JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE FRÉCHET

Les polynômes abstraits

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 71-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__71_0>

Les polynomes abstraits;

PAR MAURICE **FRÉCHET**.

INTRODUCTION.

1. L'objet de ce Mémoire ([1]) est assez éloigné des sujets habituels des recherches des deux illustres mathématiciens auxquels est dédié ce volume.

Mais, en offrant ce travail, je me suis souvenu de l'intérêt que M. Appell avait bien voulu exprimer pour ma Thèse en sa qualité de Président de mon Jury de Doctorat.

Et, depuis de longues années, M. Picard n'a cessé d'encourager mes travaux sur l'Analyse générale et de les accueillir favorablement dans les périodiques qu'il dirige.

La publication du présent Mémoire ne serait pas inutile, n'eût-elle d'autre résultat que d'apporter un nouveau témoignage de la largeur de vue de ces deux grands savants.

Résumé.

2. Pour ne pas être trop long, nous nous sommes contenté, dans ce Mémoire, de donner la définition des polynomes abstraits et d'établir la proposition fondamentale suivant laquelle, *tout polynome abstrait d'ordre entier n est la somme de polynomes abstraits d'ordre* $h = 0, 1,$

([1]) C'est le développement de la première partie d'une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 180, 1925, p. 1816) sous le titre *Les transformations ponctuelles abstraites.*

2, ..., n, *chaque polynome d'ordre h étant homogène et de degré h et la décomposition étant unique.*

Tout polynome abstrait $\mathrm{F}(m)$ définit une transformation $\mathrm{M} = \mathrm{F}(m)$ d'un élément abstrait m en un élément abstrait M. On peut, dans ce qui suit, supposer que m et M appartiennent à deux espaces $(\mathcal{D})$ vectoriels (*E. A.*, p. 140) (¹), distincts ou non. Mais les raisonnements et les résultats qui suivent subsistent en prenant m et M dans des espaces plus généraux, que nous avons définis plus loin sous le nom *d'espaces algébrophiles.*

3. *Cas des fonctions ordinaires.* — Il nous sera commode, pour abréger, d'appeler, dans la suite, *fonction ordinaire*, une fonction numérique d'une variable numérique. En vue de formuler une définition des polynomes qui puisse s'étendre à des fonctions de variables abstraites, nous avons donné autrefois (²) une définition fonctionnelle des polynomes. Cette définition peut être présentée comme suit : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ordinaire $f(x)$ soit un polynome de degré n, au plus, est : que $f(x)$ soit continue et que sa $(n+1)^{\text{ième}}$ différence

$$\Delta^{(n+1)}f(x) = \Delta_{n+1}\Delta_n\ldots\Delta_2\Delta_1 f(x)$$

soit identiquement nulle pour des accroissements arbitraires $\Delta_{n+1}x$, $\Delta_n x$, ..., $\Delta_2 x$, $\Delta_1 x$ de x. Pour qu'elle soit de degré n exactement, il faut et il suffit qu'en outre $\Delta^{(n)}f(x)$ ne soit pas identiquement nulle.

Dans cet énoncé, on peut admettre que les accroissements de x sont donnés à partir d'une valeur fixe, par exemple, zéro, de x. Mais on supposera que les accroissements $\Delta_{n+1}x$, ..., $\Delta_1 x$ de x sont indé-

---

(¹) Nous aurons plusieurs fois, dans la suite, à renvoyer à l'une des pages de notre Ouvrage « *Les espaces abstraits* et leur théorie considérée comme *Introduction à l'Analyse générale* » que nous désignerons par l'abréviation *E. A.* Cet Ouvrage (in-8°, XI + 296 pages, 1928, éditeur Gauthier-Villars) vient de paraître dans la Collection de Monographies sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de M. Émile Borel.

(²) *Une définition fonctionnelle des polynomes* (*Nouv. Ann.*, 1909, t. IX, p. 145-162).

pendants. Contrairement à ce qui a lieu dans la théorie des différences, on ne les supposera donc pas égaux.

Le théorème précédent peut être utilisé pour donner une définition des polynomes. Il sera plus commode, pour la suite, de substituer, au langage des fonctions, le langage des transformations.

4. On appellera transformation *ordinaire* une transformation $X = F(x)$ d'un nombre x en un nombre X. Ce sera une *transformation d'ordre entier n* quand $F(x)$ est un polynome en x de degré n.

Nous pourrons donc appeler transformation ordinaire d'ordre entier n, au plus, toute transformation continue $X = F(x)$ telle que la différence d'ordre $n+1$ de X

$$\Delta^{(n+1)}X \equiv \Delta_{n+1}\Delta_n \ldots \Delta_2\Delta_1 X$$

correspondant à des accroissements arbitraires $\Delta_{n+1}x$, $\Delta_n x$, ..., $\Delta_2 x$, $\Delta_1 x$ donnés à x, soit identiquement nulle.

5. Une telle définition est évidemment susceptible de généralisation. Pour qu'elle garde un sens lorsque la transformation n'est pas ordinaire, il suffit que les éléments x et X liés par la transformation $X = F(x)$ soient de natures telles que l'on sache attribuer des significations déterminées :

A la continuité d'une transformation de x en X;

Aux accroissements successifs correspondants de x et de X;

A l'égalité à zéro de l'un des accroissements successifs de X.

Il y a un grand nombre de cas où ces significations ne sauraient faire de doute.

Afin de nous assurer qu'en adoptant la définition proposée, nous nous dirigeons dans une bonne direction, nous allons l'appliquer d'abord à un de ces cas.

6. *Cas des correspondances ponctuelles entre espaces à un nombre entier de dimensions.* — Nous supposons que x est un point d'un espace e_r à r dimensions — c'est dire que x est déterminé par la suite ordonnée de r nombres x_1, ..., x_r — et que X est un point d'un espace E_R à R dimensions, X étant donc déterminé par la suite ordonnée de R « coordonnées » $X_1, \ldots, X_R$. La transformation $X = F(x)$ est déterminée par l'ensemble de R relations de la forme

$$X_i = F_i(x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, \ldots, R).$$

Dire que $F(x)$ est continue, c'est dire que chacune des fonctions $F_i(x_1, \ldots, x_r)$ est continue par rapport à l'ensemble des nombres $x_1, \ldots, x_r$. Un accroissement $\Delta_1 x$ de x est un point $(\Delta_1 x_1, \ldots, \Delta_1 x_r)$ de e_r. Un accroissement correspondant de X, soit

$$\Delta_1 X = F(X + \Delta X) - F(X),$$

c'est un point $(\Delta_1 X_1, \ldots, \Delta_1 X_R)$ de E_R tel que

$$\Delta_1 X_i = F_i(x_1 + \Delta_1 x_1, \ldots, x_r + \Delta_1 x_r) - F_i(x_1, \ldots, x_r).$$

Dire qu'un point de E_R est à l'origine ou est nul, c'est dire que ses coordonnées sont nulles.

