

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROY

Sur les équations générales de surfaces élastiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 8 (1929), p. 93-114.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8_93_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les équations générales des surfaces élastiques ;*PAR LOUIS ROY.

Introduction.

Dans un travail récent ⁽¹⁾, nous avons montré avec quelle sûreté les méthodes analytiques régulières de la Thermodynamique générale, appliquées autrefois avec tant de succès par Duhem, et l'emploi du trièdre mobile, tel que l'ont considéré MM. Cosserat ⁽²⁾ en se plaçant à un point de vue différent, permettent d'établir les équations les plus générales du mouvement des lignes élastiques. Nous nous proposons maintenant de reprendre par les mêmes méthodes la théorie des surfaces élastiques. Ainsi que l'ont fait observer MM. Cosserat, ce qui montre bien la fécondité de la méthode du trièdre mobile, c'est que la théorie de la surface élastique résulte immédiatement de celle de la ligne élastique par la simple adjonction d'une nouvelle variable géométrique.

Nous ne traiterons ici que de la *surface à six paramètres*, c'est-à-dire de la surface en chaque point de laquelle l'orientation du trièdre mobile est laissée arbitraire. Cette surface a l'avantage de conduire à des formules entièrement symétriques, qui rendent très simple la théorie, que nous développerons ultérieurement, de la *surface à trois paramètres*,

⁽¹⁾ L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3^e série, t. XVIII, 1926, p. 117 à 195).

⁽²⁾ E. et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Hermann éditeur Paris, 1909.

où l'un des axes du trièdre mobile est normal à la surface moyenne et à laquelle on se limite habituellement dans la théorie de l'Élasticité. Comme les équations du mouvement résulteront de l'application de la méthode des travaux virtuels à l'équation fondamentale de l'Énergétique, qui généralise en quelque sorte le théorème de d'Alembert, il nous a semblé que notre étude ne serait pas déplacée dans un volume publié en l'honneur du cinquantenaire scientifique de M. Appell (1).

1. Préliminaires. — En un point M d'une surface S , élevons deux demi-normales égales et opposées MN_1 et MN_2 , dont la longueur totale $e = N_1N_2$ soit très petite par rapport à ses dimensions transversales et à ses rayons de courbure principaux en chacun de ses points. Lorsque M décrit S , la longueur e restant constante ou variant avec continuité, le segment N_1N_2 décrit un certain volume. On appelle *surface élastique* le corps élastique occupant, dans son état primitif, le volume ainsi défini. La surface élastique est donc limitée par ses deux faces S_1, S_2 , lieux des points N_1, N_2 et par un *bord* engendré par le segment N_1N_2 , quand le point M décrit le contour de la *surface moyenne* S . La longueur e est l'*épaisseur* de la surface élastique au point M ; lorsque cette épaisseur est constante, les deux faces S_1, S_2 sont parallèles à la surface moyenne.

La configuration géométrique de la surface élastique, à l'instant t , est regardée comme suffisamment déterminée par la connaissance d'une suite continue de trièdres trirectangles $Muvw$, dont le lieu des sommets à l'instant considéré est la surface S et dont les axes sont définis de la manière suivante : l'un des plans de coordonnées, uMv par exemple, est tangent en M à un feuillet matériel arbitrairement choisi passant par ce point et l'un des deux axes, Mu par exemple, est tangent en M à l'une des fibres de ce feuillet. L'orientation par rapport à S de chaque trièdre $Muvw$ ou, pour abrégé, de chaque trièdre (M) étant arbitraire, la configuration géométrique de la surface élastique, à l'instant t , se trouve complètement définie analytiquement par les

(1) Le présent travail a été résumé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* : « *Sur les équations générales des surfaces élastiques* », t. 186, 1928, p. 480.

coordonnées x, y, z de M relatives à un trièdre fixe trirectangle $Oxyz$ et trois autres paramètres θ, φ, ψ , au moyen desquels s'expriment les cosinus directeurs des axes Mu, Mv, Mw par rapport aux axes fixes. Ces six paramètres $x, y, z; \theta, \varphi, \psi$ doivent être regardés comme des fonctions continues du temps t et de deux variables géométriques. On

peut prendre pour celles-ci les arcs $\widehat{PM} = s, \widehat{P_1M} = s_1$, de coordonnées curvilignes tracés sur S dans son état actuel; mais, pour les mêmes raisons que pour la ligne élastique ⁽¹⁾, il est plus avantageux de prendre les arcs $\widehat{pm} = \omega, \widehat{p_1m} = \omega_1$, auxquels se réduisent les précédents, considérés comme des fibres matérielles, dans l'état primitif de S . Chaque point matériel $M(x, y, z)$ de S est ainsi caractérisé, à tout instant, par un même système de valeurs de ω, ω_1 . Comme état primitif, nous conviendrons de prendre l'état naturel, c'est-à-dire l'état d'équilibre que prend la surface élastique, quand elle n'est soumise à aucune force extérieure et quand tous ses points sont portés à une même température absolue T_0 . Enfin, nous supposons, pour simplifier, que le réseau (ω, ω_1) choisi sur l'état primitif est orthogonal.

