JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LE ROUX

Considérations sur le mouvement des ensembles matériels et la théorie de la gravitation

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 401-418.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__401_0>

Considérations sur le mouvement des ensembles matériels et la théorie de la gravitation;

PAR J. LE ROUX.

I. — Le solide de référence principal pour un ensemble donné.

1. La forme newtonienne des lois de la gravitation n'est valable que pour les systèmes de référence auxquels la mécanique classique attache la notion de *mouvement absolu*, et pour un choix spécial du temps que, dans le même ordre d'idées, on appelle le *temps absolu*.

Cet absolu n'est qu'un relatif; mais, comme il correspond à une forme particulièrement simple des lois de la gravitation, on peut le rattacher à la considération générale des formes canoniques.

De même qu'il existe en géométrie des formes canoniques pour l'étude de certaines courbes, de même il existe aussi en mécanique des formes canoniques pour l'étude de certains mouvements. Tel est en particulier le cas pour les lois de la gravitation.

Il est naturel de rechercher s'il est possible de rattacher ces considérations à certaines propriétés générales des mouvements des ensembles matériels.

M. Appell a déjà obtenu sur ce sujet des résultats importants dans une Note sur « la notion d'axes fixes et de mouvement absolu » (¹). MM. Levi-Civita et Amaldi ont rattaché les résultats de M. Appell à la considération du minimum de force vive relative (²). Le développement des mêmes idées m'a conduit à des conséquences qui m'ont paru intéressantes pour la mécanique des ensembles et pour la critique des principes fondamentaux de la Mécanique.

(¹) *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 518.
(²) *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, 1re Partie, p. 307-309,

2. Les axes de référence canoniques employés en mécanique classique pour l'étude des phénomènes de la gravitation sont orientés d'une manière invariable par rapport au ciel étoilé. La propriété qui les caractérise n'est donc pas complètement définie par la simple considération du système solaire : il faut faire intervenir à cet effet l'ensemble des astres de l'Univers observable.

Or, pour cet ensemble, l'orientation spéciale des axes canoniques semble correspondre à un minimum de la force vive relative.

En effet, pour tout autre système d'axes en rotation appréciable par rapport au ciel étoilé, les astres éloignés auraient une force vive relative très grande, à cause de l'immensité des distances et de l'énormité des masses probables des astres.

3. Nous sommes ainsi amenés à un problème général que nous étudierons d'abord pour un ensemble mobile quelconque.

Trouver les systèmes de référence tels que le mouvement de l'ensemble par rapport à ces systèmes donne lieu au minimum de force vive relative.

Je suppose les masses connues et le mouvement de l'ensemble défini par rapport à un trièdre trirectangle de référence S. Soit S_0 un second trièdre trirectangle en mouvement par rapport au premier; il faut calculer la force vive de l'ensemble mobile dans son mouvement relatif par rapport à S_0, et définir ensuite le mouvement de ce second trièdre par la condition que la force vive relative considérée soit minima à tout instant.

Le mouvement d'entraînement de S par rapport à S_0 est défini à chaque instant par une translation et une rotation, dont je désigne les composantes, suivant les axes du trièdre S respectivement par ξ, η, ζ, p, q, r.

Les composantes de la vitesse relative, par rapport à S_0 d'un point $M(x, y, z)$, sont données par les formules bien connues

$$(1)\qquad \begin{cases} V_x = \xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}, \\ V_y = \eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}, \\ V_z = \zeta + py - qx + \dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

La force vive relative dont nous avons à chercher le minimum est donc représentée par une expression de la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2), \tag{2}$$

m désignant la masse et la sommation étant étendue à tout l'ensemble mobile.

En annulant les dérivées par rapport aux paramètres qui définissent le mouvement d'entraînement, nous obtenons six équations linéaires par rapport à ces paramètres. Elles se ramènent aux deux types suivants :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \Sigma m V_x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \Sigma m (y V_z - z V_y) = 0. \tag{4}$$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes :

I. *Le centre de gravité est fixe dans le système* S_0.

II. *Le moment résultant des quantités de mouvement de l'ensemble mobile est nul dans le mouvement relatif par rapport à* S_0.

La première propriété était évidente *a priori*, d'après le théorème de Kœnig.

En ce qui concerne la seconde, comme la vitesse du centre de gravité est nulle, il suffit que le moment cinétique résultant soit nul pour une certaine origine, pour qu'il soit également nul pour toute autre origine.

