JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. KAMPÉ DE FÉRIET

Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell au moyen des fonctions modulaires de M. Picard

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 381-399.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__381_0>

Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell au moyen des fonctions modulaires de M. Picard;

Par J. KAMPÉ DE FÉRIET.

---

1. Je me propose de mettre en évidence, dans ce travail, un lien nouveau, qui semble être très naturel, entre les fonctions hypergéométriques de M. Appell et les fonctions modulaires de M. Picard : que les deux illustres maîtres, dont ce journal célèbre le jubilé scientifique, veuillent bien agréer en hommage de très profond respect, ces lignes qui ne font que rapprocher deux chapitres de leur œuvre mathématique.

Les fonctions hypergéométriques, dont il sera question dans ce travail, sont les quatre fonctions de deux variables, introduites dans l'Analyse par M. Appell (1); je ne m'occuperai explicitement, à vrai dire, que de la seule fonction $\mathcal{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$; mais cela suffit dans le cas actuel, car les trois autres fonctions se ramènent immédiatement à celle-là par des transformations simples.

Le symbole $\mathcal{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ désigne la *fonction* des deux variables complexes x et y, définie par le prolongement analytique de la *série* double hypergéométrique

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

(1) Pour ce qui concerne ces fonctions, voir P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; polynomes d'Hermite* (Gauthier-Villars, 1926). *Voir* aussi : P. APPELL, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables*, ... (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. III).

dont le domaine de convergence absolue est $|x| < 1$, $|y| < 1$. Cette fonction vérifie le système de trois équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0, \\ (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{F}_1$ est une fonction multiforme, admettant dans l'espace à quatre dimensions $\mathcal{E}_4 [\mathcal{R}(x), \mathcal{I}(x), \mathcal{R}(y), \mathcal{I}(y)]$ sept multiplicités singulières à deux dimensions

$$(2)\quad x=0,\quad x=1,\quad x=\infty,\quad y=0,\quad y=1,\quad y=\infty,\quad x=y.$$

Entre quatre branches de $\mathcal{F}_1$ existe une relation linéaire à coefficients constants; en dehors des multiplicités (2) toute branche est holomorphe; dans le domaine d'un point d'une multiplicité singulière on connaît toujours trois branches indépendantes, qui sont égales à des fonctions holomorphes multipliées par des facteurs de forme simple.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine déduit de $\mathcal{E}_4$, en y traçant comme coupures les cinq multiplicités à trois dimensions

$$(3)\quad \begin{cases} +1 \leqq \mathcal{R}(x) < +\infty, & \mathcal{I}(x) = 0; & +1 \leqq \mathcal{R}(y) < +\infty, & \mathcal{I}(y) = 0; \\ -\infty < \mathcal{R}(x) \leqq 0, & \mathcal{I}(x) = 0; & -\infty < \mathcal{R}(y) \leqq 0, & \mathcal{I}(y) = 0; \\ 0 \leqq \mathcal{R}(y-x) < +\infty, & \mathcal{I}(y-x) = 0. \end{cases}$$

Toute branche de $\mathcal{F}_1$ est uniforme dans $\mathcal{D}$; on passe d'une branche à une autre quand on franchit une des cinq coupures; exceptionnellement la branche principale $\mathcal{F}_1'$, — prolongement direct de la série, — est régulière pour $x=0$, $y=0$, $y=x$; elle reste donc uniforme quand on ne conserve comme coupures que les deux premières multiplicités (3); M. Picard (¹) a établi que cette branche particulière est représentée dans tout son domaine d'existence par l'intégrale

$$(4)\quad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\mathcal{F}_1' = \int_1^{+\infty} t^{\beta+\beta'-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}(t-y)^{-\beta'}\,dt.$$

(¹) E. PICARD, *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 1267).

Ce résultat suppose que $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ et $\mathcal{R}(\gamma - \alpha) > 0$; mais on peut toujours se ramener à ce cas, moyennant des formules de récurrence [1].

Les fonctions modulaires de deux variables ont été découvertes par M. Picard [2], en considérant le système des équations (1) pour la fonction $\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, x, y\right)$; en désignant par z_1, z_2, z_3 trois intégrales indépendantes, convenablement choisies, de ce système, il a démontré que l'inversion des rapports

$$\xi = \frac{z_2(x, y)}{z_1(x, y)}, \qquad \eta = \frac{z_3(x, y)}{z_1(x, y)}$$

donne pour x et y deux fonctions uniformes $x = \mathrm{X}(\xi, \eta)$, $y = \mathrm{Y}(\xi, \eta)$, holomorphes dans tout leur domaine d'existence Δ

$$|\eta|^2 + 2\mathcal{R}(\xi) < 0, \tag{5}$$

et demeurant invariantes pour toutes les substitutions linéaires

$$\xi' = \frac{\mathrm{A}'\xi + \mathrm{B}'\eta + \mathrm{C}'}{\mathrm{A}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{C}}, \qquad \eta' = \frac{\mathrm{A}''\xi + \mathrm{B}''\eta + \mathrm{C}''}{\mathrm{A}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{C}} \tag{6}$$

d'un groupe S dérivant de cinq substitutions fondamentales. Ces deux fonctions forment ainsi un exemple très simple de fonctions hyperfüchsiennes et leur analogie avec la fonction modulaire justifie pleinement leur nom.

Si l'on exprime paramétriquement les variables x et y par les deux fonctions modulaires $x = \mathrm{X}(\xi, \eta)$, $y = \mathrm{Y}(\xi, \eta)$, la fonction hypergéométrique $\mathcal{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ devient elle-même une fonction uniforme $\mathcal{F}_1 = \mathrm{F}(\xi, \eta)$, régulière dans tout son domaine d'existence Δ; lorsqu'on effectue sur ξ et η les substitutions du groupe S, x et y reprennent la même valeur, tandis que les valeurs de $\mathrm{F}(\xi, \eta)$ représentent successivement les diverses branches de la fonction $\mathcal{F}_1$.

---

(1) On peut aussi se débarrasser de cette restriction en remplaçant l'intégrale prise le long d'un chemin rectiligne par une intégrale prise le long d'un double lacet de Jordan-Pochhammer.

(2) E. PICARD, *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, t. 2, 1883, p. 114); *voir* aussi t. 1, 1882, p. 297, et t. 5, 1884, p. 121; *Annales Sc. de l'École Normale*, 3e série, t. 2, 1885, p. 381; *Bulletin de la Société mathématique*, t. 15, 1886, p. 148.