Cela posé, aux éléments linéaires $\overline{MM'} = ds, \overline{MM'_1} = ds_1$, tracés sur l'état actuel, correspondent sur l'état primitif les éléments $\overline{mm'} = d\omega, \overline{mm'_1} = d\omega_1$, et l'on a

$$(1) \quad ds = \sqrt{E} d\omega, \quad ds_1 = \sqrt{E_1} d\omega_1,$$

en posant

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2\right|, \quad E_1 = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega_1}\right)^2\right|,$$

conformément à la notation abrégée dont nous avons fait un constant usage dans notre étude de la ligne élastique. Soient d'autre part

$$F = \left|\frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial x}{\partial \omega_1}\right|, \quad H = \sqrt{EE_1 - F^2}$$

les deux autres fonctions bien connues. Les déformations élastiques au sein de chaque tronçon étant toujours très petites, les fonctions $E, E_1,$

⁽¹⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 122.

égales à l'unité dans l'état primitif, en diffèrent très peu dans l'état actuel; de même, la fonction F , nulle dans l'état primitif, est très petite dans l'état déformé. Il en résulte que la fonction H se réduit à $\sqrt{EE_1}$, aux termes du second ordre près.

Traçons dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires $O\omega$, $O\omega_1$. A chaque point matériel M de S correspond, dans ce plan, un point fixe de coordonnées ω , ω_1 . Donc, à la surface moyenne S de contour C , correspond, dans le plan $\omega O\omega_1$, une aire fixe \mathcal{A} de contour c et l'on trouve pour les cosinus directeurs a , b , c de la demi-normale extérieure Mn à la courbe C , menée en un point M de cette courbe dans le plan tangent en M à S (1),

$$(2) \quad H(a, b, c) \frac{dL}{dl} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega} (E_1 a - F b) + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega_1} (-F a + E b),$$

a , b désignant les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure au contour c menée dans le plan $\omega O\omega_1$ au point (ω, ω_1) homologue de M et dL , dl deux éléments linéaires homologues de C et de c aux mêmes points, soit

$$dL = \sqrt{E_1 a^2 - 2F a b + E b^2} dl.$$

Soient encore

$$(3) \quad (\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}, \quad (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega_1}$$

les cosinus directeurs des tangentes $M\tau$, $M\tau_1$, menées en M aux lignes s , s_1 du réseau dans le sens des arcs croissants; en multipliant (2) par $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}$ et ajoutant membre à membre, il vient la première des formules

$$(4) \quad H a = \frac{dL}{dl} \sqrt{E} \cos V, \quad H b = \frac{dL}{dl} \sqrt{E_1} \cos V_1,$$

V , V_1 étant les angles de $M\tau$, $M\tau_1$ avec la demi-normale Mn au contour C . Comme E , E_1 , H sont très voisins de 1 et F très petit, on voit que dL diffère très peu de dl , a de $\cos V$ et b de $\cos V_1$.

(1) L. Roy, *Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles* (*Journ. de Math. pures et appliquées* 6^e série, t. VIII, 1912, p. 236).

Enfin, à l'élément superficiel $d\omega d\omega$, de la surface moyenne primitive correspond l'élément $H d\omega d\omega$, de la surface moyenne actuelle. Ces deux éléments étant constitués par les mêmes points matériels, les tronçons qui leur correspondent ont la même masse. De là, l'équation de continuité

$$(4) \quad \rho H = \rho_0,$$

ρ et ρ_0 désignant les densités superficielles de la surface élastique aux points homologues M et m . Elle détermine ρ à chaque instant, puis que ρ_0 est une fonction donnée de ω, ω_1 .

2. *Les douze fonctions caractéristiques de la déformation.* — Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs des axes Mu, Mv, Mw du trièdre (M) au point $M(x, y, z)$ et à l'instant t ; les cosinus directeurs des axes du trièdre (M') au point infiniment voisin $M'(x + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega, y + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega, z + \frac{\partial z}{\partial \omega} d\omega)$ et au même instant t sont $\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} d\omega, \beta + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} d\omega, \dots, \gamma_2 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega} d\omega$. On sait qu'on passe de (M) à (M') par une translation et une rotation infiniment petites, dont nous désignerons par $(\xi, \eta, \zeta) d\omega$ et $(p, q, r) d\omega$ les composantes suivant les axes mobiles $Muvw$, soit

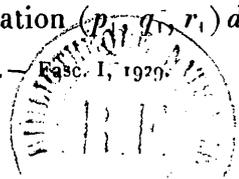
$$(6) \quad \xi = \left| \alpha \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|, \quad \eta = \left| \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|, \quad \zeta = \left| \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \omega} \right|;$$

$$(7) \quad \begin{cases} p = \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} \right|, \\ q = \left| \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right|, \\ r = \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right| = - \left| \alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} \right|. \end{cases}$$

Soit de même (M_1) le trièdre mobile au point

$$M_1 \left(x + \frac{\partial x}{\partial \omega_1} d\omega_1, y + \frac{\partial y}{\partial \omega_1} d\omega_1, z + \frac{\partial z}{\partial \omega_1} d\omega_1 \right)$$

et au même instant t ; on passe de (M) à (M_1) par la translation $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) d\omega_1$ et par la rotation $(p_1, q_1, r_1) d\omega_1$ définies par les for-



mules analogues à (6) et (7)

$$(8) \quad \xi_1 = \left| \alpha \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|, \quad \eta_1 = \left| \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|, \quad \zeta_1 = \left| \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial \omega_1} \right|;$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_1} \right|, \\ q_1 = \left| \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} \right|, \\ r_1 = \left| \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} \right| = - \left| \alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} \right|. \end{array} \right.$$