Les propriétés I et II ont été données par MM. Levi-Civita et Amaldi. M. Appell, dans la Note déjà citée, avait aussi considéré les systèmes de référence satisfaisant à ces conditions.

4. Avant d'étudier les importantes conséquences de ces propositions, nous allons discuter les diverses déterminations possibles du trièdre.

Les équations linéaires (3) et (4) déterminent en général sans ambiguïté les six paramètres du mouvement d'entraînement. Pour les résoudre, on peut d'abord éliminer les paramètres de la translation par une combinaison linéaire qui équivaut à l'emploi d'un trièdre auxiliaire S′ dont les axes seraient parallèles à ceux de S, mais dont l'origine se trouverait au centre de gravité.

Désignons par x', y', z' les coordonnées rapportées au trièdre S′ et posons, comme dans la théorie des moments d'inertie,

$$\begin{aligned} &A = \Sigma m(y'^2 + z'^2), &&B = \Sigma m(z'^2 + x'^2), &&C = \Sigma m(x'^2 + y'^2), \\ &D = \Sigma m y' z', &&E = \Sigma m z' x', &&F = \Sigma m x' y'. \end{aligned}$$

Les composantes p, q, r de la rotation instantanée sont définies par les équations suivantes :

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} Ap - Fq - Er + \sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) &= 0, \\ -Fp + Bq - Dr + \sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) &= 0, \\ -Ep - Dq + Cr + \sum m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le déterminant du système se réduit au discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}.$$

Il est différent de zéro pourvu que l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité soit un véritable ellipsoïde. Dans ces conditions, les valeurs de p, q, r sont déterminées d'une manière univoque en fonction du temps. Une fois les rotations calculées, les équations (3) déterminent les translations.

3. Soient α, β, γ les cosinus des angles que forme l'un quelconque des axes de S_0 avec ceux du trièdre S. Les rotations étant connues, ces cosinus devront satisfaire aux équations différentielles

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + q\gamma - r\beta &= 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + r\alpha - p\gamma &= 0, \\ \frac{d\gamma}{dt} + p\alpha - q\beta &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les systèmes d'équations différentielles de cette forme ont été étudiés en détail par M. Darboux [1], qui en a ramené la résolution à l'étude d'une équation de Riccati.

Les propriétés analytiques du système (6) correspondent aux propriétés cinématiques suivantes :

A toute solution réelle, non nulle, du système (6) correspond une direction.

Deux directions différentes dont les paramètres vérifient les mêmes équations font entre elles un angle constant. Toute autre direction formant des angles constants avec les deux précédentes donne une solution du système (6).

Il est facile, d'après cela, d'envisager l'ensemble des solutions possibles pour le trièdre cherché S_0.

On en obtient une, que nous appellerons T_0, en prenant comme origine le centre de gravité avec trois directions d'axes rectangulaires vérifiant les équations (6).

Tous les autres trièdres du système S_0, qu'ils aient ou non la même origine, correspondent au même système de rotation et, pour chacun d'eux, la vitesse relative du centre de gravité doit être nulle. Leurs axes formeront donc des angles invariables avec ceux de T_0 et l'origine aura des coordonnées constantes par rapport à T_0. Réciproquement, tout trièdre vérifiant ces conditions donnera une solution du problème.

En résumé, les différentes solutions possibles sont constituées par un ensemble de trièdres de référence invariablement liés les uns aux autres.

A un ensemble ainsi constitué, nous donnerons le nom de *solide de référence*. Nous avons ainsi la proposition suivante :

A tout ensemble mobile on peut toujours faire correspondre un solide de référence Σ bien déterminé, tel que la force vive du mouvement relatif de l'ensemble par rapport à Σ soit moindre que pour tout autre système de référence.

Nous dirons que Σ est le *solide principal* de l'ensemble considéré.

---

(1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1887, 1re Partie, Chap. II. *Voir* également la Cinématique de M. Kœnigs où cette question est complètement traitée.

II. — Mouvement relatif d'un ensemble par rapport à son solide principal.

6. Le mouvement relatif d'un ensemble, par rapport à son solide principal, jouit de propriétés intéressantes.

Les propositions I et II du n° **3** expriment que les quantités de mouvement satisfont à des conditions semblables à celles d'un système de forces qui se font équilibre sur un corps solide. Suivant l'expression de M. Appell, elles forment un système de vecteurs glissants équivalent à zéro.