J'établirai ce résultat [1] en donnant à partir de l'intégrale (4) une expression effective de la fonction uniforme $F(\xi, \eta)$, au moyen des fonctions thêta de trois variables liées à la relation algébrique, dont l'étude fait l'objet des numéros suivants.

2. La relation algébrique de genre 3,

$$s^3 = (t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)(t-e_4), \tag{7}$$

a été d'abord étudiée d'une manière approfondie par J. Thomæ [2]; dans ce travail très complet, qui semble malheureusement avoir échappé à ceux qui se sont ensuite occupés de la question, il établit ce résultat fondamental que les neuf modules de périodicité des intégrales normales de première espèce s'expriment au moyen de deux d'entre eux; puis il donne de nombreuses formules importantes relatives aux fonctions thêta formées avec ces modules, notamment les expressions des racines cubiques $\sqrt[3]{(t_1-e_\alpha)(t_2-e_\alpha)(t_3-e_\alpha)}$ et des quantités $\sqrt[3]{\dfrac{e_\beta-e_\alpha}{e_\gamma-e_\alpha}}$ au moyen de quotients de fonctions thêta; j'utiliserai très souvent ses résultats, en adaptant toujours ses notations à celles qui me semblent les plus courantes [3].

La relation (7) fut de nouveau considérée par M. Picard dans le mémoire fondamental [4] qui le conduisit à la découverte de ses fonctions modulaires; il retrouva le résultat relatif aux modules de périodicité et donna l'expression élégante (16) de ces neuf modules.

Cette même relation joue encore un grand rôle dans un mémoire de M. R. Alezais [5], consacré à approfondir l'étude des fonctions de M. Picard, qui contient plusieurs résultats intéressants sur le groupe

---

(1) Un bref résumé de la démonstration a été communiqué au Congrès des Mathématiciens à Bologne le 5 septembre 1928.

(2) J. Thomae, *Ueber eine specielle Klasse Abelscher Functionen vom Geschlecht* 3. (L. Nebert, Halle, 1879). — Ce Mémoire sera désigné en abrégé par T.

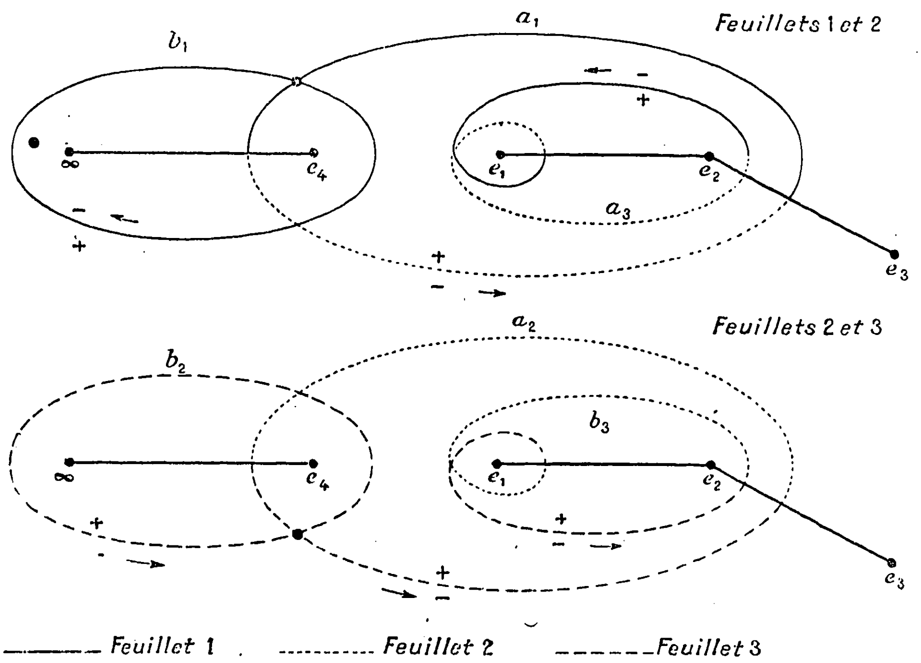
(3) En tâchant notamment de conserver le plus possible les notations du *Lehrbuch der Thetafunktionen* de A. Krazer.

(4) *Acta mathematica*, t. 2.

(5) R. Alezais, *Sur une classe de fonctions hyperfüchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent* (*Annales Sc. de l'École Normale*, 3e série, t. 19, 1902, p. 261).

S et le groupe T dont il est un sous-groupe et quelques-unes des formules de transformation des fonctions thêta.

3. La surface de Riemann de la fonction $s(t)$ a trois feuillets et cinq points de ramifications; la figure indique comment Thomæ choisit les lignes de passage et connecte les feuillets; les trois rétrosections



(a_α, b_α) $(\alpha = 1, 2, 3)$ sont également en évidence; nous désignerons par (t, s) un point de la surface de Riemann, par R cette surface, par R′ cette surface rendue simplement connexe. Comme il intervient à chaque instant une racine cubique de l'unité, posons pour abréger

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

4. Considérons les trois intégrales de première espèce linéairement indépendantes

$$(8) \qquad w_1(t, s) = \int_{(\infty, \infty)}^{(t, s)} \frac{dt}{s}, \qquad w_2(t, s) = \int_{(\infty, \infty)}^{(t, s)} \frac{dt}{s^2}, \qquad w_3(t, s) = \int_{(\infty, \infty)}^{(t, s)} \frac{t\,dt}{s^2};$$

soient $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\beta}$ les modules de périodicité de $w_\alpha(t, s)$ relatifs aux coupures de première et deuxième espèce a_β et b_β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Des formules données par Thomæ, on déduit qu'en posant

$$(9)\qquad \frac{B_{\alpha 2}}{A_{\alpha 1}} = -\xi_\alpha, \qquad \frac{A_{\alpha 3}}{A_{\alpha 1}} = \eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

le tableau des 18 modules prend la forme suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{llllll} A_{11}, & A_{12} = -j\,A_{11}, & A_{13} = \eta_1 A_{11}, & B_{11} = -j\,\xi_1 A_{11}, & B_{12} = -\xi_1 A_{11}, & B_{13} = -j\,\eta_1 A_{11}; \\ A_{21}, & A_{22} = -j^2 A_{21}, & A_{23} = \eta_2 A_{21}, & B_{21} = -j^2 \xi_2 A_{21}, & B_{22} = -\xi_2 A_{21}, & B_{23} = -j^2 \eta_2 A_{21}; \\ A_{31}, & A_{32} = -j^2 A_{31}, & A_{33} = \eta_3 A_{31}, & B_{31} = -j^2 \xi_3 A_{31}, & B_{32} = -\xi_3 A_{31}, & B_{33} = -j^2 \eta_3 A_{31} \end{array}\right.$$

