JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

T. VIOLA

Sur l'accumulation des valeurs des fonctions analytiques qui forment une suite uniformément convergente

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 173-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__173_0>

Sur l'accumulation des valeurs des fonctions analytiques qui forment une suite uniformément convergente;

PAR T. VIOLA.

INTRODUCTION.

1. Considérons une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ convergeant uniformément à l'intérieur d'un domaine connexe (D) et supposons que la fonction limite $f(z)$ ne soit pas constante. Si z_0 est un point intérieur à D et si (c) est une petite circonférence de centre z_0 et de rayon r, intérieure à (D) telle que $f(z) \neq f(z_0)$ pour

$$0 < |z - z_0| \leq r,$$

la propriété

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(c)} \frac{f'_n(\zeta)\, d\zeta}{f_n(\zeta) - f(z_0)} = \int_{(c)} \frac{f'(\zeta)\, d\zeta}{f(\zeta) - f(z_0)}$$

montre l'existence d'un entier positif $\nu [= \nu(z_0)]$ tel que chaque fonction $f_n(z)$, pour $n \geq \nu$, prenne dans le cercle (c) la valeur $f(z_0)$ exactement autant de fois que la fonction $f(z)$, c'est-à-dire un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de z_0, considéré comme zéro de la fonction $f(z) - f(z_0)$.

Un raisonnement analogue montre que, plus généralement, si (D') est un domaine simplement connexe, intérieur à (D), limité par un contour rectifiable (¹) et tel que $f(z) \neq a$ sur ce contour, alors chaque fonction $f_n(z)$ (pour n assez grand) prend dans (D′) la valeur a exactement autant de fois que la fonction $f(z)$ (²).

2. Il se pose maintenant la question d'étudier, au même point de vue, l'accumulation des valeurs des fonctions $f_n(z)$ non pas pour *une seule* valeur a, mais pour *toutes* les valeurs que la fonction limite prend dans (D). Peut-on affirmer l'existence d'un entier positif $\bar{\nu}$, qui puisse valoir comme indice de départ $\nu(z_0)$ pour *tous* les points z_0 d'un domaine intérieur à (D)?

Nous préciserons ce problème et nous y répondrons avec les restrictions nécessaires. En partant de la propriété rappelée, nous développerons une brève théorie préliminaire, de caractère élémentaire, qui nous permettra d'obtenir les résultats cherchés avec plus de simplicité que par une étude de la convergence de la suite

$$\int \frac{f_n'(\zeta)\,d\zeta}{f_n(\zeta) - f(z_0)}$$

et, surtout, en fournissant une image géométrique intuitive du phénomène de l'accumulation.

Nous avertissons, une fois pour toutes, que les considérations qui suivront seront valables aussi pour les suites uniformément convergentes des fonctions méromorphes. Ce cas est en apparence plus général que celui des fonctions holomorphes, mais on peut le ramener au premier. En effet, si les fonctions $f_n(z)$ de la suite sont méromorphes dans le domaine (D) et si α est une valeur que $f(z)$ ne prend *pas* dans (D) (il existe de telles valeurs), on remplace chaque $f_n(z)$ respectivement par

$$g_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - \alpha}$$

qui est holomorphe pour n assez grand.

(¹) Les domaines que l'on considérera dans la suite seront toujours supposés des ensembles fermés (sauf indication contraire) et limités par des contours rectifiables.

(²) Voir, par exemple, P. Montel, « *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques* », p. 20 (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

Nous nous occuperons donc, pour plus de simplicité, seulement des suite uniformément convergentes de fonctions holomorphes.

Ce travail a été fait pendant mon séjour à Paris. Qu'il me soit permis de présenter ici à M. Paul Montel mon hommage de profonde admiration et de reconnaissance très respectueuse : c'est lui qui a enrichi mes idées et qui m'a rendu possible de les réaliser.

I. — Courbes d'accumulation.

1. Soient (D″) un domaine complètement intérieur à (D) et (D′) un domaine complètement intérieur à (D″). J'entends par là que les contours de (D), (D″), (D′) n'ont pas de points communs. Nous indiquerons par (D″ — D′) l'ensemble des points du domaine (D″) extérieurs du domaine (D′).

Supposons d'abord que *la dérivée* $f'(z)$, de la fonction limite $f(z)$ de la suite uniformément convergente des fonctions holomorphes $f_n(z)$, *n'ait pas de zéros dans le domaine* (D″).

Nous définissons comme il suit une fonction $f(z, t)$, holomorphe en z dans (D) et continue par rapport à un paramètre réel positif t, comme on le fait souvent (¹) en vue de l'étude des fonctions de deux variables

$$f(z, t) = f_n(z) + (t - n)[f_{n+1}(z) - f_n(z)]$$

pour

$$n \leqq t \leqq n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

La suite $f'_n(z)$ étant uniformément convergente dans (D″) et $\eta_1 > 0$ étant un nombre tel que, dans (D″), l'on ait $|f'(z)| > \eta_1$, il existe un entier N tel que, pour $n \geqq N$ et dans (D″), on ait $|f'_n(z)| > \frac{\eta_1}{2}$.

2. Soit z_0 un point du domaine (D′). Isolons z_0 par une petite circonférence (c), complètement intérieure à (D″) et telle que, pour

---

(¹) Voir par exemple, R. Baire, « *Sur les fonctions des variables réelles* » (*Annali di Mat.*, 3ᵉ série, t. 3, p. 1).

$z \neq z_0$, l'on ait $f(z) \neq f(z_0)$ à l'intérieur de (c) et sur (c). Soit ν un entier tel que, pour $n > \nu$, la fonction $f_n(z)$ prenne une fois et une seule, au point $\bar{z}$, la valeur $f(z_0)$ à l'intérieur de (c). Choisissons (n° **1**) $n > N, > \nu$. Étudions l'équation

$$(1) \qquad f(z, t) = f(z_0)$$

dans l'entourage de $z = \bar{z}$, $t = n$. Si $f_n(\bar{z}) = f_{n+1}(\bar{z})$, on a aussi

$$f(\bar{z}, t) = f(z_0) \qquad \text{pour } n \leqq t \leqq n+1.$$

Dans ce cas il existe donc une fonction continue $z = z(t, z_0)$, c'est-à-dire la constante $z = \bar{z}$, qui, dans l'intervalle fermé $(n, n+1)$, résout (1) (¹). Si $f_n(\bar{z}) \neq f_{n+1}(\bar{z})$, la fonction

$$\varphi_n(z) = n + \frac{f(z_0) - f_n(z)}{f_{n+1}(z) - f_n(z)}$$

est holomorphe pour $z = \bar{z}$. Pour t variable au-dessus de n, l'équation (1) peut être remplacée par l'équation

$$t = \varphi_n(z).$$

On a

$$\varphi'_n(\bar{z}) = \frac{-[f_{n+1}(\bar{z}) - f_n(\bar{z})] f'_n(\bar{z})}{[f_{n+1}(\bar{z}) - f_n(\bar{z})]^2} = -\frac{f'_n(\bar{z})}{f_{n+1}(\bar{z}) - f_n(\bar{z})} \neq 0.$$

Il s'ensuit que l'on peut faire l'inversion de $t = \varphi_n(z)$ dans le voisinage de $\bar{z}$. La fonction inverse

$$z = \varphi_n^{-1}(t)$$

est holomorphe pour $t = n$ et prend, pour $t = n$, la valeur $\bar{z}$.

Faisons croître t de n à $n+1$, z variera avec continuité dans le voisinage de $\bar{z}$, en parcourant un petit arc de courbe complètement intérieur à (c). Observons que les points z de (D″) où l'on a

$$(2) \qquad f(z_0) = f_n(z) = f_{n+1}(z)$$

(¹) Dans l'expression $z(t, z_0)$, z_0 est un paramètre et reste provisoirement fixe, comme je l'ai dit.

sont en nombre fini. Donc, si en faisant croître t au-dessus de n jusqu'à une valeur t' telle que $n < t' < n+1$, z se déplace avec continuité jusqu'à un point z' où l'on a (2), alors la constante z' continue à résoudre (1) dans $(t', n+1)$. A partir de la valeur $t = n+1$, je répète le raisonnement et je vois qu'il existe une autre fonction continue [1] qui résout (1) dans $(n+1, n+2)$. Je continue indéfiniment ainsi, en faisant tendre t vers ∞. Le point $z = z(t, z_0)$ se déplace avec continuité dans l'intérieur de (c), il décrit une courbe $\gamma(z_0)$ pourvue en général de points anguleux correspondant aux valeurs entières de t et il tend vers le point z_0. *Toute* la courbe $\gamma(z_0)$ peut par exception se réduire au point z_0.

3. Voyons ce que devient la courbe $\gamma(z_0)$ quand t décroît au-dessous de n. Il est clair d'abord que le prolongement peut être fait, en répétant le raisonnement, au moins pour tout l'intervalle $n \geqq t \geqq n-1$. Le point $z(t, z_0)$ variera avec continuité dans l'entourage de $\bar{z}$, tout en sortant éventuellement du cercle (c). Au-dessous de $n-1$, le prolongement n'est assuré que si $n-1 > \mathrm{N}$ et puis, successivement, si $n-2 > \mathrm{N}$, $n-3 > \mathrm{N}$, ... Donc, deux cas peuvent se présenter : ou bien le point $z(t, z_0)$ rejoint une position du contour de (D'') avant que l'on ait $t = \mathrm{N}$ (ou tout au plus pour $t = \mathrm{N}$); ou bien, il reste dans (D'') et tend vers une position limite pour $t = \mathrm{N}$.

