JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL MONTEL

Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 415-438.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__415_0>

Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles ;

Par Paul MONTEL.

---

1. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que N fonctions de la variable x soient liées par au moins une relation linéaire à coefficients constants non tous nuls est que le déterminant de Wronski formé avec ces N fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $N-1$ soit identiquement nul. Lorsqu'il n'existe entre les fonctions aucune relation de cette nature, nous dirons que les N fonctions sont *linéairement indépendantes*.

On voit aisément que le déterminant de Wronski joue encore le même rôle pour des fonctions de deux variables x, y vérifiant une même équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. D'une manière précise, la condition pour que N solutions de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta f$$

soient linéairement dépendantes est que le déterminant de Wronski formé avec les dérivées prises par rapport à x soit nul. Le cas habituel où les fonctions ne dépendent que de x correspond à l'hypothèse que les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ sont identiquement nulles.

La remarque précédente conduit à chercher les conditions pour que des fonctions vérifiant une même équation linéaire aux dérivées partielles soient linéairement indépendantes.

On y est amené aussi par une autre voie. Formons le tableau des dérivées partielles de N fonctions de deux variables x, y prises jusqu'à un certain ordre n. Si les fonctions sont linéairement dépendantes, l'ordre de ce tableau est inférieur à N. Réciproquement, comment faut-il choisir n pour que cette dernière condition entraîne la première? La difficulté provient du fait que les fonctions peuvent vérifier une ou plusieurs équations aux dérivées partielles d'ordre égal ou inférieur à n et qu'il importe d'examiner ce cas. On y arrivera plus aisément si les fonctions sont déjà des solutions d'une équation aux dérivées partielles donnée.

Nous étudierons en détail le cas où les fonctions $f(x, y)$ vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Nous verrons que les résultats sont différents suivant que cette équation appartient au type elliptique, ou bien aux types hyperbolique ou parabolique.

Nous appliquerons ces résultats dans l'hypothèse où les fonctions $f(x, y)$ sont harmoniques et en déduirons différentes applications aux systèmes de fonctions harmoniques associées.

Nous indiquerons enfin une extension des résultats précédents aux déterminants doubles de Wronski ainsi qu'aux déterminants de Casorati.

Les principales conclusions de ce travail ont été présentées à l'Académie des Sciences de Paris dans une Note du 29 juin 1931.

2. Nous désignerons dans la suite par la notation

$$\left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right|_n$$

le déterminant de Wronski relatif aux n fonctions

$$f, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1}.$$

L'expression écrite entre deux barres verticales désigne les éléments de la première ligne du déterminant; les lignes de rangs 2, 3, ..., n se déduisent de la première en remplaçant f successivement par $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.

De même, la notation

$$\left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \quad \cdots \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \, \partial y} \right\|_N$$

indique le tableau formé par les dérivées inscrites et relatif aux N fonctions de deux variables

$$f, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{N-1}.$$

Lorsque $N = 2n + 1$, le tableau fournit un déterminant que l'on notera en remplaçant la double barre verticale par une barre unique. Dans tous les cas, les lignes de rang 2, 3, ..., $N - 1$ se déduisent de la première, qui est figurée dans la notation, en remplaçant f successivement par $f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$.

La notation

$$\left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \ldots \quad \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \quad \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-1}\partial y} \quad g \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g}{\partial y_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial^i g}{\partial x_1^i} \quad \frac{\partial^i g}{\partial x_1^{i-1}\partial y_1} \right\|,$$

relative aux $2N$ fonctions

$$\begin{array}{ll} f, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{N-1} & \text{des variables } x, y, \\ g, \quad g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_{N-1} & \text{des variables } x_1, y_1, \end{array}$$

se traduit aisément d'une manière analogue.

Lorsque des fonctions $f, f_1, \ldots, f_{N-1}$ sont liées par la relation

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{N-1} f_{N-1},$$

nous écrirons brièvement

$$f = S\lambda_i f_i;$$

de même les notations

$$S\lambda_i \frac{\partial^{p+q} f_i}{\partial x^p \partial y^q}, \quad S f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$$

s'expliquent d'elles-mêmes.

Enfin nous désignerons par $S_{p,q}$ la différence

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q} - S\lambda_i \frac{\partial^{p+q} f_i}{\partial x^p \partial y^q}.$$

3. Considérons n fonctions de la variable x :

$$f, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1};$$

si elles sont linéairement dépendantes, le déterminant

$$D = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \ldots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right|_n$$

est nul quel que soit x. Réciproquement, si D est nul, et si l'un au moins de ses mineurs ne l'est pas, on a une relation entre les éléments de chaque colonne, que l'on peut toujours écrire, pour la première,

$$f = \mathrm{S}\lambda_i f_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]$$

en modifiant au besoin les indices. Par différentiation, on en déduit les équations en $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$

$$\mathrm{S}\frac{\partial^p f_i}{\partial x^p}\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0 \qquad [p = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)],$$

dont le déterminant est différent de zéro; on en conclut que $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ est nul et que λ_i est une constante. Si tous les mineurs son nuls, on est ramené au cas de $n - 1$ fonctions.