Comme pour la ligne élastique (1), on reconnaît que la déformation de la surface élastique dans son état actuel par rapport à son état primitif est caractérisée par les douze fonctions

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi - \xi_0, \quad \eta - \eta_0, \quad \zeta - \zeta_0; \quad p - p_0, \quad q - q_0, \quad r - r_0; \\ \xi_1 - \xi_{10}, \quad \eta_1 - \eta_{10}, \quad \zeta_1 - \zeta_{10}; \quad p_1 - p_{10}, \quad q_1 - q_{10}, \quad r_1 - r_{10} \end{array} \right.$$

de ω , ω_1 , t , l'indice zéro se rapportant à l'état primitif.

Cela posé, imprimons à la surface élastique un déplacement virtuel et soient δu , δv , δw les composantes suivant $Muvw$ du déplacement virtuel de M , $\delta \omega_u$, $\delta \omega_v$, $\delta \omega_w$ les composantes suivant les mêmes axes de la rotation virtuelle de (M) . Il en résulte pour ξ , η , ζ ; p , q , r ; ξ_1 , η_1 , \dots , r_1 des variations virtuelles $\delta \xi$, $\delta \eta$, \dots , δr_1 qui se calculent comme pour la ligne élastique (2), soit

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \xi = \frac{\partial \delta u}{\partial \omega} + q \delta w - r \delta v + \eta \delta \omega_w - \zeta \delta \omega_v, \\ \delta \eta = \frac{\partial \delta v}{\partial \omega} + r \delta u - p \delta w + \zeta \delta \omega_u - \xi \delta \omega_w, \\ \delta \zeta = \frac{\partial \delta w}{\partial \omega} + p \delta v - q \delta u + \xi \delta \omega_v - \eta \delta \omega_u; \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p = \frac{\partial \delta \omega_u}{\partial \omega} + q \delta \omega_v - r \delta \omega_w, \\ \delta q = \frac{\partial \delta \omega_v}{\partial \omega} + r \delta \omega_u - p \delta \omega_w, \\ \delta r = \frac{\partial \delta \omega_w}{\partial \omega} + p \delta \omega_v - q \delta \omega_u; \end{array} \right.$$

(1) L. Roy, *Sur les équations générales des lignes élastiques...*, p. 126.

(2) L. Roy, *loc. cit.*, p. 125.

mètres dont dépend déjà la fonction f et des douze dérivées

$$(18) \quad \dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \dots, \quad \dot{r}_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t} \quad (1).$$

Comme les actions de viscosité doivent s'annuler en même temps que ces dérivées, l'hypothèse la plus simple est de les considérer comme des fonctions linéaires et homogènes de ces dérivées, dont les coefficients sont seulement fonctions des quinze paramètres dont dépend la fonction f . D'après l'hypothèse de Lord Rayleigh, on peut admettre l'existence d'une *fonction dissipative* \mathcal{O} , c'est-à-dire d'une forme quadratique des dérivées (18), telle qu'on ait

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{R}_1) = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dots, \dot{r}_1)},$$

de sorte que le travail élémentaire de viscosité dans une modification réelle où l'on a $\delta \xi = \dot{\xi} dt$, a pour expression

$$(19) \quad d\mathcal{G}_v = - dt \int \int \mathcal{O} d\omega d\omega_1.$$

Ce dernier travail devant être essentiellement négatif, la fonction dissipative \mathcal{O} doit être une forme quadratique définie positive (2).

Si maintenant nous posons

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{R}_u = -(f'_\xi + \mathcal{F}), & \mathcal{R}_v = -(f'_\eta + \mathcal{G}), & \mathcal{R}_w = -(f'_\zeta + \mathcal{H}), \\ \mathcal{C}_u = -(f'_p + \mathcal{P}), & \mathcal{C}_v = -(f'_q + \mathcal{Q}), & \mathcal{C}_w = -(f'_r + \mathcal{R}), \\ \mathcal{R}_{1u} = -(f'_{\dot{\xi}_1} + \mathcal{F}_1), & \dots\dots\dots, & \mathcal{C}_{1w} = -(f'_{\dot{r}_1} + \mathcal{R}_1), \end{array} \right.$$

il vient, d'après (16) et (17),

$$\delta \mathcal{G}_v - \delta \Gamma \Phi = \int \int (\mathcal{R}_u \delta \xi + \mathcal{R}_v \delta \eta + \dots + \mathcal{C}_w \delta r \\ + \mathcal{R}_{1u} \delta \dot{\xi}_1 + \mathcal{R}_{1v} \delta \dot{\eta}_1 + \dots + \mathcal{C}_{1w} \delta \dot{r}_1) d\omega d\omega_1,$$

(1) Pour abrégier, nous représenterons très souvent de cette façon les dérivées par rapport au temps, soit $\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\ddot{\xi} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$,

(2) Sur l'origine des propositions précédentes, voir P. DUNEM, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 5^e série, t. II, 1896).

ce que nous écrirons pour abrégé :

$$(21) \quad \delta \mathfrak{E}_v - \delta_T \Phi = \iint \Sigma | \mathcal{R}_u \delta \xi + \mathcal{C}_u \delta \rho | d\omega \delta \omega_1,$$

le signe Σ indiquant une somme de deux groupes de termes, le second se déduisant du premier qui est écrit par l'adjonction de l'indice 1. Cette égalité nous montre que les expressions (20) représentent les composantes suivant les axes mobiles $Muvw$ de deux forces \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_1 et de deux couples \mathfrak{C} , \mathfrak{C}_1 par unité de longueur.