Nous appellerons « *courbe d'accumulation* » la courbe $\gamma(z_0)$.

4. Considérons maintenant le cas général où *la dérivée $f'(z)$ a des zéros dans* (D''). En reprenant du commencement le raisonnement, nous supposons précisément que z_0 soit un point de (D') tel que $f'(z_0) = 0$. Isolons z_0 par la petite circonférence (c), intérieure à (D'') et telle que, pour $z \neq z_0$, l'on ait $f(z) \neq f(z_0)$ à l'intérieur de (c) et sur (c). Si k est l'ordre de multiplicité du zéro z_0 de $f(z) - f(z_0)$, c'est-à-dire si

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

nous disons aussi que $f(z)$ prend k fois la valeur $f(z_0)$ en z_0. Il existe

---

[1] Éventuellement constante, éventuellement le prolongement de la fonction précédente.

un entier ν tel que, pour $n > \nu$, la fonction $f_n(z)$ prenne k fois exactement la valeur $f(z_0)$ à l'intérieur de (c). $n > \nu$ étant choisi, soit $\bar{z}$ un point intérieur à (c) tel que $f_n(\bar{z}) = f(z_0)$. Si $f'_n(\bar{z}) \neq 0$, c'est-à-dire si $f_n(z)$ prend une seule fois la valeur $f(z_0)$ en $\bar{z}$, tout se passe, dans un entourage suffisamment petit de $\bar{z}$, comme précédemment, c'est-à-dire que l'on pourra définir la fonction continue $z = z(t, z_0)$, la « *courbe d'accumulation* » $\gamma(z_0)$, etc.

Si $f'_n(\bar{z}) = 0$, il est nécessaire d'étudier de nouveau l'équation

$$f_n(z) + (t - n)[f_{n-1}(z) - f_n(z)] = f(z_0), \tag{1}$$

qui équivaut à

$$t = \varphi_n(z) = n + \frac{f(z_0) - f_n(z)}{f_{n-1}(z) - f_n(z)}.$$

Ecrivons les développements des fonctions $f_n(z)$ et $f_{n-1}(z)$ en séries de Taylor autour de $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f(z_0) + a_2(z - \bar{z})^2 + a_3(z - \bar{z})^3 + \dots, \\ f_{n-1}(z) &= \quad b_0 \quad + b_1(z - \bar{z}) + b_2(z - \bar{z})^2 + \dots. \end{aligned}$$

Supposons d'abord $f_n(\bar{z}) \neq f_{n-1}(\bar{z})$, c'est-à-dire $b_0 \neq f(z_0)$ et posons

$$f_n(z) - f_{n-1}(z) = c_0 + c_1(z - \bar{z}) + c_2(z - \bar{z})^2 + \dots,$$
$$c_0 = f(z_0) - b_0 \neq 0, \qquad c_1 = -b_1, \qquad c_2 = a_2 - b_2, \qquad \dots$$

L'équation à résoudre est

$$t = n + \frac{a_2(z - \bar{z})^2 + a_3(z - \bar{z})^3 + \dots}{c_0 + c_1(z - \bar{z}) + c_2(z - \bar{z})^2 + \dots}.$$

Nous pouvons supposer que, pour $z = \bar{z}$, en plus de la dérivée première, $h - 2$ dérivées successives de $f_n(z)$, s'annulent également, c'est-à-dire que l'on ait

$$f'_n(\bar{z}) = f''_n(\bar{z}) = \dots = f_n^{h-1}(\bar{z}) = 0, \qquad f_n^h(\bar{z}) \neq 0.$$

Alors, l'équation devient

$$t = n + \frac{a_h(z - \bar{z})^h + a_{h+1}(z - \bar{z})^{h+1} + \dots}{c_0 + c_1(z - \bar{z}) + c_2(z - \bar{z})^2 + \dots}.$$

et peut être résolue par rapport à z en donnant lieu à une fonction multiforme qui admet pour $t=n$ un point de ramification. Plus précisément, en faisant varier t dans un voisinage suffisamment petit à droite de n, on a h développements de z suivant les puissance de $(t-n)^{\frac{1}{h}}$. A ces h développements, dont chacun représente une branche de la fonction multiforme, correspondent h « *courbes d'accumulation* » du type $\gamma(z_0)$ étudié au n° **2**, qui sortent toutes du point $\bar{z}$.

Si $f_n(\bar{z})=f_{n-1}(\bar{z})$, on a $c_0=0$ et l'équation devient

$$t=n+\frac{a_2(z-\bar{z})^2+a_3(z-\bar{z})^3+\ldots}{c_1(z-\bar{z})+c_2(z-\bar{z})^2+\ldots},$$

ou plus généralement

$$t=n+\frac{a_h(z-\bar{z})^h+a_{h+1}(z-\bar{z})^{h+1}+\ldots}{c_l(z-\bar{z})^l+c_{l+1}(z-\bar{z})^{l+1}+\ldots},$$

en supposant que pour $z=\bar{z}$ les $h-1$ premières dérivées de $f_n(z)$ soient nulles, et que les $l-1$ premières dérivées de $f_{n+1}(z)$ soient égales aux dérivées correspondantes de $f_n(z)$, c'est-à-dire que

$$f'_n(\bar{z})=f''_n(\bar{z})=\ldots=f_n^{(h-1)}(\bar{z})=0, \qquad f_n^{(h)}(\bar{z})\neq 0,$$
$$f'_{n-1}(\bar{z})=f'_n(\bar{z}),\ f''_{n-1}(\bar{z})=f''_n(\bar{z}),\ \ldots,\ f_{n+1}^{(l-1)}(\bar{z})=f_n^{(l-1)}(\bar{z});$$
$$f_{n+1}^{(l)}(\bar{z})\neq f_n^{(l)}(\bar{z}).$$

Si $h>l$, le second membre est holomorphe dans l'entourage de $z=\bar{z}$, avec $t=n$ pour $z=\bar{z}$, donc l'équation peut être résolue par une fonction en général multiforme (uniforme seulement dans le cas $h=l+1$) représentée par $h-l$ branches, donc par $h-l$ courbes d'accumulation du type $\gamma(z_0)$ sortant du point $\bar{z}$. Dans ce cas, on doit entendre que les l solutions $z=z(t, z_0)$, en apparence perdues, sont réduites à la constante $z=\bar{z}$ répétée l fois. Si $h<l$, le second membre n'est pas régulier dans l'entourage de $z=\bar{z}$; si $h=l$, le second membre est régulier dans l'entourage de $z=\bar{z}$, mais l'on a $t\neq n$ pour $z=\bar{z}$: dans les deux cas, l'on doit entendre que *toutes* les h solutions $z=z(t, z_0)$ sont réduites à la constante $z=\bar{z}$ répétée h fois.

En faisant croître t au-dessus de n, les h fonctions $z=z(t, z_0)$ (dont quelques-unes, ou même toutes, peuvent être constantes) varieront avec continuité dans l'entourage de $\bar{z}$. Les courbes d'accumulation $\gamma(z_0)$ correspondantes pourront se rencontrer, mais les points d'intersection seront toujours en nombre fini. Tant que t varie dans un même intervalle partiel, de n à $n+1$, et de tels intervalles partiels sont en nombre fini, les conditions précédentes nous indiquent chaque fois dans quel cas particulier nous nous trouvons pour ledit intervalle $(n, n+1)$. On voit que le raisonnement peut être répété indéfiniment au-dessus de n. Le nombre total des courbes d'accumulation $\gamma(z_0)$ tracées dans le cercle (c), « interférentes » ou non entre elles, éventuellement réduites à des constantes, est exactement égal à h.

On raisonne de façon analogue en faisant décroître t au-dessous de n (*voir* le n° 3). L'on voit également ainsi que la restriction que nous avions momentanément imposée au n° 3 de ne faire décroître t que jusqu'à la valeur N (si le point $z(t, z_0)$ ne parvenait pas au contour de (D'') pour $t > N$), n'avait pas un caractère essentiel. On pourra conserver cette restriction dans les démonstrations (qui suivront au paragraphe III) relatives au cas $f'(z) \neq 0$, pour plus de simplicité et de clarté. Mais dans tous les cas, on peut faire librement décroître t jusqu'à la valeur $t = 1$, si le point ou les points $z(t, z_0)$ ne parviennent pas au contour de (D'') pour $t > 1$.

5. Il peut arriver que $f(z)$ prenne une même valeur, en plusieurs points du domaine fermé (D') et plusieurs fois en un même point, comme nous l'avons dit tout à l'heure. Si, alors, nous indiquons par K le nombre total de fois que $f(z)$ prend une même valeur a dans le domaine (D'), le nombre total des courbes γ relatives à tous les points de (D') où $f(z)$ prend la valeur a est égal à K. Distinguons ces courbes par une notation propre γ_a. Dans le cas où $f'(z) \neq 0$ dans (D''), les courbes γ_a ne peuvent se rencontrer. Dans le cas contraire nous appellerons « *réseau* (relatif à la valeur a) » un groupe de courbes γ_a satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Si le groupe contient plus d'une courbe γ_a et si P, Q sont deux points arbitrairement choisis sur deux courbes du groupe, il est toujours possible de passer de P à Q sans sortir du groupe, c'est-à-dire en parcourant successivement des courbes du groupe;

2° Aucune autre courbe γ_a peut être ajoutée au groupe, compatiblement avec la condition précédente.