Si maintenant les f désignent des fonctions de deux variables vérifiant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta f,$$

dans laquelle α et β désignent des fonctions de x, y, on voit que les dérivées partielles $\frac{\partial^p f}{\partial y^p}$ s'expriment linéairement en fonction de f et des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^p f}{\partial x^p}$, les coefficients étant des fonctions de x, y. On en déduit que, si le déterminant D est nul, on a non seulement les relations

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p} = \mathrm{S}\lambda_i\frac{\partial^p f_i}{\partial x^p},$$

mais aussi les relations

$$\frac{\partial^p f}{\partial y^p} = \mathrm{S}\lambda_i\frac{\partial^p f_i}{\partial y^p},$$

les λ_i désignant maintenant des fonctions de x, y. On en déduit, comme plus haut, que

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0,$$

ce qui montre que les λ_i sont encore des constantes.

Bien entendu, ce résultat s'étend à des fonctions d'un nombre quelconque de variables satisfaisant à un nombre suffisant d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

4. Supposons maintenant que les fonctions f vérifient une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, du type elliptique. Nous pouvons supposer que, au moyen d'un changement des variables indépendantes, on ait ramené cette équation à la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f,$$

α, β, γ désignant des fonctions de x, y possédant des dérivées partielles de tous les ordres que l'on aura à utiliser.

Cette équation nous permet de calculer toutes les dérivées de f d'un ordre déterminé en fonction linéaire de deux d'entre elles. Écrivons en effet l'équation sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f;$$

on voit, en différentiant par rapport à x, puis par rapport à y, que $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ s'expriment linéairement en fonction de $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, et des dérivées d'ordre moindre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} &= - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= - \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} + \ldots . \end{aligned}$$

De même, en différentiant chacune de ces équations par rapport à x, puis par rapport à y, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2} &= - \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \ldots, \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y^3} &= - \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\, \partial y} + \ldots, \\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= - \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2} + \ldots = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \ldots; \end{aligned}$$

dans ces égalités, on a remplacé par des points les termes contenant des dérivées d'ordre inférieur à quatre. Ainsi, les cinq dérivées d'ordre quatre s'expriment au moyen de $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ et $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$; on peut continuer de la même façon et l'on voit que les $p+1$ dérivées d'ordre p s'expriment au moyen de $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1} \partial y}$.

Nous sommes ainsi conduits à considérer le tableau

$$T = \left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \cdots \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \right\|_N,$$

relatif aux N fonctions

$$f, \quad f_1, \quad \ldots, \quad f_{N-1}.$$

Nous supposerons que $N = 2n+1$ ou $N = 2n$.

Si les fonctions sont linéairement dépendantes, le tableau est d'ordre $N-1$ au plus. Cette condition s'exprime en égalant à zéro le déterminant d'ordre N formé avec le tableau lorsque N est impair; ou bien en égalant à zéro deux déterminants d'ordre N extraits du tableau lorsque N est pair.

Réciproquement, supposons que le tableau soit d'ordre inférieur à N; nous allons montrer, par induction, que les fonctions sont linéairement dépendantes. Pour simplifier les notations, nous prendrons $N = 5$, et supposerons que le déterminant

$$D = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_5$$

est nul, identiquement.

Supposons d'abord que l'un des coefficients A_i ou B_i des éléments des deux dernières colonnes ne soit pas identiquement nul : on peut toujours supposer que l'élément correspondant appartient à la première ligne en changeant au besoin les indices. Nous admettons donc que le coefficient A de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou le coefficient B de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est différent de zéro, par exemple A. Le déterminant étant nul, il existe entre les éléments de chaque colonne une relation linéaire et homogène dont les coefficients, fonctions de x, y, peuvent être ceux de la quatrième colonne, dont le premier A n'est pas nul. On peut donc écrire :

$$f = \mathrm{S}\lambda_i f_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2},$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

la dernière relation résultant de l'équation (1). Par différentiation, on en déduit

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{S} f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, && \mathrm{S} f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \\ &\mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, && \mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \\ &\mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0; && \mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant que la différentielle de D est nulle, nous obtiendrons

$$\left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \right|_5 + \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} \right|_5 = 0$$

et

$$\left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \right|_5 + \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} \right|_5 = 0.$$