En outre, entre les ξ_α, η_α on a les deux relations

$$(11)\qquad \eta_1\eta_2 + \xi_1 + \xi_2 = 0, \qquad \eta_2\eta_3 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

Introduisons trois intégrales proportionnelles aux premières

$$(12)\qquad W_1(t, s) = \frac{1}{1-j}\,\frac{w_1(t, s)}{A_{11}}, \qquad W_2(t, s) = \frac{1}{1-j^2}\,\frac{w_2(t, s)}{A_{21}},$$
$$W_3(t, s) = \frac{1}{1-j^2}\,\frac{w_3(t, s)}{A_{31}};$$

les valeurs prises (sur R′) par ces intégrales aux points de ramification ont une forme très simple

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} 3W_\alpha(\infty, \infty) = 0, & 3W_\alpha(e_1, 0) = 1 + \xi_\alpha + 2\eta_\alpha, & \\ 3W_\alpha(e_2, 0) = 1 + \xi_\alpha + \eta_\alpha, & 3W_\alpha(e_3, 0) = \xi_\alpha, & 3W_\alpha(e_4, 0) = 1. \end{array}\right.$$

Comme il est clair, d'après (9), que les ξ_α, η_α sont des fonctions homogènes de degré 0 des e_α, on tire immédiatement de ces formules

$$\xi_\alpha = \frac{W_\alpha(e_3, 0)}{W_\alpha(e_4, 0)}, \qquad \eta_\alpha = \frac{W_\alpha(e_1, 0) - W_\alpha(e_2, 0)}{W_\alpha(e_4, 0)}.$$

3. Soient $u_1(t, s)$, $u_2(t, s)$, $u_3(t, s)$ les trois intégrales normales de première espèce; le tableau de leurs modules de périodicité devra être de la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{lcccccc} & a_1. & a_2. & a_3. & b_1. & b_2. & b_3. \\ u_1\ldots\ldots & 1 & 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ u_2\ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ u_3\ldots\ldots & 0 & 0 & 1 & \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{array}\right.$$

En exprimant que les périodes des u_α sur les coupures a_β ont les valeurs voulues et en se reportant au tableau (10), qui donne immédiatement les périodes des W_α pour ces mêmes coupures, on obtient les trois relations

$$(15)\quad \begin{cases} (1-j)\,W_1 = \dfrac{w'_1}{\Lambda_{11}} = u_1 - j\,u_2 + \eta_1 u_3, \\ (1-j^2)\,W_2 = \dfrac{w'_2}{\Lambda_{21}} = u_1 - j^2 u_2 + \eta_2 u_3, \\ (1-j^2)\,W_3 = \dfrac{w'_3}{\Lambda_{31}} = u_1 - j^2 u_2 + \eta_3 u_3. \end{cases}$$

De ces équations, en considérant les coupures b_β et en prenant dans le tableau (10) les valeurs des $B_{\alpha\beta}$, on déduit ce résultat que les neuf modules $\tau_{\alpha\beta}$ s'expriment très simplement au moyen des ξ_α, η_α et même, en tenant compte des relations (11), au moyen de ξ_1, η_1; j'écrirai désormais ξ, η, en supprimant l'indice, à la place de ξ_1, η_1,

$$(16)\quad \begin{cases} \tau_{11} = \frac{1}{3} j(j-1)(2\xi + j\eta^2), & \tau_{12} = \frac{1}{3}(j-1)(-j\xi + \eta^2), & \tau_{13} = j^2\eta, \\ \tau_{21} = \frac{1}{3}(j-1)(-j\xi + \eta^2), & \tau_{22} = \frac{1}{3} j(j-1)(2\xi + \eta^2), & \tau_{23} = \eta, \\ \tau_{31} = j^2\eta, & \tau_{32} = \eta, & \tau_{33} = -j^2. \end{cases}$$

Ce tableau est identique, à des changements de notations près, à celui de M. Picard.

De (13) et (15) on tire facilement les valeurs des intégrales normales (sur R′) aux points de ramification (T., p. 15):

	$3u_1(t,s)$	$3u_2(t,s)$	$3u_3(t,s)$
(∞, ∞)	0	0	0
$(e_1, 0)$	$1 + \tau_{11} - \tau_{12} + 2\tau_{13}$	$1 + \tau_{21} - \tau_{22} + 2\tau_{23}$	$2 + \tau_{31} - \tau_{32} + 2\tau_{33}$
$(e_2, 0)$	$1 + \tau_{11} - \tau_{12} + \tau_{13}$	$1 + \tau_{21} - \tau_{22} + \tau_{23}$	$1 + \tau_{31} - \tau_{32} + \tau_{33}$
$(e_3, 0)$	$\tau_{11} - \tau_{12}$	$\tau_{21} - \tau_{22}$	$\tau_{31} - \tau_{32}$
$(e_4, 0)$	1	1	0

6. Introduisons maintenant les fonctions thêta de trois variables construites avec les modules $\tau_{\alpha\beta}$ du tableau (16); soit d'abord

$$(17)\quad \varphi(m_1, m_2, m_3) = \pi i \sum \tau_{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta$$

la forme quadratique fondamentale construite avec ces modules. La série triple qui définit la fonction thêta avec une caractéristique donnée s'écrit :

$$(18)\qquad \mathfrak{S}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}(v_1, v_2, v_3) = \sum e^{f(m_1, m_2, m_3)},$$

$$f(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1 + g_1, m_2 + g_2, m_3 + g_3) + 2\pi i[(m_1+g_1)(v_1+h_1) + (m_2+g_2)(v_2+h_2) + (m_3+g_3)(v_3+h_3)],$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles des m_α. Pour que la série (18) soit absolument et uniformément convergente (par rapport aux v_α) il faut et il suffit que la forme quadratique $\Sigma\,\mathcal{I}(\tau_{\alpha\beta})m_\alpha m_\beta$ soit définie positive, ce qui, toutes réductions faites, s'exprime par la condition

$$(5)\qquad |\eta|^2 + 2\,\mathcal{R}(\xi) < 0.$$

Toute fonction thêta est donc une fonction entière de v_1, v_2, v_3, tant que ξ, η est dans le domaine Δ défini par (5); *en outre c'est une fonction de ξ, η par l'intermédiaire des $\tau_{\alpha\beta}$; il ressort immédiatement de* (16) *que c'est une fonction uniforme et régulière de ξ, η dans tout le domaine* Δ.

