JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. N. PRASAD

Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 153-205.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__153_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier;

PAR B. N. PRASAD.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. 1. L'objet du présent travail est d'étudier quelques questions relatives à la convergence et à la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier. Avant d'en aborder le détail, nous nous proposons de donner un aperçu bref, mais assez complet, des développements apportés à cette théorie de différents points de vue.

Soit

$$(1.11) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

une série trigonométrique; la série

$$(1.12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

est appelée la série trigonométrique *conjuguée* de la série (1.11). S'il existe une fonction $f(x)$, qui est intégrable au sens de M. Lebesgue dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et est définie hors de cet intervalle par la périodicité, de telle sorte qu'on ait

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\,du$$

et

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du,$$

la série (1. 11) est une série de Lebesgue-Fourier, et la série (1. 12) est la série *conjuguée* de cette série de Fourier.

La série conjuguée d'une série de Fourier n'est pas nécessairement elle-même une série de Fourier. Ainsi,

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$$

est une série de Fourier (¹), tandis que sa série conjuguée, comme Fatou l'a fait remarquer le premier,

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n},$$

bien que convergente pour toute valeur de x, n'est pas une série de Fourier puisque sa somme n'est pas une fonction intégrable (L) (²) dans tout intervalle contenant l'origine (³).

La *fonction conjuguée* associée à la série conjuguée est

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \{f(x+t)-f(x-t)\}\cot\frac{1}{2}t\,dt. \tag{1. 13}$$

qui, à cause de la périodicité de $f(x)$, est équivalente à

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt. \tag{1. 14}$$

(¹) *Cf.* Young, 71, 46; Hobson, 27, 621.

(²) C'est-à-dire au sens de M. Lebesgue.

(³) Fatou, 7, 767; Lebesgue, 31, 124. *Voir* aussi Perron, 40; Titchmarsh, 64. Pour un type de condition nécessaire et suffisante que les deux séries trigonométriques (1. 11) et (1. 12) soient des séries de Fourier, *voir* Alexitch, 1.

Dans ces formules, les intégrales ne sont pas généralement des intégrales de Lebesgue, mais des intégrales *généralisées* au sens de Cauchy, définies comme limite d'un des types suivants :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0,\ T \to \infty} \int_{\varepsilon}^{T}.$$

1. 2. La première introduction des séries conjuguées dans l'analyse mathématique remonte à la discussion des séries de puissances dont elles constituent, sur le cercle limite, la partie imaginaire. Ainsi, si $U(r, \theta)$ est la partie réelle d'un potentiel dans le cercle unité et $V(r, \theta)$ sa partie imaginaire, et si, d'autre part, $f(\theta)$ et $g(\theta)$ sont les valeurs vers lesquelles tendent ces fonctions lorsque r tend vers 1, on a les relations suivantes dues à M. Hilbert [4] :

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) \cot\frac{\theta - t}{2}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt.$$

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cot\frac{\theta - t}{2}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, dt.$$

Ces formules peuvent d'ailleurs être déduites de résultats antérieurement obtenus par Tauber [5]. Cependant, ces recherches supposent de considérables restrictions imposées aux fonctions, et ainsi la théorie des séries conjuguées restait insuffisamment développée. Ce ne fut qu'après la publication du Mémoire de M. Pringsheim [6] et de celui de Fatou [7], où l'on trouve le premier traitement rigoureux du sujet, que les séries précédentes commencèrent d'être étudiées d'une manière satisfaisante de différents points de vue. En même temps que progressait la rigueur mathématique et qu'on découvrait de nouvelles méthodes de sommation et d'intégrabilité, les propriétés de ces séries étaient mises en lumière de plus en plus.

1. 3. On peut se poser la question suivante. Que peut-on dire au

---

(4) Hilbert, 24, 250-255; 26, 73-77, 81-86; 25, 1-5.

(5) Tauber, 62; *cf.* aussi Litchtenstein, 35, 223-224.

(6) Pringsheim, 52.

(7) Fatou, 8.

sujet des propriétés de la série conjuguée (1. 12), connaissant celle de la série (1. 11)? M. Fejér a prouvé que si la série trigonométrique (1. 11) est uniformément convergente dans ($0 \leqq x \leqq 2\pi$), la série conjuguée (1. 12) est convergente presque partout dans $(0, 2\pi)$ ([8]). Le résultat de M. Fejér a été étendu par M. Privaloff qui a montré que si les sommes partielles de la série (1. 11) sont uniformément bornées dans $(0, 2\pi)$, et si la série elle-même est convergente dans un ensemble E de mesure positive, la série (1. 12) est convergente presque partout dans E ([9]). Ce théorème de M. Privaloff a, à son tour, été généralisé par M. Zygmund ([10]).

En déterminant le saut d'une fonction $f(x)$ intégrable (L), en partant de sa série de Fourier et de sa série conjuguée, M. Lukàcs a été conduit à démontrer qu'en un point x où la limite

$$D_x = \lim_{h \to 0} \{ f(x+h) - f(x-h) \}$$

existe, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma_n(x)}{\log n} = \frac{D_x}{\pi},$$

où $\sigma_n(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série conjuguée ([11]). M. Young a montré ([12]) que

$$\sigma_n(x) = o(\log n)$$

presque partout; le théorème correspondant relatif à la série de Fourier avait déjà été démontré par M. Hardy ([13]). Si $s_n(x)$ représente la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier, M. Hardy démontre que l'on a

$$s_n(x) = o(\log n)$$

presque partout.

Il existe un système de facteurs $\{\lambda_n\}$ qui ont pour propriété de

---

([8]) Fejér, 10; *cf.* aussi 11.
([9]) Privaloff, 30; aussi 31, 32, 49.
([10]) Zygmund, 81, 239.
([11]) Lukàcs, 37; aussi Fejér, 9.
([12]) Young, 72, 437.
([13]) Hardy, 15, 365.

changer, par multiplication, toute série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

en une série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

qui est convergente presque partout. M. Young a montré ([14]) que les facteurs

$$\frac{1}{n^{\delta}}, \quad \frac{1}{(\log n)^{1+\delta}}, \quad \frac{1}{\log n (\log \log n)^{1+\delta}}, \quad \dots \quad (\delta > 0)$$

sont des facteurs de cette espèce tant pour la série de Fourier que pour la série conjuguée

$$\sum_{1}^{\infty}(b_n \cos n x - a_n \sin n x),$$

les deux séries devenant, après multiplication terme à terme par ces facteurs, des séries de Fourier. Plus tard, M. Hardy a prouvé ([15]) que $\frac{1}{\log n}$ est un facteur de convergence de même espèce pour toute série de Fourier. Le théorème correspondant relatif à la série conjuguée a été donnée par M. Plessner ([16]) qui a montré que la série

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{b_n \cos n x - a_n \sin n x}{\log n}$$

converge presque partout, mais sans être nécessairement une série de Fourier ou une série obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier provenant d'une fonction à variation bornée.

1. 4. Récemment, une grande attention a été donnée aux recherches portant sur l'intégrabilité de $g(x)$ et l'existence de l'inté-

([14]) YOUNG, 74. 77.
([15]) HARDY, 15, 365.
([16]) PLESSNER, 41, 33.

grale (1.13). On sait que $g(x)$ n'est pas nécessairement intégrable ([17]), bien que M. Kolmogoroff ait démontré que $|g(x)|^{1-\varepsilon}$ est intégrable lorsque $\varepsilon > 0$ ([18]). Cependant, si $f(x)$ est de carré sommable ([19]), ou plus généralement appartient à la classe L^p de Lebesgue ($p > 1$), M. Riesz a prouvé ([20]) que $g(x)$ aussi appartient à la classe L^p, et que la série (1.12) est la série de Fourier de $g(x)$. M. Zygmund ([21]) et M. Titchmarsh ([22]) ont montré que l'intégrabilité de

$$f(x)\log\{2 + |f(x)|\}$$

est une condition suffisante pour l'intégrabilité de $g(x)$.

Si $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz, les propriétés correspondantes de $g(x)$ ont été considérées par nombre de chercheurs ([23]).

L'existence de l'intégrale

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\}\cot\frac{1}{2}t\,dt,$$

pour presque toutes les valeurs de x, dans le cas général, semble avoir été établie pour la première fois par M. Privaloff ([24]), mais la première démonstration qu'il soit aisé de consulter a été donnée par M. Plessner ([25]). La démonstration de M. Plessner est indirecte et dépend de la théorie des fonctions analytiques. Plus tard, M. Besicowitch a donné une démonstration basée seulement sur la théorie des ensembles de points ([26]).

Dans la ligne des séries trigonométriques conjuguées, une intéres-

---

([17]) Exemple : $g(x) = -\sum_{2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$. *Cf.* aussi TITCHMARSH, 64.

([18]) KOLMOGOROFF, 30. Pour d'autres démonstrations du théorème de M. Kolmogoroff, *cf.* LITTLEWOOD, 36; HARDY, 17, 18; TITCHMARSH, 66.

([19]) LUSIN, 38; *cf.* aussi BESICOWITCH, 2; TITCHMARSH, 67.

([20]) RIESZ, 57, 58; *cf.* aussi HARDY et LITTLEWOOD, 22.

([21]) ZYGMUND, 79, 80.

([22]) TITCHMARSH, 66, 68, 69.

([23]) PRIVALOFF, 54; YOUNG, 76; HARDY et LITTLEWOOD, 19.

([24]) PRIVALOFF, 53; *cf.* KOLMOGOROFF, 30.

([25]) PLESSNER, 41.

([26]) BESICOWITCH, 3.

sante théorie d'*intégrales trigonométriques conjuguées*

$$\int_0^\infty \{\Phi(t)\cos xt + \Psi(t)\sin xt\}\,dt.$$

$$\int_0^\infty \{\Psi(t)\cos xt - \Phi(t)\sin xt\}\,dt$$

a été développée par M. Titchmarsh qui a aussi considéré la réciprocité fonctionnelle du type des corrélations de Hilbert ([27]).

1.50. La première discussion serrée du problème de la convergence de la série conjuguée est due à M. Pringsheim. Il montre ([28]) *que la série conjuguée converge en un point x et y a pour valeur*

$$(1.501) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{f(x+t)-f(x-t)\}\cot\frac{1}{2}t\,dt.$$

pourvu que cette expression ait un sens précis et, de plus, pourvu que l'on ait

$$(1.502) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\cos nt\,dt = 0.$$

Son criterium de convergence est l'*absolue* convergence de l'intégrale (1.501) et cette condition d'absolue convergence rend le théorème de M. Pringsheim vraiment trop restrictif.

Une théorie plus parfaite de la convergence et de la sommabilité des séries fut donnée par M. Young en deux Mémoires ([29]). Il prouve que *si l'intégrale* (1.501) *existe, au moins comme une intégrale non absolument convergente, la série conjuguée converge en x et a pour valeur celle de cette intégrale, pourvu que*

$$(i) \qquad f(x)$$

soit une fonction à variation bornée dans $(-\pi, \pi)$ ([30]) ou

$$(ii) \qquad \frac{1}{u}\int_0^u \{f(x+t)-f(x-t)\}\,dt$$

([27]) Titchmarsh, 65.
([28]) Pringsheim, 48, 87.
([29]) Young, 75, 70; *cf.* aussi 73.
([30]) Young, 75, 361.

soit une fonction à variation bornée ([31]), ce qui est un théorème correspondant à celui de M. de la Vallée Poussin ([32]) pour les séries de Fourier. Le théorème de M. Young pour la sommabilité (C, 1) de la série conjuguée est le suivant : *si l'intégrale* (1.501) *existe, au moins comme intégrale non absolument convergente, la série conjuguée est sommable* (C, 1), *pourvu que l'on ait*

$$(iii) \qquad \int_0^u \{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt = o(u)\ [33].$$

Ceci est l'analogue du criterium de M. Lebesgue pour la sommabilité (C, 1) de la série de Fourier ([34]).