En ajoutant aux éléments de la première ligne ceux des lignes suivantes multipliés respectivement par $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4$, on obtiendra les égalités

$$\begin{aligned} &|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{S}_{3,0} \quad 0 \,| + |\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{S}_{2,1} \,| = 0, \\ &|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{S}_{2,1} \quad 0 \,| + |\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{S}_{1,2} \,| = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{AS}_{3,0} + \mathrm{BS}_{2,1} &= 0. \\ \mathrm{AS}_{2,1} + \mathrm{BS}_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en différentiant (1) par rapport à x, remplaçant ensuite f par f_1, f_2, f_3, f_4 et ajoutant membre à membre les égalités après multiplication par $1, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4$, on obtient

$$\mathrm{S}_{1,2} = -\mathrm{S}_{3,0}$$

et les équations précédentes s'écrivent

$$\mathrm{A}S_{1,2} - \mathrm{B}S_{2,1} = 0,$$
$$\mathrm{B}S_{1,2} + \mathrm{A}S_{2,1} = 0.$$

Comme le déterminant de $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$ est $A^2 + B^2$, il est différent de zéro, puisqu'on a supposé $A \neq 0$, donc

$$S_{2,1} = S_{1,2} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = S\lambda_i \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = S\lambda_i \frac{\partial^3 f_i}{\partial x \partial y^2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On en conclut, en dérivant l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = S\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y},$$

que l'on a

$$S \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad S \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0.$$

Ajoutons ces équations aux systèmes (2). Nous voyons que les dérivées $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ vérifient quatre équations linéaires et homogènes dont le déterminant A est différent de zéro; et que les dérivées $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$ vérifient les mêmes équations. Donc

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0$$

et les λ_i sont des constantes. On a donc entre les fonctions la relation

$$f = S\lambda_i f_i.$$

Supposons maintenant que tous les mineurs A_i et B_i relatifs aux deux dernières colonnes soient nuls. Nous sommes ramenés au cas où $N = 4$. Formons le tableau

$$T = \left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|,$$

et supposons d'abord que l'un des déterminants d'ordre 3 formé avec les éléments des trois premières colonnes soit différent de zéro : on peut supposer que c'est le déterminant

$$D' = \left| f_1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_3,$$

formé avec les éléments des trois dernières lignes, en changeant au besoin les indices. Le tableau T est alors d'ordre 3. De l'égalité

$$A_4 = 0,$$

on déduit que f, f_1, f_2, f_3 sont liés par une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de x, y. On peut prendre pour ces coefficients les éléments de la dernière colonne de A_4 dont le premier D′ est différent de zéro. On a donc

$$f = \mathrm{S}\lambda_i f_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2},$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

l'avant-dernière équation résultant de ce que B_4 est nul, et la dernière se déduisant comme précédemment, de l'équation (1). Comme précédemment, on déduit de ces équations, par dérivation,

$$\mathrm{S} f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad \mathrm{S} f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0,$$

$$\mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad \mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0,$$

$$\mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad \mathrm{S} \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Dans chacun de ces systèmes, linéaires et homogènes en $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$, le déterminant des inconnues est $D' \neq 0$. On a donc

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0$$

et, par conséquent,

$$f = \mathrm{S}\lambda_i f_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si maintenant tout déterminant d'ordre 3 tel que D' est nul, nous sommes ramenés au cas de trois fonctions. Le même raisonnement appliqué à une valeur arbitraire de N montre que la démonstration du théorème pour une valeur N impaire ou paire est ramenée à celle du même théorème pour le nombre immédiatement inférieur.

De proche en proche, on voit que le théorème sera établi si on le démontre par $N = 2$. Dans ce cas, le tableau

$$\left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_2$$

doit être d'ordre *un*; on a donc

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}},$$

d'où l'on conclut aussitôt que ces rapports sont égaux à une constante λ_1. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Théorème. — *Soient* N *fonctions, solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique. Formons le tableau* T *des fonctions et des dérivées jusqu'à l'ordre* n, *par rapport à* x *et une fois par rapport à* y, *avec* $2n - 1 < N \leq 2n + 1$. *La condition nécessaire et suffisante pour que ces* N *fonctions soient linéairement dépendantes avec des coefficients constants non tous nuls est que l'ordre du tableau soit inférieur à* N.

Cette proposition peut s'énoncer autrement : considérons par exemple le cas où $N = 5$. La condition $D = 0$ exprime que les fonctions f_i vérifient une équation aux dérivées partielles

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial f}{\partial x} + D\frac{\partial f}{\partial y} + Ef = 0, \tag{3}$$

A, B, C, D, E étant des fonctions de x, y. Nous voyons donc que les équations (1) et (3) ont au plus quatre solutions communes linéairement indépendantes. Le problème de trouver les solutions du système (1) et (3) peut être traité directement, et c'est la solution de ce problème, que M. Goursat a bien voulu me donner, qui m'a conduit au résultat énoncé plus haut.