Les courbes γ_a forment donc en général un certain nombre de réseaux, soient R_1, R_2, ..., R_i, $(i \leqq K)$, dont chaque nœud sera le point de rencontre de deux ou plusieurs courbes γ_a, relatives à un même point z_0 ou à des points distincts de (D'). En particulier un réseau peut être formé d'une seule courbe γ_a.

Les extrémités de ces réseaux sont de deux espèces :

1° Les points du domaine fermé (D') où $f(z)$ prend la valeur a. En chacun de ces points doivent aboutir autant de courbes γ_a que $f(z)$ y prend la valeur a. En considérant donc chacune de ces extrémités répétée le même nombre de fois, elles sont au total exactement K.

2° Les points, intérieurs à (D'') ou sur son contour, où l'on aboutit en faisant décroître t autant qu'il est possible [1]. Ces extrémités peuvent aussi être communes à plusieurs courbes γ_a; mais en considérant chacune d'elles répétée autant de fois qu'il y a des courbes γ qui y aboutissent, elles sont au total encore exactement en nombre de K.

Les courbes γ_a qui forment les réseaux ne sont pas définies de façon unique. Chacun des nœuds est le point d'arrivée d'un certain nombre de branches et de sortie d'un nombre égal de branches, exception faite seulement pour les extrémités, où les branches sont toutes, ou bien d'arrivée (extrémités de première espèce) ou bien de sortie (extrémités de seconde espèce) [2]. En partant d'une des extrémités de première espèce, soit z_0, remontons une quelconque des branches qui arrivent en z_0. Au premier nœud du réseau (auquel appartient z_0) que nous rencontrons, choisissons arbitrairement une des branches qui y arrivent et remontons jusqu'à ce que nous rencontrions un autre

---

(1) Voir la fin du n° 4.

(2) Il y a exception à cette propriété dans le cas où certains nœuds sont en même temps des extrémités de la première et de la seconde espèce, ou nœud de passage et extrémités, etc.

nœud et ainsi continuons à remonter de nœud en nœud en faisant attention à ne retourner jamais par des nœuds (donc, ni par des branches) déjà traversés. Les nœuds du réseau auquel appartient z_0 étant en nombre fini, il est évident que le chemin doit aboutir à une extrémité de seconde espèce.

En réfléchissant au mode de génération des réseaux $R_1, R_2, \ldots, R_i$, l'on voit qu'*il doit être possible de tracer en eux exactement* K *chemins qui rejoignent chacun deux extrémités d'espèce diverse et distinctes l'une de l'autre*. Un tel système de K chemins épuise entièrement tous les réseaux $R_1, R_2, \ldots, R_i$, c'est-à-dire que toute branche de ces réseaux appartient à un des K chemins et à un seul. Chacun des K chemins appartient à un seul des réseaux $R_1, R_2, \ldots, R_i$. Peut être pourra-t-on de plusieurs manières (mais nécessairement en nombre fini) tracer dans les réseaux $R_1, R_2, \ldots, R_i$ un tel système de K chemins : pour chacune de ces manières, chacun des K chemins qui composent les réseaux peut être considéré comme une courbe d'accumulation γ_ω.

6. Remarque. — Ce paragraphe aura amené, peut-être, le lecteur à examiner si et de quelle manière les courbes d'accumulation pourraient être définies pour des suites qui convergent non uniformément. Ces courbes pourraient-elles fournir quelques indications sur l'accumulation des valeurs dans l'entourage des points irréguliers ? A notre avis, la réponse à cette question ne peut être que négative.

En effet, le cas plus simple serait celui où les points irréguliers, c'est-à-dire les points dans l'entourage desquels la suite ne converge pas uniformément, sont en nombre fini (suite « quasi normale »). Dans cette hypothèse l'on sait que, en dehors des points irréguliers, la suite converge uniformément vers l'infini[1]. On sait de même que, si z_0 est un point irrégulier, l'on peut extraire de la suite donnée $\{f_n(z)\}$ une autre suite $\{\varphi_n(z)\}$ telle que, quel que soit a, à partir d'un certain rang, toutes les équations $\varphi_n(z) = a$ ont une racine dans l'entourage de z_0. Cependant il n'est pas sûr que cette propriété soit satisfaite pour la suite donnée $\{f_n(z)\}$. Mais, même dans l'affirmative, il peut se présenter que le nombre des racines des équations $f_n(z) = a$ dans

(1) P. Montel, *Leçons sur les familles normales*, p. 66.

l'entourage de z_n, tout en étant toujours positif, varie avec n et même augmente indéfiniment avec n (¹). Dans ce cas le nombre des courbes d'accumulation γ, définies en correspondance d'une valeur quelconque a, comme pour les suites uniformément convergentes, doit aussi augmenter indéfiniment avec n. Quel que soit le domaine (D') que nous considérons, il est donc impossible de trouver un rang à partir duquel ces courbes γ_n soient toutes renfermées dans (D') : en effet au passage de n à $n+1$ correspond toujours une nouvelle courbe γ_n qui vient de l'infini.

Une difficulté analogue se présente pour certaines suites autour d'un point irrégulier d'ordre fini. Par exemple, pour la suite

$$-z, \quad 2z, \quad -3z, \quad \ldots, \quad (-1)^n nz, \quad \ldots,$$

dont l'origine est un point irrégulier d'ordre 1, on voit facilement que, pour

$$n \leq t < n + \frac{n}{2n+1}, \qquad z(t, a) = \frac{(-1)^n}{n - (t-n)(2n+1)} a$$

parcourt, à partir du point $\frac{(-1)^n}{n} a$ et en s'éloignant de l'origine, la droite joignant ce point à l'origine. Pour $t = n + \frac{n}{2n+1}$, on a

$$z(t, a) = \infty.$$

Pour $n + \frac{n}{2n+1} < t \leq n+1$, $z(t, a)$ parcourt, de l'infini jusqu'au point $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} a$ et du côté opposé, la droite précédente.

La convergence uniforme de la suite $\{f_n(z)\}$ vers l'infini, hors du point irrégulier, n'entraîne pas la convergence (même simple), pour $t \to \infty$, de la fonction $f(z, t)$ que l'on déduit de la suite $\{f_n(z)\}$ par interpolation linéaire.

L'intérêt des courbes d'accumulation, pour les suites qui convergent non uniformément, semble donc être bien restreint, d'autant plus que, dans le cas où les points irréguliers sont en nombre infini, les points d'accumulation, irréguliers eux aussi, n'ont jamais un ordre fini (au

---

(¹) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, p. 138.

moins si ces points sont aussi limites de points où la fonction

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$$

est finie) (¹).

II. — Sur l'ordre de multivalence des fonctions holomorphes.

1. M. F. Marty a démontré dans sa Thèse (²) que, si une fonction $f(z)$ est holomorphe multivalente dans un domaine fermé simplement connexe (C) dont le contour est une courbe de Jordan qui ne soit pas composée d'arcs homologues, si, en outre, l'on a $f'(z) \neq 0$ dans (C), il existe à l'intérieur de (C) un nombre fini ou une infinité dénombrable d'arcs de courbes Γ homologues à des arcs du contour de (C) et tels que :

a. Chacun des arcs Γ a ses extrémités en deux points du contour de (C);

b. Les arcs Γ décomposent (C) en « *cellules* », c'est-à-dire en

---

(¹) P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 125.

(²) « *Recherche sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe* » (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 3ᵉ série, t. XXIII, 1931, p. 175). Avec M. Marty nous suivrons la terminologie introduite par M. P. MONTEL [« *Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes* » (*Mémoire de l'Académie royale de Belgique*, classe des sciences, 2ᵉ série, t. VI, 1922, p. 1-41); « *Sur les domaines formés par les points représentant les valeurs d'une fonction analytique* » (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XLVI, 1929, p. 1-23)]. Nous dirons qu'un domaine est un *domaine de n-valence* pour une fonction $f(z)$, ou que $f(z)$ est *n-valente dans ce domaine*, si $f(z)$ y prend une même valeur n fois au plus; nous dirons que le domaine est un *domaine de n-valence exacte*, si $f(z)$ y prend n fois chacune de ses valeurs. En un point z_0 où $f(z_0) = 0$, la valeur prise par $f(z)$ devra être comptée avec la multiplicité du zéro z_0 de $f(z) - f(z_0)$ (*voir* § I, nº **4**) : ainsi par exemple la fonction $(z-1)^2$ sera dite *bivalente* dans le cercle $|z| \leq 1$. Une fonction univalente dans un domaine sera donc aussi univalente en tout point du domaine (= localement univalente) (*Marty*, *loc. cit.*, Chap. II, § II, nº **23**, p. 218).

domaines partiels simplement connexes dans chacun desquels $f(z)$ est univalente;

c. Étant données deux cellules, chaque valeur que $f(z)$ prend à l'intérieur de l'une est prise aussi à l'intérieur de l'autre (*cellules homologues*), ou bien aucune valeur prise dans l'une n'est prise dans l'autre;

d. Deux cellules sont homologues si, et seulement si, leurs contours sont complètement homologues.