Les caractéristiques des fonctions thêta, qui interviennent dans ce problème, appartiennent toutes à un même type, ce qui permettra d'introduire un symbole plus maniable que (18) en posant

$$(19)\qquad \mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_1, v_2, v_3) = e^{\frac{2\pi i}{3}\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{3}\right)}\mathfrak{S}\begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} & -\frac{\mu}{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{\nu}{3} & -\frac{\nu}{3} & -\frac{\mu}{3}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}(v_1, v_2, v_3);$$

λ, μ, ν désignant trois entiers positifs, nuls ou négatifs; quand nous n'aurons pas besoin de mettre explicitement en évidence les trois variables v_1, v_2, v_3 nous écrirons même d'une façon plus abrégée $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha)$; en particulier nous désignerons toujours $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(0, 0, 0)$ par $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(0)$.

Les propriétés de périodicité d'une telle fonction sont résumées dans la formule suivante, où les p_α et q_α désignent six entiers arbitraires :

$$(20)\qquad \mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha + q_\alpha + p_1\tau_{\alpha 1} + p_2\tau_{\alpha 2} + p_3\tau_{\alpha 3}) = e^{-\mathrm{H}}\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha),$$

$$\mathrm{H} = \varphi(p_1, p_2, p_3) + 2\pi i\left[p_1\left(v_1 - \frac{\nu}{3}\right) + p_2\left(v_2 - \frac{\nu}{3}\right) + p_3\left(v_3 - \frac{\mu}{3} + \frac{1}{2}\right) + q_1\frac{\lambda}{3} - q_2\frac{\lambda}{3} - q_3\left(-\frac{\mu}{3} + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Parmi ces fonctions il n'y en a que vingt-sept qui sont essentiellement distinctes, car on peut toujours se ramener au cas où λ, μ, ν ne prennent chacun que l'une des trois valeurs o, 1, 2, au moyen des relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{S}_{\lambda+3,\mu,\nu}(v_\alpha)=\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha),\\ \mathfrak{S}_{\lambda,\mu+3,\nu}(v_\alpha)=e^{-\frac{2\pi i}{3}\mu}\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha),\\ \mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu+3}(v_\alpha)=\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha). \end{array}\right.$$

Sur les vingt-sept fonctions $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(o)$ de ce type il y en a quinze nulles; les douze qui ne sont pas nulles se réduisent à six au moyen de la formule

$$\mathfrak{S}_{-\lambda,-\mu,-\nu}(o)=\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(o),$$

combinée avec les relations (21). Nous conservons les six fonctions

$$\mathfrak{S}_{0,1,1}(o),\quad \mathfrak{S}_{2,1,0}(o),\quad \mathfrak{S}_{0,1,2}(o),\quad \mathfrak{S}_{1,1,0}(o),\quad \mathfrak{S}_{0,1,0}(o),\quad \mathfrak{S}_{1,0,2}(o).$$

D'une manière plus générale, toute fonction $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha)$ où

$$v_1=\frac{\nu'+\lambda'(\tau_{11}-\tau_{12})+\mu'\tau_{13}}{3},\qquad v_2=\frac{\nu'+\lambda'(\tau_{21}-\tau_{22})+\mu'\tau_{23}}{3},$$
$$v_3=\frac{\mu'+\lambda'(\tau_{31}-\tau_{32})+\mu'\tau_{33}}{3},$$

λ', μ', ν' désignant trois entiers arbitraires, est ou bien nulle ou bien se ramène aux six fonctions ci-dessus, puisqu'elle est égale à

$$e^{-\frac{1}{9}\rho(\lambda'_1-\lambda',\mu'_1)-\frac{2\pi i}{9}\mu\mu'}\mathfrak{S}_{\lambda-\lambda',\mu-\mu',\nu-\nu'}(o).$$

7. Ces préliminaires étant posés, abordons la solution, donnée par Thomæ (p. 34 à 39) du problème d'inversion de Jacobi pour les intégrales $u_\alpha(t, s)$. En désignant par (t_1, s_1), (t_2, s_2), (t_3, s_3) trois points quelconques de R, nous prendrons comme arguments des fonctions $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha)$ les trois quantités

$$v_\alpha=u_\alpha(t_1, s_1)+u_\alpha(t_2, s_2)+u_\alpha(t_3, s_3).$$

Les quatre formules fondamentales de Thomæ prennent alors la forme, quelque peu simplifiée grâce aux notations du n° 6

$$(22)\qquad \sqrt[3]{\frac{(t_1-e_1)(t_2-e_1)(t_3-e_1)}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)(e_4-e_1)}} = \frac{\vartheta_{1.2.1}(v_\chi)}{\vartheta_{0.0.0}(v_\chi)},$$

$$(23)\qquad \sqrt[3]{\frac{(t_1-e_2)(t_2-e_2)(t_3-e_2)}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)(e_4-e_2)}} = \frac{\vartheta_{1.1.1}(v_\chi)}{\vartheta_{0.0.0}(v_\chi)},$$

$$(24)\qquad \sqrt[3]{\frac{(t_1-e_3)(t_2-e_3)(t_3-e_3)}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)(e_4-e_3)}} = \frac{\vartheta_{1.0.0}(v_\chi)}{\vartheta_{0.0.0}(v_\chi)},$$

$$(25)\qquad \sqrt[3]{\frac{(t_1-e_4)(t_2-e_4)(t_3-e_4)}{(e_1-e_4)(e_2-e_4)(e_3-e_4)}} = \frac{\vartheta_{0.0.1}(v_\chi)}{\vartheta_{0.0.0}(v_\chi)}.$$