1. 51. Nous voyons ainsi qu'en remplaçant la condition d'absolue convergence de M. Pringsheim relativement à

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot\frac{1}{2}t\, dt$$

par la condition de sa *non absolue* convergence, M. Young a obtenu un théorème plus précis pour la convergence et la sommabilité (C, 1) de la série. Mais nous pouvons alors poser la question suivante : Que peut-on dire touchant la convergence et la sommabilité de la série conjuguée en un point x où l'intégrale $g(x)$ *n'existe pas*, pas même comme une intégrale non absolument convergente ainsi qu'il était supposé par M. Young? La réponse à cette question est le point de départ de notre présent travail.

Dans le Chapitre II, je traite de la convergence qui sera très utile dans la discussion subséquente touchant de plus hauts degrés de sommabilité. A la place de $g(x)$, j'utilise la fonction moins restrictive ([35])

$$(1.512) \qquad G(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \Psi(t)\, \text{cosec}^2\frac{t}{2}\, dt.$$

([31]) YOUNG, 73, 368.

([32]) DE LA VALLÉE POUSSIN, 5, et aussi 6, 149.

([33]) YOUNG, 70, 271.

([34]) LEBESGUE, 32, 274.

([35]) Comme il sera montré dans les lemmes 1 et 2, l'existence de l'intégrale $g(x)$ inclut nécessairement celle de $G(x)$ mais non vice versa.

où

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t); \qquad \Psi(t) = \int_0^t \psi(u)\,du.$$

et je prouve que le théorème fondamental de M. Pringsheim mentionné au début du paragraphe **1.50** *demeure vrai si nous y remplaçons $g(x)$ par* $G(x)$. J'obtiens alors un théorème pour la convergence, à savoir que *si l'intégrale* (1.512) *existe au moins comme intégrale non absolument convergente, la série conjuguée converge et a pour valeur* $G(x)$ *pourvu que*

$$\psi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t h(t)\,dt,$$

où

$$\int_0^t |h(t)|\,dt = O(t).$$

Il résulte du travail de M. Plessner que $g(x)$ existe comme intégrale convergente *presque partout* et aussi que la série conjuguée est sommable (C, 1) *presque partout*. Mais j'ai construit un exemple ([36]) montrant que l'existence de $g(x)$ comme intégrale non absolument convergente en un point, bien que suffisante par *elle-même* pour assurer la sommabilité d'Abel, n'est pas une condition suffisante pour la sommabilité (C, 1) de la série en ce point.

1.52. Dans un Mémoire ([37]), se rattachant à leurs recherches sur les séries de Fourier ([38]), MM. Hardy et Littlewood prouvent que dans l'ensemble L ([39]) la série conjuguée est soit sommable par un procédé de Césàro d'ordre positif quelconque, soit impossible à sommer par quelque procédé de Césàro que ce soit ([40]). Ceci joint

---

([36]) B. N. Prasad, **45**. Des détails seront publiés sous peu.

([37]) Hardy et Littlewood, **26**; *cf.* aussi Zygmund, **82**.

([38]) Hardy et Littlewood, **18**.

([39]) L'ensemble des points où $f(x) - c$ est la dérivée de son intégrale, quel que soit c, est appelé l'ensemble de M. Lebesgue ou ensemble L. L'ensemble complémentaire de l'ensemble L a pour mesure zéro.

([40]) M. Izumi a publié une Note (*Tôhoku Math. Jour.*, 31, 1929, 109-113) dans laquelle il prétend avoir généralisé quelques-uns des résultats de MM. Hardy, aux résultats de M. Plessner montre que la série conjuguée est sommable (C, δ), pour toute valeur positive de δ, presque partout [41]. Ils prouvent, de plus, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point x la série conjuguée soit sommable (C, α) pour un $\alpha > 0$, est que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\int_0^{\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\cdots\int_0^{\varepsilon_{p-2}}\frac{d\varepsilon_{p-1}}{\varepsilon_{p-1}}\int_0^{\varepsilon_{p-1}}\frac{d\varepsilon_p}{2\pi}\int_{\varepsilon_p}^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\cot\frac{t}{2}\,dt$$

tende vers une limite pour une *certaine* valeur de p. Il manquait à ce théorème une précision, à savoir d'établir une relation entre α et p, et ceci a été fait par M. Paley [42] dont les résultats servent de très bons théorèmes d'existence. Ce qu'il reste à faire, maintenant, pour compléter cette théorie est de considérer formellement le cas où l'intégrale $g(x)$ diverge proprement: dans ce but, j'ai prouvé [43] que si $g(x)$ diverge et tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la limite d'Abel divergera elle aussi en tendant de même vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans le Chapitre IV, j'obtiens des théorèmes pour la sommabilité (C, r) de la série conjuguée. Si

$$\chi_r(t)=\int_0^t\frac{dt_1}{\sin t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{\sin t_2}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_{r-2}}\frac{dt_{r-1}}{\sin t_{r-1}}\int_0^{t_{r-1}}\psi(t_r)\,dt_r,$$

$$\chi_1(t)=\int_0^t\psi(t)\,dt=\omega_1(t),$$

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t);$$

$$\omega_r(t)=\int_0^t\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_{r-2}}\frac{dt_{r-1}}{t_{r-1}}\int_0^{t_{r-1}}\psi(t_r)\,dt_r,$$

je prouve que si l'intégrale

$$G_{r-1}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\chi_{r-1}(t)\,\mathrm{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt$$

Littlewood et Plessner. Mais aucun des théorèmes de M. Izumi n'est correct. Pour un travail de type différent relatif à la série conjuguée, *cf.* GRIMSHAW, 13.

(41) *Voir* le premier paragraphe du paragraphe 1.6. Le même résultat a été démontré indépendamment par M. Zygmund, presque en même temps, 82.

(42) PALEY. 39.

(43) B. N. PRASAD. 45, 46.

existe, au moins comme intégrale non absolument convergente, la série conjuguée sera sommable (C, r) et aura pour somme $G_{r+1}(x)$, pourvu que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\varphi_r(t)}{t}\,\frac{\cos nt}{t}\,dt = 0.$$

où $0<\delta<\pi$. De ceci, je déduis plusieurs criteriums pour la sommabilité (C, r) en un point. Par exemple, la série conjuguée sera sommable (C, r) en un point et aura pour somme $G_{r+1}(x)$, si

$$(i)\qquad \int_0^\delta \left|\frac{\varphi_r(t)}{t^2}\right| dt$$

existe, ou si

$$(ii)\qquad \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\varphi_r(t)}{t}\,dt$$

est à variation bornée, ou si l'on a

$$(iii)\qquad \int_0^t \left|\frac{\varphi_{r-1}(t)}{t}\right| dt = O(t) \qquad (r \geq 2),$$

lorsque t tend vers zéro. Il y a une symétrie remarquable en tout cela et la forme pratique de la fonction conjuguée correspondante est mise en évidence à chaque pas.

En particulier, si nous faisons $r=1$, il en résulte trois critères pour la sommabilité $(C, 1)$ qui seront valides tous, même si $g(x)$ n'existe pas.

1. 6. J'ai prouvé ([44]) que si $f(t)$ est borné, la série conjuguée est sommable (C, δ) pour chaque valeur de $\delta>0$, et a pour somme $g(x)$ en chaque point x, pourvu que l'intégrale

$$(1.61)\qquad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt$$

converge en ce point. MM. Hardy et Littlewood ([45]) ont montré que

---

([44]) B. N. Prasad, **49**.

([45]) Hardy et Littlewood, **26**, 279 ; *cf.* leur autre Note, **24**.

cela est aussi une condition nécessaire. En combinant quelques résultats connus de M. Plessner et de MM. Hardy et Littlewood, on peut établir *qu'au point x où*

$$\int_0^t |\psi(t)|\,dt = o(t)$$

(*c'est-à-dire presque partout*), *la condition nécessaire et suffisante pour que la série conjuguée soit sommable* (C, δ) *pour tout* $\delta > 0$, *est que l'intégrale* (1.61) *converge.*

D'un théorème de M. Paley ([46]), il suit que la série conjuguée est sommable (C, δ) pour tout $\delta > 1$, si l'intégrale (1.61) existe. Dans le Chapitre III, je montre que même si l'intégrale (1.61) n'existe pas, mais si l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \Psi(t)\,\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt$$

existe, la série est sommable (C, δ) pour tout $\delta > 1$, pourvu que

$$\Psi(t) = O(t)$$

ou que

$$\int_0^t \left|\frac{\Psi(t)}{t}\right| dt = o(t).$$

1. 7. Si

$$V(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) r^n$$

et

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,sin}(1 - r).$$

Fatou a prouvé que pour la sommation de Poisson de la série conjuguée on a ([47])

$$(1.71) \qquad \lim_{r \to 1}\left[V(r, x) - \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt\right] = 0,$$

pourvu que $f(t)$ soit une fonction bornée et continue. M. Lichtens-

([46]) Paley 42 (théorème 2 pour $\alpha = 1$).
([47]) Fatou, 8, 360.

tein (18) a montré que (1.71) demeure exact même si x est un point de continuité de $f(t)$, mais $f(t)$ n'étant pas nécessairement bornée. Plus tard, M. Plessner (19) a démontré que (1.71) est encore vraie pourvu que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \psi(t)\,dt = 0.$$

Dans le paragraphe **2.3**, je prouve un théorème plus général, à savoir que l'on a

$$\lim_{r\to 1}\left[V(r, x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\Psi(t)\,\text{cosec}^2\frac{t}{2}\,dt\right] = 0,$$

pourvu que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\Psi(t)}{t}\,dt = 0,$$

ce qui inclut comme cas particulier tous les théorèmes précédents de MM. Fatou, Lichtenstein et Plessner que nous venons de mentionner plus haut.

1.8. J'ai essayé de donner une bibliographie assez complète de la littérature relative aux séries conjuguées et à la fonction conjuguée.

Qu'il me soit permis de remercier ici M. A. Denjoy qui a bien voulu s'intéresser à mon travail avec une bienveillance dont je lui suis profondément reconnaissant.

Je voudrais aussi exprimer mes remerciements à mon ami, M. Ch. Racine qui m'a affectueusement apporté une aide considérable pour la rédaction française de ce travail.

---

(18) LICHTENSTEIN, 34, 27.
(19) PLESSNER, 41, 4 : théorème I.

CHAPITRE II.

CONVERGENCE ET SOMMATION DE POISSON.

2. 1. — Convergence.

2. 10. Dans ce qui va suivre nous considérerons des séries conjuguées de séries de Lebesgue-Fourier, et nous nous servirons des notations suivantes :

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$
$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(u)\,du.$$

Les lemmes suivants sont nécessaires.