Si $f(z)$ est univalente à l'intérieur de (C), (C) est un domaine formé d'*une seule cellule*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas à l'intérieur de (C) de points homologues de points du contour. $f(z)$ peut ne pas être univalente sur le contour de (C), mais, si $f'(z) \neq 0$ dans (C), il existe sur le contour de (C) des points qui n'ont pas d'homologues (théorème 6, p. 221) [1].

Si (C) est multiplement connexe, les propositions énoncées peuvent en général être appliquées seulement après avoir rendu (C) simplement connexe par des coupures appropriées.

Dans le cas où $f'(z)$ s'annule dans (C), M. Marty a démontré que, le domaine (C) étant rendu simplement connexe par des coupures appropriées, en utilisant le nombre minimum de ces coupures, les arcs homologues du contour de (C) intérieurs à (C) le décomposent en cellules et en « *pseudo-cellules* ». Une pseudo-cellule est un domaine fermé et simplement connexe, jouissant des propriétés suivantes :

a'. Aucun point du contour n'a de points homologues à l'intérieur de la pseudo-cellule;

b'. Si la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas sur le contour de la pseudo-cellule, la pseudo-cellule est un domaine fermé de multivalence exacte : p étant son ordre de multivalence, le contour se compose de p arcs homologues parcourus dans le même sens. La dérivée $f'(z)$ à $p-1$ zéros à l'intérieur de la pseudo-cellule.

Deux pseudo-cellules satisfont aux propriétés *c*, *d* des cellules.

---

[1] On peut, dans ce cas, répéter le raisonnement du théorème 3, p. 210, de M. Marty, pour démontrer que, si un arc Γ du contour de (C) est tel que chacun de ses points a un homologue, alors il existe sur le contour de (C) un arc homologue à Γ.

Pour les autres propriétés, nous renvoyons le lecteur au beau travail de M. Marty.

Pour certains points des démonstrations des numéros suivants, le raisonnement pourrait être conduit indépendamment des résultats de M. Marty, mais nous nous en tiendrons strictement à ceux-ci pour conserver l'unité du travail.

2. Soit $f(z)$ holomorphe dans un domaine connexe (D).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine (D′) *intérieur à* (D) *puisse être enfermé à l'intérieur d'un domaine* (D″), *de manière que les valeurs que* $f(z)$ *prend dans* (D″ — D′) (¹) *soient toutes différentes de celles que* $f(z)$ *prend dans le domaine* (D′), *est que l'ordre de multivalence de* $f(z)$ *dans le domaine* (D′) *soit exacte.*

Supposons d'abord que l'on ait $f'(z) \neq 0$ *dans* (D) (²). — Nous disons précisément, dans ce cas, que *la condition nécessaire et suffisante est que* $f(z)$ *soit univalente dans le domaine* (D′).

a. La condition est nécessaire. — Supposons que (D′) puisse être enfermé à l'intérieur d'un domaine (D″) satisfaisant à la condition énoncée. Soient, si possible, P, P_1 deux points homologues appartenant au domaine (D′). Il existe un entourage γ du point P tel que chacun de ses points ait son homologue dans un entourage γ_1 de P_1. Si $f(z)$ n'est pas univalente à l'intérieur de (D′), ce domaine est formé de plusieurs cellules, et le couple P, P_1 peut être supposé choisi de manière que P soit sur le contour et P_1 à l'intérieur de (D′). Alors l'entourage γ de P peut être choisi de manière que l'entourage correspondant γ_1 de P_1 soit complètement intérieur à (D′). Les points de γ extérieurs à (D′) auraient pour homologues des points intérieurs à (D′), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il peut, toutefois, se présenter que, $f(z)$ étant univalente à l'intérieur de (D′), mais non pas sur son contour, P, P_1 appartiennent tous deux au contour de (D′). Les points de γ qui sont intérieurs à (D′) devraient avoir leurs homologues en γ_1, ou bien à l'extérieur, ou bien

---

(¹) Voir § I, nº **1**.

(²) Ceci équivaut évidemment à supposer $f'(z) \neq 0$ seulement dans le domaine (D′).

à l'intérieur de (D′). Dans tous les cas, on a une conclusion absurde.

b. La condition est suffisante. — Si (D′) ne peut pas être enfermé à l'intérieur d'un domaine (D″), de manière que $f(z)$ prenne en (D″ — D′) des valeurs toutes différentes de celles qu'elle prend dans (D′), indiquons par (D''_1), (D''_2), (D''_3), ... une suite de domaines dont chacun contient (D′) et le suivant, telle que l'on ait

$$\lim_{r \succ \infty} (D''_r) = (D').$$

En (D''_r), il y a au moins un couple de points, z_r extérieur à (D′), z'_r appartenant à (D′), tels que $f(z_r) = f(z'_r)$. La suite des points z_r a au moins un point limite z_0 homologue d'un point z'_0 limite de la suite z'_r. Les points z_0, z'_0 appartiennent tous deux au domaine (D′), et grâce à l'hypothèse $f'(z) \neq 0$ dans (D), sont distincts, ce qui est contraire à l'hypothèse (¹).

3. *Supposons maintenant que $f'(z)$ puisse s'annuler dans* (D), *ou, plus précisément, dans* (D′). Démontrons le théorème en distinguant deux cas, selon que (D′) est simplement ou multiplement connexe.

Supposons d'abord (D′) *simplement connexe.*

a. La condition est nécessaire. — Si (D′) peut être enfermé à l'intérieur d'un domaine (D″) satisfaisant à la condition énoncée, $f'(z)$ ne peut s'annuler sur le contour de (D′). En effet, si $\bar{z}$ était un zéro de $f'(z)$, l'entourage de z pourrait être décomposé en une étoile régulière de régions homologues (²). Ces régions seraient situées de part et d'autre de la tangente au contour en $\bar{z}$ (³). Donc, dans l'entourage de $\bar{z}$ il y aurait des points extérieurs à (D′) homologues de points intérieurs, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Or, en répétant le raisonnement du nº **2**, on commence d'abord par

---

(¹) L'arbitraire, dans le choix des couples de points z_r, z'_r peut être facilement éliminé en observant que, pour chaque r, les points tels que z_r, z'_r peuvent être classés en deux ensembles dont chacun est fermé.

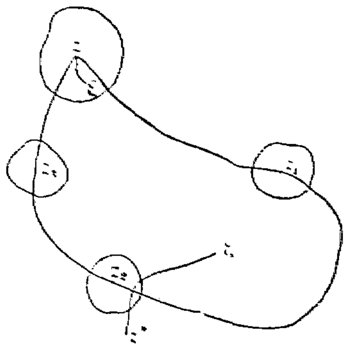
(²) MARTY, *loc. cit.*, Chap. II, § II, nº 23, p. 218.

(³) Si $\bar{z}$ était un point anguleux du contour, on raisonnerait d'une façon analogue.

démontrer qu'il ne peut y avoir à l'intérieur de (D') de points homologues de points du contour. Mais M. Marty a démontré (1) que, si $f(z)$ n'était pas exactement multivalente dans le domaine fermé (D'), il existerait à l'intérieur de (D') des points (2) homologues de points du contour de (D'). Donc (D') est nécessairement un domaine de multivalence exacte.

b. La condition est suffisante. — Dans le cas où (D') est un domaine de multivalence exacte, on démontre aussi que $f'(z)$ ne s'annule pas

Fig. 1.



sur le contour. En effet, un raisonnement de M. Marty (3) montre qu'aucun point du contour n'a d'homologue à l'intérieur de (D'). Supposons alors que $\bar{z}$ soit un point du contour de (D'), tel que $f'(\bar{z}) = 0$. Traçons autour de $\bar{z}$ une petite pseudo-cellule d, c'est-à-dire un petit domaine de multivalence exacte [ne contenant aucun point $z \neq \bar{z}$ tel que $f'(z) = 0$]. Soient $z_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ les points

(1) *Loc. cit.*, Chap. II, § II, p. 221.

(2) Et même des arcs homologues à des arcs du contour. Ainsi, on aurait la décomposition de (D') en cellules et pseudo-cellules. Pour d'autres propriétés, voir MARTY, *loc. cit.*, Chap. II, § II, p. 220 et suiv.

