JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 331-418.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__331_0>

Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois;

PAR JEAN LERAY.

A ma Femme.

CHAPITRE I.

MOUVEMENTS INFINIMENT LENTS EN L'ABSENCE DE FORCES EXTÉRIEURES.

1. INTRODUCTION. — Commençons par écrire le système d'équations aux dérivées partielles qui régit, en l'absence de forces extérieures, les mouvements plans et infiniment lents des liquides visqueux :

$$(1)\quad \begin{cases} \nu\,\Delta u(x, y, t) - \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = 0, \\ \nu\,\Delta v(x, y, t) - \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0.$$

Au cours des Chapitres III et IV, consacrés à l'étude des équations de Navier, nous utiliserons la conclusion du Chapitre II et celle du paragraphe **15** de ce chapitre. Toutes deux sont basées sur les résultats énoncés au paragraphe **13** du présent chapitre. Ces résultats affirment que le premier problème aux valeurs frontières relatif au système (1), (2) admet une solution. De plus ils énoncent une règle [1]

[1] Cette règle ne me semble pas pouvoir se déduire des développements, en séries de fonctions orthogonales, par lesquels M. F. Odqvist a intégré le système (1), (2) (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 22 A, n° 28, 1931).

qui permet de majorer à chaque instant la plus grande longueur du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$.

Précisons quel problème nous nommons premier problème aux valeurs frontières : Le liquide initialement au repos emplit l'intérieur d'une courbe fixe; on l'y injecte et on l'en laisse sortir, par les divers points de la paroi avec des vitesses données. Il s'agit de déterminer le mouvement du liquide à l'intérieur de la courbe en supposant qu'il obéit au système (1), (2). Indiquons un caractère évident de la solution : une modification instantanée des composantes normales de la vitesse d'injection doit, à cause de l'incompressibilité du liquide, entraîner une modification instantanée et finie du champ des vitesses tout entier; il se produit des percussions internes; la notion de pression n'a plus de sens. Une modification instantanée des composantes tangentielles de la vitesse d'injection n'entraine par contre à l'intérieur du liquide qu'une modification progressive du champ des vitesses. Ceci explique pourquoi le vecteur vitesse apparaît sous forme d'une somme [*cf.* formule (37)] : l'un des termes est le gradient d'une fonction harmonique; en première approximation ([1]) il coïncide le long de la paroi avec la vitesse normale imposée au liquide. L'autre terme de la somme est une intégrale double, étendue le long de la paroi et portant sur le temps.

Toute la difficulté du problème réside en la définition d'un tel potentiel et en son étude. *Ce n'est pas un potentiel de double couche :* Aucune combinaison linéaire des dérivées de la solution fondamentale de M. Oseen ne se prête à la résolution du problème aux valeurs frontières ([2]). Toutefois c'est à M. Oseen que nous devons la solution particulière du système linéaire (1), (2) grâce à laquelle nous avons pu construire un tel potentiel. M. Oseen a résolu ([3]) le problème aux valeurs frontières dans le cas où le domaine est un demi-plan; notre solution particulière correspond ([4]) au mouvement provoqué comme suit : le liquide est au repos; il adhère à la droite qui le limite et qui

([1]) C'est-à-dire quand le liquide est en mouvement depuis peu de temps, ou bien quand le coefficient de viscosité ν est faible.

([2]) Odqvist, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1931.

([3]) Oseen, *Hydrodynamik*, § 10 (Leipzig, 1927).

([4]) Nous laisserons au lecteur le soin de le vérifier.

est immobile; toutefois durant un instant très court on lui impose le long d'un très petit segment de la frontière une vitesse uniforme tangente à la paroi [1]. Les formules obtenues définissent cette solution particulière dans tout le plan; cependant le potentiel qu'elle permet de construire est sans intérêt quand le domaine cesse d'être convexe (*cf.* § 6).

Dans une Note [2] j'ai indiqué comment on pourrait vraisemblablement aborder le cas des domaines non convexes. Mais j'ai étudié les problèmes linéaires auxquels sont consacrés les Chapitres I et II pour la seule raison que les Chapitres III et IV l'exigeaient. Aussi n'ai-je envisagé que les circonstances les plus simples; il n'eût été guère plus compliqué de supposer les parois mobiles; je ne l'ai pas même fait.

I. — Une solution particulière.

2. Définitions. — Les mouvements plans et infiniment lents des liquides visqueux sont régis par les équations

$$\nu\,\Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial X}, \qquad \nu\,\Delta V - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial Y}; \tag{1'}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \tag{2'}$$

Nous allons définir, t restant positif, une solution particulière de ce système; elle s'annulera avec Y; elle sera de la forme

$$U = U_1 + U_2, \qquad V = V_1 + V_2.$$

et (U_1, V_1) sera le gradient d'une fonction harmonique, tandis que U_2 et V_2 satisferont l'équation de la Chaleur

$$\nu\,\Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

La théorie de l'équation de la Chaleur est basée sur les propriétés de deux de ses solutions : la fonction $\dfrac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}}{t}$ et sa dérivée $\dfrac{Y}{2\nu t^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}$.

---

[1] Fredholm utilisa des procédés analogues en étudiant d'autres problèmes aux valeurs frontières.

[2] *C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 7 décembre 1931.

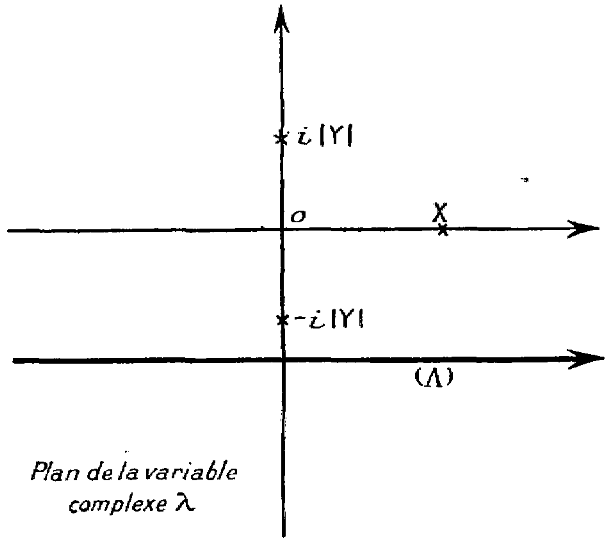
Pour construire les solutions fondamentales du système (1′), (2′), M. Oseen utilise d'autres solutions particulières de (3), dont la fonction $-\frac{1}{2}\int_{\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u}$ et ses dérivées $\frac{X}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}$, $\frac{Y}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}$.

Ces deux dernières fonctions satisfont donc (3) et les relations

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{X}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{Y}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}\right]=-\frac{1}{2\nu t}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}},$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{X}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}\right]-\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{Y}{X^2+Y^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}\right]=0.$$

Il en résulte que les fonctions $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{B}_l$, $\mathcal{C}_l$, définies ci-dessous par (4),

Fig. 1.



satisfont elles aussi l'équation (3) et, en outre, les relations (5) :

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathcal{A}_l(X,Y,t)&=\int_{(\Lambda)}\frac{X+\lambda}{(X+\lambda)^2+Y^2}e^{-\frac{(X+\lambda)^2+Y^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{\lambda^l},\\ \mathcal{B}_l(X,Y,t)&=\int_{(\Lambda)}\frac{Y}{(X+\lambda)^2+Y^2}e^{-\frac{(X+\lambda)^2+Y^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{\lambda^l},\\ \mathcal{C}_l(X,Y,t)&=\int_{(\Lambda)}\frac{1}{t}\,e^{-\frac{(X+\lambda)^2+Y^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{\lambda^l};\end{aligned}\right.$$

(A) est un axe parallèle à l'axe réel et situé dans le demi-plan $\mathcal{I}(\lambda) < -|Y|$,

$$(5)\qquad \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial Y} = -\frac{1}{2\nu}\mathcal{C}_l, \qquad \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial Y} - \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial X} = 0.$$

L'on a, en vertu de (5) et de l'équation de la Chaleur,

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial t} = \nu\,\Delta\mathcal{A}_l = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial X}, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial t} = \nu\,\Delta\mathcal{B}_l = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial Y}. \end{cases}$$

Il est préférable d'écrire les relations (4) sous la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_l(X, Y, t) = \displaystyle\int_{(A)} \frac{\lambda}{\lambda^2 + Y^2} e^{-\frac{\lambda^2+Y^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - X)^l}, \\[2mm] \mathcal{B}_l(X, Y, t) = \displaystyle\int_{(A)} \frac{Y}{\lambda^2 + Y^2} e^{-\frac{\lambda^2+Y^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - X)^l}, \\[2mm] \mathcal{C}_l(X, Y, t) = \dfrac{e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{t} \displaystyle\int_{(A)} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - X)^l}. \end{cases}$$

Il résulte de ces formules (7)

$$(8)\qquad \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X} = l\mathcal{A}_{l+1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial X} = l\mathcal{B}_{l+1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial X} = l\mathcal{C}_{l+1}.$$

Les formules (8) et (5) montrent que $\dfrac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial X^p \partial Y^q}$, $\dfrac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial X^p \partial Y^q}$, $\dfrac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial X^p \partial Y^{q-1}}$ s'expriment linéairement à l'aide de $\mathcal{A}_{l+p+q}$, $\mathcal{B}_{l+p+q}$, $\dfrac{\partial \mathcal{C}_{l+p}}{\partial Y^{q-1}}$, $\dfrac{\partial \mathcal{C}_{l+p+1}}{\partial Y^{q-2}}$, ..., $\mathcal{C}_{l+p+q-1}$. Nous poserons $\dfrac{\partial \mathcal{C}_l}{\partial Y^q} = \mathcal{C}_{l,q}$. D'après (7) les fonctions $\mathcal{B}_l$, et $\mathcal{C}_{l,2r+1}$ sont des fonctions impaires de Y; elles s'annulent avec Y; les fonctions $\mathcal{A}_l(X, Y, t)$ et $\mathcal{C}_{l,2r}(X, Y, t)$ sont des fonctions paires; elles prennent pour $Y = 0$ les mêmes valeurs que des fonctions analytiques en $Z = X + iY$, qui sont bornées dans le demi-plan $Y > 0$; à savoir

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}'_l(Z, t) = \displaystyle\int_{(A)} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - Z)^l}, \\[2mm] \mathcal{C}'_{l,2r}(Z, t) = \dfrac{(2r)!\,(-1)^r}{r!\,(4\nu)^r t^{r+1}} \displaystyle\int_{(A)} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - Z)^l}. \end{cases}$$

3. Soit donc une expression

$$\mathrm{U}-i\mathrm{V}=\frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2}e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}}$$
$$+\underset{l,r}{\mathbf{S}}[a_l(\mathcal{A}_l-\mathcal{A}'_l)+b_l\mathcal{B}_l+c_{l,2r+1}\mathcal{C}_{l,2r+1}+c_{l,2r}(\mathcal{C}_{l,2r}-\mathcal{C}'_{l,2r})],$$

où les a_l, b_l, $c_{l,2r+1}$, $c_{l,2r}$ sont des constantes. Ces fonctions U et V sont nulles pour $\mathrm{Y}=0$ et les équations (1′) seront vérifiées à condition que l'on prenne

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}}-i\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Y}}=\rho\underset{l,r}{\mathbf{S}}\left[a_l\frac{\partial \mathcal{A}'_l}{\partial t}+c_{l,2r}\frac{\partial \mathcal{C}'_{l,2r}}{\partial t}\right]. \tag{10}$$

Cette relation définit effectivement une fonction P harmonique, puisque son second nombre est une fonction analytique. Mais en général la relation (2′) ne sera pas satisfaite. Il nous reste donc à faire un choix des constantes a_l, b_l, $c_{l,q}$ qui annule la partie réelle de l'expression

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}+i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\right)(\mathrm{U}-i\mathrm{V})\equiv\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{Y}}\right)-i\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{X}}-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Y}}\right).$$

Notons à ce sujet que $\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}+i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\right)\mathcal{F}(\mathrm{Z})=0$, quelle que soit la fonction analytique $\mathcal{F}(\mathrm{Z})$. Prenons

$$\mathbf{S}[a_l\mathcal{A}_l+b_l\mathcal{B}_l+c_{l,2r+1}\mathcal{C}_{l,2r+1}+c_{l,2r}\mathcal{C}_{l,2r}]=+\frac{\nu i}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}-i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\right)\mathcal{B}_2$$

Il vient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{Y}}\right)-i\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{X}}-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Y}}\right)\\&\quad=\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}+i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\right)\left(\frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2}e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}}\right)+\frac{\nu i}{\pi}\Delta\mathcal{B}_2\\&\quad=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}\,\partial \mathrm{Y}}+i\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Y}^2}\right)\left(\frac{e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}}}{t}\right)-\frac{i}{2\pi}\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial \mathrm{Y}}.\end{aligned}$$

Remplaçons dans l'expression (7) de $\mathcal{C}_2$ le chemin d'intégration (A) par un autre équivalent, mais très voisin de l'axe réel. Il vient

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}\left(\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}}{t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{t}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(e^{-\frac{X^2}{4\nu t}}\right)=0.$$

Nous avons donc obtenu une solution particulière du système (1′), (2′).

Explicitons-la. Nous avons d'après (5) et (8) :

$$\frac{\nu i}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial X}-i\frac{\partial}{\partial Y}\right)\mathcal{B}_2=-\frac{2\nu}{\pi}[\mathcal{A}_3-i\mathcal{B}_3]-\frac{1}{2\pi}\mathcal{C}_2.$$

Pour $Y=0$ cette expression est égale à la fonction analytique de Z :

$$-\frac{2\nu}{\pi}\mathcal{A}'_3-\frac{1}{2\pi}\mathcal{C}'_2=-\frac{\nu}{\pi}\int_{(A)}\frac{2}{\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{(\lambda-Z)^3}-\frac{\nu}{\pi}\int_{(A)}\frac{2}{4\nu t}e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{(\lambda-Z)^2}$$
$$=\frac{\nu}{\pi}\int_{(A)}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{(\lambda-Z)^2}.$$

En résumé,

(11) $$U-iV=\frac{Y}{4\nu t^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}+\frac{\nu i}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial X}-i\frac{\partial}{\partial Y}\right)\mathcal{B}_2(X,Y,t)-\frac{\partial\mathcal{F}(Z,t)}{\partial Z}.$$

(12) $$U-iV=\frac{Y}{4\nu t^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}-\frac{2\nu}{\pi}[\mathcal{A}_3(X,Y,t)-i\mathcal{B}_3(X,Y,t)]$$
$$-\frac{1}{2\pi}\mathcal{C}_2(X,Y,t)-\frac{\partial\mathcal{F}(Z,t)}{\partial Z},$$

où

(13) $$\mathcal{F}(Z,t)=\frac{\nu}{\pi}\int_{(A)}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}}\frac{d\lambda}{\lambda-Z}$$

et, d'après (10),

(14) $$P(X,Y,t)=\rho\,\mathcal{R}\left[\frac{\partial\mathcal{F}(Z,t)}{\partial t}\right].$$

[Le symbole $\mathcal{R}$ signifie : partie réelle de ....]

(15) De (12) résulte que non seulement la fonction $U-iV$, mais encore la fonction

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[U(X,Y,t)-iV(X,Y,t)-\frac{Y}{4\nu t^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}\right]$$

s'annule avec Y.

Remarque. — Soit (Λ') le chemin d'intégration symétrique de (Λ) par rapport à l'origine. Nous avons

$$\mathcal{A}_1(X, Y, t) - \mathcal{A}_1(-X, -Y, t) = \int_{(\Lambda+\Lambda')} \frac{\lambda}{\lambda^2 + Y^2} e^{-\frac{\lambda^2+Y^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{\lambda - X},$$

$$\mathcal{B}_1(X, Y, t) - \mathcal{B}_1(-X, -Y, t) = \int_{(\Lambda+\Lambda')} \frac{Y}{\lambda^2 + Y^2} e^{-\frac{\lambda^2+Y^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{\lambda - X},$$

$$\mathcal{C}_1(X, Y, t) + \mathcal{C}_1(-X, -Y, t) = \frac{e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{t} \int_{(\Lambda+\Lambda')} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{\lambda - X},$$

$$\mathcal{F}(Z, t) + \mathcal{F}(-Z, t) = \frac{\nu}{\pi} \int_{(\Lambda+\Lambda')} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{\lambda - Z}.$$

Or ces quatre dernières intégrales relèvent du calcul des résidus

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}_1(X, Y, t) - \mathcal{A}_1(-X, -Y, t) = 2\pi i \frac{X}{X^2 + Y^2}\left[e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}} - 1\right], \\ &\mathcal{B}_1(X, Y, t) - \mathcal{B}_1(-X, -Y, t) = 2\pi i \frac{Y}{X^2 + Y^2}\left[e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}} - 1\right], \\ &\mathcal{C}_1(X, Y, t) + \mathcal{C}_1(-X, -Y, t) = 2\pi i \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}}}{t}, \\ &\mathcal{F}(Z, t) + \mathcal{F}(-Z, t) = \frac{2 i \nu}{Z^2}\left[e^{-\frac{Z^2}{4\nu t}} - 1\right]. \end{aligned}\right.$$

Par des dérivations et grâce à (8) on obtient des formules analogues concernant $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{B}_l$, $\mathcal{C}_{l,q}$, $\frac{\partial^q \mathcal{F}}{\partial Z^q}$.

4. Majorations. — Nous nous proposons de majorer les fonctions précédemment définies. Nous posons, au cours de ce paragraphe, $x = \xi\sqrt{4\nu t}$, $Y = \eta\sqrt{4\nu t}$, $Z = \varphi\sqrt{4\nu t}$ et nous remplaçons dans les formules (7) λ par $\lambda\sqrt{4\nu t}$. Il vient :

pour $|\eta| < 1$,

$$\mathcal{A}_l(X, Y, t) = \frac{1}{(4\nu t)^{\frac{l}{2}}} \int_{(L_1)} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \eta^2} e^{-\lambda^2-\eta^2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \xi)^l},$$

$$\mathcal{B}_l(X, Y, t) = \frac{1}{(4\nu t)^{\frac{l}{2}}} \int_{(L_1)} \frac{\eta}{\lambda^2 + \eta^2} e^{-\lambda^2-\eta^2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \xi)^l},$$

L_1 étant l'axe parallèle à l'axe réel $\mathcal{I}(\lambda) = -2i$; pour $1 < \eta$,

$$\mathfrak{A}_l(X, Y, t) = \frac{(-1)^l \pi i}{Z^l} + \frac{1}{(4\nu t)^{\frac{l}{2}}} \int_{(L_2)} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \eta^2} e^{-\lambda^2 - \eta^2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \xi)^l},$$

$$\mathfrak{B}_l(X, Y, t) = \frac{(-1)^{l+1} \pi}{Z^l} + \frac{1}{(4\nu t)^{\frac{l}{2}}} \int_{(L_2)} \frac{\eta}{\lambda^2 + \eta^2} e^{-\lambda^2 - \eta^2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \xi)^l},$$

(L_2) étant l'axe parallèle à l'axe réel $\mathcal{I}(\lambda) = -\frac{i}{2}$.

Le cas $\eta < -1$ se ramène au précédent, puisque $\mathfrak{A}_l$ est fonction paire de Y et $\mathfrak{B}_l$ fonction impaire. Remplaçons les symboles figurant sous les signes $\int$ par leurs valeurs absolues; désignons par la même lettre A diverses constantes numériques positives; il vient :

pour $Y^2 < 4\nu t$,

$$|\mathfrak{A}_l(X, Y, t)| < \frac{A}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}},$$

$$|\mathfrak{B}_l(X, Y, t)| < \frac{AY}{\sqrt{\nu t}\,[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}} < \frac{A}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}};$$

pour $\sqrt{4\nu t} < Y$,

$$\left| \mathfrak{A}_l(X, Y, t) + \frac{(-1)^{l+1} \pi i}{Z^l} \right| < \frac{A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}},$$

$$\left| \mathfrak{B}_l(X, Y, t) + \frac{(-1)^l \pi}{Z^l} \right| < \frac{A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}};$$

pour $Y < -\sqrt{4\nu t}$,

$$\left| \mathfrak{A}_l(X, Y, t) + \frac{(-1)^{l+1} \pi i}{(X - iY)^l} \right| < \frac{A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}},$$

$$\left| \mathfrak{B}_l(X, Y, t) + \frac{(-1)^{l+1} \pi}{(X - iY)^l} \right| < \frac{A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}}.$$

Majorons de même $\mathcal{C}_{l,q}(X, Y, t)$: l'intégrale

$$\int_{(\Lambda)} e^{-\frac{\lambda^2}{4\nu t}} \frac{d\lambda}{(\lambda - X)^l} \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{1}{(4\nu t)^{\frac{l-1}{2}}} \int_{(L_1)} e^{-\lambda^2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \xi)^l};$$

elle est donc inférieure en module à $\frac{A\sqrt{\nu t}}{[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}}$, d'où

$$|\mathcal{C}_{l,q}(X, Y, t)| < \frac{\nu A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}\left[1+\frac{Y^2}{\nu t}\right]^{\frac{q}{2}}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}}[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}}$$

$$< \frac{\nu A e^{-\frac{Y^2}{8\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}}[\nu t + X^2]^{\frac{l}{2}}\left[1+\frac{Y^2}{\nu t}\right]^{\frac{l}{2}}} < \frac{\nu A e^{-\frac{Y^2}{8\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}}[X^2 + Y^2]^{\frac{l}{2}}}.$$

Enfin en ce qui concerne $\mathcal{F}(Z, t)$ la dernière relation (16) nous montre qu'il suffit d'envisager le cas où $Y > 0$. Nous avons alors

$$\frac{\partial^q \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z^q} = \frac{\nu q!}{\pi(4\nu t)^{1+\frac{q}{2}}}\int_{L_1}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda^2}\frac{d\lambda}{(\lambda-\zeta)^{q+1}}.$$

(17) D'où

$$\left|\frac{\partial^q \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z^q}\right| < \frac{\nu A}{\sqrt{\nu t}[\nu t + X^2 + Y^2]^{\frac{1+q}{2}}}$$

pour $Y > 0$ et même pour $Y > -\sqrt{4\nu t}$. Notons, en outre, que $\frac{\partial^q \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z^q}$ augmente indéfiniment quand t tend vers zéro.

Appliquons ces résultats à la fonction $U - iV$, nous obtenons un tableau d'inégalités importantes.