Lemme I. — *Quand l'intégrale*

$$(2.101)\qquad \int_0^\delta \frac{\Psi(t)}{t^2}\,dt$$

existe, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$(2.102)\qquad \int_0^\delta \frac{\psi(t)}{t}\,dt$$

existe est que la limite de $\frac{\Psi(t)}{t}$*, lorsque t tend vers zéro, soit aussi zéro.*

Si $\varepsilon > 0$, nous obtenons, en intégrant par parties,

$$(2.103)\qquad \int_\varepsilon^\delta \frac{\psi(t)}{t}\,dt = \int_\varepsilon^\delta \frac{\Psi(t)}{t^2}\,dt + \frac{\Psi(\delta)}{\delta} - \frac{\Psi(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

ce qui montre avec évidence que la condition est suffisante. Que la condition soit nécessaire, cela résulte du fait que lorsque (2.102) et (2.101) extistent, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\Psi(t)}{t}$ tend vers une limite qui, d'après (2.103), est nécessairement o, sinon (2.101) n'existerait pas ([50]).

([50]) Ceci résulte aussi d'un théorème de Thomae; *cf.* Thomae, **63**. Ce critère de Thomae a été généralisé par moi dans le lemme 7, § **4. 2**.

Lemme II. — *Quand l'intégrale* (2.102) *existe, l'intégrale* (2.101) *existe aussi nécessairement.*

Par hypothèse

$$\int_0^t \frac{\psi(t)}{t}\,dt = u(t),$$

$u(t)$ étant nul et continu pour $t = 0$. Or

$$\Psi(t) = \int_0^t \frac{\psi(t)}{t}\,t\,dt = t\,u(t) - \int_0^t u(t)\,dt.$$

D'où l'on tire

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Psi(t)}{t} = 0.$$

En vertu de (2.103) on prouve alors le lemme.

Par suite des deux lemmes précédents, il est évident que la convergence de l'intégrale

$$(2.104) \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt$$

inclut nécessairement celle de l'intégrale

$$(2.105) \qquad G(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \Psi(t)\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\,dt,$$

mais la réciproque n'est pas vraie. Nous pouvons maintenant prouver le théorème fondamental suivant dont nous nous servirons fréquemment comme d'un lemme dans la discussion qui va suivre ([51]).

Théorème I. — *Si l'intégrale* (2.105) *existe, la série conjuguée convergera et aura pour valeur* $G(x)$ *pourvu que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_p^{\pi} \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt$$

([51]) Les résultats de cette section ont été annoncés dans les *Comptes rendus*. *Cf.* B. N. Prasad, 42, 43. Ils étaient inclus aussi dans une dissertation non imprimée que j'ai écrite à l'Université de Liverpool.

soit zéro, où $p = \frac{2m+1}{n}\frac{\pi}{2}$, $2m+1 < n$, *m étant un entier positif quelconque et indépendant de n.*

Considérons en effet la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série conjuguée. Nous avons

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{m=1}^{m=n} (b_m \cos mx - a_m \sin mx) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z) \frac{\sin\frac{n+1}{2}(z-x)\sin\frac{n(z-x)}{2}}{\sin\frac{z-x}{2}}\,dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\cot\frac{t}{2}(1-\cos nt)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin nt\,dt.
\end{aligned}
$$

Le dernier terme de la ligne ci-dessus devenant $o(1)$ lorsque n augmente indéfiniment, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue [52], nous obtenons

$$
\begin{aligned}
S_n = {} & \frac{1}{2\pi}\int_p^{\pi}\psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{p}\psi(t)\cot\frac{t}{2}(1-\cos nt)\,dt \\
& - \frac{1}{2\pi}\int_p^{\pi}\psi(t)\cot\frac{t}{2}\cos nt\,dt + o(1) \qquad (2.106)\\
= {} & I_1 + I_2 - I_3 + o(1).
\end{aligned}
$$

En intégrant maintenant par parties, il vient

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\Psi(t)\cot\frac{t}{2}\right]_p^{\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_p^{\pi}\Psi(t)\operatorname{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt$$

ou

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi}\Psi(p)\cot\frac{p}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_p^{\pi}\Psi(t)\operatorname{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt. \qquad (2.107)$$

([52]) RIEMANN, 55, 254; LEBESGUE, 33, 471.

Or

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\Psi(t)\cot\frac{t}{2}(1-\cos nt)\right]_0^p - \frac{1}{2\pi}\int_0^p \Psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\cot\frac{t}{2}(1-\cos nt)\right\}dt.$$

Le terme entre crochets devient

$$\frac{1}{2\pi}\Psi(p)\cot\frac{p}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^p \Psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\cot\frac{t}{2}(1-\cos nt)\right\}dt \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^p \Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^p \Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\cos nt\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^p \Psi(t)\cot\frac{t}{2}\,n\sin nt\,dt \\
&= -J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Or

$$J_3 = \frac{1}{4\pi}\int_0^p \Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\sin tn\sin nt\,dt.$$

La variation totale de $\sin nt$ entre o et t est

$$n\int_0^t |\cos nt|\,dt < nt.$$

Donc $\sin nt = P_1(t) - P_2(t)$, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ étant non décroissants et

$$|P_1(t)| < nt, \qquad |P_2(t)| < nt$$

et $n\sin t.P_1(t)$ et $n.\sin t.P_2(t)$ étant croissants, positifs et plus petits que n^2t^2 et par conséquent que $\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2$.

D'où

$$\begin{aligned}
J_3 &\leqq \frac{1}{4\pi}n^2p^2\int_0^\xi \Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt \qquad (0\leqq\xi\leqq p) \\
&= o(1) \qquad (\text{pour } n \text{ infini}).
\end{aligned}$$

D'une manière semblable, en exprimant $\cos nt$, dans (o, p) comme la différence de deux fonctions monotones, on peut montrer que

$$J_2 = o(1).$$

Ainsi nous avons

$$(2.108) \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi}\Psi(p)\cot\frac{p}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_0^p \Psi(t)\operatorname{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt + o(1).$$

Et encore

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_p^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_p^\pi \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_p^\pi \psi(t)\left(\cot\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right)\cos nt\,dt.$$

Puisque $\left(\cot\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right)$ est borné et intégrable dans $(0, \pi)$, la seconde intégrale de la ligne ci-dessus devient $o(1)$. Par conséquent,

$$(2.109) \qquad I_3 = \frac{1}{\pi}\int_p^\pi \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt + o(1).$$

De (2.106), (2.107) et (2.109), nous obtenons alors l'égalité

$$(A) \qquad S_n - \frac{1}{4\pi}\int_0^p \Psi(t)\operatorname{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_p^\pi \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt + o(1).$$

d'où notre théorème découle.

2. 11. Pour les applications du théorème I, il est utile de procéder à la remarque suivante. D'après l'équation (A), si à tout nombre positif ε correspond un entier particulier m tel que pour

$$p = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n},$$

on ait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_p^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt\right| < \varepsilon,$$

on en conclut

$$\lim S_n = G(x).$$

D'où résulte, en même temps, que

$$\lim_{n\to\infty}\int_p^\pi \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt = 0.$$

quel que soit m', si

$$p' = \left(m' + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}.$$

THÉORÈME II. — *Si l'intégrale* (2.105) *existe, la série conjuguée converge et a pour valeur* $G(x)$ *pourvu que*

$$\psi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t h(t)\,dt, \tag{2.111}$$

où

$$\int_0^t |h(t)|\,dt = O(t). \tag{2.112}$$

Par application du théorème de Riemann-Lebesgue, nous avons

$$\int_\delta^\pi \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt = o(1) \qquad (n \text{ infini}),$$

où $p < \delta < \pi$. Or

$$\int_p^\delta \psi(t)\frac{\cos nt}{t}\,dt = \int_p^\delta t\,\psi(t)\frac{d}{dt}q_n(t)\,dt,$$

où

$$q_n(t) = -\int_t^\delta \frac{\cos nt}{t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{t^2}\int_t^\theta \cos nt\,dt \qquad (t \leqq \theta \leqq \delta).$$

Donc

$$|q_n(t)| \leqq \frac{2}{nt^2}.$$

Soit, en vertu de la condition (2.112), dans un voisinage de $t = 0$

$$\frac{1}{t}\int_0^t |h(t)|\,dt < K,$$

où K est une constante. Pour les valeurs de n suffisamment grandes, on a aussi

$$|\psi(p)| < K.$$

Or, faisons correspondre à un nombre ε positif et arbitrairement petit un entier m suffisamment grand et tel que

$$\frac{2K}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Nous avons

$$\int_p^\delta \psi(t)\frac{\cos nt}{t}\,dt = [t\,\psi(t)\,q_n(t)]_p^\delta - \int_p^\delta h(t)\,q_n(t)\,dt.$$

Or

$$[t\,\psi(t)\,q_n(t)]_p^\delta = \delta\,\psi(\delta)\,q_n(\delta) - p\,\psi(p)\,q_n(p)$$

$$\leq \frac{2|\psi(p)|}{np} \leq \frac{2K}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

De plus

$$\int_p^\delta h(t)\,q_n(t)\,dt \leq 2\int_p^\delta \frac{|h(t)|}{nt^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{nt^2}\int_0^t |h(t)|\,dt\right]_p^\delta + 2\int_p^\delta \left\{\frac{2}{nt^3}\int_0^t |h(t)|\,dt\right\}dt.$$

On a alors

$$\left[\frac{2}{nt}\,\frac{1}{t}\int_0^t |h(t)|\,dt\right]_p^\delta \leq \frac{2K}{n\delta} < \frac{2K}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} < \frac{\varepsilon}{5} \quad \frac{\varepsilon}{5} < \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Or

$$\int_p^\delta \left\{\frac{2}{nt^3}\int_0^t |h(t)|\,dt\right\}dt \leq \frac{2k}{n}\int_p^\delta \frac{dt}{t^2} \leq \frac{2k}{n\delta} < \frac{2k}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} < \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Ainsi, aux conditions données (2.111) et (2.112), il vient

$$\left|\int_p^\delta \frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt\right| < \varepsilon,$$

et le théorème est démontré.

2. 2. — Sommation de Poisson.

Pour la sommation de Poisson de la série conjuguée, je vais prouver un théorème très général qui inclut comme cas particulier les théorèmes correspondants de MM. Fatou (33), Lichtenstein (34) et Plessner (35).

Théorème III. — *Si*

$$V(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) x^n,$$

où $0 \leqq x < 1$, *il vient*

$$\lim_{x \to 1} \left[V(x, \theta) - \frac{1}{4\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \Psi(t) \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \frac{t}{2} \, dt \right] = 0,$$

où

$$\varepsilon = \operatorname{arc} \sin (1 - x),$$

pourvu que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\Psi(t)}{t} dt = 0.$$

Nous avons, en effet,

$$
\begin{aligned}
V(x, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{ f(\theta + t) - f(\theta - t) \} \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \psi(t) \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi(t) \cot \frac{t}{2} \, \frac{(1 - x)^2}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi(t) \cot \frac{t}{2} dt \qquad (2.21) \\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

---

(33) Fatou, 8, 360.

(34) Lichtenstein, 34, 27.

(35) Plessner, 41, théorème I.