(3) *Soit un domaine fermé* D *limité par un contour sans coupures : si toute valeur prise par la fonction $f(z)$ à l'intérieur du domaine fermé y est prise exactement p fois, aucun point du contour n'a d'homologue intérieur au domaine* (Chap. II, § II, n° 25, théor. 14, p. 222). Ce théorème et sa démonstration sont exacts aussi avec notre définition de l'ordre de multivalence dans le cas que $f'(z)$ puisse s'annuler [voir la fin de la note (2), p. 184].

homologues de $\bar{z}$ [nécessairement sur le contour de (D)]. Supposons, pour simplicité (ce qui n'a rien d'essentiel), $f'(z_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, p$). Si k est l'ordre de multiplicité du zéro $\bar{z}$ de $f(z) - f(\bar{z})$, l'ordre de multivalence de $f(z)$ en (D') est $n = p + k$ (¹). Soient d_i les domaines d'univalence autour des points z_i, homologues de d. Un point $\bar{\bar{\zeta}}$ intérieur à d et à (D') doit avoir $n - 1$ homologues en (D') : par conséquent, puisque $k > 1$, il existe un point ζ intérieur à (D'), homologue de $\bar{\bar{\zeta}}$ et extérieur aux domaines d_i. Or, « au voisinage » de $\bar{z}$, il ne passe pas d'arc homologue d'arc du contour extérieur à d et aux d_i. Donc il existe en d un point $\bar{\bar{\zeta}}$ tel qu'on puisse le joindre à $\bar{z}$ à l'intérieur de d et de (D') sans rencontrer d'arcs homologues des portions de contours extérieurs à d et aux d_i. Dans ces conditions, il existe un arc $\widehat{\zeta z^*}$, issu de ζ et homologue de $\widehat{\bar{\bar{\zeta}} \bar{z}}$. Cet arc ne peut sortir de (D') en rencontrant son contour hors des domaines d, d_i. Il doit donc pénétrer dans un des domaines d, d_i (qu'il aboutisse ou non à un des points $\bar{z}$, $\bar{z}_i$) : il doit donc rencontrer le contour de l'un de ces domaines. Mais $\widehat{\bar{\bar{\zeta}} \bar{z}}$ est complètement intérieur à d. Il y a contradiction (²).

Dans l'hypothèse où (D') est un domaine de multivalence exacte, supposons alors qu'on ne puisse pas enfermer (D') dans un domaine (D''). En répétant le raisonnement du n° **2**, on démontre qu'il existe deux suites de points homologues deux à deux, l'une extérieure, l'autre intérieure au domaine (D') et qui tendent vers deux points homologues z', z''. Un au moins des deux points z', z'' doit être sur le contour de (D'). Mais aucun point du contour n'ayant un homologue à l'intérieur (³) et étant $f'(z) \neq 0$ sur le contour de (D'), les points

(¹) Si $k > 2$, $\bar{z}$ est un point anguleux dont l'angle est $\leqq \frac{2\pi}{k}$.

(²) Cette démonstration est directement inspirée de celle du théorème **14**, p. 222, de M. Marty. On pourrait démontrer directement le théorème qui nous intéresse, en démontrant que, (D') étant un domaine de multivalence exacte d'ordre n, s'il n'était pas possible de l'enfermer dans un domaine (D'') satisfaisant à la condition énoncée, alors il existerait sur le contour de (D') une valeur prise $n + 1$ fois. La propriété $f'(z) \neq 0$ sur le contour en découlerait à posteriori (n° **3**, a).

(³) Voir la note (³) p. 188.

z', z'' sont tous deux sur le contour et distincts. D'autre part, grâce aux propriétés caractéristiques des domaines réduits ([1]), l'homologie qui existe entre l'entourage de z' et celui de z'' exige la correspondance des points intérieurs à (D'), tandis que l'homologie entre les suites nommées, entraînerait l'existence de points extérieurs à (D') et voisins à z', homologues aux points intérieurs à (D') et voisins à z''. Mais alors il n'y aurait pas univalence locale dans l'entourage de z', ce qui est absurde.

4. *Supposons* (D') *multiplement connexe : a. La condition est nécessaire* — Si (D') peut être enfermé à l'intérieur d'un susdit domaine (D''), on reconnaît, comme au n° **3**, *a*, qu'il n'existe pas sur le contour de (D') de points où l'on ait $f'(z) = 0$. On reconnaît de même, comme au n° **2**, qu'il n'existe pas à l'intérieur de (D') de points homologues aux points du contour. Traçons à l'intérieur de (D') le nombre strictement nécessaire de coupures pour le rendre simplement connexe. Ces coupures admettront d'autres coupures homologues et toutes ensemble réaliseront la décomposition de (D') en cellules et pseudo-cellules. A ces coupures, nous en ajouterons éventuellement d'autres (avec leurs homologues), soit pour que les cellules et les pseudo-cellules comportent une connexion effectivement simple ([2]), soit pour que les cellules constituent des domaines *fermés* d'univalence. Supposons aussi, ce qui est sûrement possible, que les coupures soient tracées de manière à ne pas traverser de points de (D') où l'on ait $f'(z) = 0$.

Sur une même coupure, il n'y aura pas d'arcs homologues, sinon les extrémités de la coupure, qui sont des points du contour de (D'), auraient pour homologues des points de la coupure intérieurs à (D').

([1]) MARTY, *loc. cit.*, Chap. II, § II, p. 213 et suiv.

([2]) Exemple :

$$f(z) = z^2,$$

$$(D') = [\text{cercle } |z| \leq 1] - \left[\text{cercle } \left|z - \frac{i}{2}\right| < \frac{1}{4}\right] - \left[\text{cercle } \left|z + \frac{i}{2}\right| < \frac{1}{4}\right];$$

a, *b* = coupures tracées en (D') pour le rendre simplement connexe. Les homologues de ces coupures sont ces coupures elles-mêmes, l'une par rapport à

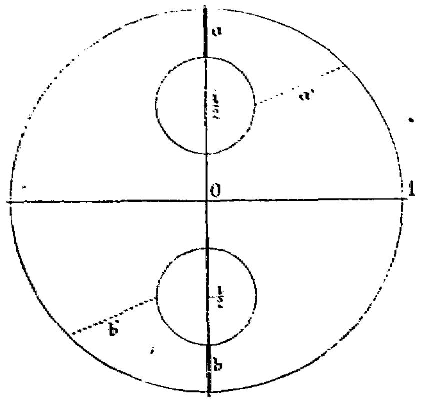
En outre, les coupures ne peuvent pas se rencontrer. Il s'ensuit que l'*ordre de multivalence de chaque pseudo-cellule est égal au nombre des coupures homologues qui la limitent*. Deux pseudo-cellules homologues ne peuvent pas être contiguës l'une à l'autre. En effet, dans cette hypothèse, si t est la coupure qui les séparent (ou une des coupures qui les séparent), d'un côté et de l'autre de t, il y aurait des points homologues, et alors on aurait $f'(z) = 0$ tout le long de t. De même, deux cellules homologues ne peuvent pas être contiguës l'une à l'autre. En effet, dans cette hypothèse, la coupure t qui les sépare, considérée comme appartenant à l'une des deux, devrait avoir pour homologue dans l'autre une autre coupure (sinon, comme pour le cas de la pseudo-cellule, on aurait $f'(z) = 0$ tout le long de t), mais alors ni l'une ni l'autre ne seraient des cellules *fermées* d'univalence.

Considérons maintenant une pseudo-cellule (ou cellule) quelconque Q et ses homologues. Soit m le nombre total de ces cellules, soit n l'ordre de valence de Q. Le groupe considéré forme un domaine (qui, nécessairement, n'est pas connexe, sinon dans le cas que l'on

---

l'autre. (D') est ainsi réduit à une seule pseudo-cellule, dont la connexion n'est pas effectivement simple, car il y a des arcs sur le contour qui se superposent.

Fig. 2.



C'est pour cela qu'il faudra ajouter une autre coupure, par exemple a', et son homologue b', après quoi (D') restera décomposé en une pseudo-cellule et deux cellules.

ait $m = 1$) de multivalence exacte, d'ordre $= mn$. Considérons dès lors une pseudo-cellule (ou cellule) quelconque Q' contiguë à Q et ses homologues : supposons qu'elles soient, au total, au nombre de h. Soit k l'ordre de multivalence de Q'. Je dis que l'on a $hk = mn$. En effet, l'ordre de multivalence mn est nécessairement égal au nombre total des coupures homologues qui limitent le premier groupe (celui de Q et de ces homologues), et ce nombre doit être aussi égal au nombre total des coupures homologues qui limitent le second groupe (car chaque homologue à Q' doit être contiguë à une homologue à Q). Donc les deux groupes mis ensemble constituent encore un domaine de multivalence exacte, d'ordre $= mn = hk$. Ainsi, de groupe en groupe, on épuise tout le domaine (D'), et l'on démontre que tout (D') est de multivalence exacte, d'ordre $= mn$ [1].

b. La condition est suffisante. — Soit (D') un domaine de multivalence exacte. En raisonnant comme au n° **3**, *b*, on voit que sur le contour de (D') il ne peut pas exister de points où l'on ait $f'(z) = 0$. En outre, pour le théorème de la note [2] p. 188, il n'existe pas à l'intérieur de (D') de points homologues aux points du contour. Nous pouvons, pour cela, tracer les coupures et faire la décomposition de (D') en cellules et pseudo-cellules de la même manière que dans le cas *a* de ce même numéro. Chaque pseudo-cellule, pour le n° **3**, peut être renfermée à l'intérieur d'un domaine, qui, par rapport à elle, se trouve dans les conditions que l'on demande au domaine (D') par rapport au domaine (D'). De même pour chaque cellule, pour le n° **2**. Ces opérations préliminaires étant faites, c'est-à-dire tout le domaine (D') étant recouvert au moyen d'un certain nombre de domaines (qui viennent naturellement à se superposer en partie l'un à l'autre), je dis que la somme de tous ces domaines réalise le domaine cherché (D''); ou je peux, du moins, avancer que les domaines partiels *peuvent être*

---

[1] Incidemment, on a ainsi démontré, *dans le cas où $f'(z)$ n'est pas nul sur le contour*, le théorème inverse de celui de la note [2] p. 188. On peut donc affirmer que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine fermé sur le contour duquel il n'y a pas de zéros de la dérivée $f'(z)$ soit de multivalence exacte, est qu'aucun point du contour n'ait d'homologues à l'intérieur.

construits de façon que leur somme réalise le domaine cherché (D″). En effet, si ceci n'était pas possible, par un raisonnement analogue à celui du n° **3**, *b*, on montrerait l'existence de deux suites de points homologues, l'une tendant du dehors à un point z' du contour de (D′) et d'une cellule (ou pseudo-cellule) (Q′), l'autre tendant de l'intérieur à un point z'' du contour de (D′) et d'une autre cellule (ou pseudo-cellule) (Q″). Alors (Q′), (Q″) seraient complètement homologues [1], et par conséquent, on pourrait supposer z', z'' au contour de la même cellule (ou pseudo-cellule), ce qui est absurde.