Posons :

$$A_{p,q}(X, Y, \nu t) = \frac{A e^{-\frac{Y^2}{4\nu t}}\left[1+\frac{Y^2}{\nu t}\right]^{\frac{q}{2}}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}}[\nu t + X^2]^{1+\frac{p}{2}}} < \frac{A e^{-\frac{Y^2}{8\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}}[X^2+Y^2]^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Nous avons : pour $\sqrt{4\nu t} < Y$,

(18) $$\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial X^p \partial Y^q}\left[U - iV - \frac{Y}{4\nu t^2}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4\nu t}} - \frac{4\nu i}{Z^3} + \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z}\right]\right| < \nu A_{p,q}(X, Y, \nu t).$$

Donc, pour $\sqrt{4\nu t} < \mathrm{Y}$,

$$(18') \quad \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \mathrm{X}^p \partial \mathrm{Y}^q} \left[\mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} \right] \right| < \frac{\nu \mathrm{A}}{\sqrt{\nu t} [\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2]^{1+\frac{p+q}{2}}} + \nu \mathrm{A}_{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \nu t).$$

Pour $\mathrm{Y} < -\sqrt{4\nu t}$,

$$(19) \quad \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \mathrm{X}^p \partial \mathrm{Y}^q} \left[\mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathrm{Z}, t)}{\partial \mathrm{Z}} \right] \right| < \nu \mathrm{A}_{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \nu t).$$

Donc, pour $\mathrm{Y} < -\sqrt{4\nu t}$,

$$(19') \quad \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \mathrm{X}^p \partial \mathrm{Y}^q} \left\{ \mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}} \left[\frac{2i\nu}{\mathrm{Z}^2} \left(e^{-\frac{\mathrm{Z}^2}{4\nu t}} - 1 \right) \right] \right\} \right| < \frac{\nu \mathrm{A}}{\sqrt{\nu t} [\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2]^{1+\frac{p+q}{2}}} + \nu \mathrm{A}_{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \nu t);$$

Pour $\mathrm{Y}^2 < 4\nu t$,

$$(20) \quad \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \mathrm{X}^p \partial \mathrm{Y}^q} \left[\mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} \right] \right| < \frac{\nu \mathrm{A}}{(\nu t)^{\frac{1+q}{2}} [\nu t + \mathrm{X}^2]^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Si $q = 0$ ou si $q = 1$, on obtient des inégalités plus précises que (20) en tenant compte de la propriété (15) et en intégrant, par rapport à Y, les deux membres de (20) où l'on aura pris $q = 2$:

Pour $\mathrm{Y}^2 < 4\nu t$,

$$(20') \quad \left| \frac{\partial^{p+1}}{\partial \mathrm{X}^p \partial \mathrm{Y}} \left[\mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} \right] \right| < \frac{\nu \mathrm{A} \mathrm{Y}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}} [\nu t + \mathrm{X}^2]^{1+\frac{p}{2}}},$$

Pour $\mathrm{Y}^2 < 4\nu t$,

$$(20'') \quad \left| \frac{\partial^{p}}{\partial \mathrm{X}^p} \left[\mathrm{U} - i\mathrm{V} - \frac{\mathrm{Y}}{4\nu t^2} e^{-\frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{4\nu t}} \right] \right| < \frac{\nu \mathrm{A} \mathrm{Y}^2}{(\nu t)^{\frac{3}{2}} [\nu t + \mathrm{X}^2]^{1+\frac{p}{2}}}.$$

5. Relations avec les potentiels hydrodynamiques de M. Odqvist (*Math. Zeitschrift*, 1930, t. 32). — Nous nous proposons d'étudier les intégrales $\int_0^\infty (\mathrm{U} - i\mathrm{V})\,dt$. D'après le paragraphe 4 les intégrales $\int_0^\infty \mathcal{A}_l(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt$ et $\int_0^\infty \mathcal{B}_l(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt$ sont absolument et uniformément convergentes, tant que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2$ ne s'annule pas et si $l \geqq 3$. Si $l \geqq 2$, l'intégrale $\int_0^\infty \mathcal{C}_{l,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt$ est absolument et uniformément convergente au voisinage de tout point (X, Y) n'appartenant pas à l'axe des X. Donc, compte tenu de (5) et (8), on peut appliquer la règle de dérivation sous le signe somme aux trois derniéres intégrales écrites, excepté quand Y est nul. De même,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\mathcal{B}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)|\,dt &< \mathrm{A}\int_0^{\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu}} \left[\frac{e^{-\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu t}}}{\nu t + \mathrm{X}^2} + \frac{1}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}\right] dt + \mathrm{A}\int_{\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu}}^\infty \frac{\mathrm{Y}\,dt}{\sqrt{\nu t}[\nu t + \mathrm{X}^2]} \\ &< \mathrm{A}\int_0^{\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu}} \left[\frac{e^{-\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu t}}}{\nu t} + \frac{1}{\mathrm{Y}^2}\right] dt + \mathrm{A}\int_{\frac{\mathrm{Y}^2}{4\nu}}^\infty \frac{\mathrm{Y}\,dt}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\mathrm{A}}{\nu}.\end{aligned}$$

La fonction $\int_0^\infty \mathcal{B}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt$ est continue et bornée dans tout le plan; elle s'annule avec Y; et l'on a, Y étant supposé positif jusqu'à nouvelle indication,

$$\Delta\int_0^\infty \mathcal{B}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{B}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)}{\partial t}\,dt = \frac{\pi}{\nu \mathrm{Z}^2}.$$

D'où nécessairement

$$\int_0^\infty \mathcal{B}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)\,dt = \frac{\pi i}{2\nu}\,\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}.$$

D'après (17),

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial^q \mathcal{F}(\mathrm{Z}, t)}{\partial \mathrm{Z}^q}\right| dt < \int_0^\infty \frac{\nu \mathrm{A}\,dt}{\sqrt{\nu t}[\nu t + \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2]^{\frac{1+q}{2}}} < \frac{\mathrm{A}}{[\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2]^{\frac{q}{2}}} \qquad \text{pour } q \geqq 1.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\mathrm{U} - i\mathrm{V})\,dt &= \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} - i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}\right)\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}} - \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(\mathrm{Z}, t)}{\partial \mathrm{Z}}\,dt \\ &= \frac{2\mathrm{XY}(\mathrm{X} - i\mathrm{Y})}{(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^2} + \frac{i}{2\mathrm{Z}} - \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(\mathrm{Z}, t)}{\partial \mathrm{Z}}\,dt;\end{aligned}$$

le premier membre est continu et nul au voisinage de l'axe des X, origine exclue; la fonction analytique $\int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z} dt$ est, pour $Y > 0$, inférieure en module à $[X^2 + Y^2]^{-\frac{1}{2}}$. On a donc nécessairement pour $Y > 0$

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z} = \frac{i}{2Z} \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty (U - iV)\, dt = \frac{2XY(X - iY)}{[X^2 + Y^2]^2}.$$

L'on reconnaît en $\int_0^\infty U\, dt$ et $\int_0^\infty V\, dt$ deux composantes du tenseur à l'aide duquel M. Odqvist construit ses potentiels hydrodynamiques de double couche, relatifs aux mouvements permanents.

Supposons maintenant $Y < 0$. Le caractère impair de $\mathcal{B}_2(X, Y, t)$ par rapport à Y prouve que

$$\int_0^\infty \mathcal{B}_2(X, Y, t)\, dt = \frac{\pi i}{2\nu} \frac{Y}{X - iY}.$$

D'où résulte, par l'intermédiaire de (11) :

$$\int_0^\infty (U - iV)\, dt = \frac{i}{2Z} - \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z} dt,$$

sous réserve que la dernière intégrale écrite ait un sens.

Or, d'après la dernière relation (16),

$$\int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z} dt = \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(-Z, t)}{\partial(-Z)} dt + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{2i\nu}{Z^2}\left(e^{-\frac{Z^2}{4\nu t}} - 1\right)\right] dt.$$

Utilisons la première relation (21); on a

$$\int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t)}{\partial Z} dt = -\frac{i}{2Z} - \frac{2}{Z}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2i\nu t}{Z^2}\left(e^{-\frac{Z^2}{4\nu t}} - 1\right)\right] dt = \frac{i}{2Z},$$

à condition que $X^2 - Y^2 \geqq 0$.

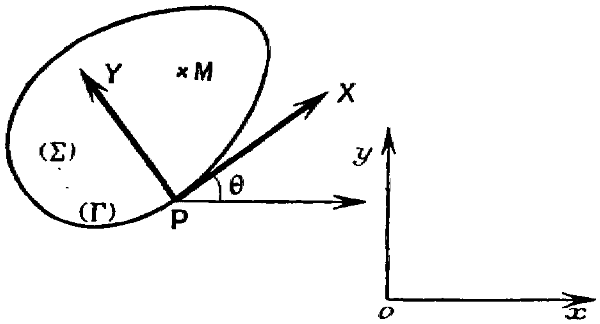
(22) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Finalement l'intégrale } \int_0^\infty (U - iV)dt \text{ est nulle pour} \\ -|X| \leqq Y < 0 \text{ et n'a aucun sens pour } Y < -|X|. \end{array} \right.$

Les résultats obtenus au cours de ce paragraphe auraient pu être déduits directement des formules (7), (12) et (13). Il faut en retenir, (21) et (22) : l'intégrale $\int_0^x (U - iV)\,dt$ a des expressions analytiques différentes dans les deux demi-plans $Y > 0$ et $Y < 0$; plus généralement il en est de même de l'intégrale $\int_0^\varepsilon (U - iV)\,dt$, quelle que soit la constante positive ε, car $\int_\varepsilon^x (U - iV)\,dt$ est une fonction analytique de X et de Y; de par (18) et (19) nous savions d'ailleurs que la fonction $U - iV + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z}$ a également, dans ces deux demi-plans, pour $t = 0$, deux expressions analytiques différentes.

II. — Un potentiel qui satisfait les équations du mouvement infiniment lent d'un liquide visqueux.

6. Définitions. — Soit une aire Σ limitée par une courbe Γ; cette courbe doit admettre en chaque point une tangente et un rayon de

Fig. 2.



courbure; la borne inférieure de ces rayons de courbure doit être positive. La courbe Γ est orientée dans le sens positif; elle est décrite par un point P d'abscisse curviligne σ. Soit M un point situé dans Σ ou sur Γ; ses coordonnées sont x et y par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes; elles sont X et Y par rapport au système qui a pour origine P, pour premier axe la tangente positive, pour second axe la normale intérieure à Σ. Nous nommons θ l'angle que fait l'axe des X avec l'axe des x. Soit $\Phi(s, t)$ une fonction réelle et continue; nous supposerons convergente l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} \oint |\Phi(s, t)|\, ds.$$

Nous allons étudier le vecteur [1] $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ que définit la relation

$$(23) \quad u(x, y, t) - i v(x, y, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \oint \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)} [\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t') - i \mathrm{V}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t')]\, ds.$$

Cette étude est immédiate dans le cas particulier où Φ est indépendant de t. u et v en sont également indépendants. Si le contour est convexe, (21) permet d'affirmer que, sur $\Sigma + \Gamma$, u et v sont identiques à des potentiels hydrodynamiques d'Odqvist; et l'on a, sur Σ,

$$\nu \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \nu \Delta v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

avec

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = 4 \nu \oint \Phi(s) \frac{\mathrm{XY}}{(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^2} ds;$$

Le vecteur u, v n'est pas continu sur $\Sigma + \Gamma$: quand le point M de Σ tend vers le point P de Γ, on a

$$(24) \qquad \lim_{\mathrm{M} \to \mathrm{P}} [u - iv]_{\mathrm{M}} = [u - iv]_{\mathrm{P}} + \pi \Phi(s)\, e^{-i\theta(s)}.$$

Si Γ n'est pas convexe, ces faits sont inexacts, comme le montre (22). Nous allons donc *supposer* Γ *convexe*, et cette hypothèse est nécessaire à la validité des résultats que contient cette section du chapitre.

7. Le vecteur (u, v) a l'intérieur de Σ. — On déduit facilement des relations (18'), (20), (20') et (20'') les inégalités

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} [\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t') - i \mathrm{V}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t')] \right| < \frac{\nu \mathrm{B}_{p,q}(x, y)}{\sqrt{\nu(t-t')}\, [1 + \nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}},$$

---

[1] Il est facile de voir que ce vecteur est indépendant du choix des axes de coordonnées.

le symbole $B_{p,q}(x, y)$ représente une fonction bornée sur tout domaine intérieur à Σ. Ce résultat nous permet de constater que la formule (23) a un sens, et qu'on peut lui appliquer la règle de dérivation sous le signe $\int$ un nombre quelconque de fois par rapport à x et y; *dès lors $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ sont à l'intérieur de Σ des fonctions continues qui admettent des dérivées partielles de tous les ordres en x et y.*

Démonstration de la relation

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Écrivons (2') sous la forme

$$\mathcal{R}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right] e^{-i\theta}[U(X, Y, t-t') - iV(X, Y, t-t')]\right\} = 0.$$

La règle de dérivation sous le signe somme permet d'en déduire

$$\mathcal{R}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right][u(x, y, t) - iv(x, y, t)]\right\} = 0.$$

La relation (2) est donc vérifiée en tout point intérieur à Σ.

Démonstration des relations

$$\nu\,\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \nu\,\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right][u(x, y, t) - iv(x, y, t)] &= \int_{-\infty}^{t} dt' \oint \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)} \\ &\quad \times \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right][U(X, Y, t-t') - iV(X, Y, t-t')]\, ds.\end{aligned} \tag{25}$$

Les relations (1') et (14) nous apprennent que :

$$\begin{aligned}\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right][U(X, Y, t-t') - iV(X, Y, t-t')] \\ = \frac{\partial}{\partial t}U(X, Y, t-t') - i\frac{\partial}{\partial t}V(X, Y, t-t') + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(Z, t-t')}{\partial Z\, dt};\end{aligned} \tag{26}$$

or $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(Z, t-t')}{\partial Z \partial t}$ n'est sommable sur aucun intervalle $t_0 < t' < t$, puisque d'après (17) $\frac{\partial \mathcal{F}(Z, t-t')}{\partial Z}$ augmente indéfiniment quand $t-t'$ tend vers zéro. L'obtention de formules du type (1) n'est donc pas immédiate.

Mais d'après (25) on a, si $t_1 < t_2$,

$$(25') \quad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] & [u(x, y, t) - i v(x, y, t)] \, dt \\ = \int_{-\infty}^{t_1} & dt' \oint \Phi(s, t') e^{-i\theta} ds \\ & \times \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right] [U(X, Y, t-t') - i V(X, Y, t-t')] \, dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} & dt' \oint \Phi(s, t') e^{-i\theta} ds \\ & \times \int_{t'}^{t_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right] [U(X, Y, t-t') - i V(X, Y, t-t')] \, dt. \end{aligned}$$

De même (26) nous donne pour $t' < t_1 < t_2$,

$$(26') \quad \begin{aligned} \nu \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right] & [U(X, Y, t-t') - i V(X, Y, t-t')] \, dt \\ & = \left[U(X, Y, t-t') - i V(X, Y, t-t') + \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t-t')}{\partial Z}\right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière relation faisons tendre t_1 vers t'; d'après (18),

$$U(X, Y, t_1 - t') - i V(X, Y, t_1 - t') + \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t_1 - t')}{\partial Z}$$

tend vers $-2\nu i \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{Z^2}\right)$; il vient donc

$$(26'') \quad \begin{aligned} \nu \int_{t'}^{t_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_2}\right] & [U(X, Y, t-t') - i V(X, Y, t-t')] \, dt \\ & = U(X, Y, t_2 - t') - i V(X, Y, t_2 - t') \\ & \quad + \frac{\partial \mathcal{F}(Z, t_2 - t')}{\partial Z} + 2\nu i \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{Z^2}\right). \end{aligned}$$

Transformons à l'aide de (26') et (26'') le second membre de (25');

nous obtenons

$$(27)\qquad \begin{aligned} \nu\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right][u(x,y,t)-iv(x,y,t)]\,dt \\ =[u(x,y,t)-iv(x,y,t)]_{t_1}^{t_2} \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{-\infty}^{t}dt'\oint\Phi(s,t')\mathcal{F}(Z,t-t')\,ds\right]_{t_1}^{t_2} \\ +2\nu i\frac{\partial}{\partial z}\int_{t_1}^{t_2}dt'\oint\Phi(s,t')\frac{1}{Z^2}\,ds. \end{aligned}$$

D'où résultent les relations (1), avec

$$(28)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\rho}p(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{t}dt'\oint\Phi(s,t')\mathcal{F}(Z,t-t')\,ds\right\} \\ -2\nu\mathcal{J}\left\{\oint\Phi(s,t)\frac{1}{Z^2}\,ds\right\}. \end{aligned}$$

Toutefois la réserve doit être faite que la dérivée en $\frac{\partial}{\partial t}$ figurant au second membre ait un sens : c'est par exemple le cas lorsque $\Phi(s, t)$ admet par rapport à t des nombres dérivés bornés.

8. Intérieur du domaine et points frontières. — *Inégalités préliminaires.* — On déduit de (18′) et de (20″) les inégalités [1]

$$\left\{\begin{aligned} &|U(X,Y,t)-iV(X,Y,t)|<\frac{A}{t}\,\frac{Y}{X^2+Y^2}, \\ &\int_0^{\infty}|U(X,Y,t)-iV(X,Y,t)|\,dt<\frac{AY}{X^2+Y^2}. \end{aligned}\right.$$

(29) Soit

$$E(x,y,t)=\oint|U(X,Y,t)-iV(X,Y,t)|\,ds.$$

On a donc, où que soit le point (x, y) à l'intérieur de Σ ou sur Γ,

$$E(x,y,t)<\frac{A}{t}\qquad\text{et}\qquad\int_0^{\infty}E(x,y,t)\,dt<A.$$

---

[1] Signalons en outre une inégalité valable seulement sur $\Sigma+\Gamma$: on a $E(t)<\frac{AB}{\nu t^2}$ pour $t>\frac{B^2}{4\nu}$, B désignant la plus grande distance de deux tangentes à Γ parallèles.

Discontinuité à la frontière du vecteur u, v. — Soient t_0 une valeur quelconque de t, et ε un intervalle de temps arbitrairement faible. Introduisons les deux fonctions suivantes :

$$\Phi_1(s,t)=\begin{cases}\Phi(s,t)-\Phi(s,t_0) & \text{pour } |t-t_0|>\varepsilon,\\ 0 & \text{pour } |t-t_0|\leqq\varepsilon;\end{cases}$$

$$\Phi_2(s,t)=\begin{cases}0 & \text{pour } |t-t_0|>\varepsilon,\\ \Phi(s,t)-\Phi(s,t_0) & \text{pour } |t-t_0|\leqq\varepsilon.\end{cases}$$

Le maximum η de $|\Phi_2(s,t)|$ tend vers zéro avec ε.

Soient

$$u_0(x,y)-iv_0(x,y),\qquad u_1(x,y,t)-iv_1(x,y,t),$$
$$u_2(x,y,t)-iv_2(x,y,t)$$

les trois potentiels qu'on obtient en remplaçant dans la formule (23) la fonction $\Phi(s,t')$ respectivement par les fonctions $\Phi(s,t_0)$, $\Phi_1(s,t')$ et $\Phi_2(s,t')$. Nous avons

$$u-iv=u_0-iv_0+u_1-iv_1+u_2-iv_2.$$

Le vecteur u_0-iv_0 est continu à l'intérieur de Σ; il est continu le long de Γ; il est discontinu sur $\Sigma+\Gamma$, comme le montre la formule (24).

Pour $|t-t_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ le vecteur u_1, v_1 est continu sur $\Sigma+\Gamma$.

Enfin on a, d'après (29),

$$|u_2(x,y,t)-iv_2(x,y,t)|<\eta\int_{-\infty}^{t_0}\mathrm{E}(x,y,t_0-t')\,dt'<\mathrm{A}\eta.$$

Comme η est arbitrairement faible il est en résulte que $u-iv$ est continu à l'intérieur de Σ, est continu le long de Γ; et si le point (x,y) intérieur à Σ tend vers le point frontière d'abscisse curviligne σ, de coordonnées (x_0,y_0), alors que t tend vers t_0, on a

$$(30)\qquad \begin{aligned}&\lim[u(x,y,t)-iv(x,y,t)]\\&\quad=u(x_0,y_0,t_0)-iv(x_0,y_0,t_0)+\pi\Phi(\sigma,t_0)e^{-i\theta(\sigma)}.\end{aligned}$$

Majoration de u et de v. — Le problème de majorer le vecteur $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ que définit (23) se présente toujours en pratique de la façon suivante : on connait une inégalité de la forme

$$(31) \qquad |\Phi(s, t)| < \mathop{\mathrm{S}}_i \int_{-\infty}^{t} G_i(t - t_1)\, d F_i(t_1);$$

les G_i sont des fonctions positives simples [par exemple $(t - t_1)^\alpha$, $-1 < \alpha$]; les F_i sont des fonctions croissantes; il s'agit d'en déduire une majorante de $|u - iv|$ valable sur $\Sigma + \Gamma$.

On a

$$\begin{aligned}
&|u(x, y, t) - iv(x, y, t)| \\
&\quad < \int_{-\infty}^{t} E(x, y, t - t')\, dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathop{\mathrm{S}}_i G_i(t' - t_1)\, d F_i(t_1) \\
&\quad < \mathop{\mathrm{S}}_i \int_{-\infty}^{t} d F_i(t_1) \int_{t_1}^{t} E(x, y, t - t')\, G_i(t' - t_1)\, dt'.
\end{aligned}$$

Il suffira pour la suite d'utiliser l'inégalité déduite de (29),

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t} E(x, y, t - t')\, G_i(t' - t_1)\, dt' \\
&\quad < \frac{2A}{t - t_1} \int_{t_1}^{\frac{t+t_1}{2}} G_i(t' - t_1)\, dt' + A \left[\text{max. de } G_i(t' - t_1) \text{ pour } \frac{t + t_1}{2} < t' < t.\right]
\end{aligned}$$

$$(32)\left\{\begin{array}{l}
\text{Finalement on a, sur } \Sigma + \Gamma, \\
\qquad |u(x, y, t) - iv(x, y, t)| < A \mathop{\mathrm{S}}_i \int_{-\infty}^{t} \tilde{G}_i(t - t_1)\, d F_i(t_1) \\
\text{avec} \\
\qquad \tilde{G}_i(t) = \left[\text{max. de } G_i(t') \text{ pour } \frac{t}{2} < t' < t\right] + \frac{1}{t} \int_0^{\frac{t}{2}} G_i(t')\, dt'.
\end{array}\right.$$

Exemple : si $G_i(t) = at^\alpha$, on a

$$\tilde{G}_i(t) = a\left[\frac{1}{1+\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha+1}} + 1 \quad\right] t^\alpha \qquad \text{pour } \alpha > 0,$$

$$\tilde{G}_i(t) = a\left[\frac{1}{1+\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha+1}} + 2^{-\alpha}\right] t^\alpha \qquad \text{pour } \alpha < 0.$$

9. Le vecteur (u, v) le long de Γ. — M étant le point de Γ qui a pour abscisse curviligne σ, nous poserons

$$U(X, Y, t) - iV(X, Y, t) = \Omega(\sigma, s, t).$$

Le vecteur que nous allons étudier le long de Γ est donc défini par la relation

$$(33) \quad u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \oint \Phi(s, t') e^{-i\theta_s} \Omega(\sigma, s, t-t')\, ds.$$

Inégalités préliminaires. — Soit l la longueur $\overline{PM}$. Nous allons établir des inégalités

$$|\Omega(\sigma, s, t)| < \frac{B\nu^{\gamma}}{t^{\alpha} l^{\beta}}, \qquad \left|\frac{\partial \Omega(\sigma, s, t)}{\partial \sigma}\right| < \frac{B\nu^{\gamma}}{t^{\alpha} l^{\beta+1}};$$

α et β devront être inférieurs à 1; la lettre B représentera désormais diverses quantités positives qui dépendront seulement de la forme de Γ.

Nous remarquerons tout d'abord que les inégalités (18'), (20') et (20'') permettent de majorer les quantités

$$(\nu t)^{\alpha} |U - iV|, \quad (\nu t)^{\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial X}[U - iV]\right|, \quad (\nu t)^{\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial Y}[U - iV]\right|$$

par des expressions de la forme $A\nu^{a} X^{b} Y^{c} [X^2 + Y^2]^{d}$: il suffit d'utiliser l'inégalité $e^{-K^2} < \frac{A}{K^p}$, qui est valable quel que soit K quand p est positif et quand A est convenablement choisi en fonction de p. Il vient, pour $\frac{1}{2} \leqq \alpha < 1$,

$$(\nu t)^{\alpha} |U - iV| < \frac{\nu A Y^{2\alpha-1}}{X^2 + Y^2}, \qquad (\nu t)^{\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial X}[U - iV]\right| < \frac{\nu A Y^{2\alpha-1}}{[X^2 + Y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$(\nu t)^{\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial Y}[U - iV]\right| < \frac{\nu A Y^{2\alpha-2}}{X^2 + Y^2}.$$

D'où

$$|\Omega(\sigma, s, t)| < \frac{\nu A}{(\nu t)^{\alpha}} \frac{Y^{2\alpha-1}}{X^2 + Y^2}$$

et

$$\left|\frac{\partial \Omega(\sigma, s, t)}{\partial \sigma}\right| < \frac{\nu A}{(\nu t)^{\alpha}} \frac{Y^{2\alpha-1}}{[X^2 + Y^2]^{\frac{3}{2}}} \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| + \frac{\nu A}{(\nu t)^{\alpha}} \frac{Y^{2\alpha-2}}{X^2 + Y^2} \left|\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right|.$$

Or $\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| < 1$; d'autre part, si φ est l'angle, compris entre o et π, que font les tangentes en M et en P, on a

$$\left|\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right| = \sin\varphi < 2\sin\frac{\varphi}{2} \qquad \text{et} \qquad Y > \int_0^{\varphi} R_0 \sin\varphi' \, d\varphi' = 2 R_0 \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

R_0 étant la borne inférieure des rayons de courbure de la courbe *convexe* Γ; ainsi $\left|\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right| < \sqrt{\frac{2Y}{R_0}}$; finalement

$$\left|\frac{\partial \Omega(\sigma, s, t)}{\partial \sigma}\right| < \frac{\nu A}{(\nu t)^{\alpha}} \frac{Y^{2\alpha-1}}{[X^2+Y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu B}{(\nu t)^{\alpha}} \frac{Y^{2\alpha-\frac{3}{2}}}{X^2+Y^2}.$$

Nous avons

$$X^2 + Y^2 = l^2 \qquad \text{et} \qquad Y < B l^2.$$

D'où, pour $\frac{3}{4} < \alpha < 1$,

$$|\Omega(\sigma, s, t)| < \frac{\nu B}{(\nu t)^{\alpha} l^{4(1-\alpha)}} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial \Omega(\sigma, s, t)}{\partial \sigma}\right| < \frac{\nu B}{(\nu t)^{\alpha} l^{1+4(1-\alpha)}}.$$

Il nous suffira pour la suite d'utiliser une seule valeur particulière de α : nous ferons $\alpha = \frac{7}{8}$ et nous aurons donc

$$(34) \qquad |\Omega(\sigma, s, t)| < \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B}{t^{\frac{7}{8}} l^{\frac{1}{2}}}, \qquad \left|\frac{\partial \Omega(\sigma, s, t)}{\partial \sigma}\right| < \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B}{t^{\frac{7}{8}} l^{\frac{3}{2}}}.$$

Application des inégalités (34) *à la relation* (33). — Soit $\varphi(t)$ le maximum à l'instant t de la fonction $|\Phi(s, t)|$. Nous avons

$$\left|\oint \Phi(s, t') e^{-i\theta_s} \Omega(\sigma, s, t-t') \, ds\right| < \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}} \varphi(t').$$

Donc, en tout point (x, y) de Γ,

$$(35) \qquad |u(x, y, t) - i v(x, y, t)| < \int_{-\infty}^{t} \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}} \varphi(t') \, dt'.$$

Soient d'autre part deux points de Γ : M_1 et M_2; soient σ_1 et σ_2 leurs abscisses curvilignes; (x_1, y_1) et (x_2, y_2) leurs coordonnées; l leur distance; soit Γ_0 le plus petit des deux arcs $\widehat{M_1 M_2}$; soit Γ_1 l'arc de longueur double de Γ_0 et qui a même milieu. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\oint \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}\, \Omega(\sigma_1, s, t-t')\, ds - \oint \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}\, \Omega(\sigma_2, s, t-t')\, ds\right| \\
&\quad < \left|\int_{\Gamma_0} d\sigma \int_{\Gamma-\Gamma_1} \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}\, \frac{\partial \Omega(\sigma, s, t-t')}{\partial \sigma}\, ds\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\Gamma_1} \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}\, \Omega(\sigma_1, s, t-t')\, ds\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\Gamma_1} \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}\, \Omega(\sigma_2, s, t-t')\, ds\right| < \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B\, t'^{\frac{1}{2}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\, \varphi(t').
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(36)\qquad &|u(x_1, y_1, t) - i v(x_1, y_1, t) - u(x_2, y_2, t) + i v(x_2, y_2, t)| \\
&\quad < t^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{\nu^{\frac{1}{8}} B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\, \varphi(t')\, dt'.
\end{aligned}$$

III. — Le premier problème aux valeurs frontières.

10. Énoncé du problème. — Écrivons à nouveau le système

$$(1)\qquad \nu \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \nu \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Il s'agit d'en obtenir une solution continue $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ qui soit définie pour $t \geqq 0$ sur le domaine convexe Σ, qui soit nulle pour $t = 0$ et qui prenne le long de Γ, pour $t > 0$, des valeurs données à l'avance $u(\sigma, t)$, $v(\sigma, t)$; ces données sont assujetties à vérifier la condition nécessaire

$$\oint u(\sigma, t)\, dy - v(\sigma, t)\, dx = 0.$$

Nous serons conduits à envisager la fonction $\mathfrak{S}(t)$ égale au maximum à l'instant t de l'expression

$$|u(\sigma, t)| + |v(\sigma, t)| + \left|\int_{s=\sigma-B}^{s=\sigma+B} [v(s, t)\sin\theta(s) - u(s, t)\cos\theta(s)]\, \frac{ds}{s-\sigma}\right|$$

(l'intégrale devant être prise au sens de Cauchy). Et nos raisonnements nous fourniront non seulement une construction théorique des fonctions u, v, p, mais aussi *une règle pratique* permettant de majorer, à l'aide de la fonction $\mathfrak{S}(t)$, la plus grande longueur à l'instant t, $\mathfrak{V}(t)$, du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$.