Posons

$$\Delta = 1 - 2x\cos t + x^2 = (1-x)^2 + 4x\sin^2\frac{t}{2}$$

et

$$\chi(t) = \int_0^t \frac{\Psi(t)}{t}\,dt.$$

Intégrons par parties, nous obtenons

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{4x\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{1-2x\cos\varepsilon + x^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \Psi(t)\,\frac{\cos t(x+x^3)-2x^2}{\Delta^2}\,dt.$$

Pour $0 \leqq t \leqq \varepsilon$, l'expression

$$\frac{\cos t(x+x^3)-2x^2}{\Delta^2}$$

est positive et, puisque la dérivée est négative, l'expression est une fonction monotone, positive, non croissante de t pour $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Appliquant le second théorème de la moyenne, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \Psi(t)\,\frac{\cos t(x+x^3)-2x^2}{\Delta^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{x+x^3-2x^2}{(1-x)^4}\int_0^\xi \frac{\Psi(t)}{t}\,t\,dt \qquad (0 \leqq \xi \leqq \varepsilon) \\
&= \frac{x}{\pi}\,\frac{1}{(1-x)^2}\,\xi\int_\eta^\xi \frac{\Psi(t)}{t}\,dt \qquad (0 \leqq \eta \leqq \xi) \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

puisque

$$\chi(t) = o(t).$$

lorsque t tend vers zéro, par hypothèse. D'où

$$(2.22) \qquad I_1 = \frac{1}{\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{4x\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{1-2x\cos\varepsilon + x^2} + o(1).$$

Or, en intégrant par parties, on obtient

$$(2.23) \qquad \begin{aligned} I_2 = &-\frac{1}{2\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(1-x)^2}{1-2x\cos\varepsilon + x^2} \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi \Psi(t)\,\frac{d}{dt}\left\{\cot\frac{t}{2}\,\frac{(1-x)^2}{\Delta}\right\}dt. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi}\Psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\cot\frac{t}{2}\,\frac{(1-x)^2}{\Delta}\right\}dt &= \frac{(1-x)^2}{2\pi}\left[\chi(t).t\frac{d}{dt}\left\{\cot\frac{t}{2}\,\frac{1}{\Delta}\right\}\right]_\varepsilon^{\pi}\\ &\quad-\frac{(1-x)^2}{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi}\chi(t)\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)\right\}dt.\end{aligned}$$

Il peut être montré aisément que le terme entre crochets est $o(1)$ quand ε tend vers zéro. Quant au second terme

$$\begin{aligned}&\frac{(1-x)^2}{2\pi}\,t\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)\right\}\\ &=\frac{(1-x)^2}{2\pi}\,t\frac{d}{dt}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)+\frac{(1-x)^2}{2\pi}\,t^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)=J_1+J_2.\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$, nous avons

$$J_1=-\frac{(1-x)^2 t}{4\pi\sin^2\frac{t}{2}}\,\frac{1}{\Delta}-\frac{(1-x)^2 t}{\pi}\,\frac{x\sin t\cot\frac{t}{2}}{\Delta^2},$$

$$J_1\leqq\frac{(1-x)^2\cos\frac{t}{2}}{16x\sin^2\frac{t}{2}}+\frac{(1-x)^2\cos\frac{t}{2}}{8x\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{3}{16}\,\frac{(1-x)^2\cos\frac{t}{2}}{x\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Quand $\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$,

$$t\frac{d}{dt}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)$$

est borné, quelle que soit la valeur de x.

Or

$$\begin{aligned}J_2=\frac{(1-x)^2}{2\pi}\,t^2\Bigg[&\cot\frac{t}{2}\left(\frac{2x\cos t.\Delta-8x^2\sin^2 t}{\Delta^3}\right)\\ &+\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,\frac{2x\sin t}{\Delta^2}+\cot\frac{t}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\frac{1}{\Delta}\Bigg].\end{aligned}$$

Si nous nous rappelons que, pour les valeurs de t contenues dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, nous avons

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1,$$

il peut être montré que, pour $\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{(1-x)^2}{2\pi} t^2 \left| \cot\frac{t}{2} \, \frac{2x\cos t}{\Delta^2} - \cot\frac{t}{2} \, \frac{8x^2\sin^2 t}{\Delta^3} \right| \leq \frac{5}{16}\pi \frac{(1-x)^2 \cos\frac{t}{2}}{x \sin^3\frac{t}{2}};$$

$$\frac{(1-x)^2}{2\pi} t^2 \operatorname{cos\acute{e}c}\frac{t}{2} \, \frac{2x\sin t}{\Delta^2} \leq \frac{\pi}{8} \frac{(1-x)^2 \cos\frac{t}{2}}{x \sin^3\frac{t}{2}},$$

et

$$\frac{(1-x)^2}{2\pi} t^2 \cot\frac{t}{2} \, \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}\,\Delta} \leq \frac{\pi}{8} \frac{(1-x)^2 \cos\frac{t}{2}}{x \sin^3\frac{t}{2}}.$$

D'où, pour $\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

$$J_2 \leq \frac{9}{16}\pi \frac{(1-x)^2 \cos\frac{t}{2}}{x \sin^3\frac{t}{2}}.$$

Pour $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$,

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)$$

est borné. Par conséquent pour $\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

$$|J_1 - J_2| \leq \frac{3}{4}\pi \frac{(1-x)^2 \cos\frac{t}{2}}{x \sin^3\frac{t}{2}}.$$

Pour $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$,

$$|J_1 - J_2| < k \frac{(1-x)^2}{2\pi},$$

où k est une constante.

Divisant, maintenant, l'intervalle (ε, π) en trois parties

$$\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

nous avons

$$\frac{(1-x)^2}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi \frac{\chi(t)}{t}\, t\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\left(\frac{\cot\frac{t}{2}}{\Delta}\right)\right\}dt$$

$$\leq \frac{3\pi}{x}\int_\varepsilon^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{\chi(t)}{t}\right|\frac{(1-x)^2\cos\frac{t}{2}}{4\sin^3\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{3\pi(1-x)^2}{x}\int_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\chi(t)}{t}\right|\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^3\frac{t}{2}}dt+\frac{(1-x)^2}{2\pi}k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\frac{\chi(t)}{t}\right|dt$$

$$\leq \frac{3\pi(1-x)^2}{x}M_1\int_\varepsilon^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}dt+\frac{3\pi(1-x)^2}{x}M_2\int_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}dt+o(1)$$

$$=\frac{3\pi(1-x)^2}{x}M_1\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}}\right]+\frac{3\pi(1-x)^2}{x}M_2\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}}-1\right]+o(1)$$

$$=o(1)+o(1)+o(1)=o(1).$$

lorsque x tend vers 1, où M_1 et M_2 sont les maxima de $|\chi_1(t)t^{-1}|$ dans $\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ respectivement. Par suite, de (2.23) nous tirons

$$(2.24)\qquad I_2=-\frac{1}{2\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(1-x)^2}{1-2x\cos\varepsilon+x^2}+o(1).$$

Or

$$(2.25)\qquad I_3=-\frac{1}{2\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\pi\Psi(t)\,\text{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt.$$

Par conséquent, de (2.21), (2.22), (2.24) et (2.25), nous déduisons

$$V(x,\theta)-\frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\pi\Psi(t)\,\text{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Psi(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{4x\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{1-2x\cos\varepsilon+x^2}+\frac{(1-x)^2}{1-2x\cos\varepsilon+x^2}-1\right]+o(1)=o(1).$$

puisque le terme entre crochets est identiquement nul. Ceci complète la démonstration du théorème.

CHAPITRE III.

SOMMABILITÉ (C, δ).

3. 1. Quand l'intégrale

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt \tag{3.11}$$

existe, ce qui est, d'ailleurs, équivalent à l'existence de l'intégrale

$$G(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \Psi(t)\operatorname{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt \tag{3.12}$$

avec la condition $\Psi(t) = o(t)$, nous savons, d'après M. Paley ([56]), que la série conjuguée est sommable (C, δ) pour tout $\delta > 1$.

Nous allons prouver le théorème suivant, plus général :

Théorème IV. — *En tous les points x où existe l'intégrale (3.12) au moins comme une intégrale convergeant non absolument, la série conjuguée est sommable (C, δ) et a pour somme $G(x)$ pour tout $\delta > 1$, pourvu que*

$$\Psi(t) = O(t)$$

ou que

$$\int_0^t \left|\frac{\Psi(t)}{t}\right| dt = o(t).$$

Puisque $f(x)$ est associée à la série de Fourier (1.11), nous avons

$$\frac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\} \sim \sum_{m=1}^{\infty}(b_m\cos mx - a_m\sin mx)\sin mt$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt.$$

([56]) Paley, 39 (théorème 2 où $\alpha = 1$).

Au lieu d'employer les moyennes de Cesàro, nous nous servirons des moyennes équivalentes de Riesz ([57]). Ainsi donc, posant

$$B_\omega^\delta = \sum_{1 \leq m \leq \omega} \left(1 - \frac{m}{\omega}\right)^\delta B_m,$$

nous avons à montrer que si $G(x)$ existe et si l'une ou l'autre des conditions du théorème est satisfaite, on a

$$B_\omega^\delta \to G(x),$$

quand ω tend vers l'infini pour tout $\delta > 1$.

3. 2. Soit $c_p(t)$ une fonction définie comme il suit :

$$(3.21) \quad c_p(t) = \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{(p+1)(p+2)} + \frac{t^4}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} - \cdots \right\},$$

où $p \geqq 0$; les propriétés de cette fonction ont été étudiées par M. Young ([58]). Quelques-unes des principales propriétés de $c_p(t)$ sont :

$$c_0(t) = \cos t; \qquad c_1(t) = \sin t.$$

$$c_p(t) = \frac{d}{dt} c_{p-1}(t); \qquad \int_0^t c_p(t)\, dt = c_{p+1}(t).$$

$$c_{p+q}(u) = \frac{u^q}{\Gamma(q)} \int_0^1 c_p(tu)(1-t)^{q-1}\, dt \qquad (0 < q).$$

$$(3.22) \quad c_q(u) = \frac{u^{q-2}}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 (1 - \cos tu)(1-t)^{q-3}\, dt \qquad (2 < q);$$

$$(3.23) \quad c_{q+2}(u) = \frac{u^q}{\Gamma(q+1)} - c_q(u) \qquad (0 < q).$$

$$u^{-q} c_q(u) = O(u^{-q}) \qquad (0 \leqq q \leqq 2).$$

$$u^{-q} c_q(u) = O(u^{-2}) \qquad (q > 2).$$

Pour $0 \leqq q \leqq 2$ et pour toutes les valeurs de u telles que $u \geqq 0$, $c_q(u)$ est borné.

([57]) RIESZ, 56; HOBSON, 27, 90-98.

([58]) YOUNG, 78.

Pour $q > 1$, $u^{-q}c_q(u)$ est à variation bornée dans $(0, \infty)$.

3. 3. Nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3. — *La fonction*

$$u^{-1+\delta}c_{2+\delta}(u),$$

où $\delta > 0$, est une fonction à variation bornée dans $(0, \infty)$ et elle tend vers zéro lorsque u tend vers l'infini [59].