On peut donc leur appliquer la proposition suivante de la statique :

Étant donnés un ensemble de n *points et un système de forces appliquées en ces points, telles que la résultante de translation soit nulle ainsi que le moment résultant par rapport à une certaine origine, il est en général possible de décomposer chacune des forces en composantes dirigées suivant les droites de jonction des points donnés, et telles que l'ensemble total des composantes ainsi obtenues soit constitué par des forces deux à deux égales et directement opposées.*

La décomposition est toujours possible si tous les points ne sont pas dans la même place. Il y a toutefois des cas singuliers, si l'ensemble est constitué par plus de deux points tous en ligne droite, ou par plus de trois points tous dans le même plan. Lorsque la configuration de l'ensemble tendrait vers ces configurations singulières, les composantes obtenues pourraient devenir infinies, à moins que les forces données ne fussent elles-mêmes orientées suivant la droite ou dans le plan de la figure.

La décomposition que nous avons indiquée est possible, en général, d'une infinité de manières quand le nombre des points est supérieur à quatre.

7. *Expression du minimum de force vive relative.* — Supposons qu'on ait effectué sur les quantités de mouvement de l'ensemble une des décompositions possibles, analogues à celles que nous avons considérées pour les forces.

Soient M_i et M_k deux points de l'ensemble; suivant la droite de jonction M_iM_k se trouvent appliquées deux composantes égales et opposées, l'une en M_i, l'autre en M_k. Je désigne par $P_{ik} = P_{ki}$ la valeur commune de ces composantes regardée comme positive si les composantes sont dirigées *en dehors* du segment M_iM_k, et comme négative dans le cas contraire.

L'action élémentaire $\Sigma mv\,ds$ relative à un déplacement de l'ensemble mobile peut être regardée comme la somme des travaux des quantités de mouvement dans ce déplacement. La somme des travaux des deux composantes opposées P_{ik} et P_{ki} a une expression très simple : elle est égale à $P_{ik}\,dr_{ik}$, en désignant par r_{ik} la distance des deux points.

On a donc pour l'action élémentaire, dans le mouvement relatif par rapport au solide principal,

$$\Sigma mv\,ds = \Sigma P_{ik}\,dr_{ik}.$$

D'où l'on tire immédiatement

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma P_{ik}\frac{dr_{ik}}{dt}. \tag{7}$$

L'énergie cinétique minima est donc uniquement due aux variations des distances mutuelles des éléments de l'ensemble mobile. C'est une *énergie cinétique de déformation*.

Elle est nulle quand l'ensemble considéré forme une configuration invariable.

La forme du second membre de l'équation (7) peut varier avec le mode de décomposition adopté, mais les divers résultats restent équivalents.

La possibilité de formes multiples résulte du fait que les distances mutuelles ne sont pas toutes indépendantes.

La configuration de l'ensemble de n points, en effet, indépendamment de sa position, dépend de $3n-6$ paramètres. Le nombre des distances mutuelles est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

La différence

$$\frac{n(n-1)}{2} - (3n-6) = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

représente le nombre des relations nécessaires existant entre les distances.

8. *Énergie cinétique de déformation et énergie cinétique d'entraînement.* — Il y a lieu de comparer l'énergie cinétique minima à l'énergie cinétique du même ensemble, rapporté à un autre système de référence S qui n'appartienne pas au solide principal.

Reportons-nous aux équations (1), (2), (3) du n° **3**. Désignons par $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0$ les paramètres du mouvement d'entraînement du solide principal, et par $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ ceux du nouveau solide de référence.

Posons

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad \ldots, \qquad p = p_0 + p_1, \quad \ldots$$

Les accroissements $\xi_1, \ldots, p_1, \ldots$ définissent le mouvement d'entraînement du solide principal par rapport au solide (S).

Si l'on développe l'expression de l'énergie cinétique T par la formule de Taylor suivant les accroissements $\xi_1, \eta_1, \ldots$, les termes du premier degré disparaissent, en vertu des équations (3) et (4). Comme l'expression est du second degré, le développement se réduira donc à deux groupes de termes : l'un indépendant des accroissements considérés, l'autre homogène et du second degré par rapport à ces accroissements.

Nous posons

$$T = T_0 + T_2. \tag{8}$$

Le premier terme

$$T_0 = T(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0)$$

représente l'énergie cinétique du mouvement relatif de l'ensemble par rapport à son solide principal. C'est l'énergie cinétique de déformation.