Nature de la solution. — Cherchons une solution du problème de la forme

$$(37) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) - i v(x, y, t) &= \int_0^t dt' \oint \Phi(s, t') e^{-i\theta_s} [U(X, Y, t-t') - iV(X, Y, t-t')] \, ds \\ &\quad + \oint \Psi(s, t) \, e^{-i\theta_s} \frac{1}{X + iY} \, ds, \end{aligned}$$

les fonctions $\Phi(s, t)$ et $\Psi(s, t)$ devant être réelles. Le système (1), (2) est bien vérifié, et l'on a, en vertu de (28),

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R} \left\{ \int_0^t dt' \oint \Phi(t, t') \varpi(Z, t-t') \, ds - \oint \Psi(s, t) \log Z \, ds \right\} \\ - 2\nu \mathcal{I} \left\{ \oint \Phi(s, t) \frac{1}{Z^2} \, ds \right\}. \end{aligned}$$

La réserve doit être faite que la dérivée en $\frac{\partial}{\partial t}$ qui figure au second membre ait un sens.

Faisons tendre le point (x, y) intérieur à Σ vers le point frontière d'abscisse curviligne σ, de coordonnées x_0, y_0; on a, en vertu de (30),

$$\begin{aligned} &\lim [u(x, y, t) - i v(x, y, t)] \\ &\quad = u(x_0, y_0, t) - i v(x_0, y_0, t) + \pi \Phi(\sigma, t) e^{-i\theta_\sigma} - i\pi \Psi(\sigma, t) e^{-i\theta_\sigma}. \end{aligned}$$

Pour que les formules (37) fournissent une solution du problème, il faut et il suffit donc que l'on ait

$$\begin{aligned} &\pi \Phi(\sigma, t) e^{-i\theta_\sigma} - i\pi \Psi(\sigma, t) e^{-i\theta_\sigma} \\ &\quad + \int_0^t dt' \oint \Phi(s, t') e^{-i\theta_s} \Omega(\sigma, s, t-t') \, ds \\ &\qquad + \oint \Psi(s, t) e^{-i\theta_s} \frac{1}{X_0 + iY_0} \, ds = u(\sigma, t) - i v(\sigma, t). \end{aligned}$$

Soit r la distance rectiligne des points d'abscisses curvilignes s et σ;

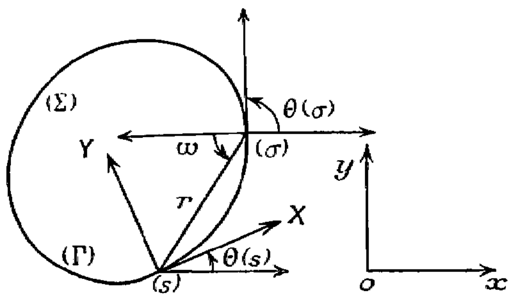
soit ω l'angle que fait avec la normale intérieure au point σ la direction qui joint le point σ au point s. L'équation précédente équivaut au système

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pi \Psi(\sigma, t) - \oint \frac{\cos\omega}{r} \Psi(s, t)\, ds \\
&\quad = \Im \left\{ \int_0^t dt' \oint \Phi(s, t')\, e^{i\theta(\sigma) - i\theta(s)}\, \Omega(\sigma, s, t - t')\, ds \right\} \\
&\qquad + v(\sigma, t) \cos\theta(\sigma) - u(\sigma, t) \sin\theta(\sigma), \\
&\pi \Phi(\sigma, t) = - \Re \left\{ \int_0^t dt' \oint \Phi(s, t')\, e^{i\theta(\sigma) - i\theta(s)}\, \Omega(\sigma, s, t - t')\, ds \right\} \\
&\qquad\qquad - \oint \frac{\sin\omega}{r} \Psi(s, t)\, ds + u(\sigma, t) \cos\theta(\sigma) + v(\sigma, t) \sin\theta(\sigma).
\end{aligned}
\right.
$$

La dernière intégrale doit être prise *au sens de Cauchy*.

11. Intégration du système (39). — Nous allons définir par récurrence une suite de fonctions $\Psi_m(\sigma, t)$, $\Phi_m(\sigma, t)$ et établir des inégalités les concernant; nous désignerons à cet effet par $\varphi_m(t)$ le maximum à l'instant t de $|\Phi_m(\sigma, t)|$. Écrivons le système

Fig. 3.



$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pi \Psi_1(\sigma, t) - \oint \frac{\cos\omega}{r} \Psi_1(s, t)\, ds = v(\sigma, t) \cos\theta(\sigma) - u(\sigma, t) \sin\theta(\sigma), \\
&\pi \Phi_1(\sigma, t) = - \oint \frac{\sin\omega}{r} \Psi_1(s, t)\, ds + u(\sigma, t) \cos\theta(\sigma) + v(\sigma, t) \sin\theta(\sigma),
\end{aligned}
\right.
$$

la dernière intégrale devant être prise *au sens de Cauchy*.

Puisque

$$\oint [v(\sigma, t)\cos\theta(\sigma) - u(\sigma, t)\sin\theta(\sigma)]\, d\sigma = 0,$$

la première équation intégrale admet une infinité de solutions; nous nommons $\Psi_1(\sigma, t)$ celle dont le maximum du module à chaque instant est le plus petit possible. Nous avons donc

$$(41)\quad |\Psi_1(\sigma, t)| + \left|\int_{s=\sigma-B}^{s=\sigma+B} \Psi_1(s, t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| < B\,\mathfrak{V}(t), \qquad \varphi_1(t) < B\,\mathfrak{V}(t).$$

Supposons maintenant que nous ayons construit $\Psi_n(\sigma, t)$ et $\Phi_n(\sigma, t)$ ($n \geqq 1$); définissons $\Psi_{n+1}(\sigma, t)$ et $\Phi_{n+1}(\sigma, t)$. Écrivons le système

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi\Psi_{n+1}(\sigma, t) - \oint \frac{\cos\omega}{r}\Psi_{n+1}(s, t)\, ds \\ &\quad = \mathcal{I}\left\{\int_0^t dt' \oint \Phi_n(s, t')\, e^{i\theta(\sigma) - i\theta(s)}\,\Omega(\sigma, s, t-t')\, ds\right\}, \\ &\pi\Phi_{n+1}(\sigma, t) = -\mathcal{R}\left\{\int_0^t dt' \oint \Phi_n(s, t')\, e^{i\theta(\sigma) - i\theta(s)}\,\Omega(\sigma, s, t-t')\, ds\right\} \\ &\qquad - \oint \frac{\sin\omega}{r}\Psi_n(s, t)\, dt \end{aligned}\right.$$

(la dernière intégrale doit être prise *au sens de Cauchy*).

Pour étudier les seconds membres de ces équations, posons

$$\begin{aligned} &u_n(x, y, t) - i v_n(x, y, t) \\ &\quad = \int_0^t dt' \oint \Phi_n(s, t')\, e^{-i\theta(s)}[U(X, Y, t-t') - iV(X, Y, t-t')]\, ds. \end{aligned}$$

La relation $\frac{\partial u_n(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_n(x, y, t)}{\partial y} = 0$ et la continuité au voisinage de Γ de la composante normale du vecteur $u_n(x, y, t)$, $v_n(x, y, t)$ prouvent que

$$\oint [v_n(x, y, t)\cos\theta(\sigma) - u_n(x, y, t)\sin\theta(\sigma)]\, d\sigma = 0.$$

Or le second membre de la première équation (42) vaut justement

$$-[v_n(x, y, t)\cos\theta(\sigma) - u_n(x, y, t)\sin\theta(\sigma)].$$

Cette équation intégrale admet donc une infinité de solutions. Nous nommons $\Psi_{n+1}(\sigma, t)$ celle dont le maximum du module à chaque instant est le plus petit possible.

D'autre part les formules (35) et (36) nous apprennent que le long de Γ,

$$|u_n(x, y, t) - i v_n(x, y, t)| < \int_0^t \frac{\nu^{\frac{1}{8}}B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\varphi_n(t')\,dt',$$

$$|u_n(x_1, y_1, t) - i v_n(x_1, y_1, t) - u(x_2, y_2, t) + i v(x_2, y_2, t)|$$
$$< l^{\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{\nu^{\frac{1}{8}}B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\varphi_n(t')\,dt'.$$

On en déduit

$$(43)\quad \begin{cases} |\Psi_{n+1}(\sigma, t)| < \displaystyle\int_0^t \frac{\nu^{\frac{1}{8}}B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\varphi_n(t')\,dt', \\ |\Psi_{n+1}(\sigma_1, t) - \Psi_{n+1}(\sigma_2, t)| < l^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^t \frac{\nu^{\frac{1}{8}}B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\varphi_n(t')\,dt', \end{cases}$$

$$\varphi_{n+1}(t) < \int_0^t \frac{\nu^{\frac{1}{8}}B}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\varphi_n(t')\,dt'.$$

Rappelons que les constantes B qui figurent dans ces formules dépendent exclusivement du contour Γ, non de l'indice n. On a donc

$$(44)\qquad \varphi_{n+1}(t) < \int_0^t \frac{\nu^{\frac{n}{8}}B^n\Gamma^n\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{8}\right)}(t-t')^{\frac{n}{8}-1}\varphi_1(t')\,dt'.$$

Or la série $\displaystyle\mathop{\mathrm{S}}_1^{\infty} \frac{\nu^{\frac{n}{8}}B^n\Gamma^n\left(\frac{n}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}(t-t')^{\frac{n}{8}-1}$ est convergente et sa somme est inférieure à une expression de la forme $\dfrac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}} + B\nu e^{B\nu(t-t')}$.

On a donc le droit d'écrire

$$
(45)\quad \begin{cases}
|\Phi_2(\sigma, t)| + |\Phi_3(\sigma, t)| + |\Phi_4(\sigma, t)| + \dots \\
\qquad < \displaystyle\int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\,\varphi_1(t')\,dt' + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')}\,\varphi_1(t')\,dt', \\
|\Psi_2(\sigma, t)| + |\Psi_3(\sigma, t)| + |\Psi_4(\sigma, t)| + \dots \\
\qquad < \displaystyle\int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\,\varphi_1(t')\,dt' + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')}\,\varphi_1(t')\,dt', \\
|\Psi_2(\sigma_1, t) - \Psi_2(\sigma_2, t)| + |\Psi_3(\sigma_1, t) - \Psi_3(\sigma_2, t)| + \dots \\
\qquad < l^{\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\,\varphi_1(t')\,dt' + l^{\frac{1}{2}} \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')}\,\varphi_1(t')\,dt'.
\end{cases}
$$

Dès lors une solution du système (39) est fournie par les formules

$$
(46)\quad \begin{cases}
\Phi(\sigma, t) = \Phi_1(\sigma, t) + \Phi_2(\sigma, t) + \Phi_3(\sigma, t) + \dots, \\
\Psi(\sigma, t) = \Psi_1(\sigma, t) + \Psi_2(\sigma, t) + \Psi_3(\sigma, t) + \dots.
\end{cases}
$$

Remarque. — Le système (1), (2) ne peut être considéré comme effectivement résolu par les formules (37), (38), (40), (42), (46) que si la dérivée en $\frac{\partial}{\partial t}$ qui figure dans (38) existe réellement. En particulier cette existence est assurée quand $\frac{\partial \Phi(\sigma, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Psi(\sigma, t)}{\partial t}$ existent et sont bornés; c'est le cas lorsque l'expression

$$
\left|\frac{\partial u(\sigma, t)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial v(\sigma, t)}{\partial t}\right| \\
+ \left| \int_{s=\sigma-\mathrm{R}}^{s=\sigma+\mathrm{R}} \left[\frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \sin \theta(s) - \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \cos \theta(s) \right] \frac{ds}{s-\sigma} \right|
$$

reste bornée tant que t n'augmente pas indéfiniment : les développements (46) peuvent alors être dérivés terme à terme par rapport à t.

12. Obtention d'une majorante de $\mathcal{V}(t)$, maximum à l'instant t du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$.

La deuxième intégrale qui figure dans (37),

$$
\oint \Psi(s, t)\, e^{-i\theta(s)} \frac{1}{X + iY}\, ds,
$$

a un module inférieur au maximum à l'instant t de l'expression

$$B|\Psi(\sigma, t)| + B\left|\int_{s=\sigma-B}^{s=\sigma+B} \Psi(s, t)\frac{ds}{s-\sigma}\right|.$$

Les inégalités (41) et (45) montrent que ce maximum est lui-même inférieur à

$$(47) \qquad B\,\mathcal{S}(t) + \int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\mathcal{S}(t')\,dt' + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')}\mathcal{S}(t')\,dt'.$$

Majorons maintenant la première intégrale qui figure dans (37), d'après (41) et (45), nous avons

$$|\Phi(\sigma, t)| < B\,\mathcal{S}(t) + \int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t')^{\frac{7}{8}}}\mathcal{S}(t')\,dt' + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')}\mathcal{S}(t')\,dt'.$$

Or, en pratique, on connaîtra toujours une inégalité de la forme

$$(48) \qquad \mathcal{S}(t) < \int_0^t \mathrm{H}(t-t_1)\,d\mathrm{F}(t_1),$$

$\mathrm{H}(t)$ étant une fonction positive simple et $\mathrm{F}(t)$ une fonction croissante.

Appliquons donc la règle (32) en posant

$$\mathrm{G}_1(t) = B\,\mathrm{H}(t), \qquad \mathrm{F}_1(t) = \mathrm{F}(t), \qquad \mathrm{G}_2(t) = \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{t^{\frac{7}{8}}},$$

$$d\mathrm{F}_2(t) = \mathcal{S}(t)\,dt, \qquad \mathrm{G}_3(t) = B\nu\, e^{B\nu t}, \qquad d\mathrm{F}_3(t) = \mathcal{S}(t)\,dt.$$

Il vient

$$(49)\left\{\begin{aligned} &\left|\int_0^t dt' \oint \Phi(s, t')\, e^{-i\theta(s)}[\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t') - i\mathrm{V}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t-t')]\,ds\right| \\ &\quad < B\int_0^t \widetilde{\mathrm{H}}(t-t_1)\,d\mathrm{F}(t_1) + \int_0^t \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathcal{S}(t_1)\,dt_1 \\ &\quad + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t_1)}\mathcal{S}(t_1)\,dt_1. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que $\mathrm{H}(t) < \widetilde{\mathrm{H}}(t)$; donc

$$\mathcal{S}(t) < \int_0^t \widetilde{\mathrm{H}}(t-t_1)\,d\mathrm{F}(t_1).$$

Par suite on peut déduire des expressions (47) et (49) l'inégalité

$$\mathcal{V}(t) < \mathrm{B}\int_0^t \widetilde{\mathrm{H}}(t-t_1)\,d\mathrm{F}(t_1) + \int_0^t \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathcal{S}(t_1)\,dt_1 + \int_0^t \mathrm{B}\nu\, e^{\mathrm{B}\nu(t-t_1)}\mathcal{S}(t_1)\,dt_1.$$

D'où, en tenant compte à nouveau de (48),

$$\mathcal{V}(t) < \int_0^t \left\{ \mathrm{B}\widetilde{\mathrm{H}}(t-t') + \int_{t'}^t \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 + \int_{t'}^t \mathrm{B}\nu\, e^{\mathrm{B}\nu(t-t_1)}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 \right\} d\mathrm{F}(t').$$

On peut substituer à l'expression entre accolades une autre plus simple :

Décomposons l'intervalle (t',t) de variation de t_1 en trois autres sans point commun deux à deux :

T_1 défini par l'inégalité $\nu(t-t_1) > 1$;

T_2 défini par les inégalités simultanées : $\nu(t-t_1) < 1$; $t_1 < \frac{t+t'}{2}$;

T_3 défini par les inégalités simultanées : $\nu(t-t_1) < 1$; $t_1 > \frac{t+t'}{2}$.

Nous avons

$$\int_{\mathrm{T}_1} \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 < \int_{\mathrm{T}_1} \mathrm{B}\nu\, e^{\mathrm{B}\nu(t-t_1)}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 < \int_{t'}^t \mathrm{B}\nu\, e^{\mathrm{B}\nu(t-t_1)}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1;$$

$$\int_{\mathrm{T}_2} \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 < \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{\left(\frac{t-t'}{2}\right)^{\frac{7}{8}}}\int_{\mathrm{T}_2}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 < \frac{\mathrm{B}}{t-t'}\int_{t'}^{\frac{t+t'}{2}}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1,$$

$$\int_{\mathrm{T}_3} \frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}}\mathrm{H}(t_1-t')\,dt_1 < \left\{\text{max. de } \mathrm{H}(t_1-t') \text{ pour } \frac{t+t'}{2} < t_1 < t\right\} \times \int_{\mathrm{T}_3}\frac{\mathrm{B}\nu^{\frac{1}{8}}\,dt_1}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}} < \mathrm{B}\left\{\text{max. de } \mathrm{H}(t_1-t') \text{ pour } \frac{t+t'}{2} < t_1 < t\right\}.$$

Ainsi

$$\int_{t'}^{t} \frac{B\nu^{\frac{1}{8}}}{(t-t_1)^{\frac{7}{8}}} H(t_1 - t')\,dt_1 < B\,\widetilde{H}(t-t') + \int_{t'}^{t} B\nu\, e^{B\nu(t-t_1)} H(t_1 - t)\,dt_1.$$

Finalement

$$(50)\qquad \mathfrak{V}(t) < \int_0^t \left\{ B\,\widetilde{H}(t-t') + \int_{t'}^{t} B\nu\, e^{B\nu(t-t_1)} H(t_1 - t')\,dt_1 \right\} dF(t').$$

15. Conclusions. — Soit un contour convexe Γ qui admette en tout point un rayon de courbure fini ou infini; la borne inférieure de ces rayons de courbure doit être positive. Soient données le long de ce contour, pour $t \geqq 0$, deux fonctions continues de l'arc σ et du temps t : $u(\sigma, t)$ et $v(\sigma, t)$. On suppose

$$u(\sigma, 0) = v(\sigma, 0) = 0, \qquad \oint u(s, t)\,dy - v(s, t)\,dx = 0.$$

La fonction $\displaystyle\int_{s=\sigma-B}^{s=\sigma+B} [u(s, t)\,dy - v(s, t)\,dx] \frac{1}{s-\sigma}$ doit être continue.

Il existe alors un vecteur (¹) $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ défini et continu à l'intérieur de Γ pour $t \geqq 0$, nul pour $t = 0$, égal à $u(\sigma, t)$, $v(\sigma, t)$ le long de Γ, qui vérifie à l'intérieur de Γ le système (²)

$$(51)\qquad \begin{cases} \nu \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \Delta u(x, y, t)\,dt - [u(x, y, t)]_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}[H(x, y, t)]_{t_1}^{t_2} = 0, \\ \nu \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \Delta v(x, y, t)\,dt - [v(x, y, t)]_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}[H(x, y, t)]_{t_1}^{t_2} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et la plus grande longueur, $\mathfrak{V}(t)$, du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ à l'instant t peut être majorée comme suit :

(¹) Nous n'établirons pas l'unicité de ce vecteur. Nous n'étudierons pas non plus comment les fonctions $\dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}$ se comportent au voisinage de Γ.

(²) Pour ce qui est du système (1), (2) proprement dit, voir la remarque qui termine le paragraphe **11**.

Règle de majoration. — Soit $n(\sigma, t)$ la composante normale du vecteur $u(\sigma, t)$, $v(\sigma, t)$.

Soit $\mathcal{S}(t)$ le maximum à l'instant t de l'expression

$$|u(\sigma, t)| + |v(\sigma, t)| + \left| \int_{\sigma-B}^{\sigma+B} n(s, t) \frac{ds}{s-\sigma} \right|.$$

On cherche une inégalité de la forme

$$\mathcal{S}(t) < \int_0^t H(t-t')\, dF(t'),$$

$H(t)$ étant une fonction positive et $F(t)$ une fonction croissante. On calcule

$$\mathcal{H}(t) = B \left\{ \text{max. de } H(t') \text{ pour } \frac{t}{2} < t' < t \right\} + \frac{B}{t} \int_0^{\frac{t}{2}} H(t')\, dt' + \int_0^t B\nu\, e^{B\nu(t-t')} H(t')\, dt'.$$

On a

(52)
$$\mathcal{S}(t) < \int_0^t \mathcal{H}(t-t')\, dF(t').$$

On peut améliorer cette inégalité par un procédé analogue à celui qu'emploie le paragraphe **3** du Chapitre II : soit $\mathfrak{G}(t)$ la fonction égale à $\mathcal{H}(t)$ quand $t < \frac{1}{\nu}$ à

$$B\, e^{-3\nu t} \left\{ \text{max. de } \mathcal{H}(t) \text{ pour } \frac{1}{3\nu} \leqq t \leqq \frac{2}{3\nu} \right\} \qquad \text{quand } t \geqq \frac{1}{\nu}.$$

On a

(53)
$$\mathcal{S}(t) < \int_0^t \mathfrak{G}(t-t')\, dF(t').$$

Remarque. — Il est superflu pour la suite d'indiquer quelles valeurs il convient d'attribuer aux constantes B.

Un autre problème (¹). — Supposons $u(\sigma, t)$, $v(\sigma, t)$ définis pour toute valeur de t, $S(t)$ borné,

$$\oint n(\sigma, t)\, d\sigma = 0.$$

(¹) Il est inutile pour la suite d'envisager ce problème.

Proposons-nous le problème nouveau de construire une solution du système (51) qui soit définie et bornée pour l'ensemble des valeurs de t et qui coïncide le long de Γ avec $u(\sigma, t)$, $v(\sigma, t)$. Quel que soit T^* nous savons définir pour $t \geqq T^*$ une solution u^*, v^* de (51) qui est nulle pour $t = T^*$ et qui satisfait les conditions imposées à la frontière pour $t > T^*$. La formule (53) prouve que lorsque T^* tend vers $-\infty$, u^* et v^* convergent uniformément vers des limites u et v qui constituent une solution de notre nouveau problème.

Remarque. — Par la suite nous n'utiliserons plus jamais l'inégalité (53); l'inégalité (52) nous suffira toujours.

IV. — Compléments.

14. Coefficient de viscosité évanescent. — Cherchons comment se comporte la solution que nous venons de construire lorsque ν tend vers zéro, les autres données restant fixes. Nous n'envisagerons que des valeurs du temps comprises entre o et une borne arbitrairement choisie.