Ces précisions — qui vont d'elles-mêmes — suffisent à déterminer complètement la définition d'une transformation ponctuelle d'ordre entier de e_r dans E_R.

Si donc $X = F(x)$ est une transformation d'ordre entier n, au plus, on voit que $F_i(x_1, \ldots, x_r)$ est une fonction numérique de r nombres qui est continue par rapport à l'ensemble de ces nombres et dont la différence d'ordre $n+1$

$$\Delta_{n+1} \Delta_n \ldots \Delta_1 F_i(x_1, \ldots, x_r)$$

est nulle pour tout système de $n+1$ suites d'accroissements des r variables à la fois. On prouve alors facilement (¹) que F_i est un polynome de degré n au plus par rapport à l'ensemble des r variables $x_1, \ldots, x_r$. Si, en outre, $X = F(x)$ est une transformation d'ordre exactement égal à n, la différence $\Delta^{(n)} F_i$ de l'une au moins des fonctions F_i n'est pas identiquement nulle : l'un au moins des polynomes F_i est exactement de degré n.

La réciproque de ces propositions se démontre aussi facilement.

(¹) *Sur une généralisation de la formule des accroissements finis et sur quelques applications* (*Trav. Sc. Univ. Rennes*, 1909).

Ainsi, dans le cas où X et x appartiennent à deux espaces (distincts ou non) chacun à un nombre entier de dimensions, les transformations $X = F(x)$ d'ordre entier n ne sont autres que les transformations où les coordonnées de X s'expriment par des polynomes par rapport à l'ensemble des coordonnées de x, tous ces polynomes étant de degrés $\leqq n$ et l'un au moins d'entre eux étant exactement de degré n.

Dans ce cas, notre définition fonctionnelle des transformations d'ordre entier est équivalente à la définition à laquelle aurait pu nous conduire directement la définition usuelle des polynomes.

Mais nous allons rencontrer des cas où l'extension directe de la définition des polynomes paraît douteuse alors que la définition fonctionnelle s'applique sans difficulté.

7. *Cas plus généraux.* — C'est ce que nous avons d'abord fait dans des travaux antérieurs (auxquels nous renverrons pour tous détails) en nous bornant au cas où X était un nombre. Premièrement nous avons étudié le cas où x est une fonction ordinaire continue $\varphi(t)$ (1). Puis le cas où x est déterminé par une suite infinie de coordonnées numériques $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ (2).

Mais il n'y a rien qui s'oppose au choix, pour x, d'éléments d'une nature plus générale. Il y a encore moins de raison d'imposer à la nature de l'élément transformé X une limitation — celle d'être un nombre — qui n'est pas imposée à x. Nous allons donc, dans la suite, envisager le cas plus général où x et X sont des éléments d'une nature quelconque; ce seront, si l'on veut, deux « points » appartenant respectivement à deux espaces abstraits e, E, distincts ou non.

8. *Définition des transformations ponctuelles abstraites d'ordre entier.* — Nous dirons encore qu'*une transformation* $X = F(x)$ *d'un point x d'un espace abstrait e en un point* X *d'un espace abstrait* E *est d'ordre entier n, au plus, si cette transformation est continue et si la différence d'ordre $n+1$ de* X

$$\Delta^{(n+1)} X = \Delta_{n+1} \Delta_n \ldots \Delta_1 X$$

(1) *Sur les fonctionnelles continues* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 27, 1910, p. 193-216).

(2) *Les fonctions d'une infinité de variables* (*C. R. Congrès Soc. Sav.*, 1909).

correspondant à des accroissements arbitraires $\Delta_1 x, \ldots, \Delta_{n+1} x$ *de* x *est identiquement nulle. La transformation est exactement d'ordre* n, *si* $\Delta^{(n)} X$ *n'est pas identiquement nulle.*

Pour qu'une telle définition ait un sens, il suffit encore que les espaces e et E soient tels qu'on sache attribuer une signification :

A la continuité d'une transformation de x en X ;
Aux accroissements consécutifs correspondants de x et de X ;
A l'égalité à zéro d'un des accroissements successifs de X.

Un cas très général où il en est ainsi est celui où les espaces e et E sont de ceux que nous avons appelés *espaces* $(\mathcal{D})$ *vectoriels* (*E. A.*, p. 140).

La définition précédente pourrait garder un sens dans des cas beaucoup plus généraux encore. Mais il n'est pas certain que la généralisation des polynomes, ainsi obtenue, soit satisfaisante. Sans chercher à déterminer le cas le plus général où il en est ainsi, nous allons définir une catégorie d'espaces, plus générale que celle des espaces $(\mathcal{D})$ vectoriels, et telle que si e et E appartiennent à cette catégorie, les transformations d'ordre entier de e en E possèdent un grand nombre des propriétés usuelles des polynomes et en particulier la propriété fondamentale qui est l'objet de ce Mémoire. Pour cette raison même, nous appellerons ces espaces, des espaces « algébrophiles ». Si, par la suite, les mêmes résultats pouvaient être étendus à une catégorie d'espaces plus générale, il y aurait lieu d'étendre aussi à ces nouveaux espaces la qualification d'algébrophiles.

9. *Définition des espaces algébrophiles.* — Nous allons donner cette définition en nous préoccupant surtout du but à atteindre. C'est dire que nous avons laissé de côté la question de savoir si les conditions que nous allons poser sont indépendantes. C'est une question intéressante, mais secondaire, qui se poserait plus utilement après avoir donné aux espaces algébrophiles le maximum de généralité compatible avec les résultats obtenus.

On verra plus loin que les espaces algébrophiles sont des cas particuliers des espaces que nous avons appelés *espaces topologiquement affines* (*E. A.*, p. 201) et que les espaces $(\mathcal{D})$ vectoriels sont des cas particuliers des espaces algébrophiles. Ceci permet déjà de se rendre compte de leur structure.