Lemme 4. — *La fonction $u^{-\delta}c_\delta(u)$, où $\delta > 0$, est à variation bornée dans tout intervalle fini.*

Lemme 5. — *Si $q > 2$,*

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{q-1}} c_q(t) \sin xt\, dt = \frac{\pi}{2\Gamma(q-1)}(1-x)^{q-2}, \qquad \text{si } x \leqq 1;$$
$$= 0 \qquad \text{si } x \geqq 1.$$

De (3.22), nous tirons pour $q > 2$

$$(3.31) \qquad \int_0^\infty \frac{1}{t^{q-1}} c_q(t) \sin xt\, dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt \int_0^1 (1-\cos ut)(1-u)^{q-3}\, du.$$

Puisque $(1-u)^{q-3}$ est intégrable dans $(0, 1)$ et que

$$t^{-1} \sin xt(1-\cos ut)$$

est une fonction bornée de t et u dans un rectangle $(0, 0; A, 1)$, dont l'intégrale par rapport à t dans l'intervalle $(0, A)$ converge en restant bornée et a pour valeur limite

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt(1-\cos ut)}{t} dt.$$

nous pouvons changer l'ordre des intégrations dans (3.31) [60]. Ainsi

---

[59] Pour la démonstration des lemmes 3, 4, 5, *cf.* B. N. Prasad, **44**. En raison de l'importance intrinsèque du lemme 5, j'indique la démonstration.

[60] Young, **78**, 165; lemme.

il vient

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty & \frac{1}{t^{q-1}} c_q(t) \sin xt \, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 (1-u)^{q-3} \, du \int_0^\infty \frac{\sin xt(1-\cos ut)}{t} \, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \frac{\pi}{2} \int_x^1 (1-u)^{q-3} \, du \qquad \text{si } x \leqq 1, \\
&= 0 \qquad \text{si } x \geqq 1, \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(q-1)} (1-x)^{q-2} \qquad \text{si } x \leqq 1, \\
&= 0 \qquad \text{si } x \geqq 1.
\end{aligned}
$$

Lemme 6. — *Si*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt \tag{3.32}$$

est convergente dans le sens

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\, T \to \infty} \int_\varepsilon^T,$$

l'intégrale (3.12) *est aussi convergente comme une intégrale de Cauchy et les deux intégrales sont égales.*

La fonction $\Psi(t)$ est paire et périodique. Or [61]

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \int_{-\pi}^\pi \frac{\Psi(t)}{(t+2k\pi)^2} \, dt,
\end{aligned}
$$

---

(61) La démonstration est dans le genre de la preuve du résultat classique

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \psi(t) \cot \frac{t}{2} \, dt.$$

Cf. Hardy et Littlewood, **20**, 221.

$\sum_{-\infty}^{\infty}{}'$ signifiant

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{-k}^{-1}+\sum_{1}^{k}\right).$$

Or, la série converge absolument et a pour limite

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{4}\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}-\frac{1}{t^2}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\infty}\frac{\Psi(t)}{t^2}\,dt=\frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt$$

ou

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\Psi(t)}{t^2}\,dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\Psi(t)\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt.$$

3. 4. Puisque $(\omega t)^{-(1+\delta)}c_{2+\delta}(\omega t)$, en vertu du lemme 3, est à variation bornée dans tout l'intervalle $(0, \infty)$ et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, nous pouvons écrire ([62])

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\omega t)^{-1-\delta}c_{2+\delta}(\omega t)\{f(x+t)-f(x-t)\}\,dt$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\int_0^{\infty}(\omega t)^{-1-\delta}c_{2+\delta}(\omega t)\sin mt\,dt.$$

Posant $\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)$, et changeant ωt en t, nous obtenons, en vertu du lemme 5,

$$\frac{\Gamma(1+\delta)}{\pi}\int_0^{\infty}\psi\left(\frac{t}{\omega}\right)t^{-1-\delta}c_{2+\delta}(t)\,dt=\sum_{m<\omega}B_m\left(1-\frac{m}{\omega}\right)^{\delta}, \tag{3.41}$$

ou

$$\frac{\Gamma(1+\delta)}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\psi\left(\frac{t}{\omega}\right)t^{-1-\delta}c_{2+\delta}(t)-\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{\Psi(t)}{t^2}\right\}dt \tag{3.42}$$
$$=\sum_{m<\omega}B_m\left(1-\frac{m}{\omega}\right)^{\delta}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\Psi(t)}{t^2}\,dt,$$

([62]) Hardy, 16, 167.

où $\delta > 0$. Posant $\delta = 1 + \eta$, où $\eta > 0$, il reste à montrer pour établir le théorème que

$$(3.43) \qquad \int_0^\infty \left\{ \psi\left(\frac{t}{\omega}\right) t^{-(2+\eta)} c_{2+\eta}(t) - \frac{\omega}{\Gamma(2+\eta)} \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} \right\} dt$$

tend vers zéro quand ω tend vers l'infini. Puisque

$$c_{2+\eta}(t) = \frac{t^{1+\eta}}{\Gamma(2+\eta)} - c_{1+\eta}(t),$$

(3.43) devient

$$(3.44) \qquad \frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{\omega}\right) t^{-(2+\eta)} c_{1+\eta}(t)\, dt$$
$$- \frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \int_0^\infty \omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{dt}{t^2}.$$

Puisque

$$\frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \int_0^\infty \omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{dt}{t^2}$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \left[\omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{1}{t} \right]_0^\infty + \frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{dt}{t}$$

et

$$\int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{\omega}\right) t^{-(2+\eta)} c_{1+\eta}(t)\, dt$$
$$= \left[\omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) t^{-(2+\eta)} c_{1+\eta}(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{d}{dt}\left(t^{-(2+\eta)} c_{1+\eta}(t)\right) dt,$$

en reportant ces valeurs dans (3.44), on obtient

$$(3.45) \qquad \frac{1}{\Gamma(2+\eta)} \left[\frac{\omega}{t} \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \left\{ 1 - \Gamma(2+\eta) t^{-(1+\eta)} c_{1+\eta}(t) \right\} \right]_0^\infty$$
$$+ \int_0^\infty \omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{d}{dt}\left(t^{-(2+\eta)} c_{1+\eta}(t)\right) dt.$$

Nous rappelant la définition de $c_\mu(t)$ comme elle a été donnée dans (3.21) et que, pour des valeurs suffisamment grandes de t, on a

$$t^{-(1+\eta)} c_{1+\eta}(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\eta}}\right),$$

il peut être aisément prouvé que le terme entre crochets dans l'égalité ci-dessus est o(1) lorsque ω tend vers l'infini. Afin donc d'achever la démonstration du théorème, il nous faut montrer que le terme sous le signe somme dans (3.45) est o(1) lorsque ω tend vers l'infini.

3. 5. Le terme intégral dans (3.45) est équivalent à

$$-(2+\eta)\int_0^\infty \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2}\, t^{-(1+\eta)} c_{1+\eta}(t)\,dt + \int_0^\infty \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2}\, t^{-\eta} c_\eta(t)\,dt$$

$$= -J_1 + J_2. \tag{3.51}$$

Puisque dans (o, ∞), $t^{-(1+\eta)}c_{1+\eta}(t)$ est une fonction à variation bornée et intégrable et qu'elle tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, écrivons

$$t^{-(1+\eta)}c_{1+\eta}(t) = P(t) - Q(t),$$

où $P(t)$, $Q(t)$ sont chacune des fonctions positives, monotones et non croissantes. Soit A un nombre tel que l'on puisse lui faire correspondre un nombre ε arbitrairement petit et positif, de telle sorte que chacune des fonctions $P(t)$ et $Q(t)$ soit moindre que ε pour toutes les valeurs de t contenues dans l'intervalle (A, ∞). Divisons l'intervalle (o, ∞) en trois parties (o, A), (A, ω^2) et (ω^2, ∞) et considérons J_1 séparément en chacun de ces intervalles partiels.

A l'aide du second théorème de la moyenne, nous avons

$$\int_0^{A} \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} P(t)\,dt = P(0)\int_0^{\xi} \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2}\,dt = P(0)\,o(1) = o(1)$$
$$(0 \leqq \xi \leqq A).$$

puisque l'intégrale (3.12) existe. Pareillement, on peut montrer que

$$\int_0^{A} \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} Q(t)\,dt = o(1).$$

En conséquence

$$\int_0^{A} \omega\frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2}\, t^{-(1+\eta)} c_{1+\eta}(t)\,dt = o(1).$$

Toujours par le second théorème de la moyenne, on a

$$\int_{A}^{\omega^2 \omega} \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} P(t)\,dt = P(A) \int_{A}^{\xi_1 \omega} \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2}\,dt < \varepsilon\, O(1)$$

$$(A \leqq \xi \leqq \omega^2),$$

la même chose étant vraie pour l'intégrale correspondante avec $Q(t)$. De là, on tire

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{A}^{\omega^2 \omega} \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} t^{-1+\eta_1} c_{1+\eta_1}(t)\,dt = 0.$$

Or

$$(3.52) \qquad \int_{\omega^2}^{\infty} \frac{\omega\,\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} t^{-1+\eta_1} c_{1-\eta_1}(t)\,dt = \int_{\omega}^{\infty} \frac{\Psi(t)}{t^2} (\omega t)^{-1-\eta_1} c_{1-\eta_1}(\omega t)\,dt.$$

Puisque, par hypothèse, l'intégrale (3.32) est convergente et que $(\omega t)^{-1-\eta_1} c_{1-\eta_1}(\omega t)$ est à variation bornée et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\Psi(t)}{t^2} (\omega t)^{-1+\eta_1} c_{1-\eta_1}(\omega t)\,dt$$

est convergente par suite du critérium de Dirichlet ([63]). Par conséquent (3.52) est égal à $o(1)$ lorsque ω tend vers l'infini et par suite J_1 est aussi égal à $o(1)$ lorsque ω tend vers l'infini.

3. 6. Pour étudier l'intégrale J_2 divisons l'intervalle $(0, \infty)$ en trois parties $(0, 1)$, $(1, \omega)$ et (ω, ∞). Dans $(0, 1)$, en vertu du lemme 4, $t^{-\eta_1} c_{\eta_1}(t)$ est à variation bornée et comme pour le cas de J_1, pour l'intervalle (O, A), on peut montrer que

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{0}^{1} \omega \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} t^{-\eta_1} c_{\eta_1}(t)\,dt = 0.$$

([63]) BROMWICH, 4, 477.