Les deux dernières formules (45) montrent que l'intégrale

$$\oint \Phi(s, t)\, e^{-i\theta_s} \frac{1}{X + iY}\, ds$$

tend sur Σ uniformément vers

$$\oint \Phi_1(s, t)\, e^{-i\theta_s} \frac{1}{X + iY}\, ds.$$

Soit η le maximum $|\Phi(s, t) - \Phi_1(s, t)|$ pour toutes les valeurs envisagées de s et de t; la première formule (45) prouve que η tend vers zéro. Or d'après (29),

$$\left| \int_0^t dt' \oint [\Phi(s, t') - \Phi_1(s, t')]\, e^{-i\theta_s} [U(X, Y, t - t') - iV(X, Y, t - t')]\, ds \right|$$
$$< \eta \int_0^t E(x, y, t')\, dt' < A\eta.$$

Donc

$$u(x,y,t) - iv(x,y,t) - \oint \Psi_1(s,t)\, e^{-i\theta_s} \frac{1}{X+iY}\, ds$$
$$- \int_0^t dt' \oint \Phi_1(s,t')\, e^{-i\theta_s} [U(X,Y,t-t') - iV(X,Y,t-t')]\, ds$$

tend sur Σ uniformément vers zéro.

Les fonctions $\Psi_1(s,t)$ et $\Phi_1(s,t)$, que définissent les relations (49), sont indépendantes de ν. Mais $U - iV$ en dépend; au début du paragraphe **7** nous avons déjà remarqué que

$$|U(X,Y,t-t') - iV(X,Y,t-t')| < \frac{\nu B(x,y)}{\sqrt{\nu(t-t')}\,[1+\nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}},$$

la fonction $B(x,y)$ étant bornée sur tout domaine intérieur à Σ. Il en résulte que $u - iv$ tend uniformément vers

$$u_1(x,y,t) - iv_1(x,y,t) = \oint \Psi_1(s,t)\, e^{-i\theta_s} \frac{1}{X+iY}\, ds,$$

sur tout domaine intérieur à Σ.

Autrement dit, *sur tout domaine intérieur Σ, le vecteur u, v tend uniformément vers le vecteur u_1, v_1, qui est le gradient d'une fonction harmonique et qui admet, le long de Γ, la composante normale imposée au vecteur u, v.*

Remarque. — Le vecteur u, v ne peut pas, d'ailleurs, en général, tendre vers sa limite uniformément sur tout le domaine Σ, car sa composante tangentielle le long de Γ ne coïncide pas en général avec celle du vecteur u_1, v_1.

Remarque. — On constate aisément que les fonctions $\frac{\partial^{p+q} u(x,y,t)}{\partial x^p \partial y^q}$ $\frac{\partial^{p+q} v(x,y,t)}{\partial x^p \partial y^q}$ tendent vers les fonctions $\frac{\partial^{p+q} u_1(x,y,t)}{\partial x^p \partial y^q}$, $\frac{\partial^{p+q} v_1(x,y,t)}{\partial x^p \partial y^q}$ uniformément sur tout domaine intérieur à Σ.

15. Résolution d'un nouveau problème aux valeurs frontières :

Soit à construire une solution $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ du système (1), (2) qui soit définie à l'intérieur Γ pour $t \geqq 0$, qui soit nulle le long de Γ et qui pour $t = 0$ coïncide avec un vecteur donné $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$. On suppose $\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial y} = 0$; $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ nuls le long de Γ.

Désignons *par* r la distance des points (x, y) et (x', y'); soient

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{4\pi\nu} \iint_{\Sigma} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{t} u(x', y', 0)\, dx'\, dy',$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{1}{4\pi\nu} \iint_{\Sigma} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{t} v(x', y', 0)\, dx'\, dy'.$$

Nous avons

$$\nu \Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \qquad \nu \Delta v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

$$u_1(x, y, 0) = u(x, y, 0), \qquad v_1(x, y, 0) = v(x, y, 0).$$

Nous savons construire une solution $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$ du système (1), (2) définie pour $t \geqq 0$ à l'intérieur de Σ, nulle pour $t = 0$, égale à $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$ le long de Γ. Les fonctions $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ constituent une solution du problème que nous nous sommes posé.

Soit $\mathfrak{V}(t)$ la plus grande longueur à l'instant t du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$. La suite de ce paragraphe a pour objet la majoration de $\mathfrak{V}(t)$. Nous supposerons à cet effet données des constantes C et h telles que

$$|u(x, y, 0) - u(x', y', 0)| < C r^h,$$
$$|v(x, y, 0) - v(x', y', 0)| < C r^h.$$

Soient d'autre part

$$\mathfrak{W}^2(t) = \iint_{\Sigma} [u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t)]\, dx\, dy.$$

et

$$\mathfrak{J}^2(t) = \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy.$$

Nous allons résoudre les quatre problèmes suivants :

Problème α. — Construire une majorante de $\mathcal{V}(t)$ ne dépendant que de ν, Γ, $\mathcal{V}(0)$, C et h.

Problème β. — Construire une majorante de $\mathcal{V}(t)$ ne dépendant que de ν, Γ et $\mathcal{V}(0)$.

Problème γ. — Construire une majorante de $\mathcal{V}(t)$ ne dépendant que de ν, Γ et $\mathcal{J}(0)$.

Problème δ. — Construire une majorante de $\mathcal{V}(t)$ ne dépendant que de ν, Γ et $\mathcal{W}(0)$.

Nous procéderons comme suit : nous majorerons dans chaque cas la plus grande longueur à l'instant t du vecteur u_1, v_1 ; puis celle du vecteur u_2, v_2 ; cette dernière opération sera basée sur la règle énoncée au paragraphe **15** (formule 52). Nous prendrons comme majorante de $\mathcal{V}(t)$ la somme des majorantes des vecteurs u_1, v_1 et u_2, v_2.

Résolution du problème α. — La plus grande longueur à l'instant t du vecteur u_1, v_1 est au plus égale à $\mathcal{V}(0)$ et même à une expression de la forme $\frac{B\mathcal{V}(0)}{1+\nu t}\cdot$ On a en outre

$$|u_1(x, y, t) - u_1(x', y', t)| < \frac{BCr^h}{1+\nu t},$$

$$|v_1(x, y, t) - v_1(x', y', t)| < \frac{BCr^h}{1+\nu t}.$$

D'où résulte

$$\mathcal{S}(t) < \frac{B}{1+\nu t}\left[\mathcal{V}(0) + \frac{C}{h}\right].$$

Nous pouvons choisir

$$F(0) = 0, \qquad F(t) = 1 \quad \text{pour } t > 0, \qquad H(t) = \frac{B}{1+\nu t}\left[\mathcal{V}(0) + \frac{C}{h}\right].$$

Il vient

$$\mathcal{K}(t) < B\left[\mathcal{V}(0) + \frac{C}{h}\right] e^{B\Gamma t}.$$

Finalement

$$\mathcal{V}(t) < B\left[\mathcal{V}(0) + \frac{C}{h}\right] e^{B\Gamma t}. \tag{54}$$

Résolution du problème β. — Nous avons, pour chaque valeur de t, quel que soit λ compris entre o et 1,

$$\left|\int_{\sigma-\mathrm{B}}^{\sigma+\mathrm{B}} n(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| < \int_{\sigma-\lambda\mathrm{B}}^{\sigma+\lambda\mathrm{B}}\left|\frac{n(s,t)-n(\sigma,t)}{s-\sigma}\right| ds + \int_{\sigma+\lambda\mathrm{B}}^{\sigma+\mathrm{B}} |n(s,t)| \frac{ds}{s-\sigma} + \int_{\sigma-\mathrm{B}}^{\sigma-\lambda\mathrm{B}} |n(s,t)| \frac{ds}{\sigma-s},$$

d'où

$$(55)\qquad \left|\int_{\sigma-\mathrm{B}}^{\sigma+\mathrm{B}} n(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| < \mathrm{B}\left\{\text{max. de } \frac{\partial n(s,t)}{\partial s}\right\}\lambda + \mathrm{B}\left\{\text{max. de } n(s,t)\right\}\log\frac{1}{\lambda}.$$

Or

$$|n(s,t)| < \frac{\mathrm{B}\,\mathfrak{V}(0)}{1+\nu t}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{8\pi\nu^2 t^2}\iint_\Sigma (x'-x)\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\,u(x',y',0)\,dx'\,dy'.$$

D'où

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| < \frac{\mathfrak{V}(0)}{8\pi\nu^2 t^2}\iint_\Sigma r\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\,dx'\,dy' < \frac{\mathrm{B}\,\mathfrak{V}(0)}{\sqrt{\nu t}\,[1+\nu t]^{\frac{3}{2}}}.$$

Plus généralement

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v_1}{\partial y}\right| < \frac{\mathrm{B}\,\mathfrak{V}(0)}{\sqrt{\nu t}\,[1+\nu t]^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite

$$\left|\frac{\partial n(s,t)}{\partial s}\right| < \frac{\mathrm{B}\,\mathfrak{V}(0)}{\sqrt{\nu t}\,[1+\nu t]^{\frac{3}{2}}}.$$

De (55) résulte donc

$$\left|\int_{\sigma-\mathrm{B}}^{\sigma+\mathrm{B}} n(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| < \frac{\mathrm{B}\,\mathfrak{V}(0)}{1+\nu t}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{\nu t}\sqrt{1+\nu t}} + \log\frac{1}{\lambda}\right].$$

Nous prendrons $\lambda = \sqrt{\nu t}$ pour $\nu t \leqq 1$, $\lambda = 1$ pour $\nu t \geqq 1$. Nous aurons

$$\mathfrak{S}(t) < \frac{\mathfrak{V}(0)}{1+\nu t}\left[\mathrm{B} + \mathrm{B}\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right],$$

le symbole $\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}$ représentant $\log\frac{1}{\nu t}$ quand $\nu t \leqq 1$, o quand $\nu t \geqq 1$.

Nous pouvons choisir $F(0)=0$, $F(t)=1$ pour $t>0$,

$$H(t)=\frac{\mathcal{V}(0)}{1+\nu t}\left[B+B\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right]\cdot$$

Il vient

$$(56)\qquad \mathcal{V}(t)<\mathcal{V}(0)\left[B\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}+B\,e^{B\nu t}\right].$$

Le second membre de (56) n'est pas borné au voisinage de $t=0$; je crois d'ailleurs qu'effectivement le premier membre de (56) peut atteindre des valeurs arbitrairement grandes quand $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ varient, $\mathcal{V}(0)$ restant fixe.

Résolution du problème γ. — Posons $x'=x+r\cos\omega$, $y'=y+r\sin\omega$; nous introduisons donc un système de coordonnées polaires ayant pour origine le point (x, y); soit $u(r;\omega)=u(x', y', 0)$; désignons par $r=R(\omega)$ l'équation de Γ rapporté à ces coordonnées polaires. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$u^2(r;\omega)=\left[\int_r^{R(\omega)}\frac{\partial u(r';\omega)}{\partial r'}\,dr'\right]^2<\int_r^{R(\omega)}\left[\frac{\partial u(r';\omega)}{\partial r'}\right]^2 r'\,dr'\log\frac{R(\omega)}{r};$$

donc

$$\int_0^{2\pi}u^2(r;\omega)\,d\omega<\mathfrak{J}^2(0)\log\frac{B}{r}\cdot$$

Or

$$|u_1(x, y, t)|^2<\iint_\Sigma\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{4\pi\nu t}\,r\,dr\,d\omega\iint_\Sigma\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{4\pi\nu t}\,u^2(r;\omega)\,r\,dr\,d\omega.$$

D'où

$$|u_1(x, y, t)|^2<\mathfrak{J}^2(0)\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{2\nu t}\,r\,dr\int_0^{B}\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{4\pi\nu t}\log\frac{B}{r}\,r\,dr<A\,\mathfrak{J}^2(0)\log\left(1+\frac{B}{\nu t}\right)\cdot$$

Une égalité analogue vaut pour $|v_1(x, y, t)|^2$.

Supposons le point (x, y) sur Γ; établissons des inégalités plus strictes que les précédentes. A cet effet choisissons pour origine des coordonnées un point intérieur à Σ, par exemple le centre de gravité de cette aire; posons $x'=\rho\cos\theta$, $y'=\rho\sin\theta$; soit encore $\rho=R(\theta)$ l'équation de Γ rapporté à ces coordonnées polaires; posons

$$u(\rho;\theta)=u(x', y', 0).$$

Écrivons l'identité

$$\int_0^{R(\vartheta)} \frac{u^2(\rho;\vartheta)\,d\rho}{\rho\left[\log\dfrac{R(\vartheta)}{\rho}\right]^2} = -\int_0^{R(\vartheta)} \frac{2\,u(\rho;\vartheta)\dfrac{\partial u(\rho;\vartheta)}{\partial\rho}}{\log\dfrac{R(\vartheta)}{\rho}}\,d\rho.$$

Appliquons l'inégalité de Schwarz au second membre; il vient

$$\int_0^{R(\vartheta)} \frac{u^2(\rho;\vartheta)\,d\rho}{\rho\left[\log\dfrac{R(\vartheta)}{\rho}\right]^2} \leqq 4\int_0^{R(\vartheta)} \left[\frac{\partial u(\rho;\vartheta)}{\partial\rho}\right]^2 \rho\,d\rho.$$

D'où

$$\int_0^{R(\vartheta)} \frac{u^2(\rho;\vartheta)\rho\,d\rho}{[R(\vartheta)-\rho]^2} < 4\int_0^{R(\vartheta)} \left[\frac{\partial u(\rho;\vartheta)}{\partial\rho}\right]^2 \rho\,d\rho;$$

par suite

$$\iint_\Sigma \frac{u^2(x',y',0)}{r^2}\,dx'\,dy' < B\,\mathcal{J}^2(0).$$

Or

$$|u_1(x,y,t)|^2 \leqq \iint_\Sigma \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}}{(4\pi\nu t)^2}\,dx'\,dy' \iint_\Sigma \frac{u^2(x',y',0)}{r^2}\,dx'\,dy'.$$

Donc $|u_1(x, y, t)| < B\mathcal{J}(0)$; une inégalité analogue vaut pour $|v_1(x, y, t)|$.

Enfin de la relation

$$\frac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\nu}\iint \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{t}\,\frac{\partial u(x',y',0)}{\partial x'}\,dx'\,dy',$$

on déduit, grâce à l'inégalité de Schwarz, $\left|\dfrac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial x}\right| < \dfrac{A\mathcal{J}(0)}{\sqrt{\nu t}}$; des inégalités analogues valent pour $\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|$, $\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right|$, $\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right|$.

De (55) résulte donc :

$$\left|\int_{\sigma-B}^{\sigma+B} u(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| < \mathcal{J}(0)\left[B\frac{\lambda}{\sqrt{\nu t}} + B\log\frac{1}{\lambda}\right].$$

Nous prendrons $\lambda = \sqrt{\nu t}$ pour $\nu t \leqq 1$; $\lambda = 1$ pour $\nu t \geqq 1$. Nous aurons

$$\mathcal{S}(t) < \mathcal{J}(0)\left[B + B\,\overline{\log}\frac{1}{\nu t}\right].$$

Nous pouvons choisir

$$\mathrm{F}(0)=0, \qquad \mathrm{F}(t)=1 \quad \text{pour } t>0, \qquad \mathrm{H}(t)=\mathfrak{J}(0)\left[\mathrm{B}+\mathrm{B}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right].$$

Il vient

$$\mathfrak{V}(t)<\mathfrak{J}(0)\left[\mathrm{B}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}+\mathrm{B}\,e^{\mathrm{B}\nu t}\right]. \tag{57}$$

Résolution du problème 3. — Nous avons

$$u_1^2(x,y,t)<\iint_\Sigma u^2(x',y',0)\,dx'\,dy'\;\frac{1}{8\pi\nu^2t^2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}r\,dr$$
$$<\frac{1}{8\pi\nu t}\iint_\Sigma u^2(x',y',0)\,dx'\,dy',$$

$$\left|\frac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial x}\right|^2<\iint_\Sigma u^2(x',y',0)\,dx'\,dy'\,\frac{1}{32\pi\nu^4t^4}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}r^3\,dr$$
$$<\frac{\mathrm{A}}{\nu^2t^2}\iint_\Sigma u^2(x',y',0)\,dx'\,dy'.$$

Des inégalités analogues valent pour $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, pour v_1, pour ses dérivées. D'où

$$|u(s,t)|<\frac{\mathrm{A}\sqrt{\mathfrak{W}(0)}}{\sqrt{\nu t}}, \qquad \left|\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}\right|<\frac{\mathrm{A}\sqrt{\mathfrak{W}(0)}}{\nu t};$$

il en résulte, de par (55),

$$\left|\int_{\sigma-\mathrm{B}}^{\sigma+\mathrm{B}}u(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right|<\frac{\mathrm{B}\sqrt{\mathfrak{W}(0)}}{\sqrt{\nu t}}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{\nu t}}+\log\frac{1}{\lambda}\right].$$

Nous choisirons $\lambda=\sqrt{\nu t}$ pour $\nu t\leqq 1$, $\lambda=1$ pour $\nu t\geqq 1$. Et nous aurons

$$\mathfrak{S}(t)<\frac{\sqrt{\mathfrak{W}(0)}}{\sqrt{\nu t}}\left[\mathrm{B}+\mathrm{B}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right].$$

Comme précédemment on en déduit

$$\mathfrak{V}(t)<\sqrt{\mathfrak{W}(0)}\left[\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\nu t}}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}+\mathrm{B}\,e^{\mathrm{B}\nu t}\right]. \tag{58}$$

Amélioration des inégalités (54), (56), (57), (58). — Nous admettrons sans démonstration que les dérivées premières de u et v sont continues au voisinage de Γ pour $t > 0$. Des équations (1) et (2) résulte alors la relation

$$\nu \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} [u^2 + v^2]\, dx\, dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\nu\, \mathcal{J}^2(t) + \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{W}(t)}{dt} = 0.$$

D'autre part il est bien connu que

$$\mathcal{W}(t) \leqq \frac{1}{\beta} \mathcal{J}^2(t),$$

β étant une constante positive définie comme suit :

Soit le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta\, u'(x, y) + \lambda\, u'(x, y) - \frac{\partial p'(x, y)}{\partial x} = 0, \\ &\Delta\, v'(x, y) + \lambda\, v'(x, y) - \frac{\partial p'(x, y)}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u'(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v'(x, y)}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

β est le plus petit des nombres λ pour lesquels ce système admet une solution régulière, nulle le long de Γ, non identiquement nulle à l'intérieur de Σ.

De ce qui précède résulte

$$2\beta\nu\, \mathcal{W}(t) + \frac{d\mathcal{W}(t)}{dt} \leqq 0.$$

D'où

$$(59) \qquad \mathcal{W}(t) \leqq \mathcal{W}(0)\, e^{-2\beta\nu t}.$$

Cette formule prouve qu'il y a au plus une solution du système (1), (2) à satisfaire les conditions imposées. Le théorème d'unicité ainsi obtenu, joint à (58), établit que $\mathcal{V}(t) < \mathrm{B}\sqrt{\mathcal{W}\left(t - \frac{1}{\nu}\right)}$ pour $t \geqq \frac{1}{\nu}$.

Utilisons à nouveau (59); il vient

$$(60) \qquad \mathfrak{V}(t) < \mathrm{B}\, e^{-\beta\nu t}\sqrt{\mathfrak{W}\mathfrak{V}(0)} \qquad \text{pour } \nu t \geqq 1.$$

Ce résultat complète les inégalités (54), (56), (57), (58).

Les réponses aux problèmes α, β, γ, δ se formulent finalement comme suit :

Formules α :

$$(61) \qquad \mathfrak{V}(t) < \mathrm{B}\left[\mathfrak{V}(0) + \frac{\mathrm{C}}{h}\right] \qquad \text{pour } \nu t \leqq 1.$$

$$(62) \qquad \mathfrak{V}(t) < \mathfrak{V}(0)\, \mathrm{B}\, e^{-\beta\nu t} \qquad \text{pour } \nu t \geqq 1.$$

Formule β :

$$(63) \qquad \mathfrak{V}(t) < \mathfrak{V}(0)\left[\mathrm{B}\log\frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}\, e^{-\beta\nu t}\right].$$

Formule γ :

$$(64) \qquad \mathfrak{V}(t) < \mathfrak{J}(0)\left[\mathrm{B}\log\frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}\, e^{-\beta\nu t}\right].$$

Formule δ :

$$(65) \qquad \mathfrak{V}(t) < \sqrt{\mathfrak{W}\mathfrak{V}(0)}\left[\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\nu t}}\log\frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}\, e^{-\beta\nu t}\right].$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENTS INFINIMENT LENTS SOUMIS A L'ACTION DE FORCES EXTÉRIEURES.

1. Le liquide est supposé emplir une aire Σ invariable, que limite un contour convexe Γ; Γ admet en tout point un rayon de courbure fini ou infini; la borne inférieure de ces rayons de courbure est positive. Soit $X(x, y, t)$, $Y(x, y, t)$ le champ de forces donné. Les équations qui régissent le mouvement sont

$$(1) \qquad \begin{cases} \nu\Delta u(x, y, t) - \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = X(x, y, t), \\ \nu\Delta v(x, y, t) - \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = Y(x, y, t), \\ \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Proposons-nous le problème suivant :

Construire une solution $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ du système (1) qui soit définie à l'intérieur de Γ pour $t \geqq 0$, qui s'annule avec t et qui soit nulle le long de Γ pour $t \geqq 0$.

Nous utiliserons à cet effet la solution fondamentale du système (1) qu'a découverte M. Oseen (¹) : soit $T_{ij}(x-x', y-y', t-t')$ son quotient par $\frac{1}{2\pi}$. Elle nous permettra de définir pour $t \geqq 0$ une solution du système (1) s'annulant avec t : $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$. Nous choisirons, sauf dans un cas particulier signalé ultérieurement :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u_1(x, y, t) = \int_0^t dt' \iint_\Sigma [\,& T_{11}(x-x', y-y', t-t')\,X(x', y', t') \\ & + T_{12}(x-x', y-y', t-t')\,Y(x', y', t')]\,dx'\,dy', \\ v_1(x, y, t) = \int_0^t dt' \iint_\Sigma [\,& T_{21}(x-x', y-y', t-t')\,X(x', y', t') \\ & + T_{22}(x-x', y-y', t-t')\,Y(x', y', t')]\,dx'\,dy'. \end{aligned}\right.$$

Le chapitre précédent nous apprend qu'il existe des fonctions $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$ définies sur Σ pour $t = 0$, nulles pour $t = 0$, respectivement égales à $u_1(x, y, t)$ et à $v_1(x, y, t)$ le long de Γ et qui vérifient le système

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \nu\,\Delta u(x, y, t) - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = 0, \\ & \nu\,\Delta v(x, y, t) - \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions : $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ constituent une solution du problème que nous nous sommes posé.

Soit $\mathfrak{V}(t)$ la plus grande longueur à l'instant t du vecteur $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$.

La suite de ce chapitre a pour objet la majoration de $\mathfrak{V}(t)$. — Nous envisagerons à cet effet trois hypothèses :

(¹) OSEEN, *Acta mathematica*, t. 34; ou bien OSEEN, *Hydrodynamik* (Leipzig, 1927).

Cas A : On connaît une fonction $f(t)$ telle que

$$|X(x, y, t)| < f(t), \qquad |Y(x, y, t)| < f(t).$$

Cas B : On a

$$X = \frac{\partial f_1(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, t)}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial f_3(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial f_4(x, y, t)}{\partial y},$$

et l'on connaît une fonction $f(t)$ telle que

$$|f_i(x, y, t)| \leqq f(t) \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Cas C : On a

$$X = f_1(x, y, t)\, g_1(x, y, t), \qquad Y = f_2(x, y, t)\, g_2(x, y, t);$$

g_1 et g_2 sont nulles le long de Γ, et l'on connaît deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que

$$\iint_\Sigma f_i^2(x, y, t)\, dx\, dy \leqq f(t) \qquad (i = 1, 2),$$

$$\iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial g_i(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g_i(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \leqq g(t) \qquad (i = 1, 2).$$

Nous allons résoudre trois problèmes :

Problèmes A *et* B. — Construire dans les cas respectifs A et B une majorante de $\mathfrak{V}(t)$ ne dépendant que de $f(t)$.

Problème C. — Construire dans le cas C une majorante de $\mathfrak{V}(t)$ ne dépendant que de $f(t)$ et $g(t)$.

Les majorantes ainsi obtenues joueront un rôle fondamental au cours des deux chapitres suivants [1].

2. Soient $\mathfrak{V}_1(t)$ et $\mathfrak{V}_2(t)$ les plus grandes longueurs respectives à

---

[1] Le problème analogue à C, concernant le cas de trois dimensions spatiales, est insoluble.

l'instant t des vecteurs (u_1, v_1) et (u_2, v_2). Nous avons

$$\mathfrak{V}(t) \leqq \mathfrak{V}_1(t) + \mathfrak{V}_2(t). \tag{4}$$

Pour étudier $\mathfrak{V}_1(t)$ et $\mathfrak{V}_2(t)$ nous introduirons de nouveaux symboles : Posons dans les cas A et C :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u'(x,y,t,t') = \iint_\Sigma [\; & \mathrm{T}_{11}(x-x', y-y', t-t')\,\mathrm{X}(x',y',t') \\ & + \mathrm{T}_{12}(x-x', y-y', t-t')\,\mathrm{Y}(x',y',t')]\,dx'\,dy', \\ v'(x,y,t,t') = \iint_\Sigma [\; & \mathrm{T}_{21}(x-x', y-y', t-t')\,\mathrm{X}(x',y',t') \\ & + \mathrm{T}_{22}(x-x', y-y', t-t')\,\mathrm{Y}(x',y',t')]\,dx'\,dy'. \end{aligned}\right.$$

Toutefois nous prendrons dans le cas B :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u'(x,y,t,t') = \iint_\Sigma \Bigg[& \frac{\partial \mathrm{T}_{11}(x-x', y-y', t-t')}{\partial x} f_1(x',y',t') \\ & + \frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial y} f_2 + \frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x} f_3 + \frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial y} f_4 \Bigg]\,dx'\,dy', \\ v'(x,y,t,t') = \iint_\Sigma \Bigg[& \frac{\partial \mathrm{T}_{21}(x-x', y-y', t-t')}{\partial x} f_1(x',y',t') \\ & + \frac{\partial \mathrm{T}_{21}}{\partial y} f_2 + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial x} f_3 + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial y} f_4 \Bigg]\,dx'\,dy'. \end{aligned}\right.$$

Nous choisirons toujours

$$u_1(x,y,t) = \int_0^t u'(x,y,t,t')\,dt' \qquad \text{et} \qquad v_1(x,y,t) = \int_0^t v'(x,y,t,t')\,dt',$$

en sorte que les formules (2) vaudront pour les cas A et C, non pour le cas B.