Un espace algébrophile E est le système formé par :

Un ensemble $\mathcal{E}$ d'éléments de nature quelconque — éléments que nous pourrons appeler points abstraits — cet ensemble constituant le « support » de l'espace E;

Des familles $\{V_a\}$ d'ensembles V_a de points abstraits associés à chaque point abstrait a, $\{V_a\}$ constituant la famille des « voisinages » V_a de a;

Des opérations portant sur les points abstraits et désignés respectivement par les symboles $+$, $.$, $\|\ldots\|$;

Un système de relations entre le support E, les familles de voisinages $\{V_a\}$ et les opérations $+$, $.$, $\|\ldots\|$.

Ce système de relations est formé de deux groupes.

10. *Premier groupe de conditions.* — Étant donnés trois points abstraits quelconques x, y et z et deux nombres réels quelconques α et β :

1° $x+y$ est un point abstrait déterminé;

2° $x+y=y+x$;

3° $(x+y)+z=x+(y+z)$;

4° $\alpha.x$ est un point abstrait déterminé;

5° Réciproquement, tout point abstrait est identique à l'un au moins des points abstraits tels que $\alpha.x$ en choisissant convenablement le nombre réel α et le point abstrait x;

6° $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$;

7° $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$;

8° $(\alpha\beta).x=\alpha.(\beta.x)$;

9° $\|x\|$ est un nombre réel $\geqq 0$ que nous appellerons *norme* de x;

10° Il n'existe qu'un point dont la norme soit nulle. Nous appellerons ce point l'origine et nous le représenterons par la lettre O qu'il faudra distinguer de la lettre o représentant le nombre zéro;

11° $\|\alpha.x\|=|\alpha|\,\|x\|$ (1).

(1) Nous avons utilisé, pour établir le système précédent de conditions, deux systèmes dus à MM. Banach et Wiener avec des simplifications qui nous ont été suggérées par MM. Hildebrandt et Flamant (*E. A.*, p. 126).

Pour abréger, nous représenterons dans la suite le point abstrait $x+(-1).y$ par la notation $x-y$.

On voit facilement qu'on a

$$1.x=x, \qquad x-x=0, \qquad x+0=x=0+x.$$

11. *Définitions.* — Pour donner le second groupe de conditions nous énoncerons d'abord quelques définitions.

Nous appellerons, dans la suite, *droite abstraite* xy en désignant par x et y deux points abstraits quelconques (distincts), le lieu des points abstraits t qu'on détermine en faisant varier le nombre réel ρ dans la relation

$$t=x+\rho.(y-x).$$

Ce lieu passe évidemment par les points x et y et il coïncide avec la droite abstraite yx comme on le voit en posant $\rho'=1-\rho$.

Nous appellerons *translation*, la transformation d'un point abstrait x d'un espace algébrophile e en un point X du même espace, définie par la relation

$$X-x=a,$$

a désignant un point de l'espace e, point fixe quand x varie.

Nous appellerons de même *homothétie*, une transformation définie par une relation de la forme

$$X-a=\alpha.(x-a),$$

où a est un point fixe et α une constante réelle $\neq 0$.

Soient x, y, z trois points abstraits appartenant à trois espaces algébrophiles (distincts ou non).

On dira que la transformation $z=F(x,y)$ est *continue* au point (x_0, y_0) si, pour tout voisinage V_{z0} de z_0, il existe un couple de voisinages V_{x0} de x_0, V_{y0} de y_0 tels que lorsque x et y appartiennent respectivement à V_{x0} et V_{y0}, z appartient à V_{z0}.

Nous appelons *point d'accumulation* d'un ensemble J, tout point abstrait a tel qu'il existe un point de J, distinct de a, en commun avec chaque voisinage de a.

12. *Second groupe de conditions :*

12° Pour tout couple V_a, W_a de voisinages de a, il existe un voisinage de a commun à V_a et W_a;

13° Il n'y a aucun point distinct de a, commun à tous les voisinages V_a de a;

14° La transformation $z = x + y$ est continue;

15° Les homothéties (et les translations d'après 14°) sont des transformations continues;

16° Les points d'accumulation d'une droite abstraite appartiennent à celle-ci;

17° La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a d'une droite abstraite soit point d'accumulation d'un ensemble de points x de cette droite est que la borne inférieure de $\|x - a\|$ soit nulle quand x varie sur l'ensemble en restant distinct de a.

Il faut remarquer qu'on peut interpréter la continuité des translations (condition 14°) de la façon suivante : pour définir les familles de voisinages attachées aux différents points abstraits ou des familles équivalentes, il suffit de connaître celle qui est attachée à l'un d'eux. On pourra alors prendre comme famille de voisinages attachée à un point arbitraire b la famille d'ensembles déduits de la famille de voisinages connue attachée au point a, par une translation amenant a en b.

On peut aussi interpréter la condition 15° de la façon suivante (¹) : la famille de voisinages attachée à un point a doit être équivalente (²) à la famille de voisinages de a qu'on obtiendrait par une homothétie de la famille donnée, de centre a et dans un rapport arbitraire.

13. Il suffit de jeter un coup d'œil sur les deux groupes de conditions que nous venons d'énoncer, pour s'assurer que les espaces algébrophiles qu'elles caractérisent font partie de la catégorie des espaces topologiquement affines (*E. A.*, p. 201).

(¹) En utilisant la généralisation du théorème de Thalès donnée dans notre Mémoire : *Sur une définition géométrique des espaces abstraits affines* (*Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 14, 1925, p. 1-33).

(²) Nous avons montré que deux familles de voisinages de A sont équivalentes si tout voisinage de la première famille contient un voisinage de la seconde et réciproquement.

Nous allons montrer que les espaces $(\mathcal{D})$ vectoriels sont des espaces algébrophiles, ce qui est un peu moins évident.

Ils satisfont d'abord évidemment au premier groupe de conditions (1°-11°). On peut y prendre comme voisinages d'un point a les sphéroïdes de centre a. Et alors le second groupe de conditions (12°-17°) sera vérifié. La démonstration est immédiate, sauf pour 16°, pour laquelle nous allons la donner explicitement bien qu'elle soit facile.