Le second terme T_2 est indépendant des vitesses relatives des éléments par rapport au solide principal. Sa valeur, à un instant donné, est la même que si l'ensemble se trouvait solidifié dans la configuration qu'il occupe, et entraîné avec le solide principal dans son mouvement par rapport à (S).

Nous l'appellerons, pour cette raison, l'*énergie cinétique d'entraînement* de l'ensemble.

L'équation (8) exprime donc la proposition suivante :

La force vive d'un ensemble dans son mouvement relatif, par rapport à un solide de référence quelconque (S), *est égale à la force vive du mouvement relatif par rapport au solide principal* (énergie cinétique de déformation) *augmentée de la force vive due au mouvement d'entraînement du solide principal par rapport à* S (énergie cinétique d'entraînement).

Cette proposition complète et généralise le théorème de Kœnig.

On peut y ramener un important théorème donné par Poincaré, au sujet du solide équivalent, dans ses Leçons sur les Figures d'équilibre d'une masse fluide (1).

La force vive d'entraînement pourrait évidemment se décomposer, à son tour, en force vive de translation et force vive de rotation autour du centre de gravité.

9. *Quantités de mouvement et moments.* — Considérons toujours le mouvement de l'ensemble par rapport à un solide quelconque (S) qui ne soit pas invariablement lié au trièdre de coordonnées. Le calcul effectué au n° **3** donne les projections et les moments résultant des quantités de mouvement de l'ensemble mobile

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \Sigma m V_x, \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = \Sigma m (y V_z - z V_y).$$

Dans ces formules, les projections et les moments sont rapportés aux axes du trièdre de coordonnées, mais les vitesses sont relatives au mouvement de l'ensemble par rapport au solide S.

---

(1) Poincaré définit ainsi le solide équivalent : c'est un solide où, à l'instant considéré, les molécules ont la même position que dans le système fluide. La vitesse de son centre de gravité est la même que pour le fluide. Les trois moments de rotation autour des axes principaux d'inertie sont les mêmes que pour la masse fluide. (*Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 31-32.)

Supposons maintenant que le trièdre de coordonnées considéré appartienne au solide principal, et que l'on ait décomposé la force vive T d'après l'égalité (8)

$$T = T_0 + T_2.$$

Le premier groupe T_0 ne contient pas les paramètres du mouvement d'entraînement. On a donc

$$(9) \qquad \Sigma m V_x = \frac{\partial T_2}{\partial \xi}, \qquad \Sigma m(y V_z - z V_y) = \frac{\partial T_2}{\partial p}.$$

Ces quantités dépendent uniquement du mouvement d'entraînement de l'ensemble, elles sont indépendantes des vitesses du mouvement relatif par rapport au solide principal.

Les équations (3) et (4) devaient d'ailleurs conduire, *a priori*, à ce résultat.

La résultante de translation et le moment résultant des quantités de mouvement à un instant donné ne dépendent que du mouvement d'entraînement du solide principal.

En partant des équations (9), on peut mettre sous une forme intéressante l'expression du théorème des moments des quantités de mouvement rapporté au centre de gravité.

Prenons un trièdre de coordonnées T invariablement lié au solide principal et ayant pour origine le centre de gravité, et supposons que le solide de référence S contienne également comme point fixe le centre de gravité. Dans ce cas, la translation d'entraînement est nulle et la force vive d'entraînement T_2 prend la forme suivante, où les coefficients ont les valeurs définies au n° **4** :

$$(10) \qquad T_2 = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq).$$

Soient, d'autre part, P, Q, R les moments résultant, par rapport aux axes du trièdre T, des forces réelles ou apparentes qui correspondent au mouvement de l'ensemble par rapport au solide S.

Un raisonnement classique de la dynamique du corps solide peut s'appliquer ici, et donne les équations suivantes :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial p}\right)+q\left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)-r\frac{\partial T_2}{\partial q}=P,\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial q}\right)+r\frac{\partial T_2}{\partial p}-p\frac{\partial T_2}{\partial r}=Q,\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)+p\frac{\partial T_2}{\partial q}-q\frac{\partial T_2}{\partial p}=R.\end{aligned}\right.$$

La forme de ces équations est la même que celle des équations d'Euler pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Elles en diffèrent cependant par le fait que les coefficients de la forme T_2 sont en général des quantités variables.