De ces formules on déduit d'abord les expressions des racines cubiques des rapports $\frac{e_\beta - e_\chi}{e_\gamma - e_\chi}$ par des quotients des six fonctions $\vartheta_{\lambda.\mu.\nu}$ à arguments nuls

$$(26)\qquad \sqrt[3]{\frac{e_2-e_1}{e_4-e_1}} = \frac{\vartheta_{1.0.2}(0)}{\vartheta_{0.1.1}(0)}, \qquad \sqrt[3]{\frac{e_3-e_1}{e_4-e_1}} = \frac{\vartheta_{1.1.0}(0)}{\vartheta_{0.1.1}(0)},$$

$$\sqrt[3]{\frac{e_3-e_2}{e_4-e_1}} = \frac{\vartheta_{2.1.0}(0)}{\vartheta_{0.1.1}(0)}, \qquad \sqrt[3]{\frac{e_4-e_2}{e_4-e_1}} = \frac{\vartheta_{0.1.2}(0)}{\vartheta_{0.1.1}(0)},$$

$$\sqrt[3]{\frac{e_4-e_3}{e_4-e_1}} = \frac{\vartheta_{0.1.0}(0)}{\vartheta_{0.1.1}(0)}.$$

La première de ces équations, par exemple, se déduit de (22) en faisant $t_1 = t_2 = e_4$, $t_3 = e_3$, d'où d'après le tableau de la page 387,

$$v_1 = \frac{1 + 2(\tau_{11} - \tau_{21})}{3}, \qquad v_2 = \frac{1 + 2(\tau_{21} - \tau_{22})}{3}, \qquad v_3 = \frac{2(\tau_{31} - \tau_{32})}{3},$$

on applique ensuite aux fonctions $\vartheta_{1.2.1}$ et $\vartheta_{0.0.0}$ de ces arguments les formules de réduction du n° 6.

Si nous faisons maintenant dans les formules (22) à (25)

$$t_1 = t_2 = t_3 = t,$$

d'où $v_\chi = 3u_\chi(t, s)$, nous obtenons en tenant compte de (26)

$$(27)\qquad \frac{t-e_1}{e_4-e_1} = \frac{\vartheta_{1.0.2}(0)\,\vartheta_{1.1.0}(0)}{\vartheta^2_{0,1,1}(0)}\;\frac{\vartheta_{1.2.1}[3u_\chi(t,s)]}{\vartheta_{0.0.0}[3u_\chi(t,s)]},$$

$$(28)\qquad \frac{t-e_2}{e_4-e_1} = \frac{\vartheta_{1.0.2}(0)\,\vartheta_{2.1.0}(0)\,\vartheta_{0.1.2}(0)}{\vartheta^3_{0,1,1}(0)}\;\frac{\vartheta_{1.1.1}[3u_\chi(t,s)]}{\vartheta_{0.0.0}[3u_\chi(t,s)]},$$

$$(29)\qquad \frac{t-e_3}{e_4-e_1} = \frac{\vartheta_{1.1.0}(0)\,\vartheta_{2.1.0}(0)\,\vartheta_{0.1.0}(0)}{\vartheta^3_{0,1,1}(0)}\;\frac{\vartheta_{1.0.0}[3u_\chi(t,s)]}{\vartheta_{0.0.0}[3u_\chi(t,s)]},$$

$$(30)\qquad \frac{t-e_4}{e_4-e_1} = \frac{\vartheta_{0.1.2}(0)\,\vartheta_{0.1.0}(0)}{\vartheta^2_{0,1,1}(0)}\;\frac{\vartheta_{0.0.1}[3u_\chi(t,s)]}{\vartheta_{0.0.0}[3u_\chi(t,s)]}.$$

Nous compléterons ces divers résultats par une dernière formule importante (T, p. 50); le module A_{11} est évidemment homogène de degré $-1:3$ par rapport aux e_α; les quantités $\sqrt[3]{e_\beta - e_\alpha}\,A_{11}$ s'expriment très simplement par des fonctions $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(0)$; une seule de ces formules suffira ici,

$$\sqrt[3]{e_4 - e_1}\,A_{11} = k\mathfrak{S}_{0,1,1}(0), \tag{31}$$

k désignant une constante purement numérique, indépendante des e_α.

8. La relation algébrique (7) a le grand avantage d'être homogène par rapport aux e_α; mais il faut, pour revenir à l'intégrale (4), abandonner l'homogénéité en posant

$$e_1 = 0, \qquad e_2 = x, \qquad e_3 = y, \qquad e_4 = 1. \tag{32}$$

Les formules (26) nous conduisent alors directement aux fonctions modulaires de M. Picard.

Les expressions de

$$\sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[3]{y}, \quad \sqrt[3]{y - x}, \quad \sqrt[3]{1 - x}, \quad \sqrt[3]{1 - y},$$

par des quotients des six fonctions $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu,\nu}(0)$ non nulles, démontrent que ce sont des fonctions de ξ,η (par l'intermédiaire des $\tau_{\alpha\beta}$) uniformes et régulières dans tout le domaine Δ

$$|\eta|^2 + 2\mathcal{R}(\xi) < 0, \tag{5}$$

en outre chacune de ces fonctions reste évidemment différente de zéro dans tout le domaine Δ.

On déduit, en particulier, de (26) les expressions, *a fortiori* uniformes, de x et y en fonction de ξ,η,

$$x = X(\xi, \eta) = \frac{\mathfrak{S}^3_{1,0,2}(0)}{\mathfrak{S}^3_{0,1,1}(0)}, \qquad y = Y(\xi, \eta) = \frac{\mathfrak{S}^3_{1,1,0}(0)}{\mathfrak{S}^3_{0,1,1}(0)}. \tag{33}$$

A un point (ξ,η) de Δ ces formules font correspondre un point (x,y) de $\mathcal{E}_4$ non situé sur une des sept multiplicités singulières (2); réciproquement les formules, tirées de (13),

$$(34)\qquad \xi = \frac{\varpi_1(y,0)}{\varpi_1(1,0)} = \frac{\displaystyle\int_{(\infty,\infty)}^{(y,0)} \frac{dt}{s}}{\displaystyle\int_{(\infty,\infty)}^{(1,0)} \frac{dt}{s}}, \qquad \eta = \frac{\varpi_1(0,0) - \varpi_1(x,0)}{\varpi_1(1,0)} = \frac{\displaystyle\int_{(x,0)}^{(0,0)} \frac{dt}{s}}{\displaystyle\int_{(\infty,\infty)}^{(0,0)} \frac{dt}{s}},$$

montrent qu'à tout point de $\mathcal{E}_4$ correspondent une infinité de points (ξ,η) qui se déduisent les uns des autres par des substitutions linéaires de la forme (6) formant un groupe S. C'est bien le résultat qu'avait obtenu M. Picard en remarquant que les numérateurs et dénominateurs de (34) sont des intégrales particulières du système d'équations (1) de la fonction $\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, x, y\right)$. Il a démontré que le groupe S dérive des cinq substitutions fondamentales