5. Donnons quelques applications du théorème précédent au cas où les fonctions f_i sont harmoniques.

Si $f(u, v)$ est une fonction harmonique des variables u et v, en remplaçant ces variables par des fonctions harmoniques associées $u(x, y)$ et $v(x, y)$ des variables x et y, on obtient une fonction $F(x, y)$ qui est harmonique en x, y, comme on le vérifie immédiatement par un calcul facile et comme il résulte aussi des propriétés de la représentation conforme. Réciproquement d'ailleurs, si u et v sont des fonctions harmoniques associées en x, y qui rendent harmonique en x, y une fonction $f(u, v)$, cette fonction est harmonique en u, v. On a, en effet, par un calcul immédiat, en posant

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \qquad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad \Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

et

$$\Delta_1(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\Delta F = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Delta_1 u + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Delta_1 v + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\Delta_1(u, v).$$

Or, si u et v sont associées, on a

$$\Delta u = \Delta v = 0, \qquad \Delta_1 u = \Delta_1 v, \qquad \Delta_1(u, v) = 0$$

et, si $\Delta F = 0$, on en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Supposons maintenant que des fonctions indépendantes $u(x, y)$, $v(x, y)$ laissent harmoniques des fonctions $f_i(u, v)$ harmoniques en u et v. Si i est assez grand, pourra-t-on en conclure que u et v sont des fonctions harmoniques associées ?

On peut écrire

$$\frac{\partial f_i}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial f_i}{\partial v}\Delta v+\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2}(\Delta_1 u-\Delta_1 v)+2\frac{\partial^2 f_i}{\partial u\,\partial v}\Delta_1(u,v)=0.$$

Si l'on prend quatre fonctions harmoniques f_1, f_2, f_3, f_4, on obtiendra un système de quatre équations linéaires et homogènes en Δu, Δv, $\Delta_1 u - \Delta_1 v$, $\Delta_1(u, v)$. Si le déterminant des inconnues n'est pas identiquement nul, on en déduira

$$(4)\qquad \Delta u=0,\qquad \Delta v=0,\qquad \Delta_1(u,v)=0,\qquad \Delta_1 u=\Delta_1 v.$$

Les deux premières expriment que u et v sont harmoniques; les deux dernières que u et v ou u et $-v$ sont associées, car, de

$$\Delta_1(u,v)=0,$$

on déduit

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{-\dfrac{\partial v}{\partial x}}=\pm\frac{\sqrt{\Delta_1 u}}{\sqrt{\Delta_1 v}}.$$

Le dernier rapport est égal à 1, d'après la dernière équation (4), et l'on a bien

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(\pm v)}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(\pm v)}{\partial x}.$$

Si le déterminant des inconnues est nul, quels que soient x, y, on voit que le déterminant

$$D=\left|\, f\quad \frac{\partial f}{\partial u}\quad \frac{\partial f}{\partial v}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\right|_5,$$

dans lequel la première ligne est relative à la fonction $f=1$ et les suivantes aux fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, est aussi nul quels que soient u et v. Comme les fonctions f sont harmoniques, on en conclut que ces cinq fonctions sont liées par une relation du premier degré à coefficients constants non tous nuls

$$\lambda+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4=0.$$

Dans le cas contraire, le déterminant ne peut être identiquement nul. On obtient donc la proposition :

Théorème. — *Si deux fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, indépendantes, laissent harmoniques quatre fonctions harmoniques de u, v qui ne sont liées par aucune relation du premier degré à coefficients constants, les fonctions u, v, ou les fonctions u, $-v$, sont harmoniques associées.*

Par exemple, on peut prendre

$$f_1 = uv, \qquad f_2 = u^2 - v^2, \qquad f_3 = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad f_4 = \frac{-v}{u^2 + v^2},$$

ou bien

$$f_i = \log r_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

r_i désignant la distance du point u, v à un point fixe a_i, b_i du plan; les quatre points a_i, b_i étant distincts.

Mais il peut exister des fonctions u, v non associées qui laissent harmoniques trois fonctions harmoniques f_1, f_2, f_3, linéairement indépendantes. Il suffit de prendre $f_1 = u$, $f_2 = v$, $f_3 = uv$ et $u = x$, $v = 2y$.

Si l'on prend $f_3 = u$, $f_4 = v$, cela revient à supposer que les fonctions u et v sont harmoniques. Il suffit alors de prendre pour f_1 et f_2 des fonctions harmoniques ne vérifiant aucune identité de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_3 u + \lambda_4 v + \lambda_5$$

à coefficients constants. Donc :

Théorème. — *Si deux fonctions u et v, harmoniques en x, y, laissent harmoniques deux fonctions harmoniques de u, v dont aucune combinaison linéaire à coefficients constants n'est linéaire en u et v, les deux fonctions u et v ou u et $-v$ sont associées.*

Par exemple, on peut prendre

$$f_1 = uv, \qquad f_2 = u^2 - v^2,$$

ou bien

$$f_1 = \log r_1, \qquad f_2 = \log r_2.$$

M. Cioranesco a récemment établi que si u et v, harmoniques, laissent harmonique la fonction $\log r$, dans laquelle r désigne la distance du point u, v à un point fixe arbitraire du plan, les fonctions u, v ou u, $-v$, sont associées. On voit qu'il suffit de prendre deux points fixes, distincts, du plan.