Soit un point de Γ d'abscisse curviligne σ; x et y étant ses coordonnées, nous poserons

$$u'(x,y,t,t') = u'(\sigma,t,t') \qquad \text{et} \qquad v'(x,y,t,t') = v'(\sigma,t,t')$$

et nous désignerons par $n(\sigma, t)$ la composante normale du vecteur $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, par $n'(\sigma, t, t')$ celle du vecteur $u'(\sigma, t, t')$, $v'(\sigma, t, t')$.

Il sera facile dans chacun des cas A, B, C de déduire des relations (5) et (6) six inégalités de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} |u'(x, y, t, t')| \leqq \mathrm{H}_0[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}, \\ |v'(x, y, t, t')| \leqq \mathrm{H}_0[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}, \\ |u'(\sigma, t, t')| \leqq \mathrm{H}_1[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}, \\ |v'(\sigma, t, t')| \leqq \mathrm{H}_1[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}, \\ \left|\dfrac{\partial u'(\sigma, t, t')}{\partial\sigma}\right| \leqq \mathrm{H}_2[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}, \\ \left|\dfrac{\partial v'(\sigma, t, t')}{\partial\sigma}\right| \leqq \mathrm{H}_2[\nu(t-t')]\dfrac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}; \end{cases}$$

H_0, H_1 et H_2 seront des fonctions élémentaires de $\nu(t-t')$ continues, sauf pour $\nu(t-t')=0$; on aura $\dfrac{d\mathrm{F}}{dt}=f(t)$ dans les cas A et B; $\dfrac{d\mathrm{F}}{dt}=\sqrt{f(t)g(t)}$ dans le cas C.

De (7), résulte tout d'abord l'inégalité [1]

$$(8)\quad \mathfrak{V}_1(t) < \sqrt{\pi}\int_0^t \mathrm{H}_0[\nu(t-t')]\,d\mathrm{F}(t').$$

Pour majorer $\mathfrak{V}_2(t)$ à l'aide de la règle énoncée au paragraphe **13** du chapitre précédent introduisons la fonction $\mathfrak{S}(t)$ égale au maximum à l'instant t de l'expression

$$\left|\int_0^t u'(\sigma, t, t')\,dt'\right| + \left|\int_0^t v'(\sigma, t, t')\,dt'\right| + \left|\int_{\sigma-\mathrm{R}}^{\sigma+\mathrm{R}} u(s, t)\frac{ds}{s-\sigma}\right|.$$

D'après (7),

$$\left|\int_0^t u'(\sigma, t, t')\,dt'\right| + \left|\int_0^t v'(\sigma, t, t')\,dt'\right| \leqq \sqrt{\pi}\int_0^t \mathrm{H}_1[\nu(t-t')]\,d\mathrm{F}(t').$$

D'autre part, quelle que soit la constante β comprise entre 0 et 1,

$$|u'(\sigma_1, t, t') - u'(\sigma_2, t, t')| < |\sigma_1-\sigma_2|^\beta\,\mathrm{H}_1^{1-\beta}[\nu(t-t')]\,\mathrm{H}_2^\beta[\nu(t-t')]\frac{d\mathrm{F}(t')}{dt'}.$$

---

[1] Pour le problème analogue à C, concernant le cas de trois dimensions spatiales, l'intégrale (8) diverge en général.

Faisons l'hypothèse suivante, que nous constaterons être exacte dans chacun des trois cas : pour un choix convenable de β l'intégrale $\int_0^1 H_1^{1-\beta}[t']H_2^{\beta}[t']\,dt'$ est convergente.

Nous avons dès lors le droit d'écrire l'inégalité

$$\left|\int_{\sigma-B}^{\sigma+B} u(s,t)\frac{ds}{s-\sigma}\right| \leq \int_0^t dt' \left|\int_{\sigma-B}^{\sigma+B} u(s,t,t')\frac{ds}{s-\sigma}\right|.$$

Remarquons maintenant que pour chaque système de valeurs de t et de t' nous avons, quel que soit λ compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\sigma-B}^{\sigma+B} u'(s,t,t')\frac{ds}{s-\sigma}\right| \\
&\quad < \int_{\sigma-\lambda B}^{\sigma+\lambda B}\left|\frac{u(s,t,t')-u(\sigma,t,t')}{s-\sigma}\right| ds \\
&\qquad + \int_{\sigma+\lambda B}^{\sigma+B}|u(s,t,t')|\frac{ds}{s-\sigma} + \int_{\sigma-B}^{\sigma-\lambda B}|u(s,t,t')|\frac{ds}{\sigma-s} \\
&\quad < \left[B\lambda H_1[\nu(t-t')] + B\lambda H_2[\nu(t-t')] + BH_1[\nu(t-t')]\log\frac{1}{\lambda}\right]\frac{dF(t')}{dt'}.
\end{aligned}$$

Pour $H_2 < H_1$ nous choisirons $\lambda = 1$; dans le cas contraire $\lambda = \dfrac{H_1}{H_2}$. Finalement nous obtenons

$$\mathfrak{S}(t) \leq \int_0^t H[\nu(t-t')]\,dF(t')$$

en posant

$$H[\nu t] = H_1[\nu t]\left\{B + B\overset{+}{\log}\frac{H_2[\nu t]}{H_1[\nu t]}\right\}. \tag{9}$$

Appliquons la règle de majoration énoncée au chapitre précédent (§ **13**) : il s'introduit une fonction

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[\nu t] = B\left\{\text{Max. de } H[\nu t'] \text{ pour } \frac{t}{2} < t' < t\right\} \\
+ \frac{B}{t}\int_0^{\frac{t}{2}} H[\nu t']\,dt' + \int_0^t B\nu e^{B\nu(t-t')} H[\nu t']\,dt'.
\end{aligned} \tag{10}$$

Et l'on a

$$\mathfrak{V}_2(t) < \int_0^t \mathcal{H}[\nu(t-t')]\,dF(t').$$

Cette formule, jointe à (4) et à (8), nous donne

$$(11)\qquad \mathfrak{V}(t) < \int_0^t \{ \sqrt{2}\,H_0[\nu(t-t')] + \mathcal{H}[\nu(t-t')] \}\, dF(t').$$

5. Amélioration de l'inégalité (11). — Lorsque $t-t'$ augmente indéfiniment la fonction $\mathcal{H}[\nu(t-t')]$ augmente indéfiniment, au moins aussi vite qu'une exponentielle $Be^{B\nu(t-t')}$. Nous allons montrer que l'on peut toutefois, dans l'inégalité précédente, pour $\nu(t-t') > 1$, remplacer l'accolade par une expression $Be^{-B\nu(t-t')}$. A cet effet supposons d'abord $F(t)$ constant, sauf lorsque $t_0 < t < t_0 + \frac{1}{3\nu}$. Nous avons $\mathfrak{V}(t) = 0$ quand $0 < t < t_0$:

$$(12)\qquad \mathfrak{V}\left(t_0 + \frac{2}{3\nu}\right) < B\left[F\left(t_0 + \frac{1}{3\nu}\right) - F(t_0)\right].$$

Pour $t > t_0 + \frac{2}{3\nu}$ X et Y sont nuls; le vecteur u, v satisfait les équations (1) et (2) du chapitre précédent; appliquons donc l'inégalité (62) de ce chapitre, en y substituant $t_0 + \frac{2}{3\nu}$ à 0 et $t - t_0 - \frac{2}{3\nu}$ à t. Il vient

$$(13)\qquad \mathfrak{V}(t) < B\left[F\left(t_0 + \frac{1}{3\nu}\right) - F(t_0)\right] e^{-3\nu(t-t_0)} \qquad \text{pour}\quad t > t_0 + \frac{2}{\nu}.$$

Les relations (11), (12), (13) nous fournissent dès lors l'inégalité

$$(14)\qquad \mathfrak{V}(t) < \int_0^t K[\nu(t-t')]\, dF(t'),$$

$$(15)\qquad \begin{cases} K[\nu t] \text{ valant } \sqrt{2}\,H_0[\nu t] + \mathcal{H}[\nu t] & \text{pour}\quad 0 < \nu t < 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Be^{-3\nu t} & \text{pour}\quad \nu t \geq 1. \end{cases}$$

Ne supposons plus X et Y nuls hors de l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{1}{3\nu}$. Représentons par X_p, Y_p le vecteur égal à X, Y quand $\frac{p-1}{3\nu} \leq t < \frac{p}{3\nu}$, nul pour les autres valeurs de t; soit u_p, v_p la solution correspondante du problème énoncé au début de ce chapitre; désignons par $\mathfrak{V}_p(t)$ la plus grande longueur à l'instant t du vecteur u_p, v_p. Nous avons

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots; \\ v &= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots; \\ \mathcal{V}(t) &< \mathcal{V}_1(t) + \mathcal{V}_2(t) + \mathcal{V}_3(t) + \ldots. \end{aligned}$$

Or, d'après (14), si nous convenons de poser $K[\nu(t-t')] = 0$ pour $\nu(t-t') < 0$,

$$\mathcal{V}_p(t) < \int_{\frac{p-1}{3\nu} < t' < \frac{p}{3\nu}} K[\nu(t-t')]\, dF(t').$$

D'où

$$\mathcal{V}(t) < \int_0^t K[\nu(t-t')]\, dF(t').$$

L'inégalité (14) est donc encore valable.

Cas A et B.

4. *Cas A.* — On peut choisir pour $H_0[\nu t]$ et pour $H_1[\nu t]$ une expression quelconque supérieure à

$$S_i \iint_\Sigma |T_{1i}(x-x', y-y', t)|\, dx'\, dy',$$

enfin pour $H_2(\nu t)$ une expression quelconque supérieure à

$$S_i \iint_\Sigma \left| \frac{\partial T_{1i}(x-x', y-y', t)}{\partial x} \right| dx'\, dy' + S_i \iint_\Sigma \left| \frac{\partial T_{1i}(x-x', y-y', t)}{\partial y} \right| dx'\, dy',$$

Rappelons les inégalités

$$(16) \quad \begin{cases} |T_{ij}(x-x', y-y', t)| < \dfrac{A}{r^2+\nu t}, \\ \left| \dfrac{\partial T_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x} \right| + \left| \dfrac{\partial T_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial y} \right| < \dfrac{A r}{(r^2+\nu t)^2}. \end{cases}$$

Ces inégalités nous autorisent à prendre

$$H_0[\nu t] = H_1[\nu t] = A \log\left(1 + \frac{B}{\nu t}\right) \quad \text{et} \quad H_2[\nu t] = \frac{A}{\sqrt{\nu t}}.$$

D'où

$$\mathcal{K}[\nu t] < \mathrm{B}\left[\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right]^2 + \mathrm{B}e^{\mathrm{B}\nu t},$$

et

$$(17)\qquad \mathrm{K}[\nu t] < \mathrm{B}\left[\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t}\right]^2 + \mathrm{B}e^{-\beta\nu t}.$$

Cas B. — On peut choisir pour $\mathrm{H}_0[\nu t]$ et pour $\mathrm{H}_1[\nu t]$ une expression quelconque supérieure à

$$\mathrm{S}_i\iint_\Sigma\left|\frac{\partial \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x}\right| dx'\,dy' + \mathrm{S}_i\iint_\Sigma\left|\frac{\partial \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial y}\right| dx'\,dy',$$

enfin pour $\mathrm{H}_2[\nu t]$ une expression quelconque supérieure à

$$\mathrm{S}_i\iint_\Sigma\left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x^2}\right| dx'\,dy' + 2\,\mathrm{S}_i\iint_\Sigma\left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x\,\partial y}\right| dx'\,dy' + \mathrm{S}_i\iint_\Sigma\left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial y^2}\right| dx'\,dy'.$$

Nous prendrons

$$\mathrm{H}_0[\nu t] = \mathrm{H}_1[\nu t] = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\nu t}}.$$

Rappelons d'autre part l'inégalité

$$\left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x^2}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial x\,\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}(x-x', y-y', t)}{\partial y^2}\right| < \frac{\mathrm{A}}{(r^2+\nu t)^2}.$$

Cette inégalité nous autorise à choisir

$$\mathrm{H}_2[\nu t] = \frac{\mathrm{A}}{\nu t}.$$

D'où

$$\mathcal{K}[\nu t] < \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\nu t}}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}e^{\mathrm{B}\nu t}$$

et

$$(18)\qquad \mathrm{K}[\nu t] < \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\nu t}}\overset{+}{\log}\frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}e^{-\beta\nu t}.$$

Cas C.

5. *Obtention d'une fonction* $H_0[\nu(t-t')]$. — Posons dans la formule (5) $x'=x+r\cos\omega, y'=y+r\sin\omega$; nous introduisons donc un système de coordonnées polaires ayant pour origine le point (x, y); soit $g_i(r;\omega;t)=g_i(x', y', t)$; désignons par $r=R(\omega)$ l'équation de Γ rapportée à ces coordonnées polaires. Nous avons

$$(19)\quad \left|\iint_\Sigma T_{ij}(x-x', y-y', t-t')f_j(x', y', t')g_j(x', y', t')\,dx'\,dy'\right|^2$$
$$\leqq f(t')\iint_\Sigma T_{ij}^2(r\cos\omega, r\sin\omega, t-t')\,g_j^2(r;\omega;t')\,r\,dr\,d\omega$$
$$\leqq f(t')\int_0^{R(\omega)}\frac{A\,r\,dr}{[r^2+\nu(t-t')]^2}\int_0^{2\pi}g_j^2(r;\omega;t')\,d\omega.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$g_j^2(r;\omega;t')=\left|\int_r^{R(\omega)}\frac{\partial g_j(r';\omega;t')}{\partial r'}\,dr'\right|^2$$
$$\leqq\int_r^{R(\omega)}\left[\frac{\partial g_j(r';\omega;t')}{\partial r'}\right]^2 r'\,dr'\log\frac{R(\omega)}{r}.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi}g_j^2(r;\omega;t')\,d\omega\leqq g(t')\log\frac{B}{r}.$$

Compte tenu de cette relation, (12) s'écrit

$$\left|\iint_\Sigma T_{ij}(x-x', y-y', t-t')f_j(x', y', t')g_j(x', y', t')\,dx'\,dy'\right|^2$$
$$\leqq f(t')g(t')\int_0^B\frac{A\,r\,dr}{[r^2+\nu(t-t')]^2}\log\frac{B}{r}=A f(t')g(t')\frac{1}{\nu(t-t')}\log\left(1+\frac{B}{\nu(t-t')}\right).$$

Ceci nous autorise à choisir

$$H_0[\nu(t-t')]=\frac{A}{\sqrt{\nu(t-t')}}\sqrt{\log\left(1+\frac{B}{\nu(t-t')}\right)}.$$

Obtention de fonctions $H_1[\nu(t-t')]$ *et* $H_2[\nu(t-t')]$. — x et y représenteront désormais les coordonnées du point de Γ d'abscisse curviligne σ. Posons dans les formules (5) $x'=\rho\cos\theta$, $y'=\rho\sin\theta$;

nous utilisons donc le système de coordonnées polaires qui a pour centre l'origine des coordonnées; ce point est supposé intérieur à Γ et situé, par exemple, au centre de gravité de Σ; soit comme précédemment $g_i(\rho\,;\,\theta\,;\,t) = g_i(x', y', t)$; désignons encore par $\rho = R(\theta)$ l'équation de Γ en coordonnées polaires. Nous avons

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\iint_\Sigma T_{ij}(x-x', y-y', t-t')f_j(x', y', t')g_j(x', y', t')\,dx'\,dy'\right|^2 \\ &\qquad\leqq f(t')\iint_\Sigma T_{ij}^2(x-\rho\cos\theta, y-\rho\sin\theta, t-t')\,g_j^2(\rho\,;\,\theta\,;\,t')\rho\,d\rho\,d\theta, \\ &\left|\iint_\Sigma \frac{\partial T_{ij}(x-x', y-y', t-t')}{\partial\sigma}f_j(x', y', t')g_j(x', y', t')\,dx'\,dy'\right|^2 \\ &\qquad\leqq f(t')\iint_\Sigma\left[\frac{\partial T_{ij}(x-\rho\cos\theta, y-\rho\sin\theta, t-t')}{\partial\sigma}\right]^2 g_j^2(\rho\,;\,\theta\,;\,t')\rho\,d\rho\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Or, d'après les relations (16),

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &|\,T_{ij}(x-\rho\cos\theta, y-\rho\sin\theta, t-t')\,|^2 < \frac{B}{\nu(t-t')\,[\rho-R(\theta)]^2}; \\ &\left|\frac{\partial T_{ij}(x-\rho\cos\theta, y-\rho\sin\theta, t-t')}{\partial\sigma}\right|^2 < \frac{B}{[\nu(t-t')]^2[\rho-R(\theta)]^2}. \end{aligned}\right.$$

Appliquons d'autre part l'inégalité de Schwarz au second membre de l'identité

$$\int_0^{R(\theta)} \frac{1}{\rho\left[\log\dfrac{R(\theta)}{\rho}\right]^2} g_j^2(\rho\,;\,\theta)\,d\rho = -\int_0^{R(\theta)} \frac{2}{\log\dfrac{R(\theta)}{\rho}} g_j(\rho\,;\,\theta)\frac{\partial g_j(\rho\,;\,\theta)}{\partial\rho}\,d\rho\,;$$

il vient

$$\int_0^{R(\theta)} \frac{1}{\rho\left[\log\dfrac{R(\theta)}{\rho}\right]^2} g_j^2(\rho\,;\,\theta)\,d\rho \leqq 4\int_0^{R(\theta)}\left[\frac{\partial g_j(\rho\,;\,\theta)}{\partial\rho}\right]^2\rho\,d\rho.$$

D'où

$$(22)\quad \int_0^{R(\theta)} \frac{g_j^2(\rho\,;\,\theta)\rho\,d\rho}{[\rho-R(\theta)]^2} < 4\int_0^{R(\theta)}\left[\frac{\partial g_j(\rho\,;\,\theta)}{\partial\rho}\right]^2\rho\,d\rho.$$

De l'ensemble des inégalités (20), (21) et (22) résulte

$$\begin{aligned} &\left|\iint_\Sigma T_{ij}(x-x', y-y', t-t')f_j(x', y', t')g_j(x', y', t')\,dx'\,dy'\right|^2 \\ &\qquad < \frac{B}{\nu(t-t')}f(t')g(t') \end{aligned}$$

et

$$\left| \iint_{\Sigma} \frac{\partial T_{ij}(x-x', y-y', t-t')}{\partial \sigma} f_i(x', y', t') g_j(x', y', t')\, dx'\, dy' \right|^2$$
$$< \frac{B}{[\nu(t-t')]^2} f(t') g(t').$$

Ces inégalités nous autorisent à choisir

$$H_1[\nu(t-t')] = \frac{B}{\sqrt{\nu(t-t')}} \qquad \text{et} \qquad H_2[\nu(t-t')] = \frac{B}{\nu(t-t')}.$$

D'où

$$\mathcal{H}[\nu(t-t')] < \frac{B}{\sqrt{\nu(t-t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} + Be^{B\nu(t-t')}$$

et

$$(23) \qquad K[\nu(t-t')] < \frac{B}{\sqrt{\nu(t-t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} + Be^{-\beta\nu(t-t')}.$$

Conclusions.

6. Les inégalités (14), (17) (18) et (23) nous fournissent les réponses aux problèmes A, B, C :

Formule A :

$$(24) \qquad \varphi(t) < \int_0^t \left\{ B \left[\overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} \right]^2 + Be^{-\beta\nu(t-t')} \right\} f(t')\, dt'.$$

Formule B :

$$(25) \qquad \varphi(t) < \int_0^t \left\{ \frac{B}{\sqrt{\nu(t-t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} + Be^{-\beta\nu(t-t')} \right\} f(t')\, dt',$$

Formule C :

$$(26) \qquad \varphi(t) < \int_0^t \left\{ \frac{B}{\sqrt{\nu(t-t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} + Be^{-\beta\nu(t-t')} \right\} \sqrt{f(t') g(t')}\, dt'.$$

La définition de la constante positive β a été donnée à la fin du premier chapitre.

Un autre problème (¹). — Supposons X et Y définis et bornés sur Σ

(¹) Il est superflu pour la suite d'envisager ce problème.

pour l'ensemble des valeurs de t. Proposons-nous le nouveau problème de construire une solution u, v du système (1) définie et bornée pour l'ensemble des valeurs de t, nulle le long de Γ. Quel que soit $T^\star$ nous savons définir, pour $t \geqq T^\star$, une solution $u^\star$, $v^\star$ du système (1), nulle le long de Γ et nulle pour $t = T^\star$. La formule A prouve que, lorsque $T^\star$ tend vers $-\infty$, $u^\star$ et $v^\star$ convergent uniformément vers des limites u et v; ces limites constituent une solution de notre nouveau problème. L'unicité de la solution de ce problème est d'ailleurs aisée à établir.

Remarque. — Les conclusions de ce chapitre et du précédent nous permettent de construire et de majorer la solution u, v du système (1) qui est définie pour $t \geqq 0$, qui pour $t = 0$ prend sur Σ des valeurs données et qui pour $t \geqq 0$ prend le long de Γ des valeurs données.

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS RÉGULIERS.

I. — États initiaux réguliers.

1. Introduction. — Écrivons les équations de Navier, qui régissent les écoulements plans des liquides visqueux en l'absence de forces extérieures :

$$(1)\quad \begin{cases} \nu\,\Delta u(x,y,t) - \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x,y,t)}{\partial x} = X(x,y,t), \\ \nu\,\Delta v(x,y,t) - \dfrac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x,y,t)}{\partial y} = Y(x,y,t) \\ \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Nous avons à chaque instant

$$(2)\qquad X = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}; \qquad Y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Le problème n'est pas altéré quand on remplace les relations (2) par les suivantes :

$$(3)\qquad X=\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y};\qquad Y=\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v^2)}{\partial y}.$$

On peut également donner au système de Navier la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \nu\,\Delta u-\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial q}{\partial x}=-2v\zeta & \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] \nu\,\Delta v-\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial q}{\partial y}=\quad 2u\zeta & \zeta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right).\end{cases}$$

Nous supposons que le liquide emplit une aire Σ, donnée, invariable, que limite un contour convexe Γ ; Γ admet en tout point un rayon de courbure fini ou infini ; la borne inférieure de ces rayons de courbure est positive.

Nous dirons que, pour $t_1 \leq t < t_2$, deux fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ constituent une *solution régulière du système de Navier* lorsqu'elles sont continues en x, y, t sur Σ et le long de Γ, nulles le long de Γ et lorsque pour $t_1 < t < t_2$ elles admettent en tout point intérieur à Σ des dérivées partielles satisfaisant les équations de Navier, les fonctions $p(x, y, t)$ et $q(x, y, t)$ étant supposées convenablement choisies.

Nous nous proposons de construire et d'étudier les solutions des équations de Navier qui sont régulières sur un intervalle positif de l'axe des temps ayant o pour origine, et qui coïncident, pour $t=0$, avec des fonctions données $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$; nous les nommerons *solutions régulières correspondant à ces données*.

(c) Nous supposerons que $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ s'annulent le long de Γ et admettent sur $\Sigma+\Gamma$ des dérivées du premier ordre continues qui vérifient l'équation $\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial x}+\dfrac{\partial v(x, y, 0)}{\partial y}=0$.