$$\begin{array}{lll}
S_1 & \xi' = \xi, & \eta' = j^2\eta, \\
S_2 & \xi' = \xi + j(1-j)\eta + j^2 - 1, & \eta' = j^2\eta + 1 - j, \\
S_3 & \xi' = \xi + (1-j^2)\eta + j^2 - 1, & \eta' = j^2\eta + 1 - j^2, \\
S_4 & \xi' = \dfrac{j\xi + j^2 - 1}{(j^2-1)\xi - 2j}, & \eta' = \dfrac{\eta}{(j^2-1)\xi - 2j}, \\
S_5 & \xi' = \dfrac{\xi}{(j^2-1)\xi + (1-j)\eta + 1}, & \eta' = \dfrac{j(1-j)\xi + j^2\eta}{(j^2-1)\xi + (1-j)\eta + 1}.
\end{array}$$

Les substitutions fondamentales transformant en lui-même le domaine Δ, toutes les images (ξ, η) d'un point (x, y) de $\mathcal{E}_4$ non situé sur une multiplicité singulière sont donc à l'intérieur de Δ. Quand (ξ, η) décrit une courbe fermée intérieure à Δ, (x, y) décrit aussi une courbe fermée dans $\mathcal{E}_4$; mais la réciproque n'est pas vraie : lorsque (ξ, η) décrit une courbe non fermée, dont l'origine et l'extrémité sont deux points congrus par une substitution de S, (x, y) décrit encore une courbe fermée.

Une courbe fermée de $\mathcal{E}_4$ correspond à une courbe fermée de Δ ou à une courbe joignant deux points congrus, selon qu'elle peut ou non se réduire à un point sans traverser une des multiplicités singulières.

Considérons, en effet, *le polyèdre fondamental* P_0 du groupe S; M. Picard appelle ainsi un domaine à quatre dimensions, intérieur à Δ, tel que, étant donné un point quelconque de Δ, il existe toujours un et un seul point appartenant à P_0 qui soit congru au point donné par une substitution de S. Le polyèdre P_0 admet pour frontière 10 faces à trois dimensions, les arêtes à deux dimensions correspondant aux multiplicités singulières (2) étant situées sur la frontière de Δ. Les substitutions de S transforment P_0 en une infinité dénombrable de polyèdres P, remplissant Δ sans jamais se recouvrir; deux polyèdres contigus ont en commun une de leurs faces à trois dimensions.

Les fonctions modulaires (33) *établissent une correspondance biunivoque entre les points intérieurs de l'un quelconque des polyèdres* P *et le domaine* $\mathcal{D}$ (défini p. 382), *les faces-frontière de* P *correspondant aux cinq multiplicités coupure* (3) (*de manière qu'à une coupure correspondent deux faces de* P).

Nous pouvons donc préciser la proposition concernant les courbes joignant deux points congrus de Δ. Soit, par exemple, P_1 un des polyèdres contigus à P_0, que nous supposerons avoir en commun avec P_0 une des faces correspondant à la coupure

$$+1 \leqq \mathcal{R}(x) < +\infty, \qquad \mathcal{I}(x) = 0;$$

considérons une courbe joignant deux points congrus de P_0 et P_1 en traversant cette face. L'image de cette courbe dans $\mathcal{E}_4$ est une courbe fermée traversant une fois la coupure considérée et ne traversant que celle-là; elle ne peut donc pas se réduire à un point sans traverser la multiplicité singulière $x = 1$.

Remarquons en terminant que le résultat fondamental de l'invariance de x et y pour les substitutions de S pourrait se vérifier ici indépendamment des méthodes générales de M. Picard; soient, en effet, $\tau'_{\alpha\beta}$ des modules construits par les formules (16) avec deux quantités ξ', η', comme les $\tau_{\alpha\beta}$ le sont avec ξ, η; en supposant ξ', η' liés à ξ, η par une des cinq substitutions fondamentales, on obtiendrait les $\tau'_{\alpha\beta}$ exprimés en fonction des $\tau_{\alpha\beta}$; ceci fait il suffirait d'appliquer les formules générales de transformation des fonctions thêta à (33) pour constater que x et y demeurent invariants.

Remarquons enfin que pour ramener le domaine Δ à être l'intérieur d'une hypersphère, comme on le fait habituellement dans l'étude des groupes hyperfuchsiens (dont S est l'exemple le plus simple), il suffit de remplacer ξ et η par les deux nouvelles variables ξ_0, η_0,

$$\xi_0 = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \qquad \eta_0 = \sqrt{2}\,\frac{\eta}{1-\xi},$$

car la condition (5) se transforme en

$$|\xi_0|^2 + |\eta_0|^2 < 1.$$

Mais nous ne ferons pas ce changement qui n'apporte ici aucune simplification essentielle.

9. Les formules (27) à (30) conduisent naturellement à considérer les quatre fonctions des trois variables v_α :

$$\mathrm{R}_1(v_\alpha) = \frac{\mathfrak{I}_{1.0.2}(0)\,\mathfrak{I}_{1.1.0}(0)}{\mathfrak{I}^2_{0,1,1}(0)}\,\frac{\mathfrak{I}_{1.2.1}(v_\alpha)}{\mathfrak{I}_{0.0.0}(v_\alpha)},$$

$$\mathrm{R}_2(v_\alpha) = \frac{\mathfrak{I}_{1.0.2}(0)\,\mathfrak{I}_{2.1.0}(0)\,\mathfrak{I}_{0.1.2}(0)}{\mathfrak{I}^3_{0,1,1}(0)}\,\frac{\mathfrak{I}_{1.1.1}(v_\alpha)}{\mathfrak{I}_{0.0.0}(v_\alpha)},$$

$$\mathrm{R}_3(v_\alpha) = \frac{\mathfrak{I}_{1.1.0}(0)\,\mathfrak{I}_{2.1.0}(0)\,\mathfrak{I}_{0.1.0}(0)}{\mathfrak{I}^3_{0,1,1}(0)}\,\frac{\mathfrak{I}_{1.0.0}(v_\alpha)}{\mathfrak{I}_{0.0.0}(v_\alpha)},$$

$$\mathrm{R}_4(v_\alpha) = \frac{\mathfrak{I}_{0.1.2}(0)\,\mathfrak{I}_{0.1.0}(0)}{\mathfrak{I}^2_{0,1,1}(0)}\,\frac{\mathfrak{I}_{0.0.1}(v_\alpha)}{\mathfrak{I}_{0.0.0}(v_\alpha)}.$$

Tant que (ξ, η) *est intérieur à* Δ, *les quatre fonctions* $\mathrm{R}(v_\alpha)$ *sont des fonctions méromorphes sextuplement périodiques des* v_α, *leurs périodes étant définies par le tableau* (14); *ce sont en outre des fonctions uniformes et régulières de* ξ, η *(dont elles dépendent par les* $\tau_{\alpha\beta}$*) dans tout le domaine* Δ.