Or, dans (ω, ∞), nous avons

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{\omega}{t} \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) c_{\eta_1}(t) \frac{dt}{t^{1-\eta_1}} \leq k \int_{\omega}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\eta_1}} = k \cdot o(1) = o(1).$$

quand ω tend vers l'infini, k étant une constante. Finalement, il nous faut considérer

$$\int_{1}^{\omega} \frac{\omega \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} t^{-\eta_1} c_{\eta_1}(t)\, dt = \int_{\frac{1}{\omega}}^{1} \frac{\Psi(z)}{z^2} (\omega z)^{-\eta_1} c_{\eta_1}(\omega z)\, dz \tag{3.61}$$

$$< B\omega^{-\eta_1} \int_{\frac{1}{\omega}}^{1} \left|\frac{\Psi(z)}{z}\right| z^{-1-\eta_1}\, dz. \tag{3.62}$$

où B est une constante. Supposons maintenant que

$$\chi(z) = \int_{0}^{z} \left|\frac{\Psi(z)}{z}\right| dz = o(z). \tag{3.63}$$

quand z tend vers zéro. Intégrant par parties, (3.62) devient

$$B\omega^{-\eta_1} \Big[\chi(z) z^{-1-\eta_1}\Big]_{\frac{1}{\omega}}^{1} - B\omega^{-\eta_1}(1-\eta_1) \int_{\frac{1}{\omega}}^{1} z^{-2-\eta_1} \chi(z)\, dz. \tag{3.64}$$

En vertu de (3.63), le terme entre crochets dans l'expression ci-dessus est égal à $o(1)$ lorsque ω tend vers l'infini. Si nous faisons correspondre à un nombre positif ε, arbitrairement petit, un nombre σ tel que $|\chi(z)| < \varepsilon z$ pour $0 \leq t \leq \sigma$, et si nous divisons ensuite l'intervalle $\left(\frac{1}{\omega}, 1\right)$ en deux parties, $\left(\frac{1}{\omega}, \sigma\right)$ et $(\sigma, 1)$, il peut être aisément montré que le terme sous le signe somme dans (3.64) est égal à $o(1)$ lorsque ω tend vers l'infini. Ainsi, sous la condition (3.63), le théorème est démontré.

3. 7. Supposons maintenant que

$$\Psi(z) = O(z).$$

On peut alors montrer, de la même manière que pour l'étude de J, dans l'intervalle (O, A), que

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^{A\omega} \frac{\Psi\left(\frac{t}{\omega}\right)}{t^2} t^{-\eta} c_{\eta_1}(t)\, dt = 0$$

et encore que

$$\int_A^{\infty} \frac{\omega}{t} \Psi\left(\frac{t}{\omega}\right) \frac{1}{t^{1-\eta}} c_{\eta_1}(t)\, dt \leqq C \int_A^{\infty} \frac{dt}{t^{1-\eta}} = C.o(1) = o(1),$$

où C est une constante et A un nombre suffisamment grand.

Ainsi le théorème est complètement démontré.

CHAPITRE IV.

SOMMABILITÉ (C, r).

4. 1. Je vais, dans ce chapitre, prouver des théorèmes très généraux touchant la sommabilité (C, r) de la série conjuguée en un point x où r peut être un entier positif quelconque. L'analyse qui suit nous permet non seulement d'affirmer la sommabilité de la série d'une manière facile, mais encore elle nous donne la fonction conjuguée correspondante qui en est la somme, d'une façon pratique. Du théorème général, nous déduirons des théorèmes particuliers concernant la sommabilité (C, 1) qui s'appliqueront même dans le cas où l'intégrale

$$(4.11) \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \cot \frac{t}{2}\, dt$$

n'existe pas.

Nous nous servirons des notations suivantes où nous supposerons que

$$\frac{\chi_1(t)}{\sin t}, \quad \frac{\chi_2(t)}{\sin t}, \quad \ldots, \quad \frac{\chi_p(t)}{\sin t};$$

$$\frac{\omega_1(t)}{t}, \quad \frac{\omega_2(t)}{t}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega_p(t)}{t}$$

sont absolument intégrables :

$$\chi_1(t) = \int_0^t \psi(t)\,dt = \omega_1(t),$$

$$\chi_2(t) = \int_0^t \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\chi_{p+1}(t) = \int_0^t \frac{\chi_p(t)}{\sin t}\,dt;$$

$$\omega_2(t) = \int_0^t \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_{p+1}(t) = \int_0^t \frac{\omega_p(t)}{t}\,dt;$$

$$G_p(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \chi_p(t)\,\text{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt.$$

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème V. — *Si l'intégrale*

$$(4.12) \qquad G_{r+1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \chi_{r+1}(t)\,\text{coséc}^2\frac{t}{2}\,dt$$

existe, la série conjuguée sera sommable** (C, r) **et aura pour somme** $G_{r+1}(x)$ **pourvu que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\omega_r(t)}{t}\,\frac{\cos nt}{t}\,dt = 0,$$

où $0 < \delta < \pi$.

4. 2. Nous établissons maintenant un ensemble de lemmes dont nous nous servirons dans la suite.

Lemme 7. — *Si $f(x)$ est intégrable dans $(0, x)$, on a, lorsque x tend vers zéro,*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = o(x^\delta),$$

où $\delta > 0$, pourvu que

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t^\delta}\,dt$$

existe.

Un cas particulier de ce lemme, lorsque $\delta = 1$, a été prouvé par Thomae ([64]).

Soit

$$\Phi(x) - \Phi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{x} \frac{f(t)}{t^{\delta}}\, dt.$$

Nous avons alors par intégration par parties

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{\delta}} \int_{\varepsilon}^{x} f(t)\, dt &= \frac{1}{x^{\delta}} \int_{\varepsilon}^{x} t^{\delta} \frac{f(t)}{t^{\delta}}\, dt \\ &= \Phi(x) - \Phi(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{\delta}}{x^{\delta}} - \frac{1}{x^{\delta}} \int_{\varepsilon}^{x} \delta t^{\delta-1} \Phi(t)\, dt.\end{aligned}$$

Nous servant du premier théorème de la moyenne, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{\delta}} \int_{\varepsilon}^{x} f(t)\, dt &= \Phi(x) - \Phi(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{\delta}}{x^{\delta}} - \Phi(\xi) \frac{1}{x^{\delta}} \int_{\varepsilon}^{x} \delta t^{\delta-1}\, dt \\ &= \Phi(x) - \Phi(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{\delta}}{x^{\delta}} - \Phi(\xi) + \Phi(\xi) \frac{\varepsilon^{\delta}}{x^{\delta}},\end{aligned}$$

où $\varepsilon \leqq \xi \leqq x$. Faisons tendre ε vers zéro,

$$\frac{1}{x^{\delta}} \int_{0}^{\delta} f(t)\, dt = \Phi(x) - \Phi(\xi_1) \qquad (0 \leqq \xi_1 \leqq x).$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$, on a aussi $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(\xi_1) = 0$. Par conséquent

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\delta}} \int_{0}^{x} f(t)\, dt = 0.$$

Lemme 8. — *Si*

$$\int_{0}^{\delta} \frac{F(x)}{x}\, dx$$

existe, on a

$$\int_{0}^{t} F(t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt = o(t^2).$$

Ceci est évident à cause du lemme 7.

Lemme 9. — $\chi_r(t)$ et $\omega_r(t)$ *existent ou non simultanément et s'ils*

([64]) Thomae, 63. *Cf.* aussi G. Prasad, 47.

existent on a

$$\chi_r(t) = \omega_r(t) + o(t^2).$$

1° $\psi(t)$ étant intégrable

$$\chi_1(t) = \int_0^t \psi(t)\,dt = \omega_1(t)$$

existent et sont infiniment petits avec t.

2°
$$\int_\varepsilon^t \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,dt = \int_\varepsilon^t \frac{\omega_1(t)}{\sin t}\,dt$$
$$= \int_\varepsilon^t \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt - \int_\varepsilon^t \omega_1(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)dt.$$

Quand ε tend vers zéro, le dernier terme tend vers une limite qui est

$$\int_0^t \omega_1(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)dt = o(t^2).$$

Donc, en faisant tendre ε vers zéro, $\chi_2(t)$ et $\omega_2(t)$ existent ou non en même temps et, s'ils existent,

$$\chi_2(t) = \omega_2(t) - o(t^2).$$

Puisqu'ils existent, $\chi_2(t)$ et $\omega_2(t)$ sont infiniment petits avec t.

3°
$$\int_\varepsilon^t \frac{\chi_2(t)}{\sin t}\,dt = \int_\varepsilon^t \frac{\omega_2(t)}{\sin t}\,dt + \int_\varepsilon^t \frac{o(t^2)}{\sin t}\,dt$$
$$= \int_\varepsilon^t \frac{\omega_2(t)}{t}\,dt - \int_\varepsilon^t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)\omega_2(t)\,dt + \int_\varepsilon^t \frac{o(t^2)}{\sin t}\,dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro, les deux dernières intégrales tendent chacune vers une limite. Donc $\chi_3(t)$ et $\omega_3(t)$ existent ou non simultanément. Supposons qu'ils existent. Faisons tendre ε vers zéro; alors les deux dernières intégrales sont $o(t^2)$. Donc

$$\chi_3(t) = \omega_3(t) + o(t^2).$$

et ainsi indéfiniment.

Supposons établi que si $\chi_2(t)$, $\chi_3(t)$, $\ldots$, $\chi_{r-1}(t)$ existent :

1° Il en est de même de $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., $\omega_{r-1}(t)$ et réciproquement.

2° $\chi_i(t) = \omega_i(t) + o(t^2)$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$; on en conclut que $\chi_r(t)$ et $\omega_r(t)$ existent ou non simultanément et que

$$\chi_r(t) = \omega_r(t) + o(t^2).$$

Lemme 10. — *Si c_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il en est de même de*

$$\sigma_n = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n}.$$

C'est là un résultat bien connu.

4. 3. Étant donné la complète équivalence des procédés de Cesàro et de Hölder [65], nous nous servirons dans ce qui suit du procédé de sommation de Hölder.

Écrivant $s_{0,n}$ pour la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série conjuguée correspondant à $\psi(t)$, nous obtenons, par suite du paragraphe **2. 10**,

$$s_{0,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{\sin\frac{n-1}{2}t\,\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$(4.31) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Désignant maintenant par $s_{0,n}^1$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de Cesàro de la série conjuguée, nous avons

$$s_{0,n}^1 = \frac{s_{0,1} + s_{0,2} + \ldots + s_{0,n}}{n}$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{\sin\frac{t}{2}}\left[n\cos\frac{t}{2} - \left(\cos\frac{t}{2} + \cos\frac{3}{2}t + \cos\frac{5}{2}t + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}t\right)\right]dt$$

$$(4.32) \qquad = \frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[2(n-1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n-1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt.$$

---

(65) *Cf.* Knopp, 28, 29; Schnee, 60; Ford. 12; I. Schur, 61; Harn. 14.

Intégrant par parties, il vient

$$s_{0,n}^{1} = \frac{1}{4\pi n}\left[\chi_1(t)\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left\{2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right\}\right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\chi_1(t)\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]\right\}dt.$$

Le terme intégré étant nul, nous avons

$$s_{0,n}^{1} = \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\chi_1(t)\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\left[2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$- \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\chi_1(t)}{\sin\frac{t}{2}}\,\frac{d}{dt}\left[2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$= I_1 - I_2. \tag{4.33}$$

Puisque

$$\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{\sin t}\sin\frac{t}{2},$$

nous avons

$$I_1 = \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$- \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\chi_1(t)}{\sin t}\sin\frac{t}{2}\left[2(n+1)\cos\frac{t}{2} - \frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$= J_1 - J_2. \tag{4.34}$$

Or

$$J_2 = -\frac{n+1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\chi_1(t)\,dt - \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\chi_1(t)}{\sin t}\sin(n+1)t\,dt$$

$$= -\frac{n+1}{4\pi n}\int_0^{\pi}\chi_1(t)\,dt + o(1). \tag{4.35}$$

puisque nous supposons [66] que $\frac{\chi_1(t)}{\sin t}$, $\frac{\chi_2(t)}{\sin t}$, etc. sont absolument intégrables. Or

$$I_2 = -\frac{n+1}{4\pi n}\int_0^\pi \chi_1(t)\,dt \tag{4.36}$$
$$-\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\cos\frac{t}{2}\,\frac{2(n+1)\cos(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$
$$-\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos^2\frac{t}{2}\sin(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

La dernière intégrale écrite ci-dessus est

$$\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\sin(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + o(1).$$

Par suite, les égalités (4.33), (4.34), (4.35) et (4.36) nous donnent

$$s''_n = J_1 + \frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\cos\frac{t}{2}\,\frac{2(n+1)\cos(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$
$$-\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\sin(n+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + o(1)$$
$$= J_1 + \Bigg[\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,2(n+1)\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$-\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,\frac{\sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt\Bigg]$$
$$-\Bigg[\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,2(n+1)\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$-\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,2(n+1)\cos\frac{t}{2}\cos(n+1)t\,dt\Bigg] + o(1). \tag{4.37}$$

---

(66) Il faut remarquer que si $\psi(t)$ est intégrable, $\frac{\chi_1(t)}{t}$ ou $\frac{\chi_1(t)}{\sin t}$ n'est pas toujours nécessairement intégrable.