Supposons donc qu'un point u soit point d'accumulation de l'ensemble des points de la droite abstraite xy. Alors, dans tout sphéroïde de centre u, de rayon $\frac{1}{n}$, il y a au moins un point

$$z_n = x + \rho_n(y - x)$$

distinct de u. Si l'ensemble des nombres ρ_n est borné, on peut en extraire une suite convergente, correspondant aux valeurs $n_1, n_2, \ldots$, de n. Soient ρ_0 la limite de cette suite et

$$z_0 = x + \rho_0(y - x).$$

On aura

$$\| z_n - z_0 \| = | \rho_n - \rho_0 | \| y - x \|.$$

Donc z_{n_i} tend vers z_0 et comme par hypothèse les z_n tendent vers u, le point u coïncide avec un point z_0 de la droite xy. D'ailleurs, l'ensemble des ρ_n est nécessairement borné, sinon, on aurait

$$\| z_n - u \| \geqq | \rho_n | \| y - x \| - | x - u |,$$

et comme par hypothèse y et x sont distincts, et, par suite,

$$\| y - x \| \neq 0,$$

le premier membre tendrait vers zéro, alors que le second ne serait pas borné.

14. *Transformations ponctuelles continues.* — Nous sommes maintenant en mesure d'établir les quelques propriétés des transformations ponctuelles continues d'un espace algébrophile qui nous seront utiles pour l'étude des transformations d'ordre entier.

Nous avons déjà démontré pour des espaces beaucoup plus généraux que les espaces algébrophiles [les espaces (V), *E. A.*, p. 240], que *la* *composition de deux transformations continues fournit une transformation continue* [1]. Autrement dit, soient E, F, G des ensembles de points abstraits appartenant à des espaces algébrophiles [ou plus généralement à des espaces $(\mathcal{V})$] distincts ou non. Si les transformations $y = \mathrm{A}(x)$ et $z = \mathrm{B}(y)$ transforment respectivement E en F et F en G, et si $y = \mathrm{A}(x)$ est continue en x_0, relativement à E et $z = \mathrm{B}(y)$ continue, relativement à F au point $y_0 = \mathrm{A}(x_0)$, alors la transformation $z = \mathrm{B}[\mathrm{A}(x)]$ qui transforme E en G est continue au point x_0 relativement à E.

Mais lorsqu'on veut étendre cette proposition au cas de transformations dépendant chacune de plus d'un point abstrait (ce qui nous est nécessaire pour la suite), on rencontre une difficulté si l'on essaie de l'appliquer aux espaces $(\mathcal{V})$ les plus généraux. C'est pour lever cette difficulté que nous avons introduit ici la condition 12° d'ailleurs nécessaire dans bien d'autres circonstances (*E. A.*, p. 184 et suivantes).

Supposons, par exemple, que $x = g(u)$ et $y = h(u)$ soient deux transformations d'un ensemble E de points abstraits u apppartenant à un espace algébrophile [ou plus généralement un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition 12°], les points abstraits x, y décrivant deux certains ensembles F, G, appartenant respectivement à deux espaces algébrophiles (ou plus généralement deux espaces $(\mathcal{V})$] distincts ou non. Soit d'autre part $z = \rho(x, y)$ une transformation faisant décrire à z un certain ensemble H appartenant à un espace algébrophile (ou plus généralement un espace $(\mathcal{V})$] quand x, y restent simultanément dans F, G respectivement.

Alors si $x = g(u)$ et $y = h(u)$ sont respectivement continues en u_0 relativement à E, et si la transformation $z = \rho(x, y)$ est continue par rapport au couple x, y au point $x_0 = g(u_0)$, $y_0 = h(u_0)$, relativement aux ensembles F, G, la transformation $z = \rho[g(u), h(u)]$ de E en H sera continue au point u_0 relativement à E.

En effet, soit T_{z_0} un voisinage de $z_0 = \rho(x_0, y_0)$; il y a, par hypothèse, deux voisinages V_{x_0} de x_0, W_{y_0} de y_0, tels que $z = \rho(x, y)$ appartienne à T_{z_0} quand x et y restent respectivement des points

[1] *Démonstration de quelques propriétés des ensembles abstraits* (*Amer. Journ. Math.*, vol. L, 1928, p. 47-72, § XXII).

de $F.V_{x_0}$ et de $G.W_{y_0}$. Il y a alors, par hypothèse, deux voisinages U_{u_0}, U'_{u_0} de u_0 tels que si u reste dans $E.U_{u_0}$, x reste dans V_{x_0} et si u reste dans $E.U'_{u_0}$, y reste dans W_{y_0}. *En vertu de la condition* 12°, il y a un voisinage U''_{u_0} de u_0, commun à U_{u_0} et U'_{u_0}. Il y a donc un voisinage U''_{u_0} de u_0, tel que si u reste dans $E.U''_{u_0}$, z reste dans T_{z_0}, ce qui démontre la proposition. On voit que la démonstration suppose seulement que x, y, z, u appartiennent à des espaces ($\mathcal{V}$) et que l'espace ($\mathcal{V}$) décrit par u satisfait à la condition 12°.

15. *Continuité d'une combinaison linéaire de transformations continues.* — Soient les mêmes transformations $x = g(u)$, $y = h(u)$ et prenons en particulier $\rho(x, y) = \alpha.x + \beta.y$, où α et β sont des constantes réelles quelconques. En vertu de la condition 15°, ces transformations $X = \alpha.x$, $Y = \beta.y$ sont continues en x et y respectivement. D'après ce qui précède, les transformations $X = \alpha.g(u)$, $Y = \beta.h(u)$ sont continues au point u_0. D'autre part, d'après la condition 14°, la transformation $Z = X + Y$ est continue par rapport à l'ensemble de X et de Y. Donc, d'après ce qui précède, la transformation

$$Z = \alpha.g(u) + \beta.h(u)$$

de u en Z est continue au point u_0, relativement à E.

Soit $k(\lambda)$, une fonction numérique du nombre λ; et soit u_1 un point abstrait fixe. Alors

$$t = k(\lambda).u_1$$

est une transformation du nombre λ dans le point abstrait t. Si $k(\lambda)$ est continue au point λ_0, il en sera de même de la fonction t de λ. Car pour deux valeurs λ, λ_0 de λ, on aura des points t, t_0, tels que

$$\| t - t_0 \| = | k(\lambda) - k(\lambda_0) | \, \| u_1 \|.$$

Si u_1 était l'origine, t serait fixe, la proposition serait évidente. Supposons $u_1 \neq O$ et soit V_{t_0} un voisinage de t_0. D'après la condition 17°, comme t reste sur la droite Ou_1, il suffit, pour que t soit dans V_{t_0}, que $\| t - t_0 \|$ soit assez petit, par exemple inférieur à ε. Il suffit pour cela que

$$| k(\lambda) - k(\lambda_0) | < \frac{\varepsilon}{\| u_1 \|},$$

inégalité qui aura lieu quand λ sera dans un voisinage convenable de λ_0.