2. Application de la méthode des approximations successives. — Nos approximations successives $u_n(x, y, t)$, $v_n(x, y, t)$ seront définies sur Σ, pour $t \geq 0$ par les conditions suivantes : elles seront continues ; elles s'annuleront le long de Γ ; on aura

$$\begin{aligned} \nu\,\Delta u_{n-1}-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}&=\frac{\partial(u_n^2)}{\partial x}+\frac{\partial(u_n v_n)}{\partial y}\\ \nu\,\Delta v_{n-1}-\frac{\partial v_{n-1}}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial y}&=\frac{\partial(u_n v_n)}{\partial x}+\frac{\partial(v_n^2)}{\partial y}\end{aligned}\qquad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}=0$$

et

$$u_n(x, y, 0) = u(x, y, 0) \quad \text{et} \quad v_n(x, y, 0) = v(x, y, 0) \quad \text{pour} \quad n > 0.$$

Nous choisirons

$$u_0(x, y, t) = 0; \qquad v_0(x, y, t) = 0.$$

Nous supposerons $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ tels que $u_1(x, y, t)$ et $v_1(x, y, t)$ existent. [Le Chapitre I nous apprend que c'est le cas quand $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ satisfont les conditions (c).] Soit alors D_1 la plus grande longueur du vecteur u_1, v_1. Soit $\mathfrak{V}_n(t)$ la plus grande longueur à l'instant t du vecteur u_n, v_n. La formule B du Chapitre II nous fournit l'inégalité

$$(5) \quad \mathfrak{V}_{n+1}(t) < D_1 + \int_0^{t} \left\{ \frac{B_0}{\sqrt{\nu(t-t')}} \overline{\log} \frac{1}{\nu(t-t')} + B'_0 e^{-\beta\nu(t-t')} \right\} \mathfrak{V}_n^2(t')\, dt',$$

B_0, B'_0 et β étant des constantes qui dépendent uniquement de la forme de Γ. Soit T_1 la borne supérieure des valeurs de t pour lesquelles on a

$$4 D_1 \int_0^{t} \left\{ \frac{B_0}{\sqrt{\nu t'}} \overline{\log} \frac{1}{\nu t'} + B'_0 e^{-\beta\nu t'} \right\} dt' \leqq 1;$$

(T_1 peut être égal à $+\infty$). Nous déduisons de l'inégalité récurrente (5) que

$$\mathfrak{V}_n(t) < 2 D_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T_1.$$

Il est facile de montrer que les fonctions $u_n(x, y, t)$ et $v_n(x, y, t)$, dont l'existence résulte du Chapitre II, convergent uniformément vers des limites $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ quand t reste compris entre 0 et T_1. Ces limites constituent une solution du problème énoncé au paragraphe **1**. Notons que si $\mathfrak{V}(t)$ représente le maximum à l'instant t de la longueur du vecteur u, v nous avons $\mathfrak{V}(t) \leqq 2D_1$.

3. Supposons T_1 fini; appliquons le processus du paragraphe précédent en substituant l'époque $t = T_1$ à l'époque $t = 0$; $\mathfrak{V}(t)$ étant borné pour $0 \leqq t \leqq T_1$ le Chapitre II (problème B) nous apprend que l'approximation d'indice 1 existe effectivement; soit D_2 la plus grande longueur de ce vecteur; nos approximations convergent sur un intervalle $T_1 \leqq t \leqq T_2$; $T_2 - T_1$ est la borne supérieure, finie ou non, des quantités t telles que

$$4 D_2 \int_0^t \left\{ \frac{B_0}{\sqrt{\nu t'}} \log \frac{1}{\nu t'} + B'_0 e^{-3\nu t'} \right\} dt' \leqq 1.$$

La solution $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ est maintenant définie pour $0 \leqq t \leqq T_2$.

Si T_2 est fini ce même procédé permet de définir u et v pour $T_2 < t \leqq T_3$; puis si T_3 est fini, pour $T_3 < t \leqq T_4$, ...

La suite croissante $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ou bien a un dernier terme égal à $+\infty$, ou bien augmente indéfiniment, ou bien a une limite finie T.

Convenons de dire dans les deux premiers cas que $T = +\infty$. Les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ sont maintenant définies pour $0 \leqq t < T$.

Faisons varier t à l'intérieur d'un intervalle dont les deux extrémités sont comprises entre o et T; nous admettrons sans démonstration que les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ possèdent alors des dérivées premières continues sur $\Sigma + \Gamma$, et, à l'intérieur de Σ, des dérivées de tous ordres.

Si T *est fini* les quantités D_n augmentent indéfiniment; donc $\mathfrak{V}(t)$, qui est continu sur tout intervalle $0 \leqq t \leqq T - \varepsilon$, ne reste pas borné quand t tend vers T; nous dirons alors que *le mouvement devient irrégulier à l'époque* T.

Soit $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$ une autre solution régulière correspondant aux mêmes données. Soit $\mathfrak{V}'(t)$ la plus grande longueur du vecteur u', v' à l'instant t, soit $\mathfrak{U}(t)$ celle du vecteur $u' - u$, $v' - v$. Nous avons

$$\nu \Delta(u - u') - \frac{\partial(u - u')}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p')}{\partial x} = \frac{\partial(u^2 - u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv - u'v')}{\partial y},$$

$$\nu \Delta(v - v') - \frac{\partial(v - v')}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p')}{\partial y} = \frac{\partial(uv - u'v')}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 - v'^2)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(u - u')}{\partial x} + \frac{\partial(v - v')}{\partial y} = 0.$$

Donc, en vertu de la formule B, nous avons pour toutes les époques t de l'intervalle $(0, T)$ auxquelles u' et v' sont définis

$$\mathfrak{U}(t) < \int_0^t \left\{ \frac{B}{\sqrt{\nu(t - t')}} \log \frac{1}{\nu(t - t')} + B e^{-3\nu(t - t')} \right\} [\mathfrak{V}(t') + \mathfrak{V}'(t')] \, \mathfrak{U}(t') \, dt';$$

$\mathcal{V}(t)$, $\mathcal{V}'(t)$ et $\mathcal{U}(t)$ étant continus on sait qu'une telle inégalité entraîne $\mathcal{U}(t) = 0$. Ainsi aucune solution régulière correspondant aux mêmes données ne peut différer de la solution u, v tant que t est inférieur à T; par suite, lorsque T est fini, elle ne reste pas continue quand t tend vers T; elle ne peut donc être définie sur aucun intervalle contenant T. En définitive nous avons établi *le théorème d'unicité* suivant :

Aucune solution régulière, correspondant aux données $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$, *ne peut différer de la solution* $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ *que nous venons de construire.*

Étudions les propriétés de cette solution.

4. Diverses inégalités fondamentales. — Posons comme précédemment

$$\mathcal{V}^2(t) = \iint_\Sigma [u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t)]\, dx\, dy$$

et

$$\mathcal{J}^2(t) = \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy.$$

D'après les formules β et γ du Chapitre I et d'après les formules B et C du Chapitre II nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t_2) < & \int_e \left\{ \frac{B}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t')} + B e^{-\beta\nu(t_2 - t')} \right\} \mathcal{V}^2(t')\, dt' \\ & + \int_{e'} \left\{ \frac{B}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t')} + B e^{-\beta\nu(t_2 - t')} \right\} \mathcal{J}^2(t')\, dt' \\ & + \mathcal{I}(t_1) \left[B \overset{-}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)} + B e^{-\beta\nu(t_2 - t_1)} \right];\end{aligned}$$

$0 < t_1 < t_2 < T$; e est l'ensemble des points de l'intervalle (t_1, t_2) en lesquels on définit X et Y par les formules (3); e' est l'ensemble complémentaire, sur lequel X et Y sont définis par les formules (2); $\mathcal{I}(t)$ est la plus petite des quantités $\mathcal{V}(t)$ et $\mathcal{J}(t)$. Convenons de définir X et Y par (2) quand $\mathcal{J}(t) \leqq \mathcal{V}(t)$, par (3) quand $\mathcal{V}(t) < \mathcal{J}(t)$, nous obtenons

$$(6) \qquad \mathcal{J}(t_2) < \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{B_1}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t')} + B_2 e^{-\beta\nu(t_2 - t')} \right\} \mathcal{J}^2(t')\, dt' + \mathcal{J}(t_1) \left[B_3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)} + B_4 e^{-\beta\nu(t_2 - t_1)} \right].$$

B_1, B_2, B_3, B_4 sont des constantes qui dépendent exclusivement de la forme de Γ. $\mathcal{V}(t_2)$, qui est au moins égal à $\mathcal{J}(t_2)$, est inférieur au second membre de (6).

(7) $\mathcal{J}(t)$ est continu pour $0 \leqq t < T$. Si T est fini, $\mathcal{J}(t)$ ne reste pas borné lorsque t tend vers T [sinon le second membre de (6), donc $\mathcal{V}(t)$, resterait borné].

D'autre part de (4) résulte la relation suivante, qui équivaut à *la relation de dissipation de l'énergie*

$$\frac{1}{2} \mathcal{W}(t_1) = \frac{1}{2} \mathcal{W}(t_2) + \nu \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J}^2(t')\, dt'.$$

D'où

$$\mathcal{J}^2(t) = -\frac{1}{2\nu} \frac{d\mathcal{W}}{dt};$$

or

$$\mathcal{W}(t) \leqq \frac{1}{\beta} \mathcal{J}^2(t);$$

donc

$$\mathcal{W}(t) \leqq -\frac{1}{2\beta\nu} \frac{d\mathcal{W}}{dt},$$

et par suite

$$\mathcal{W}(t) \leqq \mathcal{W}(0)\, e^{-2\beta\nu t}.$$

Nous avons donc

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J}^2(t')\, dt' < \frac{1}{2\nu} \mathcal{W}(0)\, e^{-2\beta\nu t},$$

et *a fortiori*

$$(8) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J}^2(t')\, dt' < \frac{1}{2\nu} \mathcal{W}(0)\, e^{-2\beta\nu t_1}.$$

Les propriétés des solutions régulières que nous établirons par la suite auront toutes pour origine les inégalités (6), (8) et la proposition (7).

5. Digression. — Il est bien naturel de chercher à établir en premier lieu que $T = +\infty$. Je n'y suis pas parvenu; il est d'ailleurs impossible de déduire ce fait de (6), (7), (8) : c'est ce que nous allons prouver au cours de ce paragraphe en définissant sur un intervalle positif, fini, (o, T) une fonction $J(t)$ qui satisfera les trois conditions (6), (7), (8); cette fonction n'aura d'ailleurs aucune raison de correspondre à aucun mouvement régulier.

Plus précisément nous choisirons T inférieur à $\frac{1}{3\nu}$ et assez faible pour que l'inégalité (6) soit une conséquence de la suivante :

$$(9)\qquad J(t_2) < B_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \log \frac{1}{\nu(t_2 - t')} J^2(t')\, dt' + \sqrt{2}\, J(t_1).$$

Nous prendrons alors

$$J(t) = \frac{\nu}{B_1} \frac{1}{\sqrt{\nu(T-t)}} \frac{1}{\log^\alpha \frac{1}{\nu(T-t)}},$$

α est une constante comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Pour satisfaire l'inégalité (8) il suffit de choisir

$$\mathcal{W}(o) = 2\nu\, e^{2\beta\nu T} \int_0^T J^2(t)\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{W}(o) = \frac{2\nu^2}{(2\alpha - 1) B_1^2} \frac{e^{2\beta\nu T}}{\log^{2\alpha - 1} \frac{1}{\nu T}}.$$

Nous avons, pour $T - t_1 \leqq 2(T - t_2)$,

$$\frac{J(t_2)}{J(t_1)} = \frac{\sqrt{T - t_1}}{\sqrt{T - t_2}} \left[\frac{\log \frac{1}{\nu(T - t_1)}}{\log \frac{1}{\nu(T - t_2)}} \right]^\alpha \leqq \sqrt{2} \left[\frac{\log \frac{1}{\nu(T - t_1)}}{\log \frac{1}{\nu(T - t_2)}} \right]^\alpha < \sqrt{2};$$

l'inégalité (9) est donc vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant $T - t_1 > 2(T - t_2)$; nous avons

$$B_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \log \frac{1}{\nu(t_2 - t')} \mathcal{J}^2(t')\, dt'$$

$$> \frac{\nu^2}{B_1} \int_{2t_2 - T}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}} \frac{1}{\nu(T - t')} \frac{\log \frac{1}{\nu(t_2 - t')}}{\log^{2\alpha} \frac{1}{\nu(T - t')}} dt'$$

$$> \frac{\nu^2}{B_1} \frac{1}{2\nu(T - t_2)} \frac{1}{\log^{2\alpha - 1} \frac{1}{\nu(T - t_2)}} \int_{2t_2 - T}^{t_2} \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t_2 - t')}}$$

$$> \frac{\nu}{B_1} \frac{1}{\sqrt{\nu(T - t_2)}} \frac{1}{\log^{\alpha} \frac{1}{\nu(T - t_2)}} = \mathcal{J}(t_2).$$

L'inégalité (9) est encore vérifiée. C. Q. F. D.

6. Conséquences de (6) et de (7). — Soit $\varphi(t)$ une fonction positive, définie pour $0 \leqq t \leqq \tau$, sommable, continue, sauf peut-être pour $t = 0$, et vérifiant l'inégalité suivante, où L représente une constante positive

$$(10) \qquad \varphi(t) \geqq \int_0^t \left\{ \frac{B_1}{\sqrt{\nu(t - t')}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t - t')} + B_2 e^{-\beta\nu(t - t')} \right\} \varphi^2(t')\, dt' + L\left[B_3 \log \frac{1}{\nu t} + B_4 e^{-\beta\nu t} \right].$$

Si

$$(11) \qquad \mathcal{J}(t_1) \leqq L,$$

on a manifestement d'après (6)

$$(12) \qquad \mathcal{J}(t_2) < \varphi(t_2 - t_1) \quad \text{pour} \quad t_2 \leqq t_1 + \tau.$$

Puisque $\mathcal{J}(t)$ ne reste pas borné quand T est fini et que t tend vers T, on a nécessairement

$$(13) \qquad T > t_1 + \tau.$$

En particulier, supposons $t_1 = 0$ et supposons que les données varient en sorte que $\mathcal{J}(0) \leqq L$; T et $\mathcal{J}(t)$ varient, mais T reste supérieur à τ et $\mathcal{J}(t)$ reste inférieur à $\varphi(t)$. Nous admettrons, sans développer la démonstration, que dans ces conditions les fonctions $u(x, y, t)$

et $v(x, y, t)$ non seulement sont uniformément bornées, mais qu'elles possèdent encore une égale continuité sur tout intervalle de variation de t où $\varphi(t)$ est borné.

Nous choisirons

$$\varphi(t) = \mathrm{L}\left[\mathrm{B}_3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu t} + \mathrm{B}_4 e^{-\beta\nu t}\right] + \mathrm{M}, \tag{14}$$

M étant une fonction de L. Pour que (6) soit vérifié, il suffit que

$$\mathrm{M}^2 \mathrm{F}[\nu t] - 2\nu \mathrm{M} + \mathrm{L}^2 \mathrm{G}[\nu t] \leqq 0; \tag{15}$$

nous avons posé

$$\mathrm{F}[\nu t] = 4\nu \int_0^t \left\{ \frac{\mathrm{B}_1}{\sqrt{\nu t'}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu t'} + \mathrm{B}_2 e^{-\beta\nu t'} \right\} dt',$$

$$\mathrm{G}[\nu t] = 4\nu \int_0^t \left\{ \frac{\mathrm{B}_1}{\sqrt{\nu t'}} \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu t'} + \mathrm{B}_2 e^{-\beta\nu t'} \right\} \left[\mathrm{B}_3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu t'} + \mathrm{B}_4 e^{-\beta\nu t'}\right]^2 dt'.$$

$\mathrm{F}[\nu t]$ et $\mathrm{G}[\nu t]$ sont des fonctions croissantes; elles tendent vers des constantes indépendantes de ν, $\mathrm{F}(\infty)$ et $\mathrm{G}(\infty)$, lorsque t augmente indéfiniment; pour $0 < \nu t < \frac{1}{2}$ les fonctions $\dfrac{\mathrm{F}[\nu t]}{\sqrt{\nu t} \log \frac{1}{\nu t}}$ et $\dfrac{\mathrm{G}[\nu t]}{\sqrt{\nu t}\left(\log \frac{1}{\nu t}\right)^3}$ admettent des bornes supérieures finies et des bornes inférieures positives.

Au cours de ce paragraphe nous prendrons τ égal à la borne supérieure des quantités t pour lesquelles

$$\mathrm{L}^2 \mathrm{F}[\nu t] \mathrm{G}[\nu t] \leqq \nu^2;$$

τ ainsi déterminé, le choix de M sera toujours possible. Déduisons de ce qui précède diverses conséquences intéressantes, indépendantes du choix précis de M. Posons $\mathrm{F}[\infty]\mathrm{G}[\infty] = \frac{1}{\mathrm{B}'^2}$; si $\mathcal{J}(t_1) \leqq \mathrm{B}'\nu$ on peut satisfaire l'inégalité (11) en prenant L égal à $\mathrm{B}'\nu$; et la relation (13) nous donne $\mathrm{T} = +\infty$. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME *a*. — *Si à l'instant initial, ou à tout autre instant antérieurement auquel le mouvement n'est pas devenu irrégulier, l'on a* $\mathcal{J}(t) \leqq \mathrm{B}'\nu$, *alors le mouvement ne peut jamais devenir irrégulier.*

Supposons maintenant que le mouvement devienne irrégulier à l'instant fini T; soit t une époque antérieure positive quelconque; on doit avoir $\tau < T - t$, donc

$$\mathcal{J}^2(t)\,F[\nu(T-t)]\,G[\nu(T-t)] > \nu^2.$$

D'où :

Théorème *b*. — *Si le mouvement devient irrégulier à l'époque finie* T, *on a pour* $0 \leqq t < T$:

$$\mathcal{J}(t) > B'\nu + \frac{B''\nu\,\delta[\nu(T-t)]}{\sqrt{\nu(T-t)}\left[\log\frac{1}{\nu(T-t)}\right]^2}. \tag{16}$$

B' *et* B'' *sont des constantes ne dépendant que de* Γ; $\delta[x] = 1$ *pour* $x \leqq \frac{1}{100}$, $\delta[x] = 0$ *pour* $x > \frac{1}{100}$.

Énonçons enfin un troisième théorème :

Théorème *c*. — *Supposons que les conditions initiales varient,* $\mathcal{J}(0)$ *restant inférieur à une constante* L; *soit* τ *la borne supérieure, finie ou non, des nombres* t *pour lesquels* $L^2F[\nu t]G[\nu t] \leqq \nu^2$. *Pour toute valeur de* t *comprise entre* τ *et une quantité positive arbitrairement faible* ε *les fonctions* $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ *existent, sont uniformément bornées et possèdent une égale continuité; on a pour* $0 < t \leqq \tau$

$$\mathcal{J}(t) < L\left[B_3\log\frac{1}{\nu t} + B_4\,e^{-\beta\nu t}\right] + M, \tag{17}$$

M *étant une fonction de* L.

7. Le fait que les relations (11), (14) et (15) entraînent l'inégalité (12) permet de comparer les valeurs $\mathcal{J}(t_1)$ et $\mathcal{J}(t_2)$ que prend la fonction $\mathcal{J}(t)$ à deux instants t_1 et t_2 de l'intervalle $(0, T)$, $(0 \leqq t_1 < t_2 < T)$. Supposons $\mathcal{J}(t_1)$ tel que l'on ait

$$\mathcal{J}^2(t_1)\,F[\nu(t_2-t_1)]\,G[\nu(t_2-t_1)] \leqq \nu^2.$$

Choisissons $\tau = t_2 - t_1$, $L = \mathcal{J}(t_1)$; nous ne prendrons pas M égal à la plus petite valeur possible, qui est la plus petite racine du trinome (15), pour $t = \tau$, mais nous poserons

$$\mathrm{M} = \mathrm{L}\sqrt{\frac{\mathrm{G}[\nu(t_2 - t_1)]}{\mathrm{F}[\nu(t_2 - t_1)]}}.$$

Il vient

$$J(t_2) < J(t_1)\left[\mathrm{B}_3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)} + \mathrm{B}_4\, e^{-\beta\nu(t_2 - t_1)}\right] + J(t_1)\sqrt{\frac{\mathrm{G}[\nu(t_2 - t_1)]}{\mathrm{F}[\nu(t_2 - t_1)]}}.$$

Autrement dit nous avons, en désignant par le symbole $\{\mathrm{A}_1; \mathrm{A}_2\}$ la plus petite de deux quantités A_1 et A_2 :

$$J(t_1) > \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\mathrm{F}[\nu(t_2 - t_1)]\,\mathrm{G}[\nu(t_2 - t_1)]}};\ \frac{J(t_2)}{\mathrm{B}_3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)} + \mathrm{B}_4\, e^{-\beta\nu(t_2 - t_1)} + \sqrt{\frac{\mathrm{G}[\nu(t_2 - t_1)]}{\mathrm{F}[\nu(t_2 - t_1)]}}} \right\}.$$

D'où :

Théorème d. — *Si* $0 \leqq t_1 < t_2 < \mathrm{T}$, *on a*

$$(18)\quad J(t_1) > \left\{ \mathrm{B}'\nu + \frac{\mathrm{B}''\nu\,\delta[\nu(t_2 - t_1)]}{\sqrt{\nu(t_2 - t_1)}\left[\log \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)}\right]^2};\ \frac{J(t_2)}{\mathrm{B} + \mathrm{B}\overset{+}{\log} \frac{1}{\nu(t_2 - t_1)}} \right\}.$$

Remarque. — Convenons que $J(\mathrm{T}) = +\infty$ quand T est fini; l'inégalité (18) reste valable et le théorème b en est une conséquence.

8. Conséquences de l'inégalité (8). — Supposons T fini; d'après (8) et (16) nous avons, quel que soit t_1 compris entre 0 et T,

$$\frac{2W(0)}{\nu^2} > \frac{2}{\nu} e^{2\beta\nu t_1}\int_{t_1}^{\mathrm{T}} J^2(t)\,dt > 2\nu\mathrm{B}''^2 e^{2\beta\nu t_1}\int_{t_1}^{\mathrm{T}} \frac{\delta[\nu(\mathrm{T} - t)]}{\nu(\mathrm{T} - t)\log^4 \frac{1}{\nu(\mathrm{T} - t)}}\,dt.$$

Nous choisirons $t_1 = 0$ pour $\mathrm{T} \leqq \frac{1}{100\nu}$ et $t_1 = \mathrm{T} - \frac{1}{100\nu}$ pour $\mathrm{T} \geqq \frac{1}{100\nu}$. Le dernier membre de la double inégalité précédente est une fonction continue et croissante de T; cette fonction vaut $\frac{2}{3}\mathrm{B}''^2 \frac{1}{\log^3 \frac{1}{\nu\mathrm{T}}}$

pour $T \leqq \frac{1}{100\nu}$; pour $T \geqq \frac{1}{100\nu}$ elle vaut

$$\frac{2}{3} B''^2 e^{-\frac{3}{50}} \frac{1}{\log^3 100} e^{2\cdot 3\nu T}.$$

Par suite

$$\nu T < e^{-\left[\frac{2B''^2\nu^2}{3\mathcal{W}(o)}\right]^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{si} \quad \frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2} \leqq \frac{2}{3} \frac{B''^2}{\log^3 100},$$

$$\nu T < \frac{1}{3} \log \frac{\sqrt{\mathcal{W}(o)}}{B\nu} \qquad \text{si} \quad \frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2} \geqq \frac{2}{3} \frac{B''^2}{\log^3 100}.$$

En d'autres termes :

Théorème *e*. — *Quand* $\frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2} \leqq \frac{2}{3}\frac{B''^2}{\log^3 100}$ *le mouvement ne peut devenir irrégulier qu'antérieurement à l'époque* $\theta = \frac{1}{\nu} e^{-\left[\frac{2B''^2\nu^2}{3\mathcal{W}(o)}\right]^{\frac{1}{3}}}$.

Quand $\frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2} \geqq \frac{2}{3}\frac{B''^2}{\log^3 100}$ *le mouvement ne peut devenir irrégulier qu'antérieurement à l'époque* $\theta = \frac{1}{3\nu} \log \frac{\sqrt{\mathcal{W}(o)}}{B\nu}$.

Supposons T fini et $\frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2} \leqq \frac{2}{3}\frac{B''^2}{\log^3 100}$, nous avons donc

$$\nu T < e^{-\left[\frac{2B''^2\nu^2}{3\mathcal{W}(o)}\right]^{\frac{1}{3}}} \leqq \frac{1}{100};$$

d'où, d'après (16),

$$\mathcal{J}(o) > B'\nu + B\nu \left[\frac{\mathcal{W}(o)}{\nu^2}\right]^{\frac{2}{3}} e^{\left[\frac{B\nu^2}{\mathcal{W}(o)}\right]^{\frac{1}{3}}}.$$

[Cette formule est manifestement encore valable quand on y remplace l'époque o par une époque quelconque t comprise entre o et T.]

Nous obtenons ainsi le théorème suivant, dans lequel est inclus le théorème *a* :

Théorème *f*. — *Le mouvement ne peut jamais devenir irrégulier si l'on a, à l'instant initial [ou à tout autre instant antérieurement auquel le mouvement n'est pas devenu irrégulier] :*

$$\mathcal{J}(t) \leqq B'\nu + B\nu e^{\left[\frac{B\nu^2}{\mathcal{W}(t)}\right]^{\frac{1}{3}}} \delta\left[\frac{\mathcal{W}(t)}{B\nu^2}\right].$$

9. Ne faisons plus aucune hypothèse relative à T; soient t_1 et t_2 deux époques telles que $0 \leqq t_1 < t_2 < \mathrm{T}$. Les inégalités (8) et (18) nous donnent

$$(19)\quad \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\mathrm{B}^{-1}\nu\,\delta[\nu(t_2-t)]}{\sqrt{\nu(t_2-t)}\log^2\dfrac{1}{\nu(t_2-t)}};\ \frac{\mathcal{J}(t_2)}{\mathrm{B}-\mathrm{B}\log\dfrac{1}{\nu(t_2-t)}} \right\}^2 dt < \frac{\mathcal{W}(0)}{2\nu}e^{-2\cdot 3\nu t_1}.$$

Nous choisirons $t_1 = t_2 - \frac{1}{100\nu}$ lorsque $t_2 \geqq \frac{1}{100\nu}$; $t_1 = 0$ lorsque $t_2 \leqq \frac{1}{100\nu}$.