La première expression entre crochets, ci-dessus, est la même que J_1, tandis que l'autre terme entre crochets est

$$\frac{2(n-1)}{4n\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left\{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\cos(n+1)\frac{t}{2}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \quad (67)$$

$$-\frac{2(n-1)}{4n\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\sin(n-1)t\,dt$$

$$(4.38)\qquad =\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt+o(1)+o(1).$$

Ainsi de (4.37) et de (4.38), nous tirons finalement

$$s_{n,n}^{1}=\frac{1}{4\pi n}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[2(n-1)\cos\frac{t}{2}-\frac{\sin(n-1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$=\frac{2}{4\pi n}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[2(n-1)\cos\frac{t}{2}-\frac{\sin(n-1)t}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$(4.39)\qquad =\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt+o(1).$$

---

(67) Cette intégrale peut être interprétée comme $\frac{\sigma_n(x)}{n}$, où $\sigma_n(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série conjuguée correspondant à la fonction absolument intégrable $\frac{\chi_1(t)}{\sin t}$; et, en vertu du lemme 10,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(x)}{n}=0.$$

4.4. Servons-nous maintenant des notations suivantes :

$$s_{0,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{\cos\dfrac{t}{2} - \cos\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}\,dt,$$

$$s_{1,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_1(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\dfrac{t}{2} - \cos\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}\,dt,$$

. . . .

$$s_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\chi_m(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\dfrac{t}{2} - \cos\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}\,dt,$$

et désignons par $s^{(r)}_{m,n}$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de Cesàro, d'ordre r, relative à la série conjuguée dont la $n^{\text{ième}}$ somme partielle ordinaire est $s_{m,n}$. Avec ces notations l'égalité (4.39) devient

$$s^{(1)}_{0,n} = 2s^{(1)}_{1,n} - s_{1,n} + o(1). \tag{4.41}$$

Nous avons donc

$$s^{(r)}_{0,n} = 2s^{(r)}_{1,n} - s^{(r-1)}_{1,n} + o(1). \tag{4.42}$$

Or si $\lim\limits_{n\to\infty} s^{(r-1)}_{1,n}$ existe, $\lim\limits_{n\to\infty} 2s^{(r)}_{1,n}$ existera aussi et, en conséquence, $\lim\limits_{n\to\infty} s^{(r)}_{0,n}$ existera et sera égale à celle de $s^{(r-1)}_{1,n}$. Maintenant, continuant l'analyse du paragraphe 4.3, il peut être montré que

$$s^{(1)}_{1,n} = 2s^{(1)}_{2,n} - s_{2,n} + o(1).$$

D'où

$$s^{(r-1)}_{1,n} = 2s^{(r-1)}_{2,n} - s^{(r-2)}_{2,n} + o(1).$$

Par suite, si $\lim\limits_{n\to\infty} s^{(r-2)}_{2,n}$ existe, $\lim\limits_{n\to\infty} s^{(r-1)}_{1,n}$ existera aussi et les deux limites seront les mêmes. En raisonnant de cette manière nous arrivons à la conclusion que

$$\lim_{n\to\infty} s^{(r)}_{0,n} = \lim_{n\to\infty} s^{(r-1)}_{1,n} = \ldots = \lim_{n\to\infty} s^{(1)}_{r-1,n} = \lim_{n\to\infty} s_{r,n}. \tag{4.43}$$

Ainsi la série conjuguée sera sommable (C, r) si

$$(4.44) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\chi_r(t)}{\sin t}\,\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

a une limite lorsque n tend vers l'infini et la somme de la série sera égale à cette limite. Employant maintenant le théorème I, nous savons que si l'intégrale

$$G_{r-1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \chi_{r-1}(t)\,\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt$$

existe, (4.43) aura une limite, pourvu que

$$\int_0^{\delta} \frac{\chi_r(t)}{\sin t}\,\frac{\cos nt}{t}\,dt$$

tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini, où $0<\delta<\pi$, c'est-à-dire, en vertu du lemme 9, si

$$(4.45) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} \frac{\varphi_r(t)}{t}\,\frac{\cos nt}{t}\,dt = 0.$$

ce qui prouve le théorème V.

4. 5. Maintenant, afin de déduire des critères particuliers pour la sommabilité (C, r) de la série conjuguée, il faut trouver des conditions convenables grâce auxquelles (4.44) soit nul. Pour cela, employant le théorème de Riemann-Lebesgue, le théorème de M. Young cité dans le paragraphe **1**.50 au n° (ii) et le théorème II du paragraphe **2**.11, nous obtenons le théorème suivant (68) :

THÉORÈME VI. — *Si l'intégrale*

$$G_{r-1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \chi_{r-1}(t)\,\operatorname{cos\acute{e}c}^2\frac{t}{2}\,dt$$

(68) Pour quelques critères, l'existence de $G_{r-1}(x)$ et de $G_r(x)$ ont la même signification.

existe, la série conjuguée sera sommable (C, r) *et aura pour somme* $G_{r-1}(x)$, *pourvu que*

$$(i) \qquad \int_0^{\delta} \left| \frac{\omega_r(t)}{t^2} \right| dt$$

existe, ou que

$$(ii) \qquad \frac{1}{t} \int_0^{t} \frac{\omega_r(t)}{t}\, dt$$

soit une fonction à variation bornée, ou que

$$(iii) \qquad \int_0^{t} \left| \frac{\omega_{r-1}(t)}{t} \right| dt = O(t) \qquad (r \geq 2).$$

4. 6. A cause de la particulière importance de la sommabilité (C, 1) nous donnons le théorème qui lui correspond avec quelques remarques.

THÉORÈME V A. — *Si l'intégrale*

$$G_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \chi_2(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2}\, dt$$

existe, la série conjuguée sera sommable (C, 1) *et aura pour somme* $G_2(x)$ *pourvu que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{\Psi(t)}{t^2} \cos nt\, dt = 0.$$

où $\Psi(t)$ *est la primitive de* $\psi(t)$.

On peut déduire de ceci, lorsque $G_2(x)$ ou $G_1(x)$ existe, les critères suivants de sommabilité (C, 1) :

a. L'intégrale

$$(4.61) \qquad \int_0^{\delta} \left| \frac{\Psi(t)}{t^2} \right| dt$$

existe.

Exemple : Soit

$$\Psi(t) = \frac{\sin^2 \left\{ n^4 \left(t - \frac{1}{n^2} \right) \pi \right\}}{n^2}$$

pour $\frac{1}{n^2} \leqq t \leqq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}$, alors que pour toute autre valeur de t, on a

$$\Psi(t) = 0.$$

Dans ce cas $\psi(t) = \Psi'(t)$ est intégrable et ainsi

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(u)\,du.$$

De plus

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} \left|\frac{\Psi(t)}{t^2}\right| dt < \frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} \frac{dt}{t^2} < \frac{1}{n^2},$$

de telle sorte que l'intégrale (4.61) existe et que par conséquent la série conjuguée est sommable (C, 1). Mais puisque $\frac{\Psi(t)}{t}$ ne tend pas vers une limite définie lorsque t tend vers zéro, en vertu du lemme 1, l'intégrale

$$\int_0^\delta \frac{\psi(t)}{t}\,dt$$

n'existe pas et, par suite, dans ce cas, l'intégrale

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot\frac{t}{2}\,dt$$

n'existe pas.

b. La fonction

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{dt}{t}\int_0^t \psi(t)\,dt$$

est à variation bornée.

c. On a

$$\int_0^t |\psi(t)|\,dt = O(t).$$

Ceci inclut le criterium (*iii*) de M. Young pour la sommabilité (C, 1) comme il a été indiqué au paragraphe **1**. 50 ([69]).

([69]) Dans le cas (*c*), il y aura aussi sommabilité (C, δ) pour tout δ positif. *Cf.* HARDY et LITTLEWOOD, **23**, 279 (*ii*). *Cf.* aussi SARGENT, **59**.

4. 7. Quand l'intégrale $G_{r+1}(x)$ existe, nous avons montré dans le théorème V qu'une condition suffisante pour la sommabilité (C, r) est que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{\omega_r(t)}{t} \frac{\cos nt}{t} dt = 0.$$

On peut montrer que cette condition est *nécessaire et suffisante* presque partout dans l'intervalle. C'est ainsi que nous tirons de (4.42)

$$\begin{aligned} s'^{(r)}_{0,n} &= 2 s'^{(r)}_{1,n} - s'^{(r-1)}_{1,n} + o(1) \\ &= 2(2 s'^{(r)}_{2,n} - s'^{(r-1)}_{2,n}) - (2 s'^{(r-1)}_{2,n} - s'^{(r-2)}_{2,n}) + o(1) \\ &= 2^2 s'^{(r)}_{2,n} - 2^2 s'^{(r-1)}_{2,n} + s'^{(r-2)}_{2,n} + o(1). \end{aligned}$$

En procédant de cette façon de proche en proche, il vient

$$(4.71) \qquad \begin{aligned} s'^{(r)}_{0,n} = {} & 2^r s'^{(r)}_{r,n} - a_{r-1} s'^{(r-1)}_{r,n} + a_{r-2} s'^{(r-2)}_{r,n} - \ldots \\ & + (-1)^{r-1} a_1 s'^{(1)}_{r,n} - (-1)^{r-1} s_{r,n} + o(1). \end{aligned}$$

où a_{r-1}, a_{r-2}, $\ldots$, a_1 sont des constantes qui sont des puissances de 2. Par suite, si $\lim\limits_{n \to \infty} s'^{(1)}_{r,n}$ existe, la limite de chacun des termes précédant $s'^{(1)}_{r,n}$ dans le membre de droite existera aussi. En conséquence, on peut dire que, en un point où la série conjuguée correspondant à $\frac{\chi_r(t)}{\sin t}$ est sommable $(C, 1)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la série conjuguée soit sommable (C, r) est que la série conjuguée correspondant à $\frac{\chi_r(t)}{\sin t}$ converge en ce point. Considérant donc la condition de sommabilité $(C, 1)$, on peut établir le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Si l'intégrale* $G_{r-1}(x)$ *existe, en un point où*

$$\int_0^t \left| \frac{\omega_r(t)}{t} \right| dt = O(t)$$

ou bien où

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\omega_{r-1}(t)}{t} dt$$

est à variation bornée (c'est-à-dire presque partout), la condition nécessaire et suffisante pour que la série conjuguée soit sommable (C, r) *est que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{\omega_r(t)}{t} \frac{\cos nt}{t} \, dt = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations utilisées.