6. Supposons maintenant que l'équation du second ordre soit du type hyperbolique et ramenée à la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f.$$

Nous considérerons alors le tableau

$$\mathrm{T} = \left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right\|_{\mathrm{N}},$$

dans lequel $\mathrm{N} = 2n + 1$ ou $\mathrm{N} = 2n$, car l'équation (5) permet de calculer toutes les dérivées mêlées d'ordre p en fonction de $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial y^p}$.

Si les N fonctions sont linéairement dépendantes, le tableau T est d'ordre $\mathrm{N} - 1$ au plus. Examinons la réciproque et supposons encore $\mathrm{N} = 5$. Alors, le déterminant

$$\mathrm{D} = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_5$$

est nul. Supposons d'abord qu'il existe un couple A_i, B_i de coefficients des éléments des deux dernières colonnes dont aucun terme ne soit nul : on peut admettre, en modifiant au besoin les indices, que $\mathrm{A} \neq 0$, $\mathrm{B} \neq 0$. Nous ferons ensuite l'hypothèse que tous les A_i et les B_i sont nuls; enfin, il nous restera à étudier le cas où un terme du couple A_i, B est toujours nul.

Dans le premier cas, $\mathrm{AB} \neq 0$, on peut écrire les équations

$$(6) \qquad \begin{gathered} f = \mathrm{S}\lambda_i f_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{S}\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \\ (i = 1, 2, 3, 4). \end{gathered}$$

Toutes ces équations, sauf l'avant-dernière, résultent du fait que D est nul, et l'avant-dernière s'obtient en remplaçant dans l'équation (5), f, successivement par les cinq fonctions considérées et ajoutant les égalités obtenues multipliées respectivement par $1, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4$, en tenant compte des trois premières relations (6). On déduit du système (6)

$$(7)\qquad \begin{gathered} S\, f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad S\, f_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \\ S \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad S \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0, \\ S \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0; \qquad S \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0. \end{gathered}$$

Maintenant, on déduit de (5), en dérivant,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \ldots,$$

en remplaçant par des points les termes contenant des dérivées d'ordre inférieur à deux. On a donc ainsi

$$S_{2,1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - S \lambda_i \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

et, de même

$$S_{1,2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - S \lambda_i \frac{\partial^3 f_i}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

On en tire

$$S \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \qquad S \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0.$$

Ajoutons ces dernières équations au système (7); on voit que les $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ vérifient un système de quatre équations linéaires dont le déterminant A n'est pas nul; donc $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0$. De même, les $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$ vérifient un système dont le déterminant B n'est pas nul; donc $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0$. Les λ_i sont des constantes.

Passons au second cas : puisque A_4 et B_4 sont nuls, formons le tableau

$$T = \left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_4.$$

Il suffit alors de raisonner exactement comme au paragraphe 5, dans l'hypothèse analogue, pour constater que l'on est ramené au cas où $N = 4$ et que quatre des cinq fonctions considérées sont linéairement dépendantes; ou bien que l'on est ramené au cas où $N = 3$.

Supposons enfin que l'on ait $A_4 \neq 0$, $B_4 = 0$, le tableau précédent est d'ordre 4 puisque A_4 n'est pas nul et le déterminant

$$B_4 = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_4$$

est nul; dérivons par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial B_4}{\partial y} = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_4 = 0;$$

en effet, les autres déterminants introduits par la dérivation sont nuls comme ayant deux colonnes identiques ou comme ayant une colonne dont les éléments sont des combinaisons linéaires des éléments correspondants des autres colonnes. Par conséquent, si le tableau

$$\left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_4$$

est d'ordre 3, le tableau T l'est aussi et A_4 serait nul. Donc le tableau précédent est d'ordre 2, et l'on a, par exemple,

$$\Delta = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_3 = 0;$$

Δ est le déterminant de Wronski des fonctions f, f_1, f_2 pour la variable x. Si tous les mineurs de la troisième colonne sont nuls, il en est de même de

$$D' = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right|_3$$

et nous sommes ramenés au cas de $N = 3$. Sinon, on peut écrire, si

$$\left| f_1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_2 \neq 0,$$

$$f = S\lambda_i f_i \qquad (i = 1, 2),$$

les λ_i désignant des fonctions de y. Calculons alors $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$ en tenant compte de l'équation (5), qui donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta^2 \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; on en déduit

$$S_{1,1} = \beta S_{0,1}, \qquad S_{2,1} = \left(\beta^2 + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) S_{0,1},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_3 + \left| f \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_3 + \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} \right|_3 = 0,$$

ou

$$\left| S_{0,1} \quad 0 \quad 0 \right|_3 + \left| 0 \quad \beta S_{0,1} \quad 0 \right|_3 + \left| 0 \quad 0 \quad \left(\beta^2 + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) S_{0,1} \right|_3 = 0,$$

c'est-à-dire, en mettant $S_{0,1}$ en facteur, et en introduisant la fonction $f_0 = e^{\int \beta\,dx}$,

$$S_{0,1} \cdot \left| f_0 \quad \frac{\partial f_0}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \right|_3 = 0.$$

Si $S_{0,1} = 0$, on a les équations

$$S f_i \frac{\partial\lambda_i}{\partial y} = 0,$$

$$S \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial\lambda_i}{\partial y} = 0,$$

d'où, puisque le déterminant des $\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}$ est différent de zéro, $\frac{\partial\lambda_i}{\partial y} = 0$; les λ_i sont des constantes. Sinon, l'égalité

$$\left| f_0 \quad \frac{\partial f_0}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \right|_3 = 0$$

entraîne que f_1 et f_2 sont liés par la relation

$$\mu_1(y) f_1 + \mu_2(y) f_2 = e^{\int \beta\,dx},$$

d'où

$$\mu_1(y) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu_2(y) \frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta e^{\int \beta\,dx}$$

et

$$\mu_1(y)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \beta f_1\right) + \mu_2(y)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \beta f_2\right) = 0 \quad (^1).$$

---

(1) On peut aussi obtenir directement cette équation en écrivant que f est solution de l'équation du type hyperbolique. On retrouve ainsi un théorème de

Or, si à partir de l'équation (5), on forme la suite de Laplace, la première équation obtenue est relative à la fonction

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} - \beta f$$

et elle est de la forme

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x\, \partial y} = \alpha' \frac{\partial f'}{\partial x} - \beta' \frac{\partial f'}{\partial y} + \gamma' f'.$$

Elle admet deux solutions f'_1 et f'_2, liées par la relation

$$f'_2 = \lambda'_1(y) f'_1\,;$$

on en déduirait comme précédemment que l'on a

$$\mu'_1(y) f'_1 = e^{\int \beta' dx}$$

et, par suite, que

$$f_1^2 = \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \beta' f_1 = 0.$$

La troisième équation de la suite de Laplace admet donc la solution zéro, donc l'invariant k' de la seconde est nul, car on a

$$\frac{\partial f_1^2}{\partial y} = \alpha' f_1^2 + k' f'_1.$$

Ainsi, la suite de Laplace se termine à la première opération. Réciproquement, s'il en est ainsi, on peut prendre pour f_i les valeurs

$$f_i = F_i(y) f + G_i(y) g,$$

f et g étant deux solutions de l'équation (5) et F_i, G_i, des fonctions arbitraires de la variable y. Dans ce cas, les fonctions f_i peuvent être linéairement indépendantes.

En résumé, ou bien on est ramené à étudier le cas où N est remplacé par N — 1, ou bien la suite de Laplace se termine au bout de n opérations au plus. Dans la première hypothèse, on est ramené au cas où $N = 2$ que l'on traite comme au paragraphe précédent; dans le

---

M. Goursat sur les systèmes de solutions de cette équation liées par une relation linéaire dont les coefficients ne dépendent que d'une variable.

second, il peut y avoir des fonctions linéairement indépendantes. D'où la proposition :

THÉORÈME. — *Soient* N *fonctions, solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique. Formons le tableau* T *des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre* n, *par rapport à* x *et par rapport à* y, *avec* $2n-1 < N \leqq 2n+1$. *La condition nécessaire et suffisante pour que ces* N *fonctions soient linéairement dépendantes avec des coefficients constants non tous nuls est que l'ordre du tableau* T *soit inférieur à* N, *sauf dans le cas où la suite de Laplace de l'équation se termine au bout de* n *opérations au plus.*

7. Considérons maintenant le cas d'une équation du type parabolique supposée ramenée à la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f. \tag{8}$$

Nous sommes conduits à introduire le même tableau T qu'au paragraphe **4**. Supposons encore $N = 5$ et conservons les mêmes notations. Les équations (2) subsistent, ainsi que les relations

$$AS_{3,0} + BS_{2,1} = 0,$$
$$AS_{2,1} + BS_{1,2} = 0.$$

Mais l'équation (1), différentiée par rapport à x, donne

$$S_{1,2} = 0,$$

on a donc, si $A \neq 0$,

$$S_{2,1} = 0$$

et l'on en déduit, comme au paragraphe **4**, que les fonctions sont linéairement dépendantes.