Ainsi le théorème que nous avons énoncé au n° **2** est complètement démontré [2].

5. Soit (D′) un domaine d'univalence. Le domaine (D″), indiqué au théorème du n° **2**, peut être choisi de manière que $f(z)$ soit univalente aussi en (D″). En effet, si (D″) est supposé formé de plusieurs cellules, on voit tout de suite que (D′) doit être complètement intérieur à une cellule de (D″), car si une courbe de séparation de deux cellules de (D″) pénétrait dans (D′), ou même en touchait le contour, $f(z)$ prendrait à l'intérieur ou sur le contour de (D′) des valeurs qu'elle prendrait aussi sur le contour de (D″).

La cellule de (D″) qui contient (D′) peut être choisie comme domaine (D″).

Nous voyons donc que, *étant donné un domaine d'univalence* (D′), *il existe un nombre* $r > 0$ *tel que tout domaine* (D″) *contenant* (D′), *et dont les points sont à une distance de* (D′) *inférieure ou égale à* r, *est un domaine d'univalence.*

6. Cette proposition peut être généralisée par les domaines de

---

[1] Grâce à la décomposition décrite à ce même numéro, *a*).

[2] On a aussi démontré incidemment le théorème suivant :

Dans la décomposition d'un domaine en cellules et pseudo-cellules, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de cellules et pseudo-cellules ne soit contigu à aucune cellule ou pseudo-cellule homologue, est que le groupe forme dans son ensemble un domaine fermé de multivalence exacte.

multivalence de manières différentes selon que la multivalence est exacte ou non.

Au cas où la multivalence n'est pas exacte, on peut énoncer que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (D') *soit un domaine de* n*-valence, est qu'il existe un nombre* $r > 0$ *tel que tout domaine* (D'') *renfermant* (D'), *et dont les points sont à une distance de* (D') *inférieure ou égale à* r, *est un domaine de* n*-valence*.

a. La condition est nécessaire. — Supposons que (D') soit un domaine de n-valence, et que tout domaine (D'') renfermant (D') soit d'ordre de multivalence $> n$. Je considère alors, comme au nº **2**, une suite de domaines (D_r) dont chacun contient le suivant et (D'), telle que l'on ait $\lim_{r \to \infty}(D_r) = (D')$. Pour chaque r, choisissons [1] dans (D_r) $n+1$ points homologues $P_r^1, P_r^2, \ldots, P_r^{n+1}$. Pour r croissant, on peut disposer ces points en $n+1$ suites. Ces suites ont au moins $n+1$ points limites, homologues et appartenant au domaine (D'), ce qui est absurde.

b. La condition est suffisante. — Ceci découle immédiatement de ce qu'elle est nécessaire. En effet, l'existence de ce nombre r étant admise, si (D') avait ordre de multivalence $< n$, il existerait un r' tel que tout (D''), dont les points ont une distance de (D') plus petite que r' aurait un ordre de multivalence $< n$, ce qui est absurde.

7. Si (D') est un domaine de n-valence exacte, aucun point du contour n'ayant d'homologue à l'intérieur de (D'), le contour est formé précisément de n arcs homologues. Si P, P' sont deux points homologues du contour de (D'), il existe un entourage de P homologue à un entourage de P'. Ceci étant vrai pour tout couple de points homologues P, P', à chaque couple d'arcs homologues, on peut faire application du lemme de Borel-Lebesgue, et par conséquent, *on peut tracer le contour du domaine* (D'') *renfermant* (D') *aussi voisin que l'on veut du contour de* (D') *et de façon que* (D'') *soit lui aussi un domaine de* n*-valence exacte*. En effet, le contour de (D'') étant tracé de façon que $f(z)$ prenne chacune de ses valeurs *au moins* n fois et en sup-

[1] Voir la note [1] p. 187.

posant (D″) d'ordre de multivalence $> n$ (multiple de n), on parviendrait à un absurde en répétant exactement le raisonnement du n° **6**, *a*.

Inversement, supposons que (D′) *puisse être enfermé dans des domaines de multivalence exacte* (D″), *dont les contours soient aussi proches qu'on le veut de celui de* (D′). Alors, je dis que *ces domaines* (D″) *ont tous, à partir d'un certain rang, le même ordre n de multivalence, et que* (D′) *est aussi un domaine de multivalence exacte, d'ordre n*. En effet, supposons d'abord $f'(z) \neq 0$ sur le contour de (D′). Il suffit alors de démontrer qu'il n'existe pas de points intérieurs à (D′) homologues de points du contour (¹). S'il existait un point z_0 intérieur à (D′), homologue d'un point z'_0 du contour, il existerait un entourage de z_0 intérieur à (D′) et homologue d'un entourage de z'_0. δ étant alors la distance de z'_0 au contour de l'entourage correspondant, il n'existerait pas de domaines (D″) voisins de (D′) de moins de δ. Donc (D′) est un domaine de multivalence exacte, et par conséquent (selon le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure), il est d'ordre n avec les domaines (D″).

Si sur le contour de (D′), il existait un point z_0 tel que $f'(z_0) = 0$, il suffirait d'enfermer z_0 dans un petit cercle (c) qui ne contienne pas d'autres zéros de $f'(z)$. Pour (D″) suffisamment près de (D′), on voit facilement que la partie de (D″) qui est contenue dans (c) ne pourrait être de multivalence exacte. Le même raisonnement pourrait être répété pour chaque homologue de z_0 situé sur le contour de (D′), ce qui est contraire à l'hypothèse.

III. — Accumulation des valeurs.

1. Reprenons maintenant l'étude d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes, avec les notations du paragraphe **I**.

Supposons d'abord que l'on ait $f'(z) \neq 0$ dans (D″). Un nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement choisi, parcourons une courbe d'accumulation quelconque $\gamma(z_0)$ à partir de son extrémité z_0. Indiquons par

(¹) Voir la note (¹) p. 192.

$\zeta = \zeta(z_0, \varepsilon)$ le premier point que l'on rencontre sur γ, tel que l'on ait

$$|f(z) - f(z_0)| = \varepsilon.$$

Si un tel point n'existe pas, alors indiquons par $\zeta = \zeta(z_0, \varepsilon)$ l'autre extrémité de γ appartenant ou non au contour de (D''). Posons

$$\rho = \rho(\varepsilon) = \text{lim. sup. de } |\zeta - z_0| \text{ pour } z_0 \text{ dans } (D').$$

Si $f'(z)$ s'annule dans (D), considérons un réseau quelconque R (§ I, n° 3). Soit z_0 une extrémité de première espèce, répétée k fois, de R. Étant défini en R un système quelconque de courbes γ, k de ces courbes, soient $\gamma_j (j = 1, 2, \ldots, k)$, confluent en z_0. Indiquons par $\zeta_j = \zeta_j(z_0, \varepsilon)$ pour chaque j, le premier point que l'on rencontre sur γ_j tel que

$$|f(z) - f(z_0)| = \varepsilon.$$

Si un tel point n'existe pas, alors indiquons par $\zeta_j = \zeta_j(z_0, \varepsilon)$ l'autre extrémité de γ_j (qu'il appartienne ou non au contour de (D'')). Posons

$$\rho = \rho(\varepsilon) = \text{lim. sup. de } |\zeta_j - z_0|$$

[soit quand z_0 varie en (D'), soit, pour un même z_0, quand j varie de 1 à k et quand le système des courbes γ varie en R].

Je dis que, en tout cas, on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon) = 0$. Supposons que cette propriété ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que pour $\varepsilon \to 0$, $\rho(\varepsilon)$ ait au moins une valeur limite $\bar{\rho} > 0$. Alors, les couples tels que z_0, $\zeta[z_0, \zeta_j]$ auront pour $\varepsilon \to 0$ au moins une position limite $\bar{z}_0$, $\bar{\zeta}$ telle que $|\bar{\zeta} - \bar{z}_0| = \bar{\rho}$ et que $f(\bar{\zeta}) = f(\bar{z}_0)$. Mais pour chacun de ces couples, on peut laisser fixe z_0 et faire reculer sur la courbe $\gamma(z_0)$, ζ vers z_0 par des déplacements très petits. Le même recul devrait se produire pour $\bar{\zeta}$, avec la condition $f(\bar{\zeta}) = f(\bar{z}_0)$ (1). Donc $\bar{z}_0$ serait limite d'une infinité de points $\bar{\zeta}$ tels que $f(\bar{\zeta}) = f(\bar{z}_0)$, ce qui est absurde, puisque $f(z)$ n'est pas une constante.