4. *Transformation de l'expression précédente.* — L'expression (21) se transforme par intégrations par parties comme nous l'avons fait pour la ligne élastique, en substituant aux douze variations $\delta \xi$, $\delta \eta$, ..., δr , leurs expressions soit en fonction des composantes δu , δv , ..., $\delta \omega_w$ du déplacement virtuel de (M) suivant les axes mobiles $Muvw$, soit en fonction des composantes δx , δy , δz ; $\delta \omega_x$, $\delta \omega_y$, $\delta \omega_z$ de ce même déplacement suivant les axes fixes $Oxyz$. Les deux expressions ainsi obtenues permettent d'écrire ensuite presque immédiatement les équations du mouvement de la surface élastique dans chacun des deux systèmes d'axes.

Nous avons tout d'abord, d'après (11), (12), (13), (14),

$$\delta \mathfrak{E}_v - \delta_T \Phi = \iint \Sigma \left| \mathcal{R}_u \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \omega} + q \delta v - r \delta v + \eta \delta \omega_w - \zeta \delta \omega_v \right) + \mathcal{C}_u \left(\frac{\partial \delta \omega_u}{\partial \omega} + q \delta \omega_w - r \delta \omega_v \right) \right| d\omega d\omega_1,$$

ce qui donne, par application de la formule de Green à l'image \mathcal{A} de S dans le plan $\omega O \omega_1$,

$$(22) \quad \delta \mathfrak{E}_v - \delta_T \Phi = \int | (a \mathcal{R}_u + b \mathcal{R}_{1u}) \delta u + (a \mathcal{C}_u + b \mathcal{C}_{1u}) \delta \omega_u | dl + \iint \Sigma \left| \left(-\frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + r \mathcal{R}_v - q \mathcal{R}_w \right) \delta u + \left(-\frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + r \mathcal{C}_v - q \mathcal{C}_w + \zeta \mathcal{R}_v - \eta \mathcal{R}_w \right) \delta \omega_u \right| d\omega d\omega_1,$$

la première intégrale étant étendue au contour c de \mathcal{A} . Soient,

droite $d\omega d\omega_1$, découpé normalement à la surface moyenne. Dans l'état déformé, par suite de la petitesse de e , le tronçon reste très sensiblement un prisme, mais pouvant être alors très légèrement oblique. La réduction par rapport à M des forces extérieures appliquées à ce tronçon donne ainsi une force et un couple de l'ordre de dS . Leurs quotients par dS ou par $d\omega d\omega_1$, représentent donc la force et le couple extérieurs en M par unité de surface comptée sur l'état actuel ou sur l'état primitif. De même pour les forces d'inertie. De même aussi, les forces extérieures appliquées à un élément $e dL$ du bord de la surface élastique se réduisent à une force et à un couple de l'ordre de dL ou de dl .

Soient alors

$$(X_e, Y_e, Z_e; L_e, M_e, N_e) d\omega d\omega_1,$$

les composantes suivant les axes fixes de la force et du couple extérieurs en M appliqués au tronçon $e dS$;

$$(X_i, Y_i, Z_i; L_i, M_i, N_i) d\omega d\omega_1,$$

les composantes analogues relatives aux forces d'inertie;

$$(X, Y, Z; L, M, N) dl$$

les composantes de la force et du couple extérieurs appliqués à un élément de bord $e dL$ de la surface; on a

$$(27) \quad \delta\mathfrak{E}_e + \delta J = \int |X \delta x + L \delta\omega_x| dl + \iint | (X_e + X_i) \delta x + (L_e + L_i) \delta\omega_x | d\omega d\omega_1.$$

L'équation fondamentale (26) de l'Énergétique s'écrit ainsi, d'après (25),

$$(28) \quad \int | (X + a\mathcal{R}_x + b\mathcal{R}_{1,x}) \delta x + (L + a\mathcal{C}_x + b\mathcal{C}_{1,x}) \delta\omega_x | dl + \iint | (X_e + X_i - \sum \frac{\partial \mathcal{R}_x}{\partial \omega}) \delta x + [L_e + L_i + \sum (-\frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial \omega} + \mathcal{R}_y \frac{\partial z}{\partial \omega} - \mathcal{R}_z \frac{\partial y}{\partial \omega})] \delta\omega_x | d\omega d\omega_1 = 0.$$