16. Soit

$$v = u_0 + \lambda_1 . u_1 + \ldots + \lambda_r . u_r,$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_r$ sont des points abstraits fixes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des nombres réels quelconques; c'est une transformation du point euclidien de coordonnées numériques $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, dans le point abstrait v. On verrait comme plus haut que cette transformation est continue pour tout système de valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Plus généralement, la transformation

$$U = g(u_0 + \lambda_1 . u_1 + \ldots + \lambda_r . u_r)$$

du point euclidien $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ dans le point abstrait U sera continue pour tout système de valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ telle que $g(u)$ soit continue au point u correspondant.

En particulier,

$$T = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots + \lambda^r u_r = f(\lambda)$$

est une transformation du nombre λ dans le point abstrait T et cette transformation est continue pour toute valeur de λ.

D'ailleurs, on a évidemment pour tout entier s

$$\Delta^{(s)} T = [\Delta^{(s)} \lambda] u_1 + [\Delta^{(s)} \lambda^2] u_2 + \ldots + [\Delta^{(s)} \lambda^r] u_r.$$

Donc

$$\Delta^{(r)} T = \Delta_1 \lambda \ldots \Delta_r \lambda \, r! \, u_r, \qquad \Delta^{(r+1)} T = 0.$$

Si donc $u_r \neq O$, la transformation du nombre λ dans le point abstrait T est d'ordre entier r exactement.

Nous allons établir la réciproque de cette proposition. Faisons d'abord une remarque.

Soient

$$\Delta_1 g(u) = g(u + \Delta_1 u) - g(u),$$
$$\Delta^{(2)} g(u) = \Delta_2 \Delta_1 g(u)$$
$$= g(u + \Delta_1 u + \Delta_2 u) - g(u + \Delta_2 u) - g(u + \Delta_1 u) + g(u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

les différences successives d'une fonction abstraite $g(u)$. Si cette fonction $g(u)$ est continue quel que soit u, si $\Delta_1 u, \Delta_2 u, \ldots$ sont fixes, chacune des différences successives de $g(u)$ sera une fonction continue de u, quel que soit u, comme il résulte des raisonnements précédents. Car la différence $s^{\text{ième}}$ de $g(u)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions de la forme $g(u+\mu)$ où μ est un point abstrait fixe, de sorte que $g(u+\mu)$ est une fonction continue de u.

17. *Transformation d'ordre entier d'un nombre en un point abstrait.* — Avant de chercher l'expression générale des transformations d'ordre entier $\mathrm{M}=\mathrm{F}(m)$, d'un point abstrait m en un point abstrait M, nous allons considérer le cas particulier où la variable m est un nombre λ, la fonction $\Phi(\lambda)$ restant un point d'un espace algébrophile.

Nous avons vu que l'expression

$$(7) \qquad u_0+\lambda.u_1+\ldots+\lambda^r.u_r,$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_r$ sont des points abstraits fixes et λ un nombre, est une transformation d'ordre $\leqq r$, et d'ordre $=r$ si $u_r \neq \mathrm{O}$.

La réciproque est évidente pour $r=\mathrm{O}$. Car si $\Delta\Phi(\lambda)=\mathrm{O}$, c'est-à-dire si $\Phi(\lambda+\Delta\lambda)=\Phi(\lambda)$ quel que soit le nombre $\Delta\lambda$, alors le point abstrait $\Phi(\mu)$ est indépendant de μ et peut être désigné par u_0.

18. Démontrons maintenant la réciproque pour $r=1$. Si l'on a

$$\Delta^{(2)}\Phi(\lambda)=0,$$

on a

$$\Delta_2[\Phi(\lambda+\Delta_1\lambda)-\Phi(\lambda)]=0.$$

Donc la fonction

$$\Phi(\lambda+\Delta_1\lambda)-\Phi(\lambda),$$

qui est continue en λ, est un point abstrait fixe quand λ varie

$$\Phi(\lambda+\Delta_1\lambda)-\Phi(\lambda)=u_0(\Delta\lambda).$$

En permutant λ et $\Delta_1\lambda$, on voit que

$$\Phi(\lambda+\Delta_1\lambda)-\Phi(\lambda)-\Phi(\Delta_1\lambda)$$

est indépendant de λ et de $\Delta_1\lambda$, et par suite est le point $-\Phi(0)$, comme on le voit pour $\lambda=0=\Delta_1\lambda$.

Posons

$$\chi(\lambda)=\Phi(\lambda)-\Phi(0),$$

et, pour abréger, posons $\mu = \Delta_1 \lambda$, alors

$$\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda) + \chi(\mu).$$

Nous avons une équation fonctionnelle analogue à la célèbre équation de Cauchy [et nous supposons comme lui $\Phi(\lambda)$ et par suite $\chi(\lambda)$ continue], mais avec cette différence que $\chi(\lambda)$ est un point abstrait (d'un espace algébrophile).

Nous allons démontrer que $\chi(\lambda) = \lambda . \chi(1)$. On démontre comme dans le raisonnement classique que cette égalité a lieu pour λ rationnel. Supposons maintenant λ nombre réel quelconque et soit λ_n une valeur rationnelle approchée de λ à $\frac{1}{n}$ près (n entier). On aura

$$\chi(\lambda) - \lambda . \chi(1) = [\chi(\lambda) - \chi(\lambda_n)] + [(\lambda_n - \lambda) . \chi(1)].$$

Les deux points entre crochets sont pour n assez grand dans deux voisinages donnés du point O, en vertu de la continuité de $\chi(\lambda)$ et des conditions 11° et 17°. Donc le point du premier membre est pour n assez grand dans un voisinage donné de O, en vertu de la condition 14°.

$\chi(\lambda) - \lambda . \chi(1)$ doit donc appartenir à tout voisinage de O, ce qui, *d'après la condition* 13°, n'est possible que s'il est confondu avec O, c'est-à-dire si

$$\chi(\lambda) = \lambda . \chi(1).$$

Par suite, on a pour tout nombre réel λ

$$\Phi(\lambda) = \lambda . \chi(1) + \Phi(0),$$

où $\chi(1)$ et $\Phi(0)$ sont certains points abstraits fixes, de sorte que la réciproque annoncée est bien démontrée pour $r = 1$.