---

(1) Un nombre entier positif r étant choisi, nous considérons l'intersection z_r de chaque courbe d'accumulation avec la circonférence $\left(z_0, \frac{\rho}{2^r}\right)$. Pour une

2. *Si r est un nombre positif arbitrairement petit* [inférieur à la distance du contour de (D') au contour de (D'')], *il existe un entier n' tel que pour $n > n'$ la fonction $f_n(z)$ prenne, dans l'entourage de rayon r de tout point z_0 du domaine* (D'), *la valeur que $f(z)$ prend en z_0, au moins le même nombre de fois.*

Supposons d'abord que l'on ait $f'(z) \neq 0$ dans (D''). Soit ε tel que $\rho(\varepsilon) < r$ (n° 1). La suite des fonctions $f_n(z)$ étant uniformément convergente dans (D'') vers $f(z)$, nous prendrons $n' > N$ (§ 1, n° 1), et tel que l'on ait, quel que soit z dans (D'') et $n \geqq n'$,

$$(3) \qquad |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Il suffit de démontrer que, pour $t > n'$ et pour tout point z_0 du domaine (D'), le point correspondant $z(t, z_0)$ existe et se trouve dans le cercle (z_0, r) de centre z_0 et de rayon $= r$. Supposons, si possible, qu'il existe un point z_0 de (D') tel que le correspondant $z(t, z_0)$, pour un certain $t > n'$, se trouve hors du cercle (z_0, r). Étant, par définition, $f[z(t, z_0), t] = f(z_0)$, on a, d'après (3),

$$(4) \qquad |f[z(t, z_0)] - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Faisons croître t, $z(t, z_0)$ se déplace avec continuité tout en parcourant la courbe $\gamma(z_0)$ vers z_0, et l'inégalité (4) reste vraie. Sur la courbe $\gamma(z_0)$, le point $\zeta(z_0, \varepsilon)$ est placé à une distance $\leqq \rho(\varepsilon)$ de z_0, tandis que $z(t, z_0)$, dans la position initiale, est placé à une distance $> \rho(\varepsilon)$ de z_0. Il existera donc une valeur t' de t ($>$ que la valeur initiale de t, et par conséquent $> n'$) telle que l'on ait

$$z(t', z_0) = \zeta.$$

---

infinité de valeurs z_0 proches de $\bar{z}_0$, on aura

$$|f(z_0) - f(z_r)| \leqq |f(z_0) - f(\zeta)| = \varepsilon.$$

Les nouveaux couples z_0, z_r auront au moins une position limite $\bar{z}_0$, $\bar{\zeta}_r$ telle que

$$|\bar{z}_0, \bar{\zeta}_r| = \frac{\rho}{2^r}.$$

Ensuite, nous faisons tendre $r \to \infty$.

Mais alors on aurait

$$|f(\zeta)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

ce qui est absurde.

Dans le cas où $f'(z)$ s'annule dans (D″) la démonstration est analogue. On devra supposer, si possible, qu'il existe un point z_0 de (D′) tel que les points $z(t, z_0)$ correspondant (pour un certain t suffisamment grand) ne soient pas tous dans le cercle (z_0, r). Alors il existera au moins un de ces points $z(t, z_0)$ situé hors du cercle (z_0, r) et il suffira de s'occuper de ce point.

3. *Soit* (D′) *un domaine d'ordre de ν-valence exacte pour* $f(z)$ (¹). *Pour tout domaine* (D″) *renfermant* (D′) *et assez voisin de lui, il existe un entier* M *tel que, pour* $n > M$, *la fonction* $f_n(z)$ *prenne dans le domaine* (D″) *toutes les valeurs que* $f(z)$ *prend dans le domaine* (D′), *exactement le même nombre de fois (donc ν fois).*

Traçons (D″) suffisamment voisin de (D′) pour que $f(z)$ prenne dans (D″ — D′) des valeurs toutes différentes de celles qu'elle prend dans le domaine (D′) (§ II, n° 2).

Pour tout couple de points : z_0 du domaine (D′), z du contour de (D″), l'on a par hypothèse $f(z)\neq f(z_0)$. Donc il existe un nombre positif μ tel que, pour chacun de ces couples, l'on ait

$$|f(z)-f(z_0)|>\mu.$$

La convergence étant uniforme il existe un entier M tel que, pour tout couple d'indices n_1, n_2, tous deux $> M$, et pour tout point z du contour de (D″), l'on ait

$$|f_{n_1}(z)-f_{n_2}(z)|<\frac{\mu}{4}.$$

Il s'ensuit, pour $n > M$,

$$|f_n(z)-f(z_0)|>\frac{\mu}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}|f(z, t)-f(z_0)| &= |f_n(z)-f(z_0)+(t-n)[f_{n+1}(z)-f_n(z)]| \\ &\geq |f_n(z)-f(z_0)|-|f_{n+1}(z)-f_n(z)|>\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{4}=\frac{\mu}{4}.\end{aligned}$$

(¹) Voir le paragraphe II, n° 2.

La fonction $f(z)$ prend ν fois dans le domaine (D') chaque valeur $f(z_0)$. Pour $t > M$, la fonction $f(z, t)$ prend la valeur $f(z_0)$ en des points situés sur des courbes γ qui, lorsqu'on fait croître ultérieurement t vers l'∞, ne peuvent plus traverser le contour de (D''), c'est-à-dire restent à l'intérieur ou à l'extérieur de (D''). Mais il y a ν de ces courbes γ qui, pour $t \to \infty$, tendent vers des points du domaine (D'). Donc, pour $n > M$, les fonctions $f_n(z)$ prennent la valeur $f(z_0)$ en (D'') exactement ν fois. Cela peut se répéter pour chaque z_0 du domaine (D'). Le théorème est donc démontré [1].

4. Si l'hypothèse du théorème précédent n'est par vérifiée, quel que soit (D''), il existe dans (D'' — D') des points où $f(z)$ prend des valeurs qu'elle prend aussi dans (D'). De ces points il y en a d'ailleurs aussi proches du contour de (D') qu'on le veut. Supposons que dans le domaine (D') il y ait un groupe de k et pas plus que k points

$$z_0^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

tels que l'on ait

$$f(z_0^1) = f(z_0^2) = \ldots = f(z_0^k) = a,$$

chacun de ces points étant d'ailleurs répété autant de fois que $f(z)$ y prend cette valeur. Le raisonnement du n° **2** montre alors non seulement que dans chacun des cercles (z_0^i, r) il y a, pour chaque $n > n'$, au moins autant de points où $f_n(z) = a$ que $f(z)$ prend de fois la valeur a en $z_0^{(i)}$, mais de plus que dans *tous* les k cercles

$$(z_0^i, r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

il y a, *au total, au moins k points* où l'on a $f_n(z) = a$.

Il existe donc un entier M *tel que, pour* $n > M$, *la fonction* $f_n(z)$ *prenne dans le domaine* (D'') *toutes les valeurs que* $f(z)$ *prend dans le domaine* (D') *au moins le même nombre de fois.*

Il est toutefois utile de remarquer que, dans le cas où $f(z)$ s'annule, la possibilité que $f_n(z)$ prenne un nombre supérieur de fois dans le domaine (D'') une valeur que $f(z)$ prend dans le domaine (D'), ne serait pas, *a priori*, à attribuer seulement à l'existence de points exté-

---

[1] Voir le n° **4**.

rieurs à (D′) et à proximité du contour de (D′), où $f(z)$ prend cette valeur. On pourrait croire que ce fait pourrait aussi être déterminé par la possibilité de définir de plusieurs manières en chaque réseau le système des courbes γ qui le composent. Mais l'on voit aisément que cette seconde cause est illusoire, car, étant donné un réseau et défini en lui un système Q de courbes γ qui le composent (à supposer que ces courbes soient au nombre de K′), il est démontré que, pour n suffisamment élevé, chacune des fonctions $f_n(z)$ prend la valeur a [valeur prise par $f(z)$ aux K′ extrémités de première espèce] une fois sur chaque courbe γ, c'est-à-dire en certains points $u_1, u_2, \ldots, u_{k'}$ [1]. Mais si l'on change le système Q des courbes γ, les points $u_1, u_2, \ldots, u_{k'}$ ne changent pas, parce qu'ils peuvent être définis dans leur ensemble, d'une manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment dudit système Q, comme *les points du réseau, où l'on a* $f_n(z) = a$ [2], [3].

5. La proposition établie au n° 4 est analogue à celle du n° 3, mais elle est plus générale. Dans l'hypothèse du n° 3, le raisonnement du n° 4 montre que dans les k cercles $(z_0^{(i)}, r)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ il y a, au total, *exactement* k points où l'on a $f_n(z) = a$, k étant toujours égal à l'ordre de multivalence ν du domaine (D′). Dans le cas où le domaine n'est pas de multivalence exacte, la même conclusion est juste si les k points $z_0^{(i)}$ sont tous à une distance $\geqq 2r$ du contour de (D′).