C. J.	Crelle Journal (Journ. f. die reine u. angewandte Math.).
C. R.	Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
J. L. M. S.	Journal of the London Math. Soc.
M. A.	Mathematische Annalen.
M. Z.	Mathematische Zeitschrift.
P. L. M. S.	Proceedings of the London Math. Soc. (2).

1. G. ALEXITCH, *Sur les séries trigonométriques conjuguées* (*C. R.*, t. 182, 1926, p. 1599-1601).
2. A. S. BESICOVITCH, *Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables* (*Funda. Math.*, t. 4, 1923, p. 172-195).
3. A. S. BESICOVITCH, *On a general metric property of summable functions* (*J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 120-128).
4. T. J. I'A. BROMWICH, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, 2e éd., Macmillan, 1926.
5. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier* (*Rendiconti mat. di Palermo*, t. 31, 1911, p. 296-299).
6. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, t. 2, 2e éd.
7. P. FATOU, *Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables* (*C. R.*, t. 142, 1906, p. 765-767).
8. P. FATOU, *Séries trigonométriques et série de Taylor* (*Acta Math.*, t. 30, 1906, p. 335-400).
9. L. FEJÉR, *Ueber die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe* (*C. J.*, t. 142, 1913, p. 165-188).
10. L. FEJÉR, *Ueber konjugierte trigonometrische Reihen* (*C. J.*, t. 144, 1914, p. 48-56).
11. L. FEJÉR, *Sur une paire de séries de Fourier conjuguées* (*C. R.*, t. 150, 1910, p. 518-520).
12. W. B. FORD, *On the relation between the sum-formulas of Hölder and Cesàro* (*American Journ. of Math.*, t. 32, 1910, p. 315-326).

13. M. E. GRIMSHAW, *Summation of the integral conjugate to the Fourier integral of finite type* (*Proc. Camp. Phil. Soc.*, t. 23, 1927, p. 871-881).

14. H. HAHN, *Die Aequivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte* (*Monatshefte f. Math. u. Physik*, t. 33, 1923, p. 135-143).

15. G. H. HARDY, *On the summability of Fourier series* (*P. L. M. S.*, t. 12, 1913, p. 365-372).

16. G. H. HARDY, *On the integration of Fourier series* (*Messenger of Math.* t. 51, 1922, p. 186-192).

17. G. H. HARDY, *Remarks on three recent notes in the Journal* (*J. L. M. S.*, t. 3, 1928, p. 166-169).

18. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD. *Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series* (*M. Z.*, 19, 1924, p. 67-96).

19. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD. *A convergence criterion for Fourier series* (*Ibid.*, t. 28, 1928, p. 612-634).

20. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *The allied series of a Fourier series* (*P. L. M. S.*, t. 24, 1925, p. 211-246).

21. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Two theorems concerning Fourier series* (*J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 19-25.

22. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *A point in the theory of conjugate functions* (*Ibid.*, t. 4, 1929, p. 242-245).

23. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *On the series conjugate to the Fourier series of a bounded function* (*Ibid.*, t. 6, 1931, p. 278-281).

24. D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Gött. Nach.*, 1904, p. 213-259).

25. D. HILBERT, *Ibid.*, 1905, p. 1-32.

26. D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, 1912.

27. E. W. HOBSON, *The theory of Functions of a Real Variable*, t. 2, 2e éd., Cambridge, 1926.

28. K. KNOPP, *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Convergenzgrenze*, Dissertation, Berlin, 1907.

29. K. KNOPP, *Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herren I. Schur.* (*M. A.*, t. 74, 1913, p. 459-461).

30. A. KOLMOGOROFF, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier* (*Funda Math.*, t. 7, 1925, p. 24-29).

31. H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906.

32. H. LEBESGUE, *Recherches sur la convergence des séries de Fourier* (*M. A.*, t. 61, 1905, p. 251-280).

33. H. LEBESGUE, *Sur les séries trigonométriques* (*Annales Sc. de l'École Normale sup.*, 3e série, t. 20, 1903, p. 453-485).

34. L. LICHTENSTEIN. *Ueber das Poissonsche Integral und die partiellen Ableitungen des logarithmischen Potentials* (*C. J.*, t. 141, 1912, p. 12-42).

35. L. LICHTENSTEIN. *Neuere Entwickelung der Potentialtheorie Konforme Abbildung* (*Encyklop. d. math. Wissensch.*, II C, t. 3, 1909-1921).

36. J. E. LITTLEWOOD, *On a theorem of Kolmogoroff* (*J. L. M. S.*, t. 1, 1926, p. 229-231).

37. F. LUKÀCS, *Ueber die Bestimmung des Sprungs einer Funktion aus ihrer Fourierreihe* (*C. J.*, t. 150, 1920, p. 107-112).

38. N. LUSIN, *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier* (*C. R.*, t. 156, 1913, p. 1655-1658).

39. R. E. A. C. PALEY. *On the Cesàro summability of Fourier series and allied series* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 26, 1930, p. 173-203).

40. O. PERRON, *Einige elementare Funktionen, welche sich in eine trigonometrische, aber nicht Fouriersche Reihe entwickeln lassen* (*M. A.*, t. 87, 1922, p. 84-89).

41. A. PLESSNER, *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen* (*Mitteilungen der Math. Seminars der Univ. Giessen*, t. 10, 1923, p. 1-36).

42. B. N. PRASAD, *Sur la convergence de la série conjuguée d'une série de Fourier* (*C. R.*, t. 193, 1931, p. 1159-1162).

43. B. N. PRASAD, *Sur la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier* (*Ibid.*, p. 1385-1387).

44. B. N. PRASAD, *A theorem for the Cesàro summability of the allied series of a Fourier series* (*J. L. M. S.*, t. 6, 1931, p. 274-278).

45. B. N. PRASAD. *On the summability of the conjugate series of a Fourier series* (*Report of Indian Science Congress*, 1931).

46. B. N. PRASAD, *Non-summability of the conjugate series of a Fourier series* [*Annals of Mathematics* (sera publié sous peu)].

47. G. PRASAD, *On the differentiability of the integral function* (*C. J.*, t. 160, 1929, p. 100-110).

48. A. PRINGSHEIM. *Ueber das Verhalten von Potenzreihe auf dem Konvergenzkreise* (*Münchner Sitzungsberichte*, t. 30, 1900, p. 37-100 et 79-100).

49. J. PRIVALOFF, *Sur les séries trigonométriques conjuguées* (*Recueil Math. Moscou*, t. 31, 1923, p. 224-228).

50. J. PRIVALOFF, *Ueber die Konvergenz der konjugierten trigonometrischen Reihen* (*Ibid.*, t. 32, 1925, p. 357-363).

51. J. PRIVALOFF, *Sur la convergence des séries trigonométriques* (*C. R.*, t. 162, 1916, p. 123-126).

52. J. PRIVALOFF, *Ibid.* (*C. R.*, t. 165, 1917, p. 96-99).

53. J. PRIVALOFF, *Das Cauchysche Integral* (*Sonderabdruck aus den Mitteil. d. Phys. u. Math. Fakultät d. Univ. Saratow*, 1919; en russe).

54. J. PRIVALOFF, *Sur les fonctions conjuguées* (*Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. 44, 1916, p. 100-103).

55. B. RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissentschaftlicher Nachlass*, Leipzig, 1876.

56. M. RIESZ, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques* (*C. R.*, t. 152, 1911, p. 1651-1654).

57. M. RIESZ, *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier* (*Ibid.*, t. 178, 1924, p. 1464-1467).

58. M. RIESZ, *Sur les fonctions conjuguées* (*M. Z.*, t. 27, 1927, p. 218-244).

59. W. L. C. SARGENT, *On Young's criteria of convergence of Fourier series and their conjugates* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 25, 1929, p. 26-30).

60. W. SCHNEE, *Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes* (*M. A.*, t. 67, 1909, p. 110-125).

61. I. SCHUR, *Ueber die Aequivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte* (*M. A.*, t. 74, 1913, p. 447-458).

62. A. TAUBER, *Ueber den Zusammenhang des reellen und imaginären Teils einer Potenzreihe* (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, t. 2, 1891, p. 79-118).

63. J. THOMAE, *Ueber die Differenzierbarkeit eines Integrales nach der oberen Grenze* (*Gött. Nach.*, 1893, p. 696-700).

64. E. C. TITCHMARSH, *Principal value Fourier series* (*P. L. M. S.*, t. 23, 1924 (*Records for March.*)).

65. E. C. TITCHMARSH, *Conjugate trigonometrical integrals* (*Ibid.*, t. 24, 1928, p. 109-130).

66. E. C. TITCHMARSH, *On conjugate functions* (*Ibid.*, t. 29, 1928, p. 49-80).

67. E. C. TITCHMARSH, *Reciprocal formulae involving series and integrals* (*M. Z.*, t. 25, 1926, p. 321-347).

68. E. C. TITCHMARSH, *Additional note on conjugate function* (*J. L. M. S.*, t. 4, 1929, p. 204-206).

69. E. C. TITCHMARSH, *A theorem on conjugate functions* (*Ibid.*, t. 5, 1930, p. 88-91).

70. W. H. YOUNG, *On the convergence of a Fourier series and of its allied series* (*P. L. M. S.*, t. 10, 1912, p. 254-272).

71. W. H. YOUNG, *On the Fourier series of bounded functions* (*Ibid.*, t. 12, 1913, p. 41-70).

72. W. H. YOUNG, *On the mode of oscillation of a Fourier series and of its allied series* (*Ibid.*, p. 433-452).

73. W. H. YOUNG, *On the convergence of the derived series of Fourier series* (*Ibid.*, t. 17, 1918, p. 195-236).

74. W. H. YOUNG, *Sur les séries de Fourier convergentes presque partout* (*C. R.*, t. 155, 1912, p. 1480-1482).

75. W. H. YOUNG. *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe* (*Münchner Sitzungsberichte*, t. 41, 1911, p. 361-371).

76. W. H. YOUNG. *Note on a certain functional reciprocity in the theory of Fourier series* (*Messenger of Math.*, t. 41, 1912, p. 161-166).

77. W. H. YOUNG. *On the formation of usually convergent Fourier series* [*Proc. Roy. Soc.* (A) *London*, t. 88, 1912, p. 178-188].

78. W. H. YOUNG. *On infinite integrals involving a generalization of the sine and cosine functions* (*Quarterly Journal of Math.*, t. 43, 1912, p. 161-177).

79. A. ZYGMUND, *Sur les fonctions conjuguées* (*C. R.*, 187, 1928, p. 1025-1026).

80. A. ZYGMUND. *Sur les fonctions conjuguées* (*Funda. Math.*, t. 13, 1929, p. 284-303).

81. A. ZYGMUND. *On a theorem of Privaloff* (*Studia Mathematica*, t. 3, 1931, p. 239-247).

82. A. ZYGMUND, *Sur la sommation des séries trigonométriques conjuguées aux séries de Fourier* (*Bulletin Acad. Polonaise*. A, 1924, p. 251-258).