Il existe d'ailleurs des équations de la même forme pour les composantes de la translation, quand on laisse au système de référence S toute sa généralité.

Ces résultats ramènent au théorème des forces vives les théorèmes généraux relatifs aux quantités de mouvement des systèmes.

10. *Les forces apparentes dans le mouvement rapporté au solide principal.* — La résultante de translation et le moment résultant des quantités de mouvement étant nuls dans le mouvement relatif de l'ensemble par rapport au solide principal, on en déduit que les forces apparentes qui correspondent au mouvement considéré satisfont à des conditions semblables : la résultante de translation et le moment résultant de ces forces sont également nuls.

Donc :

Les forces susceptibles de produire le mouvement de l'ensemble mobile, tel qu'il a lieu par rapport au solide principal, sont assimilables à des résultantes d'actions mutuelles, deux à deux égales et directement opposées.

Nous rencontrons ici une des propriétés fondamentales qu'on attribue à la matière dans la mécanique newtonienne.

Ce résultat est d'autant plus inattendu que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la composition de l'ensemble mobile, ou sur les mouvements de ses divers éléments.

D'ailleurs dans ce problème très général nous envisageons seulement une possibilité de représentation, sans qu'il puisse être question de définir avec précision chacune des actions mutuelles, ni *a fortiori* de déterminer une loi de gravitation. Nous en définissons seulement les conditions d'existence.

III. — Conditions d'existence de la gravitation.

11. *Systèmes de références pour lesquels il peut exister une loi de gravitation.* — L'action mutuelle, réelle ou apparente, constitue le caractère fondamental de la gravitation newtonienne. Pour qu'on puisse se formuler une loi physique d'action mutuelle, il faut que cette action soit mise en évidence par l'observation du mouvement, ce qui suppose un choix déterminé du système de référence.

Or nous venons de parvenir à un résultat important et curieux. Quel que soit un ensemble mobile et quels que soient les mouvements des éléments qui le composent, il existe toujours un solide de référence tel que le mouvement relatif de l'ensemble par rapport à ce solide paraisse dû uniquement à des actions mutuelles satisfaisant au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

L'ensemble paraît avoir ainsi sa gravitation propre. Nous allons chercher s'il existe d'autres solides de référence satisfaisant aux mêmes conditions.

Nous les obtiendrons en exprimant que la résultante de translation et le moment résultant des forces réelles ou apparentes qui correspondent au mouvement relatif par rapport au solide cherché sont nuls.

Les équations (11) dans lesquelles on fait

$$P = Q = R = 0$$

déterminent celle des solutions qui se déduisent du solide principal par une rotation autour du centre de gravité. En associant à chacune d'elles une translation rectiligne et uniforme, on obtient toutes les autres.

Le solide principal, cependant, se distingue de ces solutions nouvelles par une propriété importante : il est indépendant du mode de repérage du temps.

En d'autres termes, si l'on remplace le temps t par un autre paramètre θ qui ne soit pas une fonction linéaire de φ, et qu'on fasse les mêmes calculs à l'aide du paramètre θ, le solide principal se conserve tandis que les autres solutions trouvées perdent la propriété qui a servi à les définir.

12. *Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Les résultats que nous venons d'établir nous conduisent à une conséquence curieuse au point de vue de la portée en dynamique du principe de l'égalité, de l'action et de la réaction.

Ce principe exprime une propriété du système de référence et non une propriété de la matière.

Il est évidemment compatible avec la réalité physique des actions mutuelles, mais il s'applique uniquement à certains systèmes de référence, indépendamment de toute hypothèse sur la réalité physique ou la simple apparence des actions considérées.

L'application qu'on en fait dans la mécanique classique est néanmoins correcte, parce qu'on suppose toujours le mouvement rapporté à un système particulier de référence, pour lequel il est valable.

La forme particulière de la loi de gravitation newtonienne précise en outre la valeur de chacune des actions mutuelles et achève de définir le sens du principe de réaction, dans le mouvement rapporté au système de référence canonique de la mécanique céleste.

13. *Les systèmes de référence canoniques de la gravitation newtonienne.* — Mais on peut en déduire une réciproque. Le fait même que les mouvements de l'Univers semblent déterminés par des actions mutuelles, au sens de la mécanique classique, suffit pour montrer que le système de référence considéré est, pour l'ensemble de l'Univers observable, l'un de ceux qui peuvent se déduire du solide principal correspondant par les mouvements définis au n° **11**.