19. Cette réciproque étant démontrée pour $r = 0$ et 1, supposons-la vraie pour $r \leqq n - 1$.

Si $\Phi(\lambda)$ est d'ordre entier n,

$$O = \Delta^{(n+1)} \Phi(\lambda) = \Delta^{(n)} [\Phi(\lambda + \Delta_{n+1} \lambda) - \Phi(\lambda)].$$

La quantité entre crochets est, comme $\Phi(\lambda)$, une fonction continue de λ et sa différence d'ordre n est nulle. Cette quantité est donc une fonction de λ d'ordre $n-1$ au plus. Il en sera évidemment de même de

$$\Psi(\lambda, \mu) = \Phi(\lambda+\mu) - \Phi(\lambda) - \Phi(\mu),$$

et comme cette expression est symétrique en λ et μ, elle représente aussi une fonction de μ d'ordre $n-1$ au plus. D'ailleurs

$$\Psi(\lambda, \mu) + \Psi(\lambda+\mu, \nu) = \Phi(\lambda+\mu+\nu) - \Phi(\lambda) - \Phi(\mu) - \Phi(\nu).$$

Donc le premier membre est symétrique en λ, μ, ν, résultat que nous utiliserons un peu plus loin.

Montrons d'abord comment $\Psi(\lambda, \mu)$ dépend des nombres λ et μ. Puisque $\Psi(\lambda, \mu)$ est d'ordre $n-1$ au plus, on peut, par hypothèse, écrire

$$(8)\qquad \Psi(\lambda, \mu) = u_0(\mu) + \lambda . u_1(\mu) + \ldots + \lambda^{n-1} . u_{n-1}(\mu),$$

et puisque $\Psi(\lambda, \mu)$ est symétrique en λ et μ,

$$(9)\qquad \Psi(\lambda, \mu) = u_0(\lambda) + \mu . u_1(\lambda) + \ldots + \mu^{n-1} . u_{n-1}(\lambda).$$

Lemme. — Or, considérons, d'une façon générale, une expression de la forme

$$(7)\qquad f(\lambda) = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^r u_r,$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_r$ sont des points abstraits fixes.

On peut trouver des *nombres* $A_k^h (0 \leqq h \leqq r, 0 \leqq k \leqq r)$ tels que

$$1^k A_1^h + \ldots + (r+1)^k A_{r+1}^h = 0 \qquad \text{pour } h \neq k,$$
$$1^h A_1^h + \ldots + (r+1)^h A_{r+1}^h = 1.$$

On aura donc en multipliant à droite par u_k et u_h et ajoutant pour $k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, r$

$$(11)\qquad A_1^h . f(1) + \ldots + A_{r+1}^h . f(r+1) = u_h.$$

Ceci montre, en particulier, que les points abstraits $u_0, u_1, \ldots, u_r$ sont déterminés quand on connaît $f(\lambda)$.

C'est-à-dire que *si*

$$u_0 + \lambda . u_1 + \ldots + \lambda^r . u_r = v_0 + \lambda . v_1 + \ldots + \lambda^r . v_r;$$

quel que soit le nombre λ, *on a*

$$v_0 = u_0, \quad v_1 = u_1, \quad \ldots \quad v_r = u_r.$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite.

20. En appliquant la formule (11) aux égalités (8) et (9) pour $\mu = n - 1$, on voit qu'on aura

$$\begin{aligned} u_h(\mu) &= \mathrm{A}_1^h . \Psi(1, \mu) + \ldots + \mathrm{A}_n^h . \Psi(n, \mu) \\ &= \mathrm{A}_1^h . [u_0(1) + \mu . u_1(1) + \ldots] + \ldots + \mathrm{A}_n^h . [u_0(n) + \mu . u_1(n) + \ldots]. \end{aligned}$$

Donc $u_h(\mu)$ sera aussi une expression de la forme

$$u_h(\mu) = \mathrm{V}_{0,h} + \mu . \mathrm{V}_{1,h} + \ldots + \mu^{n-1} . \mathrm{V}_{n-1,h},$$

où les $\mathrm{V}_{k,h}$ sont des points abstraits. De sorte que finalement

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} \lambda^h . u_h(\mu) = \sum_{h=0}^{h=n-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda^h \mu^k . \mathrm{V}_{k,h}.$$

Alors en appelant $\Psi_q(\lambda, \mu)$ la somme des termes du second membre pour lesquels $h + k = q$, on aura

$$\Psi(\lambda, \mu) = \Psi_0 + \Psi_1(\lambda, \mu) + \ldots + \Psi_r(\lambda, \mu)$$

(avec $r \leqq 2n - 1$) et, par suite, quel que soit le nombre t

$$\Psi(t\lambda, t\mu) = \Psi_0 + t . \Psi_1(\lambda, \mu) + \ldots + t^r . \Psi_r(\lambda, \mu).$$

Or

$$\Psi(t\lambda, t\mu) + \Psi(t\lambda + t\mu, t\nu) = \sum_{q=0}^{q=r} t^q . [\Psi_q(\lambda, \mu) + \Psi_q(\lambda + \mu, \nu)],$$

égalité qu'on peut écrire sous la forme

$$\theta(t, \lambda, \mu, \nu) = \sum_{q=0}^{q=r} t^q . \theta_q(\lambda, \mu, \nu),$$

d'où, d'après (11),

$$\theta_h(\lambda, \mu, \nu) = \mathrm{A}_1^h . \theta(1, \lambda, \mu, \nu) + \ldots + \mathrm{A}_{r+1}^h . \theta(r + 1, \lambda, \mu, \nu).$$

Comme $\theta\ (t, \lambda, \mu, \nu)$ est symétrique en λ, μ, ν quel que soit t, il en résulte que $\theta_h(\lambda, \mu, \nu)$ est aussi, pour $h = 0, 1, \ldots, r$, symétrique en λ, μ, ν.