Si dans les formules (27) à (30) nous donnons aux e_α leurs valeurs actuelles (32) nous en tirons les formules d'inversion

$$(35)\qquad \begin{cases} t = \mathrm{R}_1[3u_\alpha(t, s)], & t-1 = \mathrm{R}_4[3u_\alpha(t, s)], \\ t-x = \mathrm{R}_2[3u_\alpha(t, s)], & t-y = \mathrm{R}_3[3u_\alpha(t, s)]. \end{cases}$$

10. Nous possédons maintenant tous les éléments de la solution du problème; il suffit de revenir à l'intégrale (4)

$$(36)\qquad \mathrm{J} = \int_1^{+\infty} t^{\beta+\beta'-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}(t-y)^{-\beta'}\,dt.$$

Considérons (v_1, v_2, v_3) comme un point de l'espace à six dimensions E_6; les équations

$$v_1 = 3u_1(t, s), \qquad v_2 = 3u_2(t, s), \qquad v_3 = 3u_3(t, s)$$

font correspondre au segment rectiligne $(1, +\infty)$ de la surface R' une courbe C de l'espace E_6 qui, d'après le tableau de la page 387, a comme origine et extrémité respectivement les points $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 0)$.

Joignant aux formules (35) l'équation

$$dt = A_{11}\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}\,[du_1 - j\,du_2 + \eta\,du_3],$$

qui s'obtient en différentiant la première équation (15) et en remarquant que

$$dv_1 = \frac{dt}{s} = \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}},$$

nous pouvons considérer J comme une intégrale curviligne prise le long de la courbe C

$$J = \frac{1}{3}A_{11}\int_C \Phi(v_1, v_2, v_3)\,(dv_1 - j\,dv_2 + \eta\,dv_3), \tag{37}$$

$$\Phi = [R_1(v_\alpha)]^{\alpha+\beta'-\gamma+\frac{1}{3}}[R_4(v_\alpha)]^{\gamma-\alpha-\frac{2}{3}}[R_2(v_\alpha)]^{\frac{1}{3}-\beta}[R_3(v_\alpha)]^{\frac{1}{3}-\beta'}.$$

Cette nouvelle forme de J est absolument équivalente à (36); l'intégrale curviligne est une fonction de ξ, η non seulement par l'intermédiaire de Φ, mais encore par la courbe d'intégration.

Le pas essentiel de la démonstration consiste à remplacer la courbe mobile C *par une courbe fixe; nous choisirons la plus simple : le segment de droite* D *joignant les deux points* $(1, 1, 0)$ *et* $(0, 0, 0)$

$$J = \frac{1}{3}A_{11}\int_D \Phi(v_1, v_2, v_3)\,(dv_1 - j\,dv_2 + \eta\,dv_3). \tag{38}$$

Reste à justifier la légitimité du passage de C à D. L'intégrale curviligne est la somme de trois intégrales de la forme

$$\int (P + iQ)(dv'_\alpha + i\,dv''_\alpha),$$

en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire. En tout point où $P + iQ$ est une fonction analytique des v_α, on a les équations classiques

$$\frac{\partial P}{\partial v''_\alpha} = -\frac{\partial Q}{\partial v'_\alpha}, \qquad \frac{\partial P}{\partial v'_\alpha} = \frac{\partial Q}{\partial v''_\alpha};$$

on a donc le droit de déformer la courbe d'intégration tant qu'on reste dans une multiplicité, à deux dimensions au moins, sur laquelle on sait que la fonction est analytique. Or, pour l'intégrale (38), les points singuliers de la fonction Φ sont les zéros et les pôles des quatre fonctions méromorphes $R(v_\alpha)$; ces zéros et ces pôles forment dans E_6 cinq multiplicités à quatre dimensions seulement

$$\mathfrak{S}_{0.0.0}(v_\alpha) = 0, \qquad \mathfrak{S}_{1.2.1}(v_\alpha) = 0, \qquad \mathfrak{S}_{1.1.1}(v_\alpha) = 0,$$
$$\mathfrak{S}_{1.0.0}(v_\alpha) = 0, \qquad \mathfrak{S}_{0.0.1}(v_\alpha) = 0;$$

il existe donc bien au moins une multiplicité à deux dimensions, contenant C et D et sur laquelle Φ reste régulière.

Ce point étant acquis, sur D on peut poser

$$v_1 = v_2 = v, \qquad v_3 = 0,$$

v désignant une variable réelle variant de 0 à 1. Nous obtenons donc l'expression finale

$$J = \frac{i-1}{3} A_{11} \int_0^1 \Phi(v, v, 0)\, dv. \tag{39}$$

Dans l'intégrale J sous sa forme primitive (36), (x, y) est astreint à ne pas franchir les deux premières des coupures (3); de telle sorte que, comme on l'a fait remarquer page 382, elle est susceptible de représenter seulement la branche principale $[\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha):\Gamma(\gamma)]\mathcal{F}_1$, prolongement direct de la série hypergéométrique, effectué sans franchir les deux coupures en question.

L'intégrale curviligne (37) est identique à l'intégrale définie (36), sauf qu'on y suppose x et y exprimés en fonction de (ξ, η); à cause de la restriction imposée au point (x, y) cette expression analytique en (ξ, η) n'a donc de sens que si (ξ, η) est dans un certain polyèdre, qu'on peut toujours supposer, pour fixer les idées, être le polyèdre fondamental P_0.