D'autre part, la fixité relative de la direction des astres éloignés complète la qualification des systèmes de référence et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Les systèmes de référence canoniques, auxquels la mécanique clas-

sique attache la notion du mouvement absolu, sont constitués par le solide principal correspondant à l'ensemble de l'Univers observable, et par ceux qui s'en déduisent par une translation rectiligne et uniforme.

Ces résultats sont confirmés par le calcul, dans la mesure où il est possible de l'appliquer ici aux données de l'observation.

Il ne peut pas être question de calculer numériquement les coefficients qui figurent dans les équations (5), pour déterminer les rotations du solide principal relatif à l'ensemble de l'Univers observable. Mais, en réalité, ce sont des rapports de moments et de produits d'inertie qui interviennent dans le calcul. Si l'on considère les éléments matériels renfermés dans des sphères de rayons croissants et qu'on admette une distribution quasi uniforme de la matière, les coefficients d'inertie croissent comme les cinquièmes puissances des rayons, tandis que les angles, sous lesquels nous observons les déplacements apparents des astres plus éloignés, tendent vers zéro.

Ces simples remarques permettent de se rendre compte des conditions de détermination du solide principal considéré.

IV. — Définition théorique du temps dans la gravitation newtonienne.

14. Dans les calculs qui précèdent, nous avons en général considéré le temps comme défini. On ne peut évidemment parler de mouvement uniforme si l'on n'a préalablement déterminé le temps auquel on le rapporte. Nous allons examiner les conditions théoriques de cette définition dans la gravitation newtonienne.

Les propriétés qui servent de base à la définition du temps se déduisent de la considération de l'ensemble de l'Univers observable, ou du moins d'une portion très étendue de l'Univers.

Nous prendrons comme système de référence le solide principal de cet ensemble, qui est indépendant du temps. On peut le caractériser par la propriété suivante :

On considère deux positions infiniment voisines de l'ensemble mobile; soit ds le déplacement relatif d'un élément; le solide principal est cons-

titué par l'ensemble des trièdres de référence pour lesquels la somme $\Sigma m\,ds^2$ est minima.

Nous entendons par là que la somme considérée est moindre pour les trièdres appartenant au solide principal que pour tout autre système de référence.

15. *Application du principe de la moindre action.* — Soit U une fonction des distances mutuelles des éléments de l'ensemble. Une pareille fonction reste inaltérée par une transformation euclidienne du système de référence. Le solide principal jouit donc de la même propriété de minimum relativement à l'expression

$$U\Sigma m\,ds^2.$$

Dans l'application du principe de la moindre action aux mouvements de la gravitation newtonienne, on est amené à considérer une expression de cette forme dans laquelle on poserait

$$U = \Sigma\frac{fm_i m_k}{r_{ik}} + h,$$

f et h désignant des constantes.

Nous supposerons seulement, dans la suite, que la fonction se conserve par une transformation euclidienne du système de référence.

Le principe de la moindre action exprime que le mouvement a lieu de telle façon que l'intégrale

$$I = \int\sqrt{U\Sigma m\,ds^2},$$

prise entre deux positions de l'ensemble, soit minima.

Les conditions de ce minimum ne sont pas les mêmes que celles qui définissent le solide principal. Dans le principe de la moindre action, on considère le mouvement rapporté à un système de référence donné, tandis que dans la définition du solide principal, on suppose le mouvement donné et l'on étudie le résultat de la variation du système de référence.

L'intégrale I est indépendante de tout choix du temps; mais, en étudiant les conditions de minimum, on démontre que si l'on prend comme variable indépendante un paramètre t défini par la formule

$$dt = \frac{\sqrt{\Sigma' m\, ds^2}}{\sqrt{2U}}, \tag{12}$$

les équations différentielles du mouvement prennent la forme ordinaire des équations de la mécanique classique.

On doit donc considérer la formule (12) comme donnant une définition théorique du temps, que nous appellerons le temps canonique de la gravitation.

16. Pour la validité de nos résultats, il importe de démontrer qu'il n'y a pas de contradiction entre les conditions considérées.

D'une part, nous avons admis que le système de référence appartient au solide principal et, d'autre part, que le mouvement de l'ensemble par rapport à ce système a lieu suivant une loi donnée.