Pour que l'inégalité (19) fournisse une majorante de $\mathcal{J}(t_2)$, il faut et il suffit que

$$\mathrm{B}^{-2}\nu^2\int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta[\nu(t_2-t)]}{\nu(t_2-t)\log^4\dfrac{1}{\nu(t_2-t)}}\,dt > \frac{\mathcal{W}(0)}{2\nu}e^{-2\cdot 3\nu t_1},$$

c'est-à-dire que t_2 soit supérieur à l'époque θ que définit l'énoncé du théorème e : T est alors infini.

Supposons donc T infini; choisissons $t_2 \geqq \frac{1}{100\nu}$; le premier membre de (19) est de la forme $\frac{\mathrm{B}\mathcal{J}^2(t_2)}{\nu}$ quand le second est inférieur à une quantité $\mathrm{B}\nu$. Il en résulte :

Théorème g. — *Quand* T *est infini, on a* $\mathcal{J}(t) < \mathrm{B}\sqrt{\mathcal{W}(0)}e^{-3\nu t}$ *pour les valeurs de* t *vérifiant à la fois les deux inégalités :* $\nu t > \frac{1}{100}$ *et* $3\nu t > \log\frac{\sqrt{\mathcal{W}(0)}}{\mathrm{B}\nu}$.

II. — États initiaux semi-réguliers.

10. La section précédente est basée sur les hypothèses (c), qui concernent l'état initial du liquide. Elles sont trop restrictives pour que les résultats acquis puissent s'appliquer directement au cours du chapitre suivant.

Donnons-nous maintenant deux fonctions $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$, définies sur Σ et mesurables ; soit

$$\mathcal{W}^2(o) = \iint_{\Sigma} [u^2(x, y, o) + v^2(x, y, o)]\, dx\, dy.$$

Supposons vérifié l'un des deux systèmes de conditions énoncés ci-dessous :

(e') On a

$$u^2(x, y, o) + v^2(x, y, o) \leqq \mathcal{V}^2(o),$$

$\mathcal{V}(o)$ étant une constante.

On a

$$\iint_{\Sigma} \left[u(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + v(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right] dx\, dy = o$$

pour toutes les fonctions $\Phi(x, y)$ qui sont continues sur $\Sigma + \Gamma$ ainsi que leurs dérivées premières.

(e'') La quantité $\mathcal{W}(o)$ est finie.

Il existe des fonctions mesurables et de carrés sommables $u_x(x, y, o)$, $u_y(x, y, o)$, $v_x(x, y, o)$, $v_y(x, y, o)$ telles que l'on ait pour toutes les fonctions $\Phi(x, y)$:

$$\iint_{\Sigma} u(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy + \iint_{\Sigma} u_x(x, y, o)\, \Phi(x, y)\, dx\, dy = o,$$

$$\iint_{\Sigma} u(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy + \iint_{\Sigma} u_y(x, y, o)\, \Phi(x, y)\, dx\, dy = o,$$

$$\iint_{\Sigma} v(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy + \iint_{\Sigma} v_x(x, y, o)\, \Phi(x, y)\, dx\, dy = o,$$

$$\iint_{\Sigma} v(x, y, o) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy + \iint_{\Sigma} v_y(x, y, o)\, \Phi(x, y)\, dx\, dy = o.$$

Enfin :

$$u_x(x, y, o) + v_y(x, y, o) = o.$$

Posons, dans ce dernier cas,

$$\mathcal{J}^2(o) = \iint_{\Sigma} [u_x^2(x, y, o) + u_y^2(x, y, o) + v_x^2(x, y, o) + v_y^2(x, y, o)]\, dx\, dy.$$

On peut trouver une suite de fonctions $u_n(x, y, o)$, $v_n(x, y, o)$, nulles sur Γ, continues, ainsi que leurs dérivées premières, sur $\Sigma+\Gamma$, et qui vérifient les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u_n(x,y,0)}{\partial x}+\frac{\partial v_n(x,y,0)}{\partial y}=0;$$

$$(20)\quad \lim \iint_{\Sigma} \{[u(x,y,0)-u_n(x,y,0)]^2+[v_n(x,y,0)-v(x,y,0)]^2\}\,dx\,dy=0;$$

dans le cas (c') :

$$u_n^2(x,y,0)+v_n^2(x,y,0)\leqq \mathcal{V}^2(0);$$

dans le cas (c'') :

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial u_n(x,y,0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n(x,y,0)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n(x,y,0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n(x,y,0)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\leqq \mathfrak{J}^2(0).$$

Nommons $u_n(x,y,t)$, $v_n(x,y,t)$ la solution régulière des équations de Navier, qui, d'après ce que nous savons, correspond aux valeurs initiales $u_n(x,y,0)$, $v_n(x,y,0)$. Appliquons le théorème c : posons, dans le cas (c'), $\mathcal{I}(0)=\mathcal{V}(0)$; dans le cas (c''), $\mathcal{I}(0)=\mathfrak{J}(0)$; soit τ la borne supérieure de nombres t pour lesquels $\mathcal{I}^2(0)F[\nu t]G[\nu t]\leqq \nu^2$; on peut extraire de la suite $u_n(x,y,t)$, $v_n(x,y,t)$ une suite partielle qui, pour $0<t<\tau$, converge vers une limite $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$. Nous allons établir quelques propriétés de ces fonctions.

11. Supposons t intérieur à l'intervalle $(0,\tau)$; alors les fonctions $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ sont continues sur $\Sigma+\Gamma$; elles sont nulles le long de Γ; elles admettent des dérivées du premier ordre en x et y qui sont continues par rapport à x, y, t sur $\Sigma+\Gamma$; en tout point intérieur à Σ elles admettent des dérivées qui satisfont les équations de Navier. On a manifestement

$$(21)\qquad \mathcal{W}(t)<\mathcal{W}(0)\quad \text{pour}\quad 0<t<\tau.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (17) du théorème c, nous avons

$$\mathcal{I}(t)<\mathcal{I}(0)\left[B_1\log\frac{1}{\nu t}+B_2e^{-2\nu t}\right]+M.$$

Portons cette majorante de $\mathcal{I}(t)$ dans le second membre de (6), qui, rappelons-le, est supérieur à $\mathcal{V}(t_2)$; choisissons $0<t<\tau$, $t_2=t$

et $t_1 = \frac{1}{2} t$: nous obtenons

$$(22) \qquad \mathcal{J}(t) < M_1 \left[\log \frac{1}{\nu t}\right]^2 + M_2 e^{-2\nu t};$$

M_1 et M_2 sont des quantités finies, fonctions de $\mathcal{J}(0)$.

(23) Soient $a(x, y)$ et $b(x, y)$ deux fonctions, nulles le long de Γ, continues sur $\Sigma + \Gamma$ ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, et qui satisfont l'équation

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} = 0.$$

On déduit de (1) et (3):

$$\begin{aligned}
\nu \int_0^t dt' \iint_\Sigma & [u_n(x, y, t') \Delta a(x, y) + v_n(x, y, t') \Delta b(x, y)]\, dx\, dy \\
& - \iint_\Sigma [u_n(x, y, t)\, a(x, y) + v_n(x, y, t)\, b(x, y)]\, dx\, dy \\
& + \iint_\Sigma [u_n(x, y, 0)\, a(x, y) + v_n(x, y, 0)\, b(x, y)]\, dx\, dy \\
= - \int_0^t dt' \iint_\Sigma & \left\{ \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} u_n^2(x, y, t') + \left[\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}\right] u_n(x, y, t')\, v_n(x, y, t') \right. \\
& \left. + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} v_n^2(x, y, t') \right\} dx\, dy.
\end{aligned}$$

Passons à la limite : rappelons-nous la relation (20), l'inégalité

$$\iint_\Sigma [u_n^2(x, y, t) + v_n^2(x, y, t)]\, dx\, dy < 2W(0),$$

et le fait que les fonctions $u_n(x, y, t)$, $v_n(x, y, t)$ convergent vers $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ pour $0 < t < \tau$. Il vient

$$\begin{aligned}
\nu \int_0^t dt' \iint_\Sigma & [u(x, y, t') \Delta a(x, y) + v(x, y, t') \Delta b(x, y)]\, dx\, dy \\
& - \iint_\Sigma [u(x, y, t)\, a(x, y) + v(x, y, t)\, b(x, y)]\, dx\, dy \\
& + \iint_\Sigma [u(x, y, 0)\, a(x, y) + v(x, y, 0)\, b(x, y)]\, dx\, dy \\
= - \int_0^t dt' \iint_\Sigma & \left\{ \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} u^2(x, y, t') + \left[\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}\right] u(x, y, t')\, v(x, y, t') \right. \\
& \left. + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} v^2(x, y, t') \right\} dx\, dy.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$(24)\qquad \lim_{t\to 0}\iint_\Sigma [u(x,y,t)a(x,y)+v(x,y,t)b(x,y)]\,dx\,dy = \iint_\Sigma [u(x,y,0)a(x,y)+v(x,y,0)b(x,y)]\,dx\,dy.$$

Nous allons généraliser ce résultat :

Désignons maintenant par $a(x,y)$, $b(x,y)$ deux fonctions mesurables, de carrés sommables, et telles que nous ayons

$$\iint_\Sigma \left[a(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}\right]dx\,dy=0$$

pour toutes les fonctions $\Phi(x,y)$ continues, ainsi que leurs dérivées premières, sur $\Sigma+\Gamma$. On peut alors trouver une suite de fonctions $a_n(x,y)$, $b_n(x,y)$ qui vérifient les conditions (23), et telles que les quantités

$$(25)\qquad \varepsilon_n^2=\iint_\Sigma \{(a-a_n)^2+(b-b_n)^2\}\,dx\,dy$$

tendent vers zéro. Nous avons pour $0\leq t<\tau$:

$$(26)\qquad \left|\iint_\Sigma [u(x,y,t)\,a(x,y)+v(x,y,t)\,b(x,y)]\,dx\,dy - \iint_\Sigma [u(x,y,t)a_n(x,y)+v(x,y,t)b_n(x,y)]\,dx\,dy\right|\leq\varepsilon_n\sqrt{\mathfrak{W}(0)}.$$

(24) nous apprend, d'autre part, qu'on peut trouver une suite de nombres positifs τ_n tels que l'inégalité $0<t<\tau_n$ entraine

$$(27)\qquad \left|\iint_\Sigma [u(x,y,t)\,a_n(x,y)+v(x,y,t)\,b_n(x,y)]\,dx\,dy - \iint_\Sigma [u(x,y,0)\,a_n(x,y)+v(x,y,0)\,b_n(x,y)]\,dx\,dy\right|<\varepsilon_n\sqrt{\mathfrak{W}(0)}.$$

De (25), (26) et (27) résulte que l'on a pour $0<t<\tau_n$

$$\left|\iint_\Sigma [u(x,y,t)\,a(x,y)+v(x,y,t)\,b(x,y)]\,dx\,dy - \iint_\Sigma [u(x,y,0)\,a(x,y)+v(x,y,0)\,b(x,y)]\,dx\,dy\right|<3\varepsilon_n\sqrt{\mathfrak{W}(0)}.$$

La relation (24) est donc encore valable.

En particulier,

$$\lim_{t\to 0} \iint_{\Sigma} [u(x, y, t)\, u(x, y, 0) + v(x, y, t)\, v(x, y, 0)]\, dx\, dy$$
$$= \iint_{\Sigma} [u^2(x, y, 0) + v^2(x, y, 0)]\, dx\, dy.$$

Cette relation, jointe à l'inégalité (21) : $\mathcal{W}(t) < \mathcal{W}(0)$, nous fournit une égalité importante, dont (24) n'est qu'une conséquence :

$$(28)\quad \lim_{t\to 0} \iint_{\Sigma} \{[u(x, y, t) - u(x, y, 0)]^2 + [v(x, y, t) - v(x, y, 0)]^2\}\, dx\, dy = 0,$$

en d'autres termes $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ convergent fortement en moyenne vers $u(x, y, 0)$ et $v(x, y, 0)$ quand t tend vers zéro.

12. Comparaison de deux solutions des équations de Navier. — Soient deux solutions des équations de Navier : $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$. Nous les supposons définies sur Σ pour $0 < t < t_0$, nulles le long de Γ, continues sur $\Sigma + \Gamma$ ainsi que leurs dérivées premières en x et en y ; en tout point intérieur à Σ, elles admettent des dérivées partielles qui vérifient les équations de Navier. En outre, nous supposerons que lorsque t tend vers zéro, les quatre fonctions u, v, u_1, v_1 convergent fortement en moyenne vers des limites que nous nommerons $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$, $u_1(x, y, 0)$, $v_1(x, y, 0)$.

Posons

$$u'(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u(x, y, t);$$
$$v'(x, y, t) = v_1(x, y, t) - v(x, y, t);$$
$$j^2(t) = \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'^2}{\partial y} + \frac{\partial v'^2}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y}\right] dx\, dy;$$
$$w(t) = \iint_{\Sigma} [u'^2 + v'^2]\, dx\, dy.$$

Soit $\mathcal{V}(t)$ la plus grande longueur à l'instant t du vecteur u, v. Nous avons pour $0 < t < t_0$,

$$\nu \Delta u' - \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q'}{\partial x} = -2(v\zeta' + v'\zeta + v'\zeta') \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$
$$\nu \Delta v' - \frac{\partial v'}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q'}{\partial y} = 2(u\zeta' + u'\zeta + u'\zeta') \qquad \zeta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right).$$

Un calcul analogue à celui qui fournit la relation de dissipation de l'énergie nous donne

$$\nu j^2(t) + \frac{1}{2}\frac{dw(t)}{dt} = 2\iint_\Sigma (u'v - v'u)\zeta\,dx\,dy.$$

D'où

$$\nu j^2(t) - \sqrt{2}\,\mathfrak{V}(t)\sqrt{w(t)}\,j(t) + \frac{1}{2}\frac{dw(t)}{dt} \leq 0.$$

Le discriminant de ce trinome en $j(t)$ ne peut être négatif; donc

$$\mathfrak{V}^2(t)\,w(t) - \nu\frac{dw(t)}{dt} \geq 0.$$

On en déduit

$$w(t) \leq w(0)\,e^{\frac{1}{\nu}\int_0^t \mathfrak{V}^2(t')\,dt'}$$

lorsque le second membre de cette inégalité a un sens.

En particulier, si l'on a presque partout

$$u(x, y, 0) = u_1(x, y, 0) \quad \text{et} \quad v(x, y, 0) = v_1(x, y, 0)$$

et si l'intégrale $\int_0^t \mathfrak{V}^2(t')\,dt'$ converge, $w(t)$ est identiquement nul : les deux solutions considérées sont identiques.

15. Conclusions. — Pour énoncer les résultats obtenus au cours des trois paragraphes précédents, il nous sera commode d'employer la définition que voici :

Nous dirons que, pour $t_1 \leq t < t_2$, deux fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ constituent une *solution semi-régulière du système* de Navier quand les conditions suivantes seront remplies pour toute valeur de t intérieure à l'intervalle (t_1, t_2) :

u et v sont nulles le long de Γ;

$u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sont continues en x, y, t sur $\Sigma + \Gamma$;

u et v admettent en tout point intérieur à Σ des dérivées partielles qui satisfont les équations de Navier;

l'intégrale $\int_{t_1}^{t} \mathfrak{V}^2(t')\,dt'$ est convergente;

$$\lim_{t \to t_1 + 0} \iint_\Sigma \{[u(x, y, t) - u(x, y, t_1)]^2 + [v(x, y, t) - v(x, y, t_1)]^2\}\,dx\,dy = 0.$$

[Une solution régulière pour $t_1 \leqq t < t_2$ est *a fortiori* semi-régulière.]

Supposons $t_1 = 0$; la solution semi-régulière sera dite correspondre aux données $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$.

Le paragraphe **12** établit le théorème d'unicité :

Il existe au plus une solution semi-régulière correspondant à un système de données.

Les paragraphes **10** et **11** établissent un théorème d'existence :

Si les données vérifient les conditions (c') *ou* (c''), *l'existence d'une solution semi-régulière correspondante est assurée.*

Notons enfin que toute solution semi-régulière vérifie les théorèmes a, b, c, d, e, f, g : la quantité $\mathcal{J}(0)$ est finie quand sont vérifiées les conditions (c') ou les conditions (c'').

CHAPITRE IV.

MOUVEMENTS TURBULENTS.

1. Introduction. — Nous ignorons si certains mouvements ne deviennent pas irréguliers au bout d'un temps fini : le chapitre précédent ne nous a fourni à ce sujet que des renseignements partiels [1]. Il est cependant possible que la régularité du mouvement soit assurée quand on suppose qu'aux points où le tenseur de déformation est considérable, le coefficient de viscosité cesse d'être constant pour prendre lui-même des valeurs considérables. Nous voici donc amenés [2] à supposer que le problème légèrement modifié admet toujours une

[1] La difficulté de la question provient de l'influence des parois. Dans le cas d'un liquide plan illimité, aucune irrégularité n'est possible : j'en ai donné une première démonstration dans le dernier chapitre de ma Thèse (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. **12**, 1933); une seconde démonstration se trouve ébauchée dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mai 1932.

[2] Pour plus de détails, *voir* ma Thèse, Chapitre III, Section III.

solution régulière. Cette hypothèse va être légitimée au cours de ce chapitre; mais la solution approchée que nous utiliserons ici sera choisie la plus simple possible; elle se trouvera dépourvue de signification physique précise. Nous chercherons ce que deviendra cette solution approchée quand nous nous rapprocherons de plus en plus du problème primitif. Ceci nous conduira à introduire la notion nouvelle de solution turbulente. Et nous nous trouverons avoir établi qu'il existe dans tous les cas au moins une solution turbulente, définie pendant une durée illimitée qui succède à l'instant initial.

La seconde section du chapitre démontrera quelques propriétés remarquables de ces solutions turbulentes.

Les raisonnements que nous allons développer peuvent être transposés à l'étude des mouvements turbulents d'un liquide visqueux, illimité, à trois dimensions, étude que nous ferons dans les deux derniers chapitres d'un autre Mémoire [1] en utilisant d'autres procédés. Inversement, les raisonnements que contiennent ces deux chapitres peuvent être appliqués au cas présent: ils justifient mieux la notion de solution turbulente, mais ils font appel à des théorèmes moins élémentaires et moins usuels. Nous nous sommes appliqués à utiliser ici l'appareil mathématique minimum : nous avons profité de la structure particulière des solutions turbulentes pour simplifier la démonstration du théorème d'existence.

I. — Théorème d'existence.

2. Écrivons les équations de Navier :

$$
(1)\quad \begin{cases}
\nu\,\Delta u(x, y, t) - \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = \dfrac{\partial(u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(uv)}{\partial y}, \\[2ex]
\nu\,\Delta v(x, y, t) - \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = \dfrac{\partial(uv)}{\partial x} + \dfrac{\partial(v^2)}{\partial y}, \\[2ex]
\qquad\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0.
\end{cases}
$$

(1) *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* (*Acta math.*, t. **63**, 1934).

et les équations des mouvements infiniment lents :

$$(2)\quad \begin{cases} \nu\Delta u(x, y, t) - \dfrac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = 0, \\ \nu\Delta v(x, y, t) - \dfrac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Supposons l'existence de conditions initiales $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$ telles que le mouvement correspondant $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ devienne irrégulier à une époque T : $\vartheta(t)$ augmente indéfiniment quand t tend vers T. On peut admettre que les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ représentent mal la réalité physique quand $\vartheta(t)$ dépasse une certaine constante C, supérieure à $\vartheta(0)$, et qu'il est préférable de leur substituer des fonctions plus régulières. C'est ce que nous allons faire en construisant, par un procédé de récurrence, deux nouvelles fonctions $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$.

Supposons $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ définis pour $0 \leq t \leq \alpha$ et [1] $\vartheta^*(\alpha) \leq C$. Considérons la solution semi-régulière de (1), $u_\alpha(x, y, t)$, $v_\alpha(x, y, t)$ qui correspond aux conditions initiales

$$u_\alpha(x, y, \alpha) = u^*(x, y, \alpha), \qquad v_\alpha(x, y, \alpha) = v^*(x, y, \alpha);$$

elle est définie pour $\alpha \leq t < T_\alpha$. Si $T_\alpha = +\infty$, nous choisirons u^*, v^* identiques à u_α, v_α pour $t \geq \alpha$. Supposons T_α fini ; soit β la borne supérieure des valeurs de t pour lesquelles $\vartheta_\alpha(t) \leq C$. Comme nous aurons à utiliser fréquemment le théorème c, convenons de représenter par $|L|$ la borne supérieure, finie ou non, des nombres t pour lesquels $L^2F[\nu t]G[\nu t] \leq \nu^2$. Nous avons $t + |\vartheta_\alpha(t)| < T_\alpha$ pour $\alpha \leq t < T_\alpha$. Soit γ la borne supérieure de la fonction $t + |\vartheta_\alpha(t)|$ sur le segment $\alpha \leq t \leq \beta$. Nous avons $\beta < \gamma \leq T_\alpha$. Nous choisirons u^*, v^* identiques à u_α, v_α pour $\alpha \leq t \leq \dfrac{\beta + \gamma}{2}$. Puis u^*, v^* seront définis, au delà de l'époque $\dfrac{\beta + \gamma}{2}$, par les propriétés d'être continus pour $t = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$ et de satisfaire le système (2) jusqu'à l'instant (fini) δ où nous aurons pour la première fois $\vartheta^*(\delta) = C$.

---

[1] ϑ^* est défini à partir de u^*, v^* comme ϑ l'est à partir de u, v.

Posons $u^*(x, y, 0) = u(x, y, 0)$, $v^*(x, y, 0) = v(x, y, 0)$. Appliquons la construction qui précède en choisissant d'abord $\alpha = 0$: u^* et v^* se trouvent définis pour $0 \leq t \leq \delta_0$. Choisissons alors $\alpha = \delta_0$: cette même construction définit u^*, v^* soit sur l'intervalle infini $(\delta_0, +\infty)$, soit sur un intervalle fini (δ_0, δ_1). Poursuivons ainsi, ou bien indéfiniment, ou bien jusqu'à ce que nous rencontrions un T_α infini. Puisque $\delta_{i+1} - \delta_i > \frac{1}{\gamma}|C|$, $u^*(x, y, t)$ et $v^*(x, y, t)$ se trouvent finalement définis pour toutes les valeurs positives de t.

Énonçons celles des propriétés des fonctions $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ qui nous seront utiles.

Ces fonctions sont continues pour $t > 0$.

L'axe des temps est divisé par une suite de points, qui ne peuvent s'accumuler qu'à l'infini, en intervalles à l'intérieur de chacun desquels u^* et v^* constituent une solution régulière soit du système (1), soit du système (2).

Tout instant t, tel que $\mathcal{J}^*(t) \leq C$, est l'origine d'un intervalle de l'axe des temps, de longueur supérieure à $\frac{1}{\gamma}|\mathcal{J}^*(t)|$, sur lequel u^* et v^* constituent une solution régulière du système (1).

Nous avons

$$(5) \qquad \mathcal{W}^*(t_1) - \mathcal{W}^*(t_2) \geq 2\nu \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J}^{*2}(t)\,dt \qquad \text{pour} \quad 0 < t_1 \leq t_2$$

Ces deux derniers faits assurent « la prédominance du système (1) sur le système (2) ». Nous nommerons $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$: *solution approchée du système* (1) *attachée à la constante* C.

5. Faisons augmenter C indéfiniment par une suite de valeurs C_n arbitrairement choisies; $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ convergent uniformément vers $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ à l'intérieur de l'intervalle $0 < t < T$. Si $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ convergent uniformément à l'intérieur d'un autre intervalle, vers des limites, constituant une solution de (1) régulière dans cet intervalle, nous nommerons également ces limites $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$. Nous nous proposons d'établir au cours de ce paragraphe *la proposition suivante :* On peut toujours extraire de la suite C_q une suite partielle C_n pour laquelle de telles limites existent en tout point d'un ensemble ouvert du demi-axe $(0, +\infty)$, le complémentaire de cet ensemble par rapport à ce demi-axe étant de mesure nulle.

Nous avons d'après (3)

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} J^{*2}(t)\,dt \leq \frac{1}{2\nu} W^2(0).$$

Donc, quel que soit C, l'intervalle $\left(0, \frac{W^2(0)}{2B^2\nu^3}\right)$ contient des points où

$$J^*(t) \leq B\nu,$$

c'est-à-dire où

$$\tau^*(t) = +\infty.$$

Soit θ_n^* l'un d'eux. D'après le théorème de Weierstrass-Bolzano, le théorème d'Arzelà et le théorème *c* (p. 393) on peut extraire de la suite C_q une suite C_m telle que les θ_m^* convergent vers une limite θ_0 et qu'à l'intérieur de l'intervalle $(\theta_0, +\infty)$ les fonctions $u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ convergent uniformément vers une solution régulière de (1) : $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$. Si θ_0 se trouvait être égal à T la proposition en vue serait établie : il suffirait de choisir comme suite C_n la suite C_m.