Le passage de la courbe C à la droite D a eu pour effet de transformer l'intégrale curviligne en une nouvelle expression analytique en (ξ, η), égale à la première quand celle-ci est définie, mais conservant son sens dans tout le domaine Δ, où elle définit une fonction régulière et uniforme de ξ, η. C'est ce qui est clair quand on examine l'intégrale définie (39), identique à l'écriture près à l'intégrale curviligne (38). En effet, d'une part (31) donne avec les valeurs actuelles des e_α

$$A_{11} = k\mathfrak{F}_{0,1,1}(0),$$

ce qui est évidemment une fonction régulière et uniforme de (ξ, η) dans tout Δ. D'autre part chacun des quatre facteurs dont le produit, d'après (37), compose la fonction Φ, est également une fonction régulière et uniforme de (ξ, η) dans Δ quand v varie de 0 à 1.

Le problème de l'uniformisation de la fonction $\mathfrak{F}_1$ est donc résolu et nous possédons une expression analytique explicite de la fonction uniformisée; si l'on exprime x et y par les deux fonctions modulaires de M. Picard

$$x = \frac{\mathfrak{F}^3_{1,0,2}(0)}{\mathfrak{F}^3_{0,1,1}(0)}, \qquad y = \frac{\mathfrak{F}^3_{1,1,0}(0)}{\mathfrak{F}^3_{0,1,1}(0)},$$

fonctions uniformes et régulières de ξ, η dans le domaine Δ,

$$|\eta|^2 + 2\mathcal{R}(\xi) < 0,$$

la fonction hypergéométrique $\mathfrak{F}_1$ devient une fonction uniforme et régulière de ξ, η dans tout ce domaine Δ, où elle est représentée par l'expression analytique unique

$$(40) \qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \mathfrak{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = k\frac{j-1}{3}\Psi(\xi, \eta)\int_0^1 \Theta(v, \xi, \eta)\,dv,$$

où

$$\Psi = \mathfrak{F}^{\lambda_1}_{0,1,1}(0)\,\mathfrak{F}^{\lambda_2}_{1,0,2}(0)\,\mathfrak{F}^{\lambda_3}_{1,1,0}(0)\,\mathfrak{F}^{\lambda_4}_{2,1,0}(0)\,\mathfrak{F}^{\lambda_5}_{0,1,2}(0)\,\mathfrak{F}^{\lambda_6}_{0,1,0}(0);$$

$$\Theta = \mathfrak{F}^{\mu_1}_{0,0,0}(v, v, 0)\,\mathfrak{F}^{\mu_2}_{1,2,1}(v, v, 0)\,\mathfrak{F}^{\mu_3}_{1,1,1}(v, v, 0)\,\mathfrak{F}^{\mu_4}_{1,0,0}(v, v, 0)\,\mathfrak{F}^{\mu_5}_{0,0,1}(v, v, 0);$$

$$\lambda_1 = 2\alpha + \beta + \beta' - \frac{1}{3}, \qquad \lambda_2 = \beta' - \gamma + \frac{2}{3}, \qquad \lambda_3 = \beta - \gamma + \frac{2}{3},$$

$$\lambda_4 = \frac{2}{3} - \beta - \beta', \qquad \lambda_5 = \gamma - \alpha - \beta - \frac{1}{3}, \qquad \lambda_6 = \gamma - \alpha - \beta' - \frac{1}{3},$$

$$\mu_1 = \alpha - \frac{1}{3}, \qquad \mu_2 = \beta + \beta' - \gamma + \frac{1}{3}, \qquad \mu_3 = \frac{1}{3} - \beta,$$

$$\mu_4 = \frac{1}{3} - \beta', \qquad \mu_5 = \gamma - \alpha - \frac{2}{3}.$$

Quand (ξ, η) *reste à l'intérieur d'un des polyèdres* P *du groupe* S *le second membre de* (40) *représente une branche bien déterminée de la fonction* $\mathcal{F}_1$, *l'échange des branches s'opérant quand* (ξ, η) *passe d'un polyèdre à un polyèdre contigu en traversant une des faces.*

11. La fonction hypergéométrique de Gauss $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, définie par le prolongement analytique de la série hypergéométrique

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} x^m,$$

n'admettant que les trois points singuliers $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, il était clair qu'elle devait devenir une fonction uniforme de τ dans le demi-plan $\mathcal{J}(\tau) > 0$, en exprimant x par la fonction modulaire

$$x = \frac{\mathfrak{S}_2^4(0 \mid \tau)}{\mathfrak{S}_3^4(0 \mid \tau)}.$$

C'est à M. W. Wirtinger [1] que l'on doit une expression analytique remarquable de $\mathcal{F}$ en fonction de τ sous la forme d'une intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{S}_1^{2\beta-1}(\nu \mid \tau)\, \mathfrak{S}_2^{2(\gamma-\beta)-1}(\nu \mid \tau)\, \mathfrak{S}_3^{1-2\alpha}(\nu \mid \tau)\, \mathfrak{S}_4^{1-2(\gamma-\alpha)}(\nu \mid \tau)\, d\nu.$$

L'expression (40) peut être considérée comme la généralisation complète de celle-là; un premier point est à remarquer dans ce rapprochement; les fonctions thêta elliptiques sont attachées à la relation de genre un

$$s^2 = t(t-1)(t-x);$$

il est intéressant de noter que pour uniformiser la fonction de deux variables il ait fallu immédiatement passer à la relation (7) qui est de genre 3.

---

(1) W. WIRTINGER, *Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale* (*Sitz berichte Akad. Wiss. Wien.* (Abt. II*a*, t. 111, 1902, p. 894). — La possibilité d'uniformiser la fonction hypergéométrique au moyen de la fonction modulaire avait été explicitement énoncée par H. Poincaré (*Œuvres*, t. II, 1881, p. 7).

Une deuxième remarque c'est que les formules de transformation classiques des fonctions thêta elliptiques ont permis à M. K. Petr [1], F. Graf [2], A. Čermak [3] de tirer de l'intégrale de M. Wirtinger, par une voie très élégante, les formules de transformation rationnelles ou algébriques de la fonction de Gauss, d'ailleurs déjà bien connues par ailleurs.

Or l'étude des formules de transformation des fonctions de M. Appell n'a jamais été tentée à ma connaissance; on peut espérer que la formule (40) permettrait, moyennant la recherche préliminaire des formules de transformation des fonctions $\vartheta_{\lambda,\mu,\nu}(v_\alpha)$, d'aborder ce problème d'une manière fructueuse.

---

(1) K. Petr, *Časopis Mat. Fys.*, t. 38, 1909, p. 294.

(2) F. Graf, *Ibid.*, t. 36, 1907, p. 354, et t. 37, 1908, p. 8.

(3) A. Cermak, *Ibid.*, t. 36, 1906, p. 441.