L'hypothèse faite sur la fonction U indique que le mouvement, au point de vue de la mécanique classique, est analogue à celui qui serait produit par des forces intérieures. On en conclut que la résultante de translation et le moment résultant des quantités de mouvement sont constants. S'ils sont nuls à un instant quelconque du mouvement, ils restent nuls pendant toute la durée du mouvement. Il suffira donc que le système de référence choisi appartienne au solide principal à un instant quelconque du mouvement pour qu'il continue à lui appartenir indéfiniment.

17. *Principe de fractionnement.* — La définition théorique du temps paraît illusoire puisqu'on y fait intervenir les mouvements inconnus des éléments les plus éloignés de l'Univers.

Nous n'observons jamais que des fractions de mouvements dans des fractions d'Univers. Il importe d'examiner quelles indications peuvent nous fournir ces observations fragmentaires au sujet du temps canonique.

L'étude de ce problème présente une corrélation intéressante avec le problème géométrique des géodésiques des surfaces, dont l'élément linéaire est de la forme de Liouville.

Définissons la position de l'ensemble à l'aide de paramètres quelconques suivant la méthode de Lagrange. La forme quadratique $\Sigma m\, ds^2$ deviendra une forme quadratique des différentielles des nouvelles variables.

Nous poserons

$$\Sigma m\, ds^2 = (2\mathrm{T}).$$

L'emploi de la parenthèse, suivant une notation employée par Darboux, indique qu'il s'agit d'une forme de différentielles. En remplaçant ces différentielles par les dérivées prises par rapport au temps on à la forme de dérivées $2\mathrm{T}$, qui se représente par la même notation sans parenthèse.

Admettons maintenant que les variables de position puissent se diviser en deux groupes et que la fonction U et la forme $2\mathrm{P}$ se décomposent chacune en une somme

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2,$$
$$(2\mathrm{T}) = (2\mathrm{T}_1) + (2\mathrm{T}_2),$$

de telle manière que les variables du premier groupe figurent seulement dans U_1 et $(2\mathrm{T}_1)$, et celles du second groupe dans U_2 et $(2\mathrm{T}_2)$.

Introduisons maintenant le temps canonique relatif au mouvement général de l'ensemble et écrivons les équations du mouvement sous la forme de Lagrange. Le système entier de ces équations différentielles se scinde en deux groupes, chacun relatif à un groupe de variables.

Le théorème des forces vives s'applique à chacun des groupes et donne des résultats de la forme suivante :

$$\frac{(2\mathrm{T}_1)}{dt^2} = 2(\mathrm{U}_1 + h_1),$$
$$\frac{2\mathrm{T}_2}{dt^2} = 2(\mathrm{U}_2 + h_2),$$

avec la condition $h_1 + h_2 = 0$.

D'où

$$dt^2 = \frac{(2\mathrm{T}_1)}{2(\mathrm{U}_1 + h_1)} = \frac{(2\mathrm{T}_3)}{2(\mathrm{U}_2 + h_2)} = \frac{(2\mathrm{T})}{2\mathrm{U}}.$$

Par suite :

Le temps canonique correspondant au mouvement général de l'ensemble *est aussi le temps canonique qui correspond à chacun des mouvements fragmentaires.*

Dans la pratique, il est évidemment difficile de trouver des variables de position satisfaisant rigoureusement aux conditions que nous avons posées. Mais en toutes choses, il faut se contenter d'approximations. Quand nous étudions le mouvement d'un pendule, nous négligeons les variations de gravitation qui peuvent résulter de l'action du soleil, de la lune ou des étoiles, et nous négligeons aussi *a fortiori* l'influence des oscillations de ce même pendule sur les mouvements des astres.

C'est dans ces conditions que les mouvements fragmentaires tels que l'oscillation d'un pendule ou la rotation de la Terre peuvent nous fournir une représentation approximative du temps canonique de la gravitation universelle, défini par l'ensemble des mouvements de l'Univers observable.

18. Nous avons ainsi défini les caractères fondamentaux du système de référence canonique et ceux du temps canonique de la Mécanique.

Le problème du solide de référence principal n'introduit que la notion très générale de déplacement continu, sans aucune hypothèse sur la nature des déplacements des éléments.

La définition du temps canonique introduit au contraire un élément expérimental : la connaissance de la loi physique de la gravitation.

Cette différence s'explique. La notion de temps en Mécanique comporte nécessairement une idée de coordination et de répétition de mouvements semblables ou ayant au moins des caractères permanents et communs. Elle se relie par là à la notion générale de loi physique.