Supposons maintenant que les A_i soient nuls ; si l'un des B est nul, on peut supposer que $A_4 = B_4 = 0$, et l'on est ramené au cas de $N = 4$. En raisonnant comme au paragraphe **4**, on conclut que les fonctions sont linéairement dépendantes, si D' n'est pas nul. Si D' est nul, on est ramené au cas de $N = 3$. Et, en continuant ainsi, ou l'on arrive à $N = 2$, cas où la démonstration est immédiate, ou l'on arrive à une valeur de N pour laquelle les A sont nuls et les B différents de zéro.

Plaçons-nous donc dans l'hypothèse où $A_4 = 0$, $B_4 \neq 0$. L'égalité

$$A_4 = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \right|_4 = 0$$

entraîne, en tenant compte de l'équation (8),

$$f = S\lambda_i f_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = S\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = S\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = S\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = S\lambda_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}.$$

On en déduit, en égalant $\frac{\partial A_4}{\partial y}$ à zéro,

$$D'S_{1,2} = 0,$$

en désignant par D' le mineur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ dans A_4. Si $D' = 0$, nous sommes ramenés au cas de $N = 3$. Sinon, $S_{1,2} = 0$. Mais, de l'équation (8), on tire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y^2} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \ldots,$$

d'où

$$S_{1,2} = \alpha S_{2,0} = 0$$

et, comme $S_{2,0}$ n'est pas nul, sinon B_4 serait nul, on a nécessairement $\alpha = 0$. Les valeurs de f sont alors de la forme

$$f_i = \lambda_i(x)\,g(x,y) + \mu_i(x)\,h(x,y),$$

$\lambda_i(x)$ et $\mu_i(x)$ étant des fonctions arbitraires de x, g et h, deux solutions distinctes de l'équation (8), c'est-à-dire telles que leur rapport ne soit pas une fonction de x. En écrivant que A_4 est nul, on obtient la condition que le déterminant

$$\left| \lambda g + \mu h \quad \lambda g'_x + \mu h'_x + \lambda' g + \mu' h \quad \lambda g'_y + \mu h'_y \quad \lambda g''_{xy} + \mu h''_{xy} + \lambda' g'_y + \mu' h'_y \right|_4$$

est nul, ce qui s'écrit aisément

$$\left| \lambda \quad \mu \quad \lambda' \quad \mu' \right|_4 \times (g h'_y - h g'_y)^2 = 0.$$

Le second facteur n'étant pas nul puisque g et h sont des solutions indépendantes, on voit que les huit fonctions de x : λ_i et μ_i sont assujetties à la seule relation

$$|\lambda \quad \mu \quad \lambda' \quad \mu'|_4 = 0.$$

En résumé, nous obtenons la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient N fonctions solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique. Formons le tableau T des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, par rapport à x, et une fois par rapport à y, avec $2n - 1 < N \leqq 2n + 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que ces N fonctions soient linéairement dépendantes avec des coefficients constants non tous nuls est que l'ordre du tableau T soit inférieur à N, sauf dans le cas où l'équation du second ordre ne contient que des dérivées relatives à une même variable.*

8. On pourrait étendre les résultats des paragraphes précédents au cas où les fonctions f sont solutions d'une équation aux dérivées partielles d'ordre h supérieur au second ; on introduirait des tableaux T contenant, pour chaque ordre supérieur ou égal à h, h dérivées seulement.

Voici maintenant une généralisation d'un autre ordre. Darboux a introduit des déterminants doubles de Wronski, de la forme

$$D = \left| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \quad \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_1^j} \right|_N,$$

avec $i + j = N - 2$. Lorsque D est nul, quelles que soient les valeurs des variables x dont dépendent les N fonctions f et des variables x_1 dont dépendent les N fonctions φ, les fonctions f et les fonctions φ sont liées par une même relation linéaire à coefficients constants non tous nuls

$$\lambda f + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_N f_N = 0,$$
$$\lambda \varphi + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_N \varphi_N = 0,$$

et réciproquement.

Ce résultat demeure exact si les fonctions f vérifient une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et les fonctions φ vérifient une équation de même espèce, distincte ou non de la première.

Considérons alors le tableau T formé avec N fonctions f des variables x, y et N fonctions φ des variables x_1, y_1 :

$$T = \left\| f \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots \quad \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \quad \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-1} \partial y} \quad \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_1{}^j} \quad \frac{\partial^j \varphi}{\partial x_1{}^{j-1} \partial y_1} \right\|_N$$

avec $i+j=n-1$ si $N=2n$ ou $N=2n-1$.

Le théorème du paragraphe 4 est encore applicable. On supposera ici que les fonctions f sont solutions d'une même équation du second ordre du type elliptique, que les fonctions φ sont solutions d'une même équation du type elliptique, distincte ou non de la première. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux groupes de N fonctions soient linéairement dépendants avec les mêmes coefficients constants non tous nuls est que l'ordre du tableau soit inférieur à N. Le raisonnement est semblable à celui du paragraphe 4 en tenant compte du fait que les relations (2) peuvent être différentiées par rapport à chacune des quatre variables x, y, x_1, y_1.

9. Si l'on suppose que les f et les φ sont des fonctions harmoniques, on en déduit des conséquences du type suivant :

Soient $H_i(u, v)$ *et* $K_i(w, s)$, $(i=1, 2, \ldots, 8)$ *des fonctions harmoniques de leurs arguments qui ne vérifient pas respectivement des relations du premier degré à coefficients constants non tous nuls dont les coefficients des fonctions de même rang sont égaux :*

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_8 H_8 + \lambda = 0,$$
$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots + \lambda_8 K_8 + \lambda' = 0.$$

Remplaçons u, v, w, s *par des fonctions indépendantes des variables* x, y, z, t *dans les combinaisons* $H_i + K_i$: *si les fonctions obtenues sont harmoniques en* x, y *et en* z, t, *les fonctions* u, v *ou* u, $-v$ *d'une part, les fonctions* w, s ou w, $-s$, *de l'autre, sont des fonctions harmoniques associées.*

Le calcul peut être fait de la même manière qu'au paragraphe 5. Le déterminant

$$\left| f \quad \frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial s} \right|_{10},$$

dans lequel

$$f = 1, \quad f_i = \mathrm{H}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 8), \quad f_9 = 0,$$
$$\varphi = 0, \quad \varphi_i = \mathrm{K}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 8), \quad \varphi_9 = 1,$$

n'est pas identiquement nul. On en déduit que u et $\pm v$ d'une part, w et $\pm s$ de l'autre, vérifient des identités entraînant que ces fonctions sont harmoniques associées en x, y et en z, t.

Si l'on prend $\mathrm{H}_7 = u$, $\mathrm{H}_8 = v$; $\mathrm{K}_7 = w$, $\mathrm{K}_8 = s$, on voit que, lorsque six fonctions H_i et K_i ne vérifient pas simultanément des relations de la forme

$$\lambda_1 \mathrm{H}_1 + \lambda_2 \mathrm{H}_2 + \ldots + \lambda_6 \mathrm{H}_6 = au + bv + c,$$
$$\lambda_1 \mathrm{K}_1 + \lambda_2 \mathrm{K}_2 + \ldots + \lambda_6 \mathrm{K}_6 = au + bv + c'.$$

les λ_i, a, b, c, c' désignant des constantes, si les fonctions u, v, w, s, harmoniques en x, y et en z, t, laissent harmoniques les sommes $\mathrm{H}_i + \mathrm{K}_i$, u et $\pm v$ d'une part, w et $\pm s$ de l'autre, sont des fonctions associées.

On peut prendre par exemple $\mathrm{H}_i + \mathrm{K}_i = \log r_i r'_i$; r_i et r'_i désignant les distances des points u, v et w, s à un même point fixe a_i, b_i ou à deux points fixes a_i, b_i; $a'_i\, b'_i$.

10. Les extensions que nous avons faites des déterminants de Wronski conduisent aussi à des extensions correspondantes pour les déterminants de Casorati. Un tel déterminant est de la forme

$$\mathrm{D} = | f \quad \Delta f \quad \Delta^2 f \quad \ldots \quad \Delta^{n-1} f |_n$$

dans laquelle $\Delta^i f$ désigne la différence d'ordre i pour des accroissements égaux donnés à la variable x : on peut supposer que ces accroissements sont égaux à l'unité. L'équation $\mathrm{D} = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les f soient liés par une relation linéaire à coefficients périodiques, de période égale à l'unité, non tous nuls.

Ce résultat s'étend à des fonctions de deux variables qui vérifient une même équation linéaire aux différences partielles de la forme

$$\Delta_y f = \alpha \Delta_x f + \beta,$$

les accroissements pour x et pour y étant égaux à l'unité : les coefficients sont alors doublement périodiques.

On est ainsi conduit à considérer les fonctions de deux variables qui vérifient une équation aux différences partielles linéaire et du second ordre, et à introduire des tableaux de la forme

$$T = \| f \quad \Delta_x f \quad \Delta_y f \quad \Delta^2_{x^2} f \quad \Delta^2_{xy} f \quad \dots \quad \Delta^n_{x^n} f \quad \Delta^n_{x^{n-1}y} f \|,$$

pour caractériser les fonctions linéairement dépendantes avec des coefficients doublement périodiques.

On peut étudier aussi des déterminants de Casorati doubles et des tableaux correspondants.