Comme elle doit être vérifiée quels que soient δx , δy , ..., $\delta\omega_z$ en chaque point de S , cela exige qu'on ait :

bord $e dL$ de Γ la force et le couple de composantes

$$(32) \quad \begin{cases} -(a \mathcal{R}_x + b \mathcal{R}_{1x}, a \mathcal{R}_y + b \mathcal{R}_{1y}, a \mathcal{R}_z + b \mathcal{R}_{1z}) dl, \\ -(a \mathcal{C}_x + b \mathcal{C}_{1x}, a \mathcal{C}_y + b \mathcal{C}_{1y}, a \mathcal{C}_z + b \mathcal{C}_{1z}) dl. \end{cases}$$

D'après le postulat sur les liaisons, cette force et ce couple représentent les éléments de la réduction des forces de liaisons exercées par la partie 1 sur la partie 2 à travers l'élément $e dL$. Il résulte alors des six équations universelles du mouvement des systèmes matériels que l'ensemble des forces extérieures et d'inertie appliquées à la portion 2, des forces et des couples de liaisons (32) appliqués le long de Γ doit constituer un système de vecteurs nul. En écrivant qu'il en est bien ainsi quel que soit Γ , on retrouve facilement, par ces simples considérations de Mécanique rationnelle, les six équations (30), les conditions au contour (29) résultant alors immédiatement des expressions (32) et cela, indépendamment de la considération des trièdres (M). L'Énergétique n'intervient qu'ensuite pour parvenir aux équations (31), de la même manière que pour la ligne élastique (1).

Revenons aux expressions (32); les composantes de la force et du couple de liaisons par unité de longueur du contour Γ s'obtiennent en divisant ces expressions par dL , ce qui donne d'après (4)

$$-\frac{1}{H} (\sqrt{E} \mathcal{R}_x \cos V + \sqrt{E_1} \mathcal{R}_{1x} \cos V_1, \dots, \sqrt{E} \mathcal{C}_z \cos V + \sqrt{E_1} \mathcal{C}_{1z} \cos V_1).$$

Autrement dit, la force de liaison par unité de longueur sur l'état actuel est la résultante des deux vecteurs

$$-\frac{\sqrt{E}}{H} \mathfrak{R} \cos V, \quad -\frac{\sqrt{E_1}}{H} \mathfrak{R}_1 \cos V_1$$

et le couple de liaison par unité de longueur sur le même état est la résultante des deux vecteurs

$$-\frac{\sqrt{E}}{H} \mathfrak{C} \cos V, \quad -\frac{\sqrt{E_1}}{H} \mathfrak{C}_1 \cos V_1.$$

Si donc la coupure Γ est pratiquée suivant la courbe du réseau

(1) L. ROY, *loc. cit.*, p. 134.

$s = \text{const.}$, on a $V_1 = \frac{\pi}{2}$ et V est très voisin de zéro ou de π , suivant que la tangente $M\tau$ à l'arc $\widehat{PM} = s$ se trouve dirigée vers l'extérieur ou l'intérieur de la portion Σ considérée, d'où il résulte que

$$H = \pm \sqrt{EE_1} \cos V.$$

La force et le couple de liaisons par unité de longueur se réduisent ainsi à

$$\mp \frac{\mathfrak{u}}{\sqrt{E_1}}, \quad \mp \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{E_1}}.$$

De même, si la coupure Γ est pratiquée suivant la courbe du réseau $s_1 = \text{const.}$, la force et le couple de liaisons par unité de longueur se réduisent à

$$\mp \frac{\mathfrak{u}_1}{\sqrt{E}}, \quad \mp \frac{\mathfrak{c}_1}{\sqrt{E}}.$$

7. Équations intrinsèques. — Nous appelons *équations intrinsèques* les équations du mouvement rapportées aux axes mobiles $Muvw$; nous allons les obtenir très simplement par application de l'égalité (22). Soient tout d'abord

$$(\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \mathfrak{Z}_e; \mathcal{L}_e, \mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e) d\omega d\omega_1$$

les composantes suivant les axes $Muvw$ de la force et du couple extérieurs appliqués au troncçon $e dS$;

$$(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i; \mathcal{L}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i) d\omega d\omega_1$$

les composantes analogues relatives aux forces d'inertie;

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}; \mathcal{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) dl$$

les composantes de la force et du couple extérieurs appliqués à un élément de bord $e dL$ de la surface, suivant les axes $Muvw$ issus d'un point M de C appartenant à cet élément. On a

$$(33) \quad \delta\mathfrak{C}_e + \delta\mathfrak{J} = \int_{\Sigma} |\mathfrak{X} \delta u + \mathcal{L} \delta \omega_u| dl \\ + \int \int |(\mathfrak{X}_e + \mathfrak{X}_i) \delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i) \delta \omega_u| d\omega d\omega_1.$$

L'égalité (26) s'écrit ainsi d'après (22)

$$\int |(\mathfrak{X} + a\mathfrak{R}_u + b\mathfrak{R}_{1u}) \delta u + (\mathfrak{L} + a\mathfrak{C}_u + b\mathfrak{C}_{1u}) \delta \omega_u| dl$$

$$+ \iint \left[\left[\mathfrak{X}_e + \mathfrak{X}_i + \sum \left(-\frac{\partial \mathfrak{R}_u}{\partial \omega} + r\mathfrak{R}_v - q\mathfrak{R}_{1v} \right) \right] \delta u \right.$$

$$\left. + \left[\mathfrak{L}_e + \mathfrak{L}_i + \sum \left(-\frac{\partial \mathfrak{C}_u}{\partial \omega} + r\mathfrak{C}_v - q\mathfrak{C}_{1v} + \zeta\mathfrak{R}_v - \eta\mathfrak{R}_{1v} \right) \right] \delta \omega_u \right] d\omega d\omega_1 = 0.$$