Pour poursuivre, introduisons un *procédé* récurrent : Supposons extraite de la suite C_q une suite C_p telle que les fonctions u et v existent, sauf peut-être sur un ensemble e, de $\overline{T\theta_0}$, composé de k intervalles et de points isolés ($k > 0$). Soit e' l'ensemble des points t' de e tels que e contienne l'intervalle $\left(t', t' + \frac{\text{mes.}\,e}{2k}\right)$. Nous avons mes. $e' \geq \frac{1}{2}$ mes. e. Donc, d'après (4), on peut trouver quel que soit C un point θ^* de e' tel que

$$J^*(\theta^*) \leq \sqrt{\frac{W^2(0)}{\nu\,\text{mes.}\,e}}.$$

Le théorème de Weierstrass-Bolzano, le théorème d'Arzelà et le théorème c prouvent qu'on peut extraire de la suite C_p une suite partielle C_q telle que les θ^q convergent vers une limite θ et qu'à l'intérieur de l'intervalle $\left(\theta, \theta + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{W(0)}{2\,\text{mes.}\,e}}\right)$ les fonctions $u^q(x, y, t)$, $v^q(x, y, t)$ convergent uniformément vers une solution régulière de (1) : $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$.

Ce procédé d'extraction de suite sera dit de *première catégorie* lorsque tout l'intervalle $\left(\theta, \theta + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{W(0)}{2\,\text{mes.}\,e}}\right)$ sera intérieur à e : dans le cas contraire il sera dit de *seconde catégorie*.

Nous l'appliquerons d'abord en choisissant e identique à $\overline{T\theta_*}$ et la suite C_p identique à C_n : il nous fournira une suite partielle C_{n_1} telle que, sur un certain intervalle de $\overline{T\theta_*}$, u^n et v^n convergent uniformément vers une solution régulière de (1) : nous nommerons cet intervalle : $\overline{\theta_1\tau_1}$. Si $\overline{\theta_1\tau_1}$ coïncide avec $\overline{T\theta_*}$ la proposition dont ce paragraphe est l'objet se trouve établie : il suffit de choisir comme suite C_n la suite C_{n_1}. Sinon nous appliquerons à nouveau le même procédé d'extraction de suite en choisissant pour e l'ensemble $e_1 = \overline{T\theta_*} - \overline{\theta_1\tau_1}$ et pour C_p la suite C_{n_1} : il nous fournira une suite partielle C_{n_2} telle que, sur un certain intervalle $\overline{\theta_2\tau_2}$ intérieur à e_1, u^n et v^n convergent uniformément vers une solution régulière de (1). Posons

$$e_2 = \overline{T\theta_*} - \overline{\theta_1\tau_1} - \overline{\theta_2\tau_2}.$$

Si cet ensemble ne contient aucun intervalle la proposition en vue est établie. Sinon nous appliquerons à nouveau le même procédé d'extraction de suite, etc.

Finalement ou bien la proposition à prouver est démontrée, ou bien nous avons construit une infinité de suites : $C_{n_1}, C_{n_2}, C_{n_3}, \ldots$. Je dis qu'on peut prendre alors pour suite C_n la suite dont le $i^{\text{ème}}$ terme est le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite C_{n_i} (procédé diagonal de Cantor) : C_n est suite partielle de chacune des précédentes à partir d'un certain rang : donc les fonctions u^n, v^n qui lui correspondent convergent uniformément vers une solution régulière de (1) à l'intérieur de chaque intervalle $\overline{\tau_i\vartheta_i}$; il ne reste plus qu'à prouver que

$$\text{mes.}\,\overline{T\vartheta_0} = \mathop{S}_{i=1}^{\infty} \text{mes.}\,\overline{\tau_i\vartheta_i},$$

c'est-à-dire que

$$\lim.\,(\text{mes.}\,e_i) = 0.$$

e_i se compose de points isolés et de k_i intervalles. Si l'opération qui définit e_{i-1} est de première catégorie, on a

$$(5) \qquad \text{mes.}\,e_{i-1} = \text{mes.}\,e_i - \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{W(0)}{2\,\text{mes.}\,e_i}}\right\}; \qquad k_{i-1} = 1 - k_i,$$

sinon

$$(6) \qquad \text{mes.}\,e_{i-1} \leqq \left(1 - \frac{1}{2k_i}\right)\text{mes.}\,e_i; \qquad k_{i-1} \leqq k_i.$$

Supposons d'abord le nombre des opérations de première catégorie infini et représentons par j leurs indices; d'après (5) $\sum_j \left\{\sqrt{\frac{W(0)}{2\,\text{mes.}\,e_j}}\right\}$ converge : donc

$$\lim.\left\{\sqrt{\frac{W(0)}{2\,\text{mes.}\,e_j}}\right\} = 0;$$

donc

$$\lim(\text{mes.}\,e_j) = 0;$$

d'où

$$\lim(\text{mes.}\,e_i) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si au contraire le nombre des opérations de première catégorie est borné, les nombres k_i restent inférieurs à un entier k et nous avons, quand i est choisi supérieur à une certaine borne,

$$\text{mes.}\,e_{i-1} \leqq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\text{mes.}\,e_i.$$

Donc

$$\lim.\,(\text{mes.}\,e_i) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4. Nous nous proposons maintenant d'établir quelques propriétés des fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ que nous venons ainsi de définir pour un ensemble ouvert E de valeurs de t. E se compose des intervalles $(0, T)$, $(\theta_0, +\infty)$, $(\theta_1 \tau_1)$, $(\theta_2 \tau_2)$, ... Le complémentaire de E par rapport à l'intervalle $(0, +\infty)$ est de mesure nulle. Nous avons, quand t appartient à E, $\mathfrak{W}^*(t) = \text{limite } \mathfrak{W}^{**}(t)$. On en déduit, grâce à (3), que $\mathfrak{W}^*(t)$ est décroissant. D'autre part on a, en tout point de E, $\frac{d\mathfrak{W}^*(t)}{dt} = -2\nu \mathfrak{J}^{*2}(t)$. De ces deux faits résulte que $\mathfrak{W}^*(t) + 2\nu \int_0^t \mathfrak{J}^{*2}(t')dt'$ est une fonction non croissante qui reste constante sur chacun des intervalles dont se constitue E.

Introduisons deux fonctions arbitraires $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ continues sur $\Sigma + \Gamma$, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, pour toutes les valeurs positives de t. Supposons que $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ s'annulent le long de Γ et qu'on ait à l'intérieur de Σ

$$\frac{\partial a(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y, t)}{\partial y} = 0.$$

Donnons-nous un nombre positif arbitrairement faible ε; construisons deux ensembles de valeurs de t, E' et E'', qui possèdent les propriétés suivantes : E' et E'' n'ont aucun point commun; E' + E'' constitue le demi-axe $0 \leqq t$; E' se compose d'un nombre fini de segments, intérieurs à E, ainsi que leurs extrémités; mes. $E'' \geqq \varepsilon$.

$u^*(x, y, t)$, $v^*(x, y, t)$ constituent une solution régulière tantôt de (1), tantôt de (2); posons dans le premier cas $\delta(t) = 1$, dans le second $\delta(t) = 0$. La fonction

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & \nu \int_0^t dt' \iint_\Sigma [u^*(x, y, t')\Delta a(x, y, t') + v^*\Delta b]\,dx\,dy \\
& + \int_0^t dt' \iint_\Sigma \left[u^*(x, y, t')\frac{\partial a(x, y, t')}{\partial t'} + v^*\frac{\partial b}{\partial t'}\right] dx\,dy \\
& - \iint_\Sigma [u^*(x, y, t)a(x, y, t) + v^* b]\,dx\,dy \\
& + \int_0^t \delta(t')dt' \iint_\Sigma \left[u^{*2}(x, y, t')\frac{\partial a(x, y, t')}{\partial x} + u^*v^*\left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) + v^{*2}\frac{\partial b}{\partial y}\right] dx\,dy
\end{aligned}
$$

est constante.

Choisissons pour C la suite des valeurs C_n; à partir d'un certain rang $\delta(t)$ vaut toujours 1 sur E'; choisissons t intérieur à E; désignons par $E'(t)$, $E''(t)$ les ensembles des points de E', de E'' qui se trouvent sur le segment $(0, t)$; nous avons

$$\left|\int_{E(t)} dt \iint_\Sigma u^\star(x,y,t)\,\Delta a(x,y,t)\,dx\,dy\right| \leq \varepsilon\sqrt{2W(0)}\,\underset{0\leq t'\leq t}{\mathrm{Max}}\sqrt{\iint_\Sigma [\Delta a(x,y,t')]^2\,dx\,dy},$$

. . . .

$$\left|\int_{E(t)} dt\,\delta(t)\iint_\Sigma v^\star(x,y,t)\,\frac{db(x,y,t)}{dt}\,dx\,dy\right| \leq \varepsilon\sqrt{2W(0)}\,\underset{0\leq t'\leq t}{\mathrm{Max}}\left|\frac{db(x,y,t')}{dt}\right|.$$

De (7) résulte donc à la limite :

$$\begin{aligned}\Bigg|\nu\int_{E(t)} dt\iint_\Sigma (u\,\Delta a + v\,\Delta b)\,dx\,dy &- \iint_\Sigma (ua + vb)_0^t\,dx\,dy\\ &+ \int_{E(t)} dt\iint_\Sigma \left[u\frac{da}{dt} + v\frac{db}{dt}\right] dx\,dy\\ &+ \int_{E(t)} dt\iint_\Sigma \left[u^2\frac{da}{dx} + uv\left(\frac{da}{dy} + \frac{db}{dx}\right) + v^2\frac{db}{dy}\right] dx\,dy\Bigg| < D\varepsilon,\end{aligned}$$

D étant indépendant du choix de E. On en déduit, en faisant tendre ε vers o et moyennant quelques modifications d'écriture, *la constance de la fonction*

$$\begin{aligned}(8)\quad \int_0^t dt\iint_\Sigma \Big\{u(x,y,t)\left[\nu\Delta a(x,y,t) + \frac{da(x,y,t)}{dt}\right] &+ v\left[\nu\Delta b + \frac{db}{dt}\right]\Big\}\,dx\,dy\\ &- \iint_\Sigma [u(x,y,t)a(x,y,t) + vb]\,dx\,dy\\ &+ \int_0^t dt\iint_\Sigma [u(x,y,t)b(x,y,t) - va]\left[\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right] dx\,dy.\end{aligned}$$

5. Pour exprimer commodément les résultats acquis au cours de cette première section du chapitre, posons une *définition* : Considérons des données $u(x, y, 0)$ $v(x, y, 0)$ vérifiant les conditions (c') ou (c'') [*cf.* § 10 du Chapitre III]. Soient six fonctions, dont les deux premières coïncident pour $t = 0$ avec ces données

$$u(x,y,t),\quad v(x,y,t),\quad u_1(x,y,t),\quad u_2(x,y,t),\quad v_1(x,y,t),\quad v_2(x,y,t).$$

Nous dirons qu'elles constituent « *une solution turbulente du système* *de Navier* » correspondant à ces données quand elles posséderont les six propriétés suivantes :

1° Elles sont définies sur Σ pour un ensemble E de valeurs positives de t dont le complémentaire par rapport à l'intervalle $(0, +\infty)$ est de mesure nulle.

2° E contient le point $t = 0$.

3° $$u_x(x, y, t) + v_y(x, y, t) = 0.$$

4° Les quantités

$$W^2(t) = \iint_\Sigma [u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t)]\, dx\, dy,$$

$$J^2(t) = \iint_\Sigma [u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t) + v_x^2(x, y, t) + v_y^2(x, y, t)]\, dx\, dy,$$

sont finies en tout point de E et la fonction

$$\frac{1}{2} W^2(t) + \nu \int_0^t J^2(t')\, dt'$$

est non croissante.

5° On a pour toutes les fonctions $\Phi(x, y)$ continues sur $\Sigma + \Gamma$, ainsi que leurs dérivées premières, la relation

$$(9)\quad \iint_\Sigma u(x, y, t) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy + \iint_\Sigma u_x(x, y, t) \Phi(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

et les trois relations qu'on peut déduire de la précédente en permutant arbitrairement les symboles u et v, x et y.

6° Enfin la fonction suivante (¹) garde une valeur constante quand t décrit E :

$$(10)\quad \int_0^t dt' \iint_\Sigma \left\{ u(x, y, t') \left[\nu \Delta a(x, y, t') + \frac{da(x, y, t')}{dt'} \right] + v \left[\nu \Delta b + \frac{db}{dt'} \right] \right\} dx\, dy$$
$$+ \iint_\Sigma [u(x, y, t)\, a(x, y, t) + vb]\, dx\, dy$$
$$+ \int_0^t dt' \iint_\Sigma [u(x, y, t')\, b(x, y, t') - va][v_x - u_y]\, dx\, dy.$$

(¹) a et b sont des fonctions arbitraires, à cela près qu'elles vérifient les conditions énoncées au début du paragraphe **4**.

La conclusion de cette section est qu'*à tout système de données vérifiant les conditions* (c') *ou* (c'') *correspond au moins une solution turbulente.*

Remarque. — La solution turbulente que nous avons construite possède une structure très particulière. Rien ne nous permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'autres solutions turbulentes correspondant aux mêmes données. Mais s'il en existe d'autres elles possèdent également cette structure très particulière. Les paragraphes suivants vont en effet nous apprendre que cette structure est une conséquence des propriétés par lesquelles nous venons de définir les solutions turbulentes.

II. — Structure des solutions turbulentes.

6. Comparaison d'une solution turbulente et d'une solution régulière [1]. — Soit une solution turbulente; utilisons les notations du paragraphe précédent. Considérons une solution semi-régulière $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ définie pour $t_0 \leqq t < T_0$ ($0 \leqq t_0$).

t appartenant à E et à l'intervalle (t_0, T_0), posons

$$\omega^2(t) = \iint_\Sigma \{[u(x, y, t) - a(x, y, t)]^2 + [v - b]^2\}\,dx\,dy,$$

$$j^2(t) = \iint_\Sigma \left\{\left[u_x(x, y, t) - \frac{\partial a(x, y, t)}{\partial x}\right]^2 + \left[u_y - \frac{\partial a}{\partial y}\right]^2 + \left[v_x - \frac{\partial b}{\partial x}\right]^2 + \left[v_y - \frac{\partial b}{\partial y}\right]^2\right\}dx\,dy.$$

Rappelons que la fonction de t,

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma [a^2(x, y, t) + b^2]\,dx\,dy + \nu\int_{t_0}^{t} dt'\iint_\Sigma \left\{\left[\frac{\partial a(x, y, t')}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial b}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial b}{\partial y}\right]^2\right\}dx\,dy,$$

est constante et que la fonction $\frac{1}{2}\mathcal{W}^2(t) + \nu\int_0^t \mathcal{J}^2(t')\,dt'$ est non crois-

[1] Ce paragraphe généralise le paragraphe **12** du Chapitre III.

sante. Il en résulte que la fonction de t,

$$(11)\quad \frac{1}{2}W(t) + \nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' - \iint_{\Sigma} [u(x,y,t)a(x,y,t) + vb]\,dx\,dy$$
$$+ \nu\int_{t_0}^{t} dt' \iint_{\Sigma} \left[u_x(x,y,t')\frac{\partial a(x,y,t')}{\partial x} + u_y\frac{\partial a}{\partial y} + v_x\frac{\partial b}{\partial x} + v_y\frac{\partial b}{\partial y}\right] dx\,dy,$$

est non croissante. Tenons compte de la constance de la fonction (10), des relations (9) et des équations de Navier que vérifient $a(x,y,t)$ et $b(x,y,t)$. Nous constatons ainsi que la fonction non croissante (11) est, à une constante près, égale à la suivante :

$$(11')\quad \frac{1}{2}W(t) + \nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' - \int_{t_0}^{t} dt' \iint_{\Sigma} [ub - va]\left[v_x - u_y - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Or

$$\iint_{\Sigma} [ub - va]\left[v_x - u_y - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right] dx\,dy$$
$$= \iint_{\Sigma} [(u-a)b - (v-b)a]\left[v_x - u_y - \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right] dx\,dy;$$

et si $\mathcal{V}(t)$ représente le maximum à l'instant t de la plus grande longueur du vecteur $a(x,y,t)$, $b(x,y,t)$ le module de cette dernière intégrale est manifestement au plus égal à

$$\sqrt{2}\,\mathcal{V}(t)\sqrt{W(t)}\,J(t).$$

Puisque (11') est non croissante il en est donc de même *a fortiori* pour la fonction

$$\frac{1}{2}W(t) + \nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' - \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} \mathcal{V}(t')\sqrt{W(t')}\,J(t')\,dt'.$$

Or la fonction

$$\nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' - \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} \mathcal{V}(t')\sqrt{W(t')}\,J(t')\,dt' + \frac{1}{2\nu}\int_{t_0}^{t} \mathcal{V}^2(t')W(t')\,dt'$$

ne peut manifestement décroître. Donc la fonction

$$(12)\qquad \frac{1}{2}W(t) - \frac{1}{2\nu}\int_{t_0}^{t} \mathcal{V}^2(t')W(t')\,dt'$$

est non croissante. D'où résulte ([1]) que

$$w(t)\,e^{-\frac{1}{\nu}\int_{t_0}^{t}\mathcal{V}^2(t')\,dt'} \tag{13}$$

est une fonction non croissante. Ce fait important nous permet de comparer la solution turbulente et la solution semi-régulière que nous considérons.

7. Régularité d'une solution turbulente sur certains intervalles de l'axe des temps. — Choisissons un instant quelconque t_0 appartenant à E et considérons la solution semi-régulière correspondant aux conditions initiales $u(x, y, t_0)$, $v(x, y, t_0)$. Supposons-la définie pour $t_0 \le t < T_0$. Nommons-la $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ et appliquons la conclusion du paragraphe précédent : $w(t_0)$ étant nul, $w(t)$ est identiquement nul. Autrement dit la solution turbulente étudiée coïncide avec cette solution semi-régulière en tous les points de E situés dans l'intervalle (t_0, T_0).

Pour utiliser cet intéressant résultat, posons *une définition :* un intervalle i de l'axe des temps sera dit *intervalle de régularité* lorsqu'en tout point de E intérieur à i $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ coïncident avec une solution des équations de Navier, régulière dans i, et que cette affirmation est fausse en ce qui concerne tout intervalle contenant i.

Deux intervalles de régularité ne peuvent avoir de point (intérieur) commun. On peut donc dénombrer ces intervalles; soient

$$\overline{\Theta_i T_i} \quad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (\Theta_i < T_i).$$

Tout point de E est soit un point Θ_i, soit un point intérieur à l'un des intervalles $\overline{\Theta_i T_i}$. Quand un intervalle $\overline{\Theta_i T_i}$ contiendra des points n'appartenant pas à E nous poserons en ces points $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ égaux à la solution, régulière dans $\overline{\Theta_i T_i}$, avec laquelle

---

([1]) En effet si t_1 appartient à E et à l'intervalle (t_0, T_0) et si t, qui appartient par hypothèse à E et à (t_0, T_0), est supérieur à t_1, alors le caractère décroissant de (12) a pour conséquence l'inégalité : $w(t) \leqq \varphi(t)$, $\varphi(t)$ désignant l'intégrale de l'équation : $\varphi(t) - \frac{1}{\nu}\int_{t_1}^{t}\mathcal{V}^2(t')\varphi(t')\,dt' = w(t_1)$. Or $\varphi(t) = w(t_1)\,e^{\frac{1}{\nu}\int_{t_1}^{t}\mathcal{V}^2(t')\,dt'}$.

$u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ coïncident presque partout sur $\overline{\Theta_i \mathrm{T}_i}$: la définition des solutions turbulentes continuera à être vérifiée. Dès lors $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ coïncident à l'intérieur de chaque intervalle $\overline{\Theta_i \mathrm{T}_i}$ avec une solution régulière des équations de Navier, et cette solution devient nécessairement irrégulière à l'époque T_i. D'autre part, l'instant $t = 0$ appartenant à E, l'un des points Θ_i, soit Θ_1, est le point o; $\overline{\Theta_1 \mathrm{T}_1}$ est l'intervalle (o, T); toute solution turbulente coïncide avec la solution semi-régulière qui correspond aux données sur tout l'intervalle de temps où celle-ci existe.

Ces résultats nous autorisent à donner une seconde définition des solutions turbulentes, équivalente à celle du paragraphe **5** :

Soient des conditions initiales $u(x, y, 0)$, $v(x, y, 0)$ vérifiant les conditions (c') ou (c'') [*cf.* Chap. III, § **10**]. Des fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ constituent *une solution turbulente des équations de Navier* correspondant à ces données quand elles possèdent les quatre propriétés suivantes :

1° Ces fonctions sont définies sur un ensemble ouvert O du demi-axe $0 \leq t$; le complémentaire de O par rapport à ce demi-axe est de mesure nulle; à l'intérieur de chacun des intervalles dont se compose O, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ constituent une solution régulière des équations de Navier, qui devient irrégulière à l'extrémité droite de cet intervalle;

2° La fonction $W(t)$, qui est définie en tout point de O, est non croissante;

3° L'intégrale

$$\iint_{\varpi} [a(x, y, t)\, u(x, y, t) + b(x, y, t)\, v(x, y, t)]\, dx\, dy$$

est égale à une fonction de t continue sur tout l'intervalle $(0, +\infty)$, quelles que soient les fonctions $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$, qui sont toutefois assujetties à vérifier les conditions énoncées au début du paragraphe **4** ;

4° $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ coïncident avec la solution semi-régulière qui correspond aux données en tout point de l'intervalle (o, T) sur lequel celle-ci existe.

8. Conclusion. — *On peut résumer comme suit le contenu de ce chapitre :* Nous ne sommes parvenus à établir de théorème d'existence non local qu'en renonçant à la régularité de la solution à certaines époques, convenablement choisies, qui constituent un ensemble fermé de mesure nulle. A ces époques les inconnues ne sont plus assujetties qu'à une condition de continuité très large (3°) et à la condition de non-croissance de $W^2(t)$ (2°). Les propriétés énoncées au cours du paragraphe précédent intéresseront le Lecteur, j'ose l'espérer, à la notion de solution turbulente. Certes il est peut-être possible de faire une analyse plus fine que celle qui se développe au cours des trois premiers chapitres, et d'établir ainsi qu'aucun mouvement ne peut jamais devenir irrégulier. Même dans ce cas les raisonnements de ce chapitre garderaient quelque intérêt : il est facile de les transposer à d'autres problèmes ; et il n'y a aucune raison pour que toute cette catégorie d'autres problèmes soit incluse dans la catégorie des problèmes qui admettent toujours des solutions régulières.

9. Compléments relatifs a l'ensemble des intervalles de régularité. — Il est aisé d'étendre aux solutions turbulentes la validité des relations suivantes [1] :

$$W^2(t) \leq W^2(0)\,e^{-2\nu\gamma t}; \qquad \nu \int_t^{\infty} J^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2} W^2(0)\,e^{-2\nu\gamma t};$$

$$(16)\quad J(t) > B\nu \frac{B'\nu\,\theta_1[\nu(T_l - t)]}{\sqrt{\nu(T_l - t)}\left|\log \dfrac{1}{\nu(T_l - t)}\right|^2} \quad \text{pour } T_l \text{ fini et } 0 \leq t < T_l.$$

D'où résulte que nous avons, quel que soit t_1 compris entre o et l'époque finie T_l :

$$\frac{W^2(0)}{\nu^2} > 2B^2 e^{2\nu\gamma t_1} \int_0^{t_1} \frac{\theta_1^2[\nu(T_l - t)]\,dt}{\nu(T_l - t)\log^4 \dfrac{1}{\nu(T_l - t)}}.$$

De même que cette inégalité nous a fourni au Chapitre III le théorème *e*, elle nous fournit ici *une généralisation du théorème e :* θ étant l'époque que définit le théorème *e*, toutes les époques T_l finies sont

---

[1] *Cf.* Chapitre III, formules (8) et (16).

antérieures à 0. Autrement dit, *l'un des intervalles de régularité contient l'instant* θ *et s'étend jusqu'à* $+\infty$.

D'autres résultats peuvent être acquis par des considérations analogues : dans l'inégalité

$$2\int_0^{+\infty} \mathcal{J}^2(t')\,dt' \leq \frac{1}{\nu}W(0),$$

remplaçons, à l'intérieur de chaque intervalle fini $\Theta_i T_i$, $\mathcal{J}(t)$ par la minorante (14); introduisons la fonction

$$A(t) = \int_0^t \left\{ B - \frac{B'\delta(t')}{\sqrt{t'}\left[\log\frac{1}{t'}\right]^2} \right\}^2 dt';$$

représentons par S_i des sommes étendues à l'ensemble des intervalles de régularité dont les longueurs sont finies; il vient

$$(15) \qquad \nu^2 S_i A[2\nu(T_i - \Theta_i)] \leq \frac{1}{\nu}W(0).$$

Ainsi la série

$$S_i\,\delta[2\nu(T_i-\Theta_i)]\left[\log\frac{1}{2\nu(T_i-\Theta_i)}\right]^{-2}$$

est convergente. L'ensemble O des intervalles $T_i\Theta_i$ est donc un ensemble ouvert de nature assez particulière.