Écrivons que l'expression

$$\theta_q(\lambda, \mu, \nu) = \Psi_q(\lambda, \mu) + \Psi_q(\lambda + \mu, \nu)$$

est symétrique en λ, μ, ν et pour cela rappelons-nous que Ψ_q est de la forme

$$\Psi_q(\lambda, \mu) = \lambda^q . z_0 + \lambda^{q-1}\mu . z_1 + \ldots + \mu^q . z_q.$$

Donc

$$\begin{aligned}\theta_q(\lambda, \mu, \nu) = {} & [\lambda^q + (\lambda + \mu)^q] . z_0 + [\lambda^{q-1}\mu + (\lambda + \mu)^{q-1}\nu] . z_1 + \ldots \\ & + [\lambda^{q-k}\mu^k + (\lambda + \mu)^{q-k}\nu^k] . z_k + \ldots + (\mu^q + \nu^q) . z_q.\end{aligned}$$

C'est un polynome abstrait de degré q au plus en λ où le coefficient de λ^q est le point abstrait $2 . z_0$. C'est de même un polynome abstrait en μ, où le coefficient de μ^q est $z_0 + z_q$ et un polynome abstrait en ν, où le coefficient de ν^q est z_q. En vertu de la symétrie de $\theta_q(\lambda, \mu, \nu)$ en λ, μ, ν et du lemme démontré plus haut sur l'unicité des coefficients d'un polynome abstrait, on en déduit

$$2 . z_0 = z_0 + z_q = z_q,$$

d'où

$$z_0 = 0 = z_q.$$

De plus, les coefficients des différentes puissances de λ doivent être symétriques en μ et ν. On a de même en égalant les coefficients de $\lambda^{q-h}\mu\nu^{h-1}$ et de $\lambda^{q-h}\mu^{h-1}\nu$

$$C^1_{q-h+1} z_{h-1} = C^{h-1}_{q-1} z_1,$$

$$z_{h-1} = \frac{C^{h-1}_{q-1}}{C^1_{q-h+1}} z_1 = \frac{C^{h-1}_q}{C^1_q} z_1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\Psi_q(\lambda, \mu) & = (C^1_q \lambda^{q-1}\mu + C^2_q \lambda^{q-2}\mu^2 + \ldots + C^{q-1}_q \lambda\mu^{q-1}) \frac{1}{q} . z_1 \\ & = \frac{1}{q}[(\lambda + \mu)^q . z_1 - \lambda^q . z_1 - \mu^q . z_1] \\ & = (\lambda + \mu)^q . B_q - \lambda^q . B_q - \mu^q . B_q\end{aligned}$$

en posant $B_q = \frac{1}{q} . z_1$. Par suite,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, \mu) & = \Psi_0 + \sum_{q=0}^{q=r} [(\lambda + \mu)^q . B_q - \lambda^q . B_q - \mu^q . B_q] \\ & = g(\lambda + \mu) - g(\lambda) - g(\mu),\end{aligned}$$

en posant

$$g(\lambda)=\sum_{q=0}^{q=r}\lambda^q.B_q-\Psi_0.$$

Alors en posant

$$H(\lambda)=\Phi(\lambda)-g(\lambda),$$

on a

$$H(\lambda+\mu)=H(\lambda)+H(\mu)$$

et $H(\lambda)$ étant, comme $\Phi(\lambda)$ et $g(\lambda)$, une fonction continue de λ, $H(\lambda)$ étant en outre distributive, $H(\lambda)$ sera d'ordre un au plus et d'après le paragraphe **18**,

$$H(\lambda)=\lambda.H(1).$$

Donc

$$\Phi(\lambda)=\lambda.H(1)-\Psi_0+\sum_{q=0}^{q=r}\lambda^q.B_q.$$

où $H(1)$, Ψ_0, B_q sont des points abstraits indépendants de λ.

Ainsi $\Phi(\lambda)$ est un certain polynome abstrait en λ, de la forme (7). En outre, le coefficient de la plus haute puissance de λ dans $\Phi(\lambda, \mu)$ est $q\mu.B_r$ et cette puissance est λ^{r-1}. Comme $\Psi(\lambda, \mu)$ est d'ordre $n-1$ en λ au plus, on a donc $n \geqq r$ et par suite $\Phi(\lambda)$ est une expression de la forme (7) de degré n en λ, au plus. D'ailleurs si $\Phi(\lambda)$ était de degré inférieur à n, il est évident que $\Delta^{(n)}\Phi(\lambda)$ serait nul. Donc si $\Phi(\lambda)$ est d'ordre n exactement, $\Phi(\lambda)$ est de la forme

$$\Phi(\lambda)=u_0+\lambda.u_1+\ldots+\lambda^n.u_n,$$

où $u_n \neq O$.

21. *Cas général des correspondances ponctuelles entre espaces algébrophiles.* — Supposons que $M=F(m)$ soit une correspondance ponctuelle entre points de deux espaces algébrophiles. Nous disons qu'elle est d'ordre n au plus, si elle est continue et si $\Delta^{(n+1)}F(m)=O$ quels que soient les accroissements $\Delta_1 m, \ldots, \Delta_{n+1} m$. Prenons en particulier $m=\lambda.\xi$, où λ, est un nombre variable et ξ un point abstrait fixe, de sorte que

$$\Delta_k m=\Delta_k\lambda.\xi,$$

où $\Delta_k\lambda$ est un nombre. Alors $F(\lambda.\xi)$ est une certaine fonction continue de λ, $\Phi(\lambda)$ et $\Delta^{(n+1)}\Phi(\lambda) = 0$, en désignant par le premier membre la $(n+1)^{\text{ième}}$ différence de $\Phi(\lambda)$ correspondant aux accroissements numériques arbitraires $\Delta_1\lambda, \ldots, \Delta_{n+1}\lambda$. D'après ce qui précède,

$$F(\lambda.\xi) = V_0(\xi) + \lambda.V_1(\xi) + \ldots + \lambda^n.V_n(\xi), \tag{13}$$

$V_0(\xi)$, $V_1(\xi)$ étant des points abstraits indépendants de λ.