Comme elle doit être satisfaite quels que soient $\delta u, \delta v, \dots, \delta \omega_u$, en chaque point de S, cela exige qu'on ait :

I. En chaque point du contour de S :

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} + a\mathfrak{R}_u + b\mathfrak{R}_{1u} = 0, & \mathfrak{L} + a\mathfrak{C}_u + b\mathfrak{C}_{1u} = 0, \\ \mathfrak{Y} + a\mathfrak{R}_v + b\mathfrak{R}_{1v} = 0, & \mathfrak{M} + a\mathfrak{C}_v + b\mathfrak{C}_{1v} = 0, \\ \mathfrak{Z} + a\mathfrak{R}_w + b\mathfrak{R}_{1w} = 0, & \mathfrak{N} + a\mathfrak{C}_w + b\mathfrak{C}_{1w} = 0; \end{cases}$$

II. En chaque point de S :

$$(35) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_u}{\partial \omega} + q\mathfrak{R}_v - r\mathfrak{R}_w \right) = \mathfrak{X}_e + \mathfrak{X}_i, \\ \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_v}{\partial \omega} + r\mathfrak{R}_u - p\mathfrak{R}_w \right) = \mathfrak{Y}_e + \mathfrak{Y}_i, \\ \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_w}{\partial \omega} + p\mathfrak{R}_v - q\mathfrak{R}_u \right) = \mathfrak{Z}_e + \mathfrak{Z}_i; \\ \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{C}_u}{\partial \omega} + q\mathfrak{C}_v - r\mathfrak{C}_w + \eta\mathfrak{R}_w - \zeta\mathfrak{R}_v \right) = \mathfrak{L}_e + \mathfrak{L}_i, \\ \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{C}_v}{\partial \omega} + r\mathfrak{C}_u - p\mathfrak{C}_w + \zeta\mathfrak{R}_u - \xi\mathfrak{R}_w \right) = \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_i, \\ \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{C}_w}{\partial \omega} + p\mathfrak{C}_v - q\mathfrak{C}_u + \xi\mathfrak{R}_v - \eta\mathfrak{R}_u \right) = \mathfrak{N}_e + \mathfrak{N}_i. \end{cases}$$

Telles sont les équations intrinsèques, auxquelles on doit adjoindre les égalités (20); elles correspondent à celles qui ont été données par MM. Cosserat (1).

8. *Expressions des forces d'inertie.* — La surface élastique étant supposée homogène suivant chacune de ses normales, il en est de même du tronçon $e dS$, dont le sommet M du trièdre mobile correspondant

(1) E. et F. COSSERAT, *loc. cit.*, p. 75.

occupe ainsi le centre de gravité. La réduction des forces d'inertie donne alors pour leur résultante

$$(X_i, Y_i, Z_i) = -\rho_0(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}),$$

d'où

$$\mathfrak{X}_i = -\rho_0 \alpha_2 \ddot{x}, \quad \mathfrak{Y}_i = -\rho_0 \alpha_1 \ddot{x}, \quad \mathfrak{Z}_i = -\rho_0 \alpha_2 \ddot{x}.$$

Les axes $Muvw$ étant issus du centre de gravité du tronçon sans être principaux d'inertie, les composantes suivant ces axes du couple d'inertie sont données par les formules générales de la dynamique du corps solide, si l'on se limite toutefois aux très petites déformations, soit

$$(36) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_i = -AP + F\dot{Q} + E\dot{R} + Q(-EP + D\dot{Q} - CR) \\ \quad - R(-FP - B\dot{Q} + DR), \\ \mathfrak{Y}_i = F\dot{P} - B\dot{Q} + D\dot{R} + R(-AP + F\dot{Q} + ER) \\ \quad - P(-EP + D\dot{Q} - CR), \\ \mathfrak{Z}_i = EP + D\dot{Q} - C\dot{R} + P(F\dot{P} - B\dot{Q} + DR) \\ \quad - Q(-AP + F\dot{Q} + ER), \end{cases}$$

(A, B, ..., F) $d\omega d\omega_1$ désignant les moments et produits d'inertie du tronçon relatifs aux axes $Muvw$ ⁽¹⁾ et

$$\begin{aligned} P &= |\alpha_2 \dot{\alpha}_1| = -|\alpha_1 \dot{\alpha}_2|, \\ Q &= |\alpha \dot{\alpha}_2| = -|\alpha_2 \dot{\alpha}|, \\ R &= |\alpha_1 \dot{\alpha}| = -|\alpha \dot{\alpha}_1|. \end{aligned}$$

les composantes suivant les mêmes axes de la rotation instantanée du tronçon, c'est-à-dire du trièdre (M). Les moments et produits d'inertie considérés étant ceux d'une barre homogène dont le centre est à l'origine des coordonnées, on a

$$(37) \quad (A, B, C; D, E, F) = \frac{\rho_0 c^2}{12} (b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2, bc, ca, ab),$$

$$(a, b, c) = a_1(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) + b_1(\beta, \beta_1, \beta_2) + c_1(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$$

désignant les cosinus directeurs de la barre, c'est-à-dire d'une demi-normale à S, par rapport aux axes mobiles et a_1, b_1, c_1 les cosinus

(1) Il n'y a évidemment aucune confusion à craindre entre les produits d'inertie E, F et les fonctions déjà désignées ainsi dès le n° 1.

directeurs de cette demi-normale par rapport aux axes fixes, soit

$$\alpha_i \Pi = \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial z}{\partial \omega_i} - \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \omega_i}, \dots$$

On a ensuite

$$L_i = \alpha_i L_i + \alpha_1 M_i + \alpha_2 \mathcal{L}_i, \dots$$

9. Relation supplémentaire. — D'après le second principe de la Thermodynamique, la quantité de chaleur δQ dégagée par une portion quelconque de la surface élastique dans une modification virtuelle a pour expression

$$\mathfrak{E} \delta Q = \int \int T \delta f_T d\omega d\omega_1 - \delta \mathfrak{E}_v,$$

\mathfrak{E} désignant l'équivalent mécanique de la chaleur et $\delta \mathfrak{E}_v$ le travail virtuel de viscosité relatif à la portion de surface à laquelle s'étend l'intégration.

La quantité de chaleur dQ dégagée dans une modification réelle est alors, d'après (19),

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} dQ = dt \int \int T (f_{T\xi}'' \dot{\xi} + f_{T\eta}'' \dot{\eta} + \dots + f_{T\tau_1}'' \dot{\tau}_1 + f_{T'}'' \dot{T}) d\omega d\omega_1 \\ + dt \int \int \mathfrak{A} \mathfrak{D} d\omega d\omega_1, \end{aligned}$$

soit encore

$$(38) \quad dQ = dt \int \int \left[\frac{T}{\mathfrak{E}} (f_{T\xi}'' \dot{\xi} + f_{T\eta}'' \dot{\eta} + \dots + f_{T\tau_1}'' \dot{\tau}_1) - c \dot{T} + \frac{\mathfrak{A} \mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} \right] d\omega d\omega_1,$$

la quantité

$$c = - \frac{T}{\mathfrak{E}} f_{T'}''$$

désignant la *capacité calorifique* de la surface élastique rapportée à l'unité de surface primitive.

Soit, d'autre part, $\frac{F_n''}{e}$ le flux de chaleur en un point M du contour Γ' de la portion de surface élastique considérée et relatif à la demi-normale extérieure Mn à l'élément de bord edL correspondant; on a, en supposant la surface athermane et dénuée de sources de chaleur,

$$(39) \quad dQ = dt \left[- \int F_n dL + \int k(T - T_c) dS \right],$$

k étant le double du coefficient de conductibilité extérieure que, pour simplifier, nous supposons le même pour les deux faces et T_e la température absolue extérieure. Or, la conductibilité de la surface élastique étant supposée très grande par rapport à celle du milieu ambiant, le flux de chaleur en chaque point M de la surface moyenne est tangent à cette surface, de sorte que ce flux peut être considéré comme la résultante de deux flux $\frac{1}{e} (F_\omega, F_{\omega_1})$ d'origine M , tangents à chaque ligne du réseau et qui sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées $\frac{\partial T}{\partial(\omega, \omega_1)}$, dont les coefficients, fonctions de ω, ω_1, T , sont les coefficients de conductibilité calorifique de la surface en M . Nous avons ainsi

$$(39') \quad F_n = F_\omega \cos V + F_{\omega_1} \cos V_1$$

et par suite, d'après (4),

$$\begin{aligned} \int F_n dL &= \int H \left(a \frac{F_\omega}{\sqrt{E}} + b \frac{F_{\omega_1}}{\sqrt{E_1}} \right) dl \\ &= \iint \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{H}{\sqrt{E}} F_\omega \right) + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(\frac{H}{\sqrt{E_1}} F_{\omega_1} \right) \right] d\omega d\omega_1. \end{aligned}$$

L'expression (39) devient donc

$$dQ = dt \iint \left[- \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{H}{\sqrt{E}} F_\omega \right) - \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(\frac{H}{\sqrt{E_1}} F_{\omega_1} \right) + kH(T - T_e) \right] d\omega d\omega_1.$$

En l'égalant à l'expression (38) déjà obtenue, il vient la relation supplémentaire cherchée ou équation indéfinie de la température

$$(40) \quad \begin{aligned} c \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{H}{\sqrt{E}} F_\omega \right) + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(\frac{H}{\sqrt{E_1}} F_{\omega_1} \right) - kH(T - T_e) \\ &\quad + \frac{T}{\epsilon} \left(f_{T\xi}^n \frac{\partial \xi}{\partial t} + f_{T\eta}^n \frac{\partial \eta}{\partial t} + \dots + f_{Tr_1}^n \frac{\partial r_1}{\partial t} \right) + \frac{2\Omega}{\epsilon}, \end{aligned}$$

dans laquelle on peut très sensiblement remplacer E, E_1, H par l'unité, par suite de la petitesse des déformations. Dans le cas particulier d'une surface élastique isotrope, on a

$$F_n = K \frac{\partial T}{\partial n} = K \left| a \frac{\partial T}{\partial x} \right|,$$

K désignant le produit de l'épaisseur e de la surface par son coefficient de conductibilité. On a ainsi, d'après (2),

$$\int F_n dL = \int \frac{K}{H} \left[a \left(E_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} - F \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right) + b \left(-F \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} + E \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right) \right] dl,$$

de sorte que les deux premiers termes du second membre de (40) doivent être remplacés par

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{K}{H} \left(E_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} - F \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{K}{H} \left(-F \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} + E \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right),$$

c'est-à-dire sensiblement par

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(K \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(K \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right).$$

Enfin, tout le long du contour C de S , on doit avoir

$$F_n = k'(T_e - T),$$

k' désignant le produit par e du coefficient de conductibilité extérieure relatif au bord de la surface élastique, ce qui donne, d'après (39') et (4),

$$H \left(a \frac{F_\omega}{\sqrt{E}} + b \frac{F_{\omega_1}}{\sqrt{E_1}} \right) \frac{dL}{dl} = k'(T_e - T),$$

ou sensiblement

$$(41) \quad aF_\omega + bF_{\omega_1} = k'(T_e - T)$$

et, pour une surface isotrope,

$$K \left(a \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} + b \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_1} \right) = k'(T_e - T).$$

Le problème général du mouvement de la surface élastique à six paramètres est ainsi complètement mis en équations. En effet, les six équations (30) ou (35), où les composantes de \mathbf{u} , \mathbf{u}_1 ; \mathbf{c} , \mathbf{c}_1 sont remplacées par leurs valeurs (31) ou (20), jointes à l'équation (40), constituent un système de sept équations indéfinies, qui, jointes aux conditions au contour (29) ou (34) et (41) et aux conditions initiales, déterminent les sept inconnues principales $x, y, z; \theta, \varphi, \psi; T$ en fonction de ω, ω_1, t . La densité ρ est ensuite donnée par (5), les arcs s, s_1

par les formules

$$s = \int_0^\omega \sqrt{E} d\omega, \quad s_1 = \int_0^{\omega_1} \sqrt{E_1} d\omega_1,$$

résultant de (1).

10. Équations des petits mouvements. — Considérons les équations du mouvement (34) et (35); le problème des petits mouvements est le suivant : on suppose ces équations vérifiées pour un système de valeurs de

$$x, y, z; \alpha, \beta, \dots, \gamma_2; \xi, \eta, \dots, r_1; T; \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \dots, \mathcal{C}_{1w}$$

indépendantes de t , c'est-à-dire fonctions de ω, ω_1 seulement. En supposant stable l'équilibre ainsi défini, on cherche à les vérifier pour des valeurs

$$x + \delta x, y + \delta y, \dots, \mathcal{C}_{1w} + \delta \mathcal{C}_{1w}$$

infiniment voisines des précédentes, les accroissements infiniment petits $\delta x, \delta y, \dots, \delta \mathcal{C}_{1w}$ étant des fonctions de ω, ω_1, t qui vérifient le résultat de la différentiation des équations précédentes, soit en chaque point de S :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left(\frac{\partial \delta \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + g \delta \mathcal{R}_w - r \delta \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_w \delta g - \mathcal{R}_v \delta r \right) = \delta \mathcal{X}_e + \delta \mathcal{X}_i \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

et sur son contour C :

$$(43) \quad \delta \mathcal{X} + a \delta \mathcal{R}_u + b \delta \mathcal{R}_{1u} = 0, \dots$$

Les équations (40) et (41) donnent de même en chaque point de S

$$(44) \quad c \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \frac{\partial \delta F_\omega}{\partial \omega} + \frac{\partial \delta F_{\omega_1}}{\partial \omega_1} - k \delta T + \frac{T}{\mathfrak{E}} \left(J_{T\xi} \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \dots \right)$$

et sur son contour C

$$(45) \quad a \delta F_\omega + b \delta F_{\omega_1} + k' \delta T = 0.$$

Ce sont les équations des petits mouvements, où les termes figurant hors des caractéristiques δ doivent recevoir leurs valeurs correspondant à l'équilibre. C'est, en particulier, pour cette raison que la fonction dissipative a disparu de (44). Les différents accroissements qui y figurent

Moyennant les formules (46), (47), les équations (42), (44) constituent un système de sept équations indéfinies linéaires qui, jointes aux conditions au contour (43), (45) et aux conditions initiales, déterminent les sept fonctions inconnues $u, v, w; l, m, n; \delta T$ en fonction de ω, ω_1, t .

La variation $\delta\rho$ de la densité se calcule ensuite, comme pour la ligne élastique, en différenciant (5), soit

$$H\delta\rho + \rho\delta H = 0,$$

où l'on peut remplacer H par l'unité et calculer δH en négligeant F . Nous avons ainsi

$$\delta H = \frac{\delta E}{E} + \frac{\delta E_1}{E_1},$$

avec

$$\delta E = 2 \left| \xi \left(\frac{\partial u}{\partial \omega} + q w - r v \right) \right|, \quad \delta E_1 = 2 \left| \xi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \omega_1} + q_1 w - r_1 v \right) \right|$$

et, comme H, E, E_1 diffèrent très peu de 1, il vient

$$(48) \quad \delta\rho + \rho \sum \left| \xi \left(\frac{\partial u}{\partial \omega} + q w - r v \right) \right| = 0.$$