Si l'on suppose que (D′) ne soit pas un domaine de multivalence exacte, mais s'il est toutefois possible de renfermer (D′) dans un domaine (D″) de manière que $f(z)$ prenne sur le contour de (D″) des valeurs toutes différentes de celles qu'elle prend dans le domaine (D′), alors on peut répéter la démonstration du n° 3 pour préciser que $f_n(z)$ *prend ces valeurs exactement autant de fois que* $f(z)$ *les prend en* (D″).

---

[1] Il est même démontré, de plus, la possibilité de choisir n suffisamment élevé, de manière que ces K′ points soient renfermés, dans leur ensemble, dans les cercles dont les centres sont les extrémités de première espèce et dont les rayons sont égaux à un nombre r arbitrairement choisi.

[2] Le fait que ces points ne changent pas peut se déduire aussi de quelques simples considérations topologiques sur le réseau.

[3] Comparez avec le n° 3.

6. Le résultat du nº **4** peut être précisé par quelques considérations sur le problème inverse du précédent.

r étant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un entier n'' tel que, pour $n > n''$, la fonction $f(z)$ prenne dans l'entourage de rayon r de tout point z_0 du domaine (D') *la valeur que $f_n(z)$ prend en z_0* [1].

Pour le cas où $f'(z)$ peut s'annuler, on peut ajouter que $f(z)$ prend cette valeur *au moins le même nombre de fois*.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existe un indice n_1 et un ensemble A_1 de points tels que pour tout couple de points z_1 de A_1, z de (z_1, r), on ait $f_{n_1}(z_1) \neq f(z)$; un indice $n_2 > n_1$ et un ensemble A_2 de points tels que pour tout couple de points z_2 de A_2, z de (z_2, r), on ait $f_{n_2}(z_2) \neq f(z)$; etc. [2].

Soit z_0 un point limite de la suite $A_1, A_2, \ldots$, c'est-à-dire un point tel que, dans chacun de ses entourages, il y ait des points des ensembles A_n, avec n arbitrairement élevé. Il existe deux nombres positifs ρ, ε tels que $f(z)$ prenne dans le cercle (z_0, ρ) toutes les valeurs qui sont dans le cercle $(f(z_0), \varepsilon)$. On peut d'autre part imposer à ρ d'être arbitrairement petit : posons $\rho < r$. La suite des fonctions $f_n(z)$ étant uniformément convergente, il existe un entier $\bar{k}$ tel que, pour chaque indice $k > \bar{k}$ et pour tout point z_h (quel que soit h), l'on ait

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$f(z)$ étant continue en z_0, si un tel point z_h est suffisamment voisin de z_0, l'on a

$$|f(z_k) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour une infinité de $k > \bar{k}$, il existe des valeurs z_k, aussi voisines qu'on le veut de z_0, telles que $|f_{n_k}(z_k) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pour chacun de ces z_k il existe alors dans (z_0, ρ) un point z tel que $f_{n_k}(z_k) = f(z)$. Mais on peut prendre z_k assez voisin de z_0 pour que le cercle (z_0, ρ) soit contenu dans le cercle (z_k, r), ce qui est absurde.

---

[1] Comparez avec le nº **2**.

[2] En répétant une infinité de fois un choix arbitraire, on peut prendre plus simplement une suite de points au lieu de la suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$.

7. De la proposition précédente résulte que, pour n suffisamment élevé, *la fonction $f_n(z)$ prend dans le domaine fermé* (D′) *seulement les valeurs que $f(z)$ prend en* (D″) *et en plus le même nombre de fois.*

Soit r un nombre positif tel que $2r$ soit plus petit que la distance du contour de (D′) au contour de (D″). Il existe (n° **2**) un entier n' tel que, pour chaque indice $n > n'$, la fonction $f_n(z)$ prenne dans l'entourage de rayon r de tout point z_0 de (D″), intérieur à (D′) ou à moins de r du contour de (D′), la valeur que $f(z)$ prend en z_0.

Si $f_n(z)$, pour un $n > n'$, $> n''$ (n° **6**), prend la valeur a en un point z_0 du domaine fermé (D′), il existe (n° **6**) un point z_0^1 tel que $|z^1 - z_0| < r$ et que $f(z_0^1) = a$. Soient z_0^i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$) les points du domaine fermé (D″) où l'on a $f(z) = a$ et qui sont intérieurs à (D′) ou à moins de r du contour de (D′). Les points où l'on a $f_n(z) = a$, intérieurs aux k cercles (z_0^i, r) ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$) sont en nombre *au moins* égal à k. Mais ceux de ces points qui appartiennent au domaine fermé (D′) sont au plus k. D'où l'énoncé.

8. Nous pouvons maintenant préciser la proposition du n° **4**.

Supposons que $f(z)$ ait en (D′) un ordre de multivalence égal à ν. Enfermons (§ II, n° **6**) (D′) à l'intérieur d'un domaine (D″) et successivement (D″) à l'intérieur d'un autre domaine (D‴) de manière que $f(z)$ ait encore, soit en (D″) ou en (D‴) l'ordre de multivalence ν. A l'aide des n^os **4**, **7**, l'on démontre l'existence d'un entier M tel que, quels que soient $n > M$ et la valeur a prise par $f(z)$ dans le domaine (D′), la fonction $f_n(z)$ prend dans le domaine (D″) la valeur a au plus autant de fois que $f(z)$ la prend dans (D‴). Donc : *le domaine* (D′) *peut être enfermé à l'intérieur d'un domaine* (D″) *de manière que, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n(z)$ prennent en* (D″) *toutes les valeurs que $f(z)$ prend dans le domaine* (D′) *au moins le même nombre de fois et au plus un nombre de fois égal à l'ordre de multivalence de $f(z)$ dans* (D′).

IV. — Application aux familles normales.

1. *Soient* $V \equiv \{f(z)\}$ *une famille normale dans un domaine* (D), (D′) *un domaine complètement intérieur à* (D), C *un ensemble fermé quelconque. Supposons qu'aucune fonction limite de* V *ne soit une constante égale à une valeur* a *de* C. On sait (¹) qu'il existe un entier positif $\nu\,[=\nu(a)]$ tel que le nombre des zéros de $f(z)-a$ contenus en (D′) est inférieur à ν pour toutes les fonctions de V.

Peut-on choisir ν indépendamment de a?

Je dis que *le nombre des zéros de* $f(z)-a$ *contenus en* (D′) *est borné pour toutes les fonctions de* V *et pour toutes les valeurs* a *de* C.

Soit (D″) un domaine contenu dans (D) et contenant (D′) (²). Supposons que la proposition énoncée ne soit pas vraie. Il existe alors une fonction $f_1(z)$ de V et une valeur a_1 de C telles que $f_1(z)-a_1$ admette un zéro au moins dans (D′), une fonction $f_2(z)$ de V et une valeur a_2 de C telles que $f_2(z)-a_2$ admette deux valeurs au moins dans (D′), etc.

De la suite infinie

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,$$

j'extrais une suite

$$a_{h_1},\quad a_{h_2},\quad a_{h_3},\quad \ldots$$

convergente : soit a sa limite. De la suite

$$f_{h_1}(z),\quad f_{h_2}(z),\quad f_{h_3}(z),\quad \ldots,$$

j'extrais une suite

$$f_{k_1}(z),\quad f_{k_2}(z),\quad f_{k_3}(z),\quad \ldots,$$

uniformément convergente dans (D′) : soit $f(z)$ sa limite. La fonction $f(z)$ ne peut pas être la constante infinie. En effet, dans le cas où C est borné, la suite $\{a_{k_n}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ est aussi bornée et par conséquent on peut déterminer un nombre positif M tel que l'on ait $|f_{k_n}(z)| < M$ en quelque point de (D′). Dans le cas où C n'est pas

(¹) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, p. 36.

(²) Voir le paragraphe I, nº **1**.

borné, C contient le point à l'infini et $f(z)$ ne peut pas être égale à la constante infinie par hypothèse. Donc $f(z)$ est holomorphe, et comme elle n'est pas égale à la constante a, elle prend la valeur a en (D″) un nombre fini t_a de fois.

Pour n suffisamment élevé, la fonction $f(z)$ peut prendre, en (D″), chaque valeur a_{k_n} au plus t_a fois (¹) et par conséquent chaque $f_{k_n}(z)$ peut prendre au plus t_a fois la valeur a_{k_n} en (D′) (§ III, n° 7). Il y a contradiction.

En particulier on voit que, *si une famille normale dans un domaine* (D) *n'admet aucune fonction limite constante, le nombre des zéros de* $f(z) - a$ *contenus dans un domaine* (D′) *complètement intérieur à* (D) *est borné pour toutes les fonctions de la famille et pour toutes les valeurs de* a (²).

(¹) Elle le prend exactement t_a fois si $f(z) \neq a$ au contour de (D″).

(²) Ce théorème a été énoncé aussi par M. S. Minetti, au Congrès international de Zurich (septembre 1932) (« *Su alcuni teoremi delle famiglie normali di funzioni analitiche anche in relazione al postulato di Zermelo* »).