D'après une formule analogue à (11), on aura

$$V_h(\xi) = A_1^h.F(\xi) + \ldots + A_{n+1}^h.F[(n+1)\xi],$$

les A_k^h étant des nombres. Par suite $V_h(\xi)$ est comme les $F(h.\xi)$ d'ordre n au plus. Enfin si λ et μ sont deux nombres arbitraires, on a

$$\begin{aligned} &V_0(\xi) + \lambda\mu.V_1(\xi) + \ldots + \lambda^n\mu^n.V_n(\xi) \\ &= F(\lambda\mu.\xi) = F(\lambda.\mu.\xi) = V_0(\mu.\xi) + \lambda.V_1(\mu.\xi) + \ldots + \lambda^n.V_n(\mu.\xi). \end{aligned}$$

Et, d'après le lemme démontré plus haut (§ **19**), les coefficients de ces polynomes en λ sont égaux. Donc

$$V_0(\mu.\xi) = V_0(\xi), \qquad V_1(\mu.\xi) = \mu.V_1(\xi), \qquad \ldots \qquad V_n(\mu.\xi) = \mu^n.V_n(\xi).$$

En résumé, si $M \doteq F(m)$ est d'ordre n au plus, on peut écrire $F(m)$ sous la forme

$$F(m) = V_0 + V_1(m) + \ldots + V_h(m) + \ldots + V_n(m), \tag{14}$$

où, quel que soit l'entier $h \leqq n$, $V_h(m)$ est d'ordre au plus égal à n et est « homogène et de degré d'homogénéité égal à h », *c'est-à-dire tel que*

$$V_k(\lambda.m) = \lambda^k V_k(m),$$

quels que soient le nombre λ et le point abstrait m.

En d'autres termes, *toute fonction abstraite d'ordre entier peut être considérée comme une somme de fonctions de même nature, mais chacune homogène et d'un degré d'homogénéité au plus égal à l'ordre de la fonction.* De plus, cette décomposition est *unique;* étant donnée $F(m)$, ses composantes homogènes de degrés différents V_0, $V_1(m)$, ..., $V_n(m)$ sont bien déterminées, puisque ce sont les coefficients des différentes puissances en λ du polynome abstrait $F(\lambda.m)$.

Il y a lieu de remarquer pour chacune des composantes homogènes de $F(m)$, non seulement que son ordre est au plus égal à celui de $F(m)$, mais encore que cet ordre est égal au degré d'homogénéité de ladite composante.

D'une façon générale, si *une transformation* $N = \chi(m)$ *est d'ordre entier et est homogène, son degré h d'homogénéité est égal à son ordre p.*

En effet, soient $m_1, m_2, \ldots, m_r$, r points abstraits distincts, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, r nombres quelconques. En considérant $m_1, \ldots, m_r$ comme fixes, $\chi(\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r . m_r)$ sera une fonction $\Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, qui sera continue par rapport à l'ensemble de ces variables. Elle sera d'ordre p au plus par rapport à chaque variable $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ prise séparément.

Ce sera donc un polynome abstrait et de degré p au plus, par rapport à chacune de ces variables. En répétant un raisonnement fait plus haut (§ **20**), sur la fonction $\Psi(\lambda, \mu)$, on verrait que cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$\Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \Sigma \lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_r^{s_r} . A_{s_1, \ldots, s_r},$$

où les A sont certains points abstraits et où $s_1, \ldots, s_r$ sont tous $\leqq p$. Alors on a pour tout nombre μ

$$\begin{aligned} \mu^h \Sigma \lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_r^{s_r} . A_{s_1, \ldots, s_r} &= \mu^h \Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \\ &= \Theta(\mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_r) = \Sigma \mu^{s_1 + \ldots + s_r} \lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_r^{s_r} . A_{s_1, \ldots, s_r}. \end{aligned}$$

Et, d'après le lemme du paragraphe **19**, les polynomes abstraits en μ qui forment les termes extrêmes doivent avoir mêmes coefficients, c'est-à-dire que

$$s_1 + \ldots + s_r = h.$$

Ainsi, si $\chi(m)$ est d'ordre entier p et de degré d'homogénéité h, $\chi(\lambda_1 . m_1 + \ldots + \lambda_r . m_r)$ est un polynome abstrait en $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ qui est homogène et de degré h par rapport à l'ensemble de ces r variables numériques. Ce résultat intermédiaire nous sera utile par la suite.

Dans ce qui précède, le nombre r a une valeur entière quelconque; prenons $r = h + 1$ et donnons à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ des accroissements $\Delta_k \lambda_1, \Delta_k \lambda_2, \ldots, \Delta_k \lambda_{h+1}$ tous nuls, sauf $\Delta_k \lambda_k$ qu'on prend égal à 1.

En considérant $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h+1}$ comme les coordonnées d'un point a, ce point subira des accroissements $\Delta_1 a, \Delta_2 a, \ldots, \Delta_{h+1} a$, — $\Delta_k a$ ayant pour projections $\Delta_k \lambda_1, \ldots, \Delta_k \lambda_{h+1}$. Alors

$$\Delta^{(h+1)} \Theta = \Delta_{h+1} \Delta_h \ldots \Delta_1 \Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \Sigma [\Delta^{(h+1)} \lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_{h+1}^{(h+1}] . A_{s_1, \ldots, s_r}.$$

Mais puisque $s_1 + \ldots s_{h+1} = h$, la différence d'ordre $h+1$, par rapport à l'ensemble des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h+1}$ du polynome $\lambda_1^{s_1}, \ldots, \lambda_{h-1}^{s_{h+1}}$ qui est de degré h, est nulle. Donc $\Delta^{(h+1)}\Theta = O$. Or il est manifeste que

$$\Delta^{(h+1)}\Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda^r) = \Delta^{(h+1)}\chi(m),$$

où m reçoit les accroissements successifs $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *qui sont arbitraires*. Par conséquent $\chi(m)$ est d'ordre égal à h au plus. D'ailleurs si $\chi(m)$ était d'ordre inférieur à h, $\Theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ne pourrait être d'ordre h, contrairement à ce que nous avons prouvé.

Ainsi dans la formule (14), $V_h(m)$ est d'ordre h en m, en même temps qu'il est homogène de degré h. Dès lors, $\Delta^{(n)}F(m)$ se réduit à $\Delta^{(n)}V_n(m)$, de sorte que $V_n(m) \not\equiv O$.

En résumé, *soit* $M = F(m)$ *une correspondance d'ordre entier n entre deux espaces algébrophiles, distincts ou non. On peut alors écrire* $F(m)$ *sous la forme d'une somme*

$$F(m) = V_0 + V_1(m) + V_2(m) + \ldots + V_n(m)$$

de fonctions abstraites chacune d'ordre entier au plus égal à n, chacune homogène et d'un degré d'homogénéité égal à son ordre, certains des termes $V_h(m)$ *pouvant disparaître, sauf celui qui est d'ordre n. De plus une telle décomposition de* $F(m)$ *est unique* (lorsqu'on a préalablement réuni les termes du même ordre).