fig. 16). Il faut d'une part déter-

Fig. 16.



miner dans II les lignes qui vont correspondre aux diagonales  $d'_{-n}$ ,  $d'_{-n}$  et d'autre part déterminer dans I les lignes qui correspondent aux diagonales  $d'_{-n-2}$ ,  $d'_{-n-2}$  de II. On voit que l'on peut décomposer la figure en huit parties, dans chacune de ces parties  $T_n$  se réduit à une transformation quadratique comme nous l'avons vu.

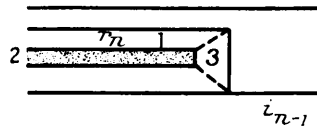
NOMBRE DE TRANSFORMATIONS A DÉFINIR. — Le nombre des intervalles

d'un côté, construits jusqu'à  $i_{-n}$  et  $i_{+n}$  est  $n + 1$ , les intervalles compris entre eux sont évidemment en même nombre.

A. *Nombre de transformations de  $T_n - T_{n-1}$ .* — Pour passer de  $T_{n-1}$  à  $T_n$  nous aurons à définir :

1° *Du côté qui ne contient pas  $i_n$ , il y a  $(n - 1 + 1)$  intervalles, donc  $n$  transformations, cependant, dans l'intervalle compris entre  $i_{n-1}$  et l'intervalle le plus proche (fig. 17) il n'y a pas une transformation,*

Fig. 17.



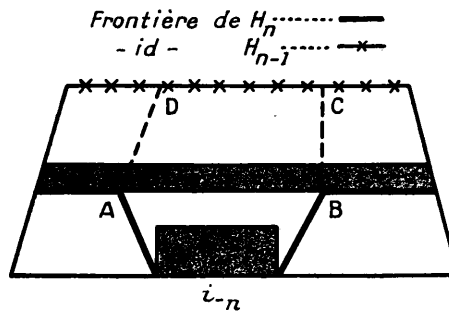
mais *trois* : la transformation au-dessus de  $r_n$  (transformation quadratique), la transformation dans  $r_n$ , une similitude dans le trapèze construit sur l'extrémité de  $r_n$ ; donc le nombre total de transformations dans  $\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n-1}$ , de ce côté, sera

$$n + 3 - 1 = n + 2.$$

2°  $n + 1$  transformations entre les intervalles, mais ce nombre subit les changements suivants :

a. La partie ABCD située entre  $r_{n-1}$  et  $r_n$  au-dessus de  $r_{-n}$  n'est pas

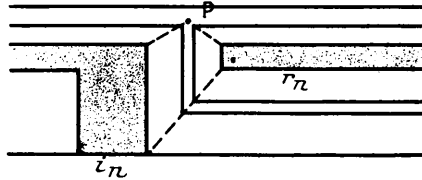
Fig. 18.



comprise entre des diagonales et doit se transformer séparément, nous aurons donc *une transformation* de plus (fig. 18).

b. Le point P divise horizontalement les trapèzes, donc au lieu de 2 trapèzes élémentaires, nous devons en considérer 4, il nous faudra

Fig. 18 bis.



encore définir séparément la transformation dans  $r_n$ , nous ajouterons donc

$$4 + 1 - 2 = 3 \text{ transformations;}$$

donc

$$(n + 1) + 1 + 3 = n + 5.$$

3° La transformation est définie entre  $d'_{-n}$  et  $d''_{-n}$  dans 8 régions.

4° Entre  $r_n$  et  $d'_n$  la transformation est une similitude; donc  $T_n$  dans  $\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n-1}$  se composera de

$$(n + 2) + (n + 5) + 8 + 1 = 2n + 16 \text{ transformations.}$$

Il nous faut maintenant le nombre de transformations à définir pour  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ , puisque ces transformations ne peuvent se faire suivant la règle générale, les diagonales ne pouvant être transformées en des lignes droites.

B. Nombre de transformations de  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ . —  $T_0$ , nous l'avons vu, se réduit à une transformation topologique  $\theta_0$ .

Pour  $T_1$  nous suivons  $r_1$  et comptons le nombre minimum de trapèzes élémentaires obtenus :

Dans $\Delta \pi AO$ .....	3 trapèzes
» $\varepsilon IH \varphi$ .....	2 »
» $AOB \eta$ .....	2 »
» $B \eta C \zeta$ .....	2 »
» $D \delta' E \delta$ .....	5 »
» $E \delta F \gamma$ .....	3 »
» $F \gamma G \beta$ .....	3 »
» $G \theta H \varphi$ .....	2 »
» $x \alpha \omega \alpha'$ .....	3 »
» $x \alpha \beta \zeta$ .....	2 »
Total .....	<u>27</u> »



La région comprise entre les diagonales aboutissant sur  $r_{-1}$  peut être divisée en 14 trapèzes.

Donc pour définir  $T_1$ , on a à définir 41 transformations quadratiques, plus les 3 transformations  $\theta_{-1}$ ,  $\theta_0$  et  $\theta_1$ , qui sont des homéomorphismes quelconques dans  $r_1$ ,  $r_0$  et  $r_1$  connues seulement sur les frontières de  $r_{-1}$ ,  $r_0$  et  $r_{+1}$ .

Passons maintenant à  $T_2$ , on voit qu'il faut faire subir des modifications à la façon de transformer les parties de  $\mathcal{X}_2$  qui avoisinent  $r_1$ .

Nous pouvons, par exemple pour la région  $J'\Omega\Psi\epsilon IJJ'$  (région traversée par le transformé des diagonales de  $r_{-1}$ ) obtenir un nombre minimum de 7 trapèzes, alors que régulièrement il devrait y en avoir 4.

Au contraire la région  $CD\nu\beta GB\alpha\zeta C$  pourra être décomposée en 3 trapèzes, alors que régulièrement elle devrait l'être en 6.

Cela est possible en laissant encore quelconque  $\theta_2$ , qui est la transformation, à l'intérieur de  $r_2$ , déterminée seulement sur les bords.

Il en résulte que le nombre total des trapèzes à ajouter ne sera pas changé, et sera

$$2n + 16 = 20.$$

Le nombre de transformations à effectuer sera donné par la formule générale

$$23 + \sum_{k=1}^n (2k + 16) = \underline{n^2 + 17n + 23}.$$

Il faut ajouter à ce nombre les  $(2n + 1)$  transformations :

$$\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}, \theta_2, \theta_{-2}, \dots$$

$\theta_0, \theta_{-1}, \theta_1, \dots$ , ne sont définies en général que sur les frontières et peuvent être déterminées arbitrairement à l'intérieur à condition d'être continues et biunivoques.

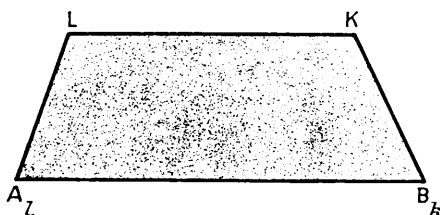
$\theta_n$  est également arbitraire jusqu'à la première diagonale que coupe  $r_n$ .

Il est intéressant de laisser arbitraire le choix de ces  $\theta_n$ , car nous pouvons ainsi choisir  $T_n$  comme une transformation à volonté :

- 1° Changeant l'anneau en lui-même;
- 2° Changeant l'anneau en une partie de lui-même;
- 3° Changeant l'anneau en une région le contenant.

6° LA TRANSFORMATION DÉFINITIVE  $\mathcal{C}$ . — L'anneau diminué d'une région  $\mathcal{H}_n$  (ou  $\mathcal{K}_n$ ) se compose d'un certain nombre <sup>(1)</sup> de régions de l'espèce ci-contre sur la frontière desquelles  $T_n$  est déterminée (voir fig. 23 et 7).

Fig. 19.



Il est possible de choisir un nombre  $N$  assez grand pour que les régions déterminées pour  $T_n$  soient de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ , en effet leur hauteur est au plus  $\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$  et leur longueur, la distance d'un intervalle à l'intervalle le plus proche, longueur qui tend vers zéro pour  $n$  croissant indéfiniment.

Soient deux transformations  $T_i$  et  $T_j$  telles que  $i, j > N$ .

Pour un point  $P(x, y)$  quelconque de  $\mathcal{H}_N$  on a évidemment

$$\begin{aligned} X_i(x, y) &= X_j(x, y), \\ Y_i(x, y) &= Y_j(x, y) \end{aligned}$$

et un point non contenu dans  $\mathcal{H}_N$  sera contenu dans l'une des petites régions ci-dessus, région qui se transforma en une autre région bien définie de  $\mathcal{H}_N$ , soient  $l_N$  et  $l'_N$ . On choisit  $N$  de façon que le diamètre d'un  $l'_N$  quelconque soit inférieur à  $\varepsilon$ .

Tout point intérieur à  $l_N$  a évidemment son transformé dans  $l'_N$  par n'importe quel  $T_n$ ,  $n \geq N$ , donc la distance des transformés du même point est inférieure au maximum du diamètre des  $l'_N$ , donc

$$|X_i - X_j| < \varepsilon, \quad |Y_i - Y_j| < \varepsilon.$$

On a ainsi pour tout point  $P$  de l'anneau

$$|X_i - X_j| < \varepsilon, \quad |Y_i - Y_j| < \varepsilon \quad (\text{pour } i, j > N).$$

---

(1) On peut préciser : ce nombre sera, d'un côté,  $n$ , de l'autre  $n + 1$ , donc  $2n + 1$ .

Donc les transformations continues  $T_n$  convergent uniformément vers une transformation continue  $\mathfrak{C}$ .

$\mathfrak{C}$  est continue dans tout l'anneau, donc uniformément continue et laisse invariant l'ensemble  $E$  formé par tous les  $r_n$ ; l'ensemble fermé  $\bar{E}$ , c'est-à-dire la courbe  $C$ , est donc invariant par  $\mathfrak{C}$ .

Comme d'autre part,  $\mathfrak{C}$  change  $r_n$  en  $r_{n-2}$ ,  $\mathfrak{C}$  a le coefficient de rotation  $\tau_1$  par rapport à l'intérieur  $R_i$  et le coefficient de rotation  $\tau_2$  par rapport à l'extérieur  $R_e$ , coefficients qui ont été choisis de signes contraires.

La transformation obtenue est bicontinue, on voit immédiatement qu'elle est biunivoque de la façon suivante : Si un point  $P$  est sur un bord de l'anneau il appartient à une seule suite de trapèzes emboîtés situés entre le bord et  $\mathcal{H}_n (n \rightarrow \infty)$ , il lui correspondra un seul point, limite unique des trapèzes emboîtés correspondants situés entre ce bord et  $\mathcal{H}_n$ . Si maintenant deux points  $P$  et  $Q$  ne sont pas sur les bords, ils appartiennent à un même  $\mathcal{H}_n$  pour  $n \geq N$ ,  $N$  fixe. Ils appartiennent alors, soit à un même trapèze de  $\mathcal{H}_n$ , soit à deux trapèzes, mais dans les deux cas la biunivocité est évidente.

AUTRES PROPRIÉTÉS DE  $C$ . —  $C$  a encore d'autres propriétés intéressantes :

$C$  est un continu indécomposable.

En effet tout vrai sous-continu de  $C$  est continu de condensation de  $C$ , ce qui oblige  $C$  à être indécomposable (<sup>1</sup>).

Il serait intéressant d'étudier plus à fond la transformation de  $C$ . Par  $\mathfrak{C}$ ,  $C$  n'a aucun point fixe accessible.

Mais  $C$  a quatre points fixes inaccessibles situés dans les régions,

$$G\theta H\varphi, \quad B\eta AO, \quad E\delta F\gamma, \quad \psi \varepsilon IJ,$$

et il n'y en a pas d'autre.

En un point fixe  $P$  passe une droite qui reste invariante dans son

(<sup>1</sup>) *Fundamenta Mathematicæ* : KURATOWSKI, loc. cit.

ensemble (du moins assez près de P) par la transformation  $\mathfrak{C}$ ; cette droite est formée de points inaccessibles de la courbe.

On peut aussi, pour étudier la transformation, construire le transformé d'un rayon (ou d'un cercle), c'est une courbe de Jordan qui, sauf, peut-être, près des bords se compose d'un nombre fini d'arcs de courbes du second degré.

#### Explication des planches.

I. J'ai représenté sur la grande planche les diagonales de  $\mathcal{H}_3$  et leurs correspondantes dans  $\mathcal{K}_3$ . Deux diagonales homologues ont les mêmes noms à leurs extrémités; le numéro du  $r_n$  sur lequel ces points sont situés donne l'indice dont il faut affecter les lettres marquées à ces extrémités, le lecteur est prié de bien vouloir ajouter par la pensée ces indices aux lettres marquées sur la figure, la clarté du dessin exigeait qu'on les omette.

J'ai tracé aussi  $\alpha'_0 \gamma_0$  et son homologue par T :  $\alpha'_{-2} \gamma_{-2}$  et aussi  $A'_1 m_1$  et son homologue par T :  $A'_{-3} m_{-1}$ .

II. La déformation subie par les boucles s'opère dans le passage de  $\mathcal{H}_2$  à  $\mathcal{K}_2$ . Pour rendre compréhensible cette déformation, j'indique six étapes successives de la déformation des régions  $r_0, r_1, r_2$  ainsi que des diagonales qui les unissent.

Il est bon d'étudier ces dessins une première fois en considérant seulement  $r_0$  et  $r_1$ , puis une autre fois en considérant  $r_0, r_1$  et  $r_2$ .

Ces images donnent une idée de la déformation subie par les boucles non tracées, en effet la région située entre  $r_2$  et l'un des bords subit approximativement une rotation d'un seul bloc, de même pour l'autre région similaire entre  $r_2$  et le second bord.

Puis, dans l'espace restant, les boucles non tracées ont leur déformation définie par la déformation des bords des trapèzes.

Il serait possible de donner une autre démonstration rigoureuse (d'ailleurs voisine de la précédente) en partant de ces dessins. Le dessin des figures intermédiaires peut être exact, sa détermination par le calcul serait compliquée et superflue.

Il est intéressant aussi de chercher le transformé d'un rayon par

exemple. On obtient une courbe qui *tourne en général à droite*, la forme même de la courbe avec ses nombreux angles droits empêche cette condition d'être satisfaite partout, néanmoins elle est satisfaite en un assez grand nombre de points pour donner à la transformation une ressemblance générale avec la transformation  $T_\varepsilon^{-1}$  de M. Birkhoff.

J'ai tracé des transformés de rayons, je ne puis pas garantir l'exactitude du tracé en tout point mais seulement son allure générale, comme il suffirait de remplacer les transformations quadratiques par d'autres transformations topologiques un peu plus compliquées pour permettre à un tel transformé d'être tout à fait exact, il peut suffire à faire saisir l'allure